



**ACTAS**

**7<sup>as</sup> JAEM**

JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

*Madrid 14, 15, 16 Septiembre 1995*

A70, D10, E20, A40, D20, E40  
D30, F20

Ref. 2016

# VII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas

---

Actas

S. A. E. M.  
THALES

Edita: Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma*  
*Castelnuovo*

ISBN: 84-88004-16-8  
Impreso en España

# INDICE

## CONFERENCIA INAUGURAL

|                                                                                                |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Las representaciones Gráficas en Matemáticas: un estudio histórico-crítico<br>Emma Castelnuovo | 7 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---|

## CONFERENCIA DE CLAUSURA

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| Educación matemática hacia el año 2000<br>Abraham Arcavi | 14 |
|----------------------------------------------------------|----|

## Grupos Temáticos

### 1. MATEMÁTICAS DE AHORA Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

|                                                                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Teoría del Caos y Renovación Matemática<br>Manuel Morán Cabre                                                                                                                           | 23 |
| Mesa Redonda: Innovación en Matemáticas y Enseñanza de las Matemáticas<br>Coordina: Tomás Recio. Participantes: José Manuel Aroca, Carmen Corrales, Santos González y Juan Luis Vázquez | 26 |

### 2. CONCEPCIONES EPISTEMOLÓGICAS DE LAS MATEMÁTICAS Y DE SU ENSEÑANZA

|                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Modas y creencias en epistemología matemática. Su relevancia para la didáctica<br>Camino Cañón                                            | 27 |
| Problemas de Matemáticas? ¿Para qué? Una contribución al estudio de las creencias de los profesores/as y alumnos/as.<br>Antoni Vila Corts | 32 |

### 3. HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS: ¿QUÉ ENSEÑAR Y QUÉ NOS ENSEÑA?

|                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Raíces Culturales de los números negativos y el cero<br>Emmanuel Lizcano                                                           | 38 |
| Una restauración del álgebra árabe.<br>Luis Puig                                                                                   | 42 |
| La Historia de la Matemática en la Enseñanza Secundaria: La Matemática, vertebradora de la cultura.<br>José Luis Montesinos Sirera | 49 |
| Los tres problemas clásicos<br>Santiago Fernández                                                                                  | 54 |
| La etapa empírica del cálculo<br>Pedro M. González Urbaneja                                                                        | 58 |
| Un paseo por el último Teorema de Fermat<br>Xavier Valls Aubert                                                                    | 65 |

### 4. LENGUAJE Y MATEMÁTICAS

|                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Investigación didáctica en lenguaje y Matemáticas. Temas y objetivos<br>Joaquim Giménez             | 71 |
| El sentido de los símbolos: Generación de intuiciones en la Matemática formal<br>Abraham Arcavi     | 77 |
| Procesos Lingüísticos Básicos de Comprensión y Producción de Textos Matemáticos.<br>Inés Sanz Lerma | 84 |

### 5. MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA

|                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Geometría: de Catálogo a Proyecto: ¿Hay alguien que tenga algún problema?<br>David Barba (El Quinzet)              | 88 |
| La Educación Matemática en la Etapa Infantil<br>María Antonia Canals                                               | 95 |
| Cálculo Mental, Escrito y con Calculadoras. ¿Cómo vamos a calcular para el año 2000?<br>Juan Emilio García Jiménez | 98 |

### 6. LAS MATEMÁTICAS EN LOS NUEVOS BACHILLERATOS

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| La Circunferencia y otras Curvas Especiales<br>Magdalena Morata y Juan Carlos Otero | 105 |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|



|                                                                                                                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| La Inferencia Estadística en los bachilleratos<br>Onofre Monzó del Olmo y Tomás Queralt Llopis .....                                                                                              | 114 |
| Mesa Redonda: La Encrucijada del Bachillerato<br>Javier Brihuega, Serapio García, Luciano González, José Antonio Mora y Mariano Soler .....                                                       | 120 |
| <b>7. TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD EN EL AULA DE MATEMÁTICAS</b>                                                                                                                                  |     |
| La Diversidad: ¿Problema irresoluble?<br>Amaia Barrasate .....                                                                                                                                    | 129 |
| La coeducación en el aula de Matemáticas, como propuesta de tratamiento de la diversidad<br>Rosario Nomdedeu Moreno .....                                                                         | 134 |
| Mesa Redonda: El Tratamiento de la Diversidad en Matemáticas<br>Modera: Fidela Velázquez. Participantes: Amaia Basarrate, Javier Brihuega, Marina Lovelace y Charo Nomdedeu .....                 | 143 |
| <b>9. INFLUENCIA DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS EN EL CURRÍCULO Y EN LA INTERVENCIÓN EDUCATIVA</b>                                                                                                     |     |
| Inconvenientes de la utilización del Ordenador en el Aula<br>Antonio González Rebés .....                                                                                                         | 147 |
| El Impacto de las Calculadoras Gráficas en la enseñanza de Aplicaciones Matriciales a nivel Preuniversitario.<br>Antonio R. Quesada .....                                                         | 151 |
| Mesa Redonda: Las Matemáticas y las Tecnologías de la Información<br>Coordina: Rafael Martínez. Participantes: Máximo Bolea, Miguel Delgado Pineda, Antonio González Rebés, Antonio Quesada ..... | 156 |
| <b>10. MATEMÁTICAS LÚDICAS EN LA ESCUELA</b>                                                                                                                                                      |     |
| Los pequeños Juegos de Estrategia en la enseñanza de las Matemáticas. ¿Porqué?, ¿para qué?<br>Jordi Deulofeu Piquet .....                                                                         | 161 |
| Metodología para el uso del Juego en la Escuela.<br>Manuel García Déniz .....                                                                                                                     | 165 |
| Juegos Probabilísticos en Primaria<br>Pascual Pérez Cuenca .....                                                                                                                                  | 168 |
| <b>11. INNOVACIÓN, FORMACIÓN E INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS</b>                                                                                                                  |     |
| Innovación y Educación Matemática<br>M <sup>a</sup> Victoria García Armendáriz .....                                                                                                              | 172 |
| ¿Es importante mejorar la Gestión de la Clase?<br>Marta Berini .....                                                                                                                              | 175 |
| Formación, Innovación e Investigación<br>Juan Emilio García Jiménez .....                                                                                                                         | 177 |
| Formación de Investigadores en Educación Matemática<br>Luis Rico Romero .....                                                                                                                     | 180 |
| Objetivos, cambios y conflictos de la Investigación en Educación Matemática<br>Modesto Sierra Vázquez .....                                                                                       | 183 |
| <b>12. ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS ÚLTIMOS 15 AÑOS DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA EN ESPAÑA</b>                                                                                                              |     |
| Análisis de la Innovación Didáctica en Matemáticas<br>Florencio Villarroya .....                                                                                                                  | 186 |
| De Enseñar Matemáticas a Aprender...<br>Juan Antonio García Cruz .....                                                                                                                            | 188 |
| Evolución de las/os Alumnas/os y su relación tanto con el Saber Matemático como con los Profes.<br>Luis Pérez Bernal .....                                                                        | 193 |
| Mesa Redonda: De 7 en 7.<br>Coordina: Florencio Villarroya. Participantes: Marta Berini, Inmaculada Fuentes, Juan Antonio García Cruz y Luis Pérez Bernal .....                                   | 195 |
| <b>SESIONES ESPECIALES:</b>                                                                                                                                                                       |     |
| Técnicas modernas para el Análisis de Datos Estadísticos<br>José Ramón Vizmanos .....                                                                                                             | 199 |
| ¿Cómo implicar al alumnado en su Proceso de Aprendizaje?<br>Marta Berini .....                                                                                                                    | 205 |
| Utilización de un Programa Informático para Enseñar Geometría<br>Bernard Capponi .....                                                                                                            | 211 |

## Conferencia Inaugural

### LAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO HISTÓRICO-CRÍTICO

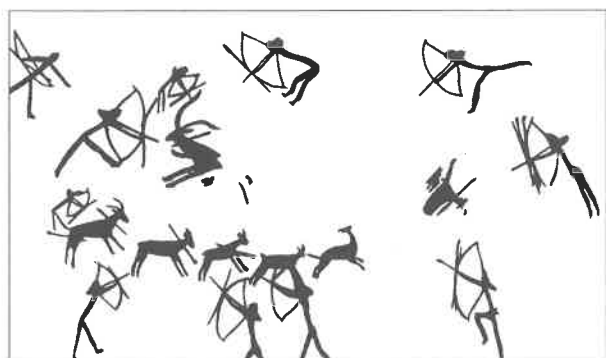
**Emma Castelnuevo**  
Italia

**L**a historia de las representaciones gráficas en matemáticas es, al mismo tiempo, antigua y reciente.

Antigua, porque se inicia en épocas prehistóricas y se desarrolla a lo largo de los siglos con altos y bajos, hasta adquirir hoy en día una importancia más allá de las matemáticas y de la ciencia en general. En efecto, hoy la imagen visual tiene sobre nuestras acciones y sobre las decisiones de la sociedad una influencia sin duda superior al texto escrito.

Por otro lado, la historia de los gráficos es relativamente reciente, si al término "representación gráfica" se le da el sentido hoy más común: **un dibujo que refleje la variación de un fenómeno concreto o abstracto**. A este significado quiero referirme, independientemente de su estudio teórico desde el punto de vista de la geometría analítica.

La representación gráfica, en su significado más amplio, nos lleva al dibujo, al arte. Es precisamente por el arte por donde quiero empezar. Vamos a reflexionar sobre estas expresiones artísticas. Esta representación de caza (fig. 1), pintada en la cueva de la Araña (Valencia) llama la atención por su estilo claramente expresionista. Hay, en esta pintura del Paleolítico, un sentido matemático que se manifiesta en las proporciones entre hombres, animales, arcos y flechas, todo en un ambiente verdaderamente dinámico.



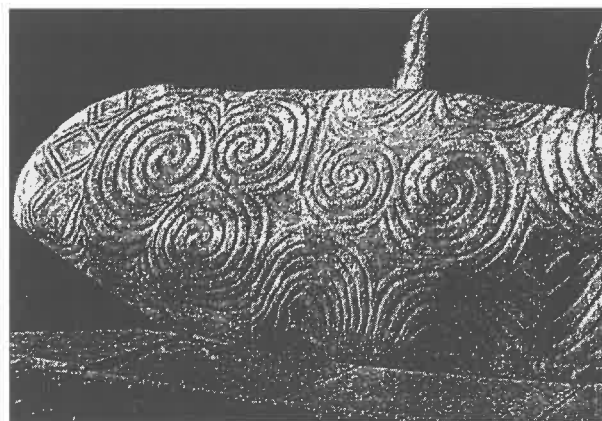
Cueva de la Araña. Valencia. (Fig. 1)

Una jirafa grabada en horizontal, en la cumbre de una colina rocosa en el desierto del Níger: se encuentra a 130 Km. al norte de Agadés. No pude tomar una foto de este grabado con mi cámara por las dimensiones enormes del animal. Dadas estas dimensiones, se puede afirmar que el grabado ha sido realizado "de memoria". Lo que impresiona es el sentido de las proporciones en un dibujo que no se podía ver en su conjunto, ya que no existían otras colinas en los alrededores.

Este grabado pertenece al Neolítico-Africano.

Y ahora regresamos a Europa. Cuando del Paleolítico se pasa al Neolítico se advierte que el campesino ya no necesita del sentido agudo de observación que tenía el cazador. Está motivado a expresarse de un modo abstracto: con un dibujo representa un pensamiento, una idea.

Las famosas espirales, típicas del Neolítico en Irlanda (fig. 2), significan quizás un volver sobre sí mismo, quizás la eternidad.

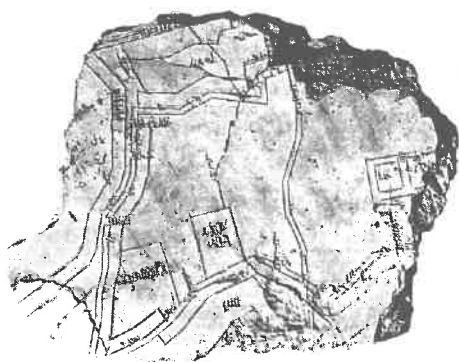


Espirales del Neolítico en Irlanda. (Fig. 2)

En esta espiral, la exactitud del dibujo atestigua sin duda unos conocimientos matemáticos.

De 3000 años antes de Cristo, a los cuales se remonta esta espiral, pasamos a civilizaciones más recientes.

Este es el plano de la ciudad de Nippur (fig. 3), un famoso centro religioso y cultural de la antigua Babilonia. Este plano está grabado en una tabla de arcilla, y se remonta al 1500 a.C. Después de excavaciones sucesivas se descubrió que el plano corresponde exactamente a la antigua ciudad. Por lo tanto se trata de un dibujo que revela firmes conocimientos matemáticos.



Plano de la ciudad de Nippur. (Fig. 3)

He ilustrado hasta ahora unos dibujos que están ligados, sin duda, a las matemáticas, pero que están lejos del sentido de gráficos que representan un fenómeno variable.

Quiero ahora entrar verdaderamente en el campo matemático.

Esta pintura (fig. 4) marca el inicio de la representación gráfica en el plano cartesiano. Se trata de una pintura realizada en el techo de la tumba del Faraón Ramses VII (1100 a.C.).



Representación gráfica en el plano cartesiano. (Fig. 4)

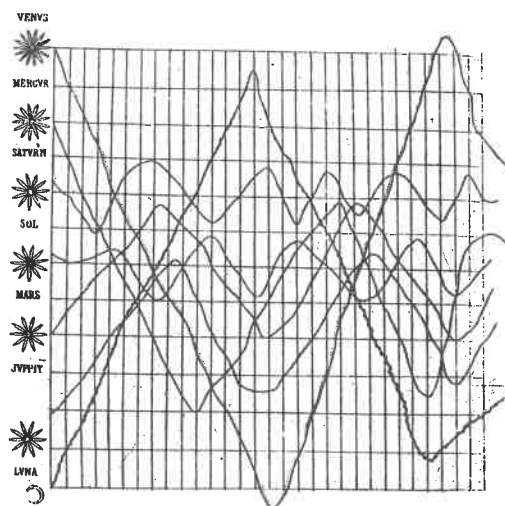
Hay un cielo de estrellas sobre un plano cuadrículado, seguramente con el propósito de que el Faraón, incluso muerto, pueda gozar de este espectáculo maravilloso.

Cada estrella tiene, en el plano cuadrículado, una posición determinada según la hora de observación. Se puede considerar esta pintura como el inicio de la representación en el plano coordenado.

Pero sólo se trata de puntos luminosos: es un cielo estrellado. Se nos pregunta: ¿cómo podían tener la idea de trazar recorridos que no se ven? Pero algunas veces se ven: las estrellas fugaces siempre ejercitaron un encanto sobre la humanidad. No tenemos ningún dibujo de estrellas fugaces, mientras muchos son los escritores, los poetas, los astrónomos que hacen referencia a ellas en sus escritos.

Veamos como Marco Manilio, un astrónomo romano del siglo I a.C., describe las estrellas fugaces. Dice: "La noche, en el cielo sereno, cuando las estrellas centellean por doquier, se pueden ver unas luces caer o vagar en el espacio. Dejan, detrás de ellas, una larga tira de fuego que se afila en un hilo sutil". Sin duda esta descripción podía sugerir una imagen gráfica, pero, como he dicho, no tenemos ningún dibujo de este fenómeno.

Son, al contrario, recorridos mucho más abstractos los que están dibujados en un pergamino del siglo X o XI d.C. (fig. 5): se trata de un pergamino descubierto en 1877 y que se encuentra en la Biblioteca Real de Mónaco. En él están indicadas las trayectorias de los planetas en un reticulado espacio-temporal. Se trata del primer gráfico donde no están indicados solamente unos puntos sino también unos recorridos: las órbitas planetarias en función del tiempo. Parece que este gráfico, sin duda dibujado con un poco de imaginación, ha sido realizado para ayudar a los alumnos de las escuelas monásticas.



Trayectorias de los planetas en un reticulado espacio-temporal. (Fig. 5)

En el mismo siglo, el XI, se encuentra una representación gráfica que se refiere a otro fenómeno variable: es la notación musical. En este caso la representación está ligada a la mano y a la sensibilidad del músico. Fue Guido d'Arezzo quien tuvo la idea de trazar rectas paralelas (que formarán el pentagrama), sobre las cuales se apoyan las notas. La altura de una nota corresponde a un valor de la ordenada, mientras los tiempos no corresponden a puntos de un eje perpendicular, sino que son las formas de las notas las que indican la duración del tiempo.

Para encontrar una representación gráfica más próxima a la cartesiana hay que esperar todavía tres siglos, y llegar al año 1360. Debemos a un religioso, el obispo francés Nicolás de Oresme, la idea de desplazar la atención de los fenómenos concernientes a movimientos en el cielo a movimientos realizados con un experimento. Entre los muchos trabajos de Nicolás de Oresme, uno, en particular, indica el nuevo papel que debía tener la representación gráfica en el campo de la física-matemática.

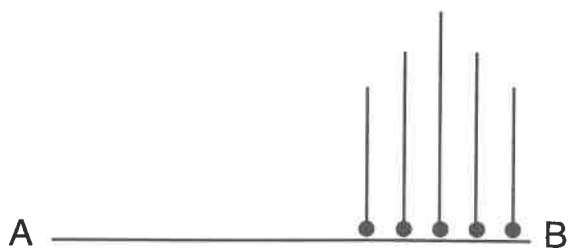
Oresme estudia tanto el movimiento de los cuerpos que se desplazan con velocidad constante (movimiento uniforme) como el de los cuerpos que tienen una velocidad que varía en modo constante (movimiento uniformemente acelerado).

Procede así: sobre un segmento AB, donde B es el **origen**, representa el tiempo; a cada tiempo le corresponde un punto: la distancia del punto al origen es **la longitud** (fig. 6).



(Fig. 6)

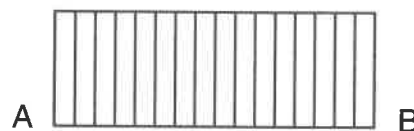
Las velocidades están representadas con segmentos perpendiculares a AB; la longitud de cada segmento se debe imaginar (Oresme dice: "imaginanda est") como la intensidad de la velocidad. Utiliza la palabra **latitud** para indicar la longitud de los segmentos (fig. 7).



(Fig. 7)

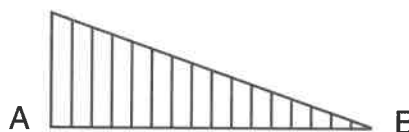
He aquí sus dibujos, (figs. 8a, 8b y 8c) que ponen en correspondencia la física y la geometría.

— Si la velocidad es constante: un rectángulo



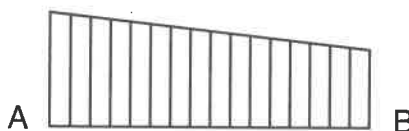
(Fig. 8a)

— Si la velocidad cambia uniformemente partiendo de cero: un triángulo rectángulo



(Fig. 8b)

— Si la velocidad cambia uniformemente pero no parte de cero: un trapecio rectángulo

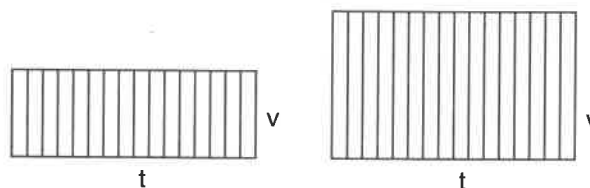


(Fig. 8c)

Oresme sugiere unir los puntos extremos de las velocidades teniendo así una línea. Esta "línea summitatis" es, en términos modernos, **el gráfico de la función**.

Y, después, haciendo referencia al movimiento uniforme, dice que una velocidad es mayor que otra si en el mismo tiempo el cuerpo recorre un espacio más grande; por lo tanto el área del rectángulo es mayor. Es así como esta idea de Oresme le lleva a afirmar que el espacio recorrido  $s$  está representado por el área del rectángulo que tienen base  $t$  y altura  $v$  (fig. 9).

$$s = vt$$



(Fig. 9)

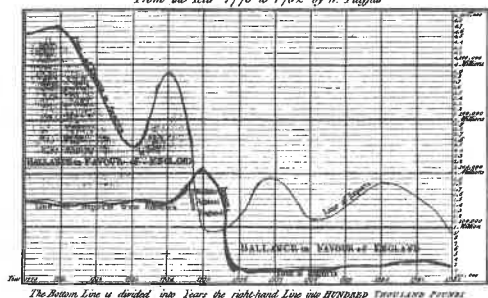
Vemos así como el movimiento se refleja en la geometría de las figuras.

Un medio tan sencillo y útil como los histogramas ha sido inventado por un no-matemático y, además, por un tipo que no tenía ningún escrúpulo académico.

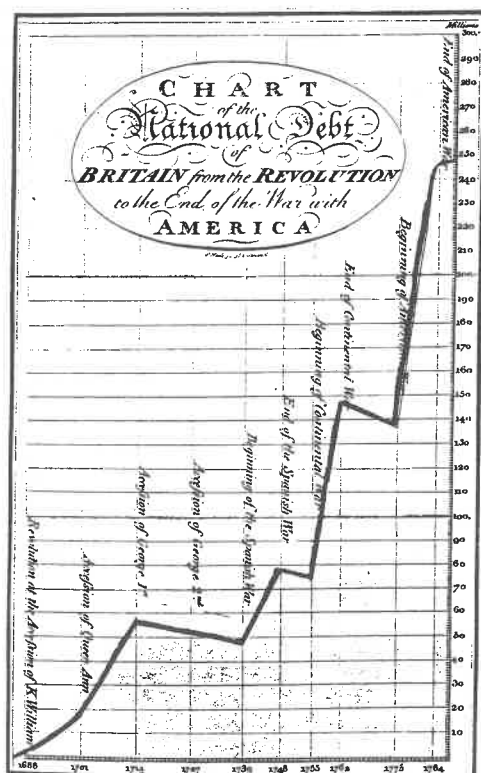
A William Playfair se deben también otras representaciones gráficas, como diagramas con áreas, histogramas, gráficos de sectores y gráficos de líneas.

Aquí vemos (figs. 11,12,13) unos gráficos realizados en años sucesivos y concernientes todos a economía y finanzas, cuestiones en las cuales Playfair estaba particularmente interesado.

CHART of IMPORTS and EXPORTS of ENGLAND to and from all NORTH AMERICA  
From the Year 1770 to 1782 by W. Playfair

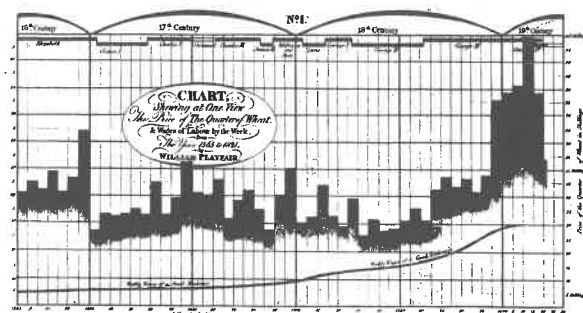


(Fig. 11)



The Divisions at the Bottom are Years, & those on the Right hand Money.

(Fig. 12)



(Fig. 13)

El primero, de 1785, representa importaciones y exportaciones entre Inglaterra y Norte América en el período 1770-1782; pone de relieve la balanza comercial entre los dos países.

En el segundo, de 1786, Playfair quiere destacar cómo la deuda nacional crece de un modo excepcional en períodos de guerra.

El tercero, de 1821, pone en correspondencia, con una representación muy viva, el precio del trigo con los salarios de los trabajadores.

Por lo tanto Playfair, con sus gráficos matemáticos, aunque también "artísticos", se propone interesar a todos, pero sus temas están todavía lejos del hombre de la calle.

La actividad matemática de W. Playfair ha sido descubierta muy recientemente; su nombre no se encuentra ni siquiera en las grandes enciclopedias.

Y ahora, todavía una vez más, vamos a reflexionar sobre la situación. Estamos al final del siglo XVIII. Con sus representaciones geométricas, William Playfair había introducido un medio visual muy fuerte para ilustrar cuestiones de economía y de finanzas. Pero la gente, como he dicho, siempre se ha interesado sobre todo por su salud. Y en la época de Playfair no se encuentran gráficos de este tipo. Mientras, ya un siglo antes, en 1662, se había publicado en Inglaterra un libro de estadística titulado "Observaciones naturales y políticas sobre la mortalidad en Londres". El autor es John Graunt, un comerciante de tejidos de Londres. Se encuentran en este libro tablas y tablas numéricas con diferentes causas de muerte (peste, escorbuto, suicidio,... más de cien causas de muerte). Números y números pero no gráficos.

Hay que esperar muchos años para encontrar datos numéricos relativos a la muerte "vivificados" en un dibujo.

Aquí (fig. 14) vemos un gráfico, realizado en 1827, concerniente a la razón entre la población y el número de muertos en las diferentes provincias de los Países Bajos. El autor es Adolphe Quételet, un astrónomo y antropólogo belga.

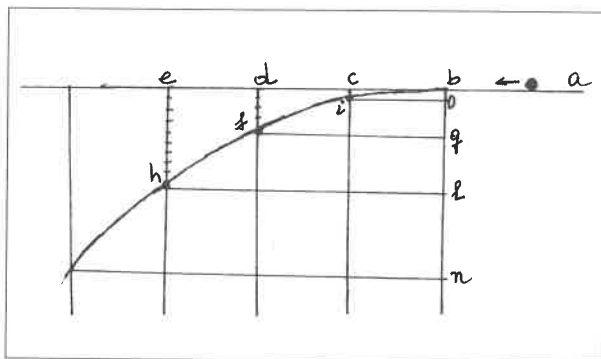


Volvemos ahora a lo que es más interesante para nosotros: las primeras ideas sobre el plano cartesiano.

Oresme dice que a cada punto de la línea *summitatis* corresponden dos números, la longitud y la latitud, es decir, un tiempo y una velocidad. Pero el cuadro gráfico parece limitado porque no hay dos ejes de referencia: hay solamente un segmento *AB* y las pequeñas barras construidas sobre esta base.

Todavía tres siglos tienen que pasar para tener, con Descartes, Fermat y Galileo, una clara utilización del plano coordenado. Galileo está interesado en los mismos problemas que Oresme, pero su plano de referencia es ilimitado, con dos ejes. Quiero seguir su construcción de un gráfico que representa un cuerpo que cae, mencionando también su texto.

Galileo considera un cuerpo, una pelota, que se mueve con movimiento uniforme a lo largo de un plano horizontal *ab* (fig. 10). Si el plano se interrumpe en *b*, el cuerpo no cae a lo largo de la vertical *bn* porque —dice Galileo— su movimiento es “indestructible”, conservando la dirección horizontal. Por lo tanto se debe hacer la composición de los dos desplazamientos, horizontal y vertical.



(Fig. 10)

Galileo, para dibujar la trayectoria, toma sobre la línea *be*, prolongación de *ab*, unos segmentos iguales *bc*, *cd*, *de*, ... y traza, a partir de los puntos *c*, *d*, *e*, ... la paralela a la vertical *bn*. Sobre estas verticales opera así: fija un segmento cualquiera *ci*, y toma

$$df=4ci, eh=9ci, \dots$$

Por lo tanto toma “*spatia eh, df, ci, ... inter se ut quadrato linearum eb, db, cb, ...*”.

Es decir, estos segmentos están tomados según la ley de los cuadrados en un movimiento uniformemente acelerado.

La trayectoria resulta una parábola por la propiedad de esta curva.

Es cierto que la oportuna elección de los dos ejes hace más fácil la comprensión: en efecto, el gráfico corresponde a la trayectoria de la pelota.

Y ahora, antes de continuar con nuestra “historia”, vamos a reflexionar sobre el camino seguido.

Después de un gráfico con los recorridos de los planetas, recorridos que no se ven, y después unas consideraciones sobre la primera notación musical, que tiene algo de matemática, hemos considerado los gráficos de Nicolás de Oresme relativos a algunos experimentos sobre el movimiento de los cuerpos. Estos experimentos, como están realizados por el hombre, constituyen algo concreto. Pero también esta representación es bastante abstracta porque es difícil —como dice Oresme— tomar las velocidades como segmentos.

Después hemos considerado el gráfico de Galileo relativo a la caída de los cuerpos. Este gráfico, dado que corresponde a una trayectoria visual, es realmente algo concreto. Pero —se nos pregunta—: ¿puede este experimento de física interesar al hombre de la calle? Sin duda la gente no se plantea un problema de este tipo... Los problemas que interesan a la gente son los que conciernen a la vida y a la muerte. Ya vimos como en el Paleolítico los hombres pintaban animales que representaban, al mismo tiempo, un peligro y una fuente de subsistencia.

¿Por qué hasta el final del siglo XVIII, es decir, un siglo y medio después de Galileo, los hombres no sintieron la necesidad de ilustrar con gráficos diferentes tablas numéricas relativas a cuestiones de economía, de finanzas, de medicina, ...?

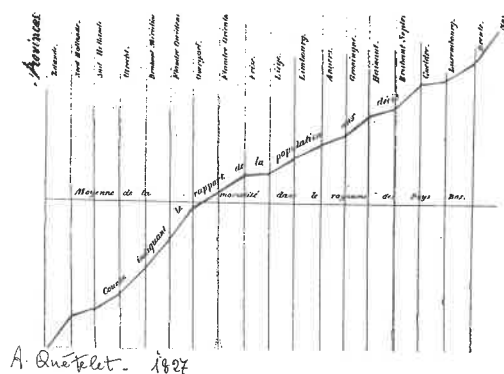
¿Es el purismo de la geometría cartesiana lo que ha dificultado la visualización de problemas empíricos en el plano coordenado?

Dejemos esta cuestión por un momento para relatar unas recientes investigaciones concernientes a la historia de los gráficos estadísticos.

Parece que fue el escocés William Playfair (1759-1823) quien tuvo la idea de representar con gráficos de tipo diferente muchas tablas numéricas empíricas. W. Playfair no era un matemático; era un diseñador, un comerciante, un inventor, ... cambiaba de actividad según su interés en cada momento. Pienso que una de sus aserciones puede describir a este tipo original. Escribe: “Cada noche, cuando regreso a mi casa, pongo mis guineas una sobre otra teniendo así un pequeño cilindro. Al final de cada semana, observando estos cilindros, puedo decir a simple vista cuando he ganado más”.

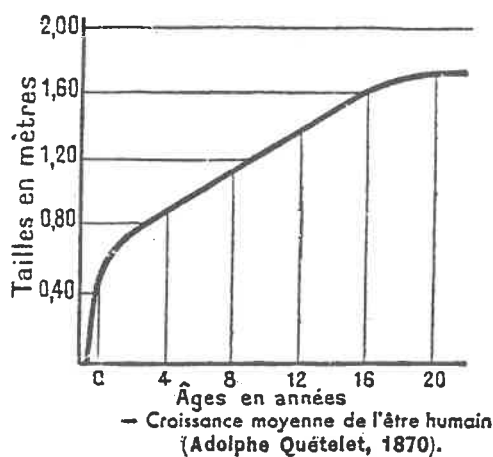
## BIBLIOGRAFÍA

- Azcárate Giménez, Carmen: *"Las matemáticas de Galileo"* Universidad Autónoma, Barcelona 1984
- Beniger, James R. and Robyn, Dorothy L.: *"Quantitative Graphics: A brief history"* The American Statistician, vol. 32,1, February 1978.
- Boll, Marcel: *"Le mystère des nombres et des formes"* Editions Librairie Larousse, 1941.
- Boyer, Carl B.: *"A history of mathematics"* John Wiley, New York, 1968.
- British Museum: *"Introductory Guide to Egyptian Collections"*.
- Clagett, Marshall: *"The science of Mecanics in the Middle Age"* in *"Critical Problems in the History of Science"*, University Wisconsin Press, Madison 1959.
- Chiéra, Edward: *"Les tablettes babyloniennes"* Editions Payot, Paris 1939.
- Fienberg, Stephen E.: *"Graphical Methods in Statistics"* The American Statistician, vol. 33,4, Novembre 1979.
- Funkhouser, H.G.: *"A note on a tenth century graph"* Isis 1936.
- Graunt, John: *"Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality"*.
- Kline, Morris: *"Mathematical Thought from Ancient to Modern Times"* Oxford University Press, 1972.
- Neugebauer, Otto: *"The exact Science in Aniquity"* Harper, New York 1962.
- Quételet, Adolphe: *"Antropologie"* Bruxelles 1827.
- Royston, Erika: *"A note on the history of graphical presentation of data"* in *"Studies in the History of Statistics and Probability"*, Ed. by E.S. Pearson and M.G. Kendall 1970.
- Smith, David Eugene: *"History of Mathematics"* Ginn and Co., Boston 1923 Struik, Dirk J.: *"A source book in Mathematics, 1200-1800"* Harvard University Press, 1969.
- Tufte, Edward: *"The visual display of quantitive information"* Graphics Press, Cheshire, Connecticut 1983.



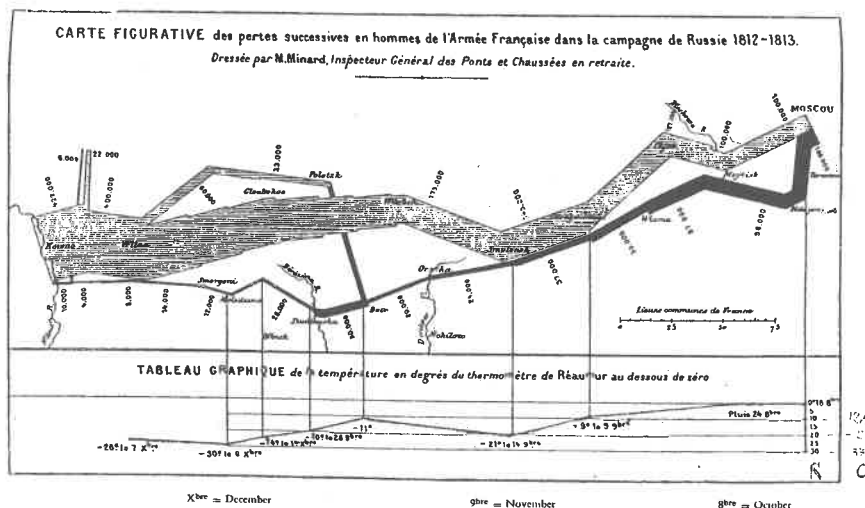
(Fig. 14)

Además a Quételet se le debe un gráfico (fig. 15), realizado muchos años después, en 1870, que visualiza la estatura humana hasta la edad de 20 años. Quételet se refiere al hombre normal, conforme a los estadios de Gauss. Este gráfico interesa a todos: ¿está mi hijo por debajo o por encima de la estatura media? Muchas son las cuestiones que surgen observando el gráfico.



(Fig. 15)

Estamos al final del siglo pasado. Desde este momento las representaciones gráficas han tenido las más variadas utilizaciones: desde el comercio a problemas demográficos, a cuestiones médicas, a... Otros gráficos concernientes al pasado llevaban a la gente a reflexionar sobre la política. Aquí aparece (fig. 16) un impresionante gráfico realizado en 1861 por el ingeniero francés Charles Minard: es una "pintura" que representa las devastadoras pérdidas del ejército de Napoleón en la campaña de Rusia de 1812.



(Fig. 16)

Empezando por la frontera polaca-rusa, cerca del río Niemen, el espesor de la tira gris es proporcional al número de militares: 422.000, cuando invadieron Rusia. A su llegada a Moscú los militares eran 100.000. La retirada está pintada con la tira negra, donde el espesor es siempre proporcional al número de hombres. La travesía del río Beresina muestra el desastre final: solo 10.000 hombres regresaron a Polonia.

Esta pintura, donde también las temperaturas de ese gélido invierno están indicadas, describe con pocas líneas una historia terrible, y habla sin duda más claro que páginas de una descripción escrita.

Llegamos ahora a nuestra época.

Hoy en día estamos bombardeados por representaciones gráficas de diferentes tipos: se quiere dar informaciones de todo a todos.

Y, todavía otra vez, se nos pregunta: ¿por qué estos medios visuales tuvieron tantas dificultades para penetrar en la sociedad?

¿Quién ha dificultado esta penetración? ¿Sólo unos matemáticos puristas? ¿O hay otras razones? ¿No se temía, puede ser, que poniendo al alcance de todos, a través de un medio visual, los hechos sociales más variados, la gente adquiriese la posibilidad de intervenir en problemas de ciencia, de economía, de política, cuestiones que, expresadas en números, símbolos, fórmulas, estaban reservadas a pocas personas? ■

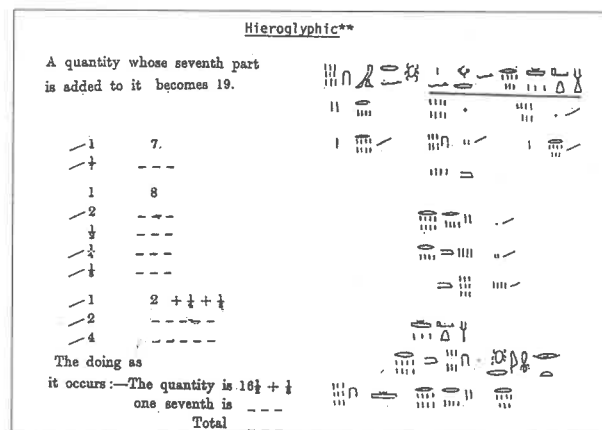
san que la informática dé fin a la demostración deductiva y general, pero es indudable que está influyendo en la forma en que ellos descubren o inventan (de acuerdo a la postura filosófica que se adopte) nueva matemática. ¿De qué forma influye la tecnología en educación matemática? La primera observación es que la influencia es similar a lo descrito con respecto a la disciplina: permite abordar temas en forma muy diferente, y permite también abordar nuevos temas. Y es importante destacar no sólo las capacidades técnicas de los avances de la informática, sino de qué manera ésta puede promover formas diferentes de pensamiento, y por lo tanto influir en la manera en que aprendemos matemáticas. Esto requiere una elaboración en detalle.

Empezaré analizando el concepto de tecnología cognoscitiva desarrollado por investigadores americanos (Pea, 1987). La idea es la siguiente: la mente humana tiene capacidades intelectuales poderosas: memoria, atención, percepción, raciocinio, imaginación. Pero en general estas capacidades son limitadas, por ejemplo nos es imposible "procesar en paralelo", por usar una metáfora de la informática, es decir, nos es imposible atender a más de una cierta cantidad de información a un mismo tiempo.

Una tecnología cognitiva es cualquier medio que permite trascender las limitaciones de la mente humana. Mucho antes de que aparecieran los computadores, instrumentos muy simples ayudaron a expandir considerablemente la inteligencia humana. Entes e instrumentos de lo más diverso responden a esta definición: por ejemplo, un lápiz y un papel. Comparemos lo que implica hacer matemáticas mentalmente con lo que es hacerlo con lápiz y papel. Estos instrumentos aún siendo simples nos permiten transformar en externos y tangibles los productos de nuestro pensamiento, que de ser privados, etéreos, invisibles, sujetos a la distorsión de la memoria, la atención o la percepción, pasan a ser externalizados, "capturados" en un trozo de papel y por lo tanto por el sólo hecho de estar registrados se transforman en objetos pasibles de observación, análisis, reflexión, extensión y de discusión con nuestros pares.

Pero no sólo lápiz y papel califican como ejemplos de tecnologías cognitivas, sino también los sistemas simbólicos. Consideremos por ejemplo la resolución del siguiente problema: "si a una cantidad le sumamos la séptima parte obteniendo 19, ¿cuál es la cantidad?" Este problema se puede resolver en forma casi inmediata operando con símbolos algebraicos, y es entonces un simple ejercicio. Sin embargo, los símbolos algebraicos son relativamente nuevos en matemáticas, datan de hace aproximadamente 400 años. Pero este problema y otros similares fueron planteados en uno de los textos matemáticos más antiguos de los cuales se tiene conocimiento: el Papiro Rhind que data de hace casi 4.000 años y que fue descifrado hace menos de 200 años y hoy está en el Museo Británico de Londres.

Quizá nos resulte muy difícil imaginar cómo puede resolverse un problema así, sin algebra. Este gráfico



(Fig. 1)

muestra la resolución del problema en su versión original y en su traducción a nuestro sistema decimal. Si bien se trata de un problema elemental, descifrar el razonamiento matemático detrás de esta solución numérica no es un ejercicio trivial. El método nos sorprende por lo extenso y complejo, sobre todo porque tenemos en nuestro haber una tecnología cognitiva tan poderosa como son los símbolos algebraicos que nos permiten resolver este problema y similares en instantes, ampliando así nuestras capacidades intelectuales. En este caso, no sólo tenemos una tecnología cognitiva que nos permite registrar nuestro pensamiento como en el caso del lápiz y el papel, sino también agilizarlo, simplificarlo y también acceder a formas de pensar y crear antes desconocidas. Al respecto decía el matemático Alfred North Whitehead (1911), coautor de Bertrand Russell de la Principia Matemática, que por medio del simbolismo podemos hacer transiciones casi mecánicas en nuestro razonamiento, cosa que de otra manera requeriría el uso de las facultades más elevadas de nuestra mente. De esta manera liberamos nuestras energías de pensamiento. El simbolismo, dice Whitehead nos ayuda a ahorrar operaciones de pensamiento, que son como la carga de caballería en una batalla, muy restringidas en número, requieren caballos "frescos" y por lo tanto deben ser usadas sólo en momentos decisivos.

La informática en educación matemática es sin duda una tecnología cognitiva, pero su rol no es el de mero amplificador que potencia nuestras capacidades, sino que además permite el acceso a nuevas posibilidades de pensar, crear, entender, aprender y conectarnos con las matemáticas de formas que antes estaban excluidas o eran impensables. Este tema es complejo y requiere un análisis profundo del tipo que hacemos en nuestros cursos de post graduación para estudiantes de master y doctorado durante uno o dos semestres. Aquí ilustraré brevemente de qué manera, una tecnología cognitiva puede actuar de amplificador, puede servir para abrir posibilidades de pensamiento

## Conferencia de clausura

### EDUCACIÓN MATEMÁTICA HACIA EL AÑO 2000

**Abraham Arcavi**

*Weizmann Institute of Science. Israel*

**E**ducación matemática es una disciplina, o quizá una interdisciplina, que se ocupa de todo aquello que tenga que ver con los procesos de aprendizaje y de enseñanza de la matemática, incluyendo a) el proceso de diseño de materiales curriculares (textos, juegos, material manipulativo, microentornos o micromundos de exploración, etc.), b) la formación y el perfeccionamiento en servicio de profesores, y c) la investigación pedagógica y cognoscitiva.

La educación matemática actualmente está en proceso de definir su propia identidad académica y por lo tanto está encontrando su lugar como tal en los claustros universitarios y en los institutos de investigación. Es probable que la influencia de esta disciplina y lo que ella ya ha producido no sea aún demasiado visible en la realidad cotidiana de la mayoría de las escuelas del mundo, sean éstas del primer o del tercer mundo y quizá por eso su peso y su influencia no sea tan notable aún. No obstante hay en el presente una acumulación de experiencias y de conocimientos que no van a tardar demasiado en dejar su huella en el aula.

Considero que hay dos factores centrales que están influyendo en esta disciplina y que han cobrado impulso en los últimos 10 o 15 años. El primero, los espectaculares avances de la tecnología —en especial la informática— y el segundo, los incipientes pero firmes resultados de la investigación cognoscitiva sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza. En esta presentación trataré de ilustrar con ejemplos la influencia de ambos factores, y concluir con una visión acerca de la educación matemática en el futuro.

#### TECNOLOGÍA

No es necesario abundar en descripciones acerca de los avances de la tecnología y la informática en nuestros días. En la mayoría, sino en todos nuestros quehaceres profesionales o laborales, la tecnología o sus rastros son omnipresentes: en la administración y en las telecomunicaciones, en

la astronomía y en la agricultura, en la medicina y en la ingeniería, en el comercio, en la industria, y en los medios de transporte. No sólo los avances tecnológicos *per se* son asombrosos sino el ritmo en el que ellos transcurren. Aún así cabe preguntarse: ¿De qué manera puede influir la tecnología en la educación matemática? ¿No es acaso la educación una empresa eminentemente humana, donde la comunicación (verbal o no) entre seres humanos es el pivote primordial? ¿No es acaso la matemática la ciencia deductiva por excelencia considerada por la mayoría como el épitome del conocimiento lógico? ¿De qué manera entonces puede el advenimiento de la tecnología influir en estas dos actividades intelectuales, la educación y las matemáticas, y por lo tanto influir en la educación matemática? Pues bien, aunque parezca sorprendente, la tecnología está empezando a dejar sus huellas profundas también en esto.

Consideremos primero brevemente la influencia de la tecnología en la matemática como disciplina. Quizá lo más notable de destacar es, por un lado, el desarrollo de subdisciplinas ligadas a la computación: el análisis numérico, el estudio teórico de algoritmos, el desarrollo de temas como sistemas dinámicos, caos, etc. Algunos de estos temas eran en parte conocidos antes del advenimiento de las computadoras, pero eran imposibles de desarrollar debido a las enormes demandas de cálculo.

La informática está influyendo no sólo en los contenidos sino también en las formas de trabajo en matemáticas. La computadora se torna en un poderoso laboratorio de experimentación y por lo tanto permite otorgar un rol importante al empirismo en la investigación matemática, consistente con la filosofía de Lakatos y sus seguidores, por la cual no se desplaza, pero si se reduce el monopolio del raciocinio puramente deductivo en la actividad matemática. Como ejemplo ilustrativo cabe señalar que este tema llevó a la prestigiosa publicación de divulgación científica, el *Scientific American*, a publicar en el número de octubre 1993 un artículo polémico llamado "La muerte de la demostración" (en matemáticas). La mayoría de los matemáticos no pien-

No quisiera pretender que todos los alumnos van a desarrollar formas sofisticadas de pensar como ésta, pero lo que sí quiero afirmar es que esta tecnología cognoscitiva posibilita y motiva al alumno para producir formas de pensamiento que no sólo no están en el curriculum tradicional, sino que sería muy difícil de surgir en otro contexto. El aprendizaje que resulta en este caso permitiría una conexión entre lo formal, lo gráfico y lo intuitivo.

La diseñadora de este juego cuenta que fueron precisamente formas sofisticadas de pensar de los alumnos lo que la llevó a diseñar una versión para expertos: ella cuenta que vio alumnos introducir funciones del tipo  $y = 10\text{sen}(10x)$ , con la cual prácticamente "barrían" la pantalla y obviamente obtenían así el máximo puntaje posible. Para estos expertos ella diseñó la versión en la cual además de globos, aparecen en la pantalla "agujeros negros" que detienen el gráfico de la función cuando son alcanzados. De esta manera, el alumno tiene no sólo que romper el mayor número posible de globos, sino evitar al mismo tiempo esos "agujeros negros".

**Tercero**, en el transcurso de este juego, es el alumno el que decide cuál es el problema que va a resolver, es él quién elige el tipo de función que usará y cuántos globos serán su objetivo. Si es el alumno el que define el problema, el problema le pertenece, y por lo tanto es probable que la motivación, la inversión de tiempo, esfuerzo y recursos a su disposición tenderá a ser mayor que con un problema ajeno o definido por el docente. Por lo demás una clase entera puede trabajar con un mismo tipo de tarea en niveles bien diferentes, de acuerdo a las capacidades e intereses de los alumnos.

**Cuarto**, una actividad de este tipo puede cambiar la sociología del aula. En general, el docente prepara las actividades, elige los problemas y conoce sus soluciones, y hasta los posibles errores del alumno. El alumno recibe un problema sin haber participado plenamente de su definición, y sabe leer entre líneas en la expresión del docente si la solución está bien encaminada o no. En el caso de una actividad como ésta, donde el alumno es el que define el problema, el docente no siempre sabe de inmediato cuál es la solución, es decir, cuál es la forma simbólica correspondiente a un gráfico deseado, y a veces hay más de una solución posible. En ese caso la tecnología coloca al alumno y al docente del mismo lado, ambos pueden colaborar en la resolución, y el alumno puede aprender del docente, no necesariamente contenidos nuevos o soluciones pre-hechas, sino formas de trabajo en el transcurso de resolución de un problema para el cual el docente no tiene una solución preparada. La tecnología, mediante programas apropiados, puede crear este tipo de situaciones en el que el alumno tiene la oportunidad de tomar contacto directo con la pericia del docente viéndolo resolver situaciones nuevas y observando estrategias de pensamiento de un experto.

### Segundo ejemplo

Hay programas, como el Cabri, el Sketchpad o el Inventor, en los cuales el alumno puede observar transformaciones dinámicas, y trabajar en una especie de laboratorio empírico para formar conjeturas, establecer hipótesis que luego hay que trabajar para probar o para encontrar contarejemplos. Lo importante es que el alumno participa en la formulación de hipótesis y no es un pasivo receptor de enunciados "caídos del cielo" para ser demostrados. El problema es que a veces los alumnos producen hipótesis que no siempre el docente sabe a primera vista si son correctas o no, y si lo son cómo probarlas.

Este tipo de software (y similares) abre el camino para estudiar la geometría de una manera muy diferente, en la cual el alumno genera conjeturas y tiene una sensación intuitiva, experimental, acerca de ella, y puede conectar contenidos.

## INVESTIGACIÓN COGNOSCITIVA

Durante las décadas del '60 y '70, la mayoría de los trabajos de investigación en enseñanza y aprendizaje de las ciencias y matemática estaban guiados por un paradigma "conductista" (behaviorism). En general, este modelo de trabajo consiste en diseñar un tratamiento experimental, implementarlo en un grupo, establecer grupos de control, y mediante una batería de tests estadísticos, determinar el efecto del tratamiento experimental. Este modelo, importado de estudios como por ejemplo la agricultura o la medicina, contribuyó relativamente poco a la comprensión del proceso enseñanza-aprendizaje.

Los trabajos de Piaget por un lado, y los trabajos de la ciencia cognoscitiva por el otro (en especial los de inteligencia artificial), establecieron paradigmas de investigación nuevos centrados en la observación y el análisis meticulosos de lo que le ocurre al alumno durante el proceso de aprendizaje, tratando de caracterizar la naturaleza de ese proceso.

Últimamente se ha sumado una nueva tradición, con raíces en la antropología y que está arrojando luz sobre la naturaleza social del aprendizaje, y sobre todo destacando aspectos de aprendizaje antes soslayados. Esta tradición sostiene que aprender es entrar a practicar una cierta cultura, con sus valores, sus puntos de vista, sus prácticas de hacer, hablar y observar el mundo.

Antes de resumir algunos resultados quisiera hacer dos observaciones.

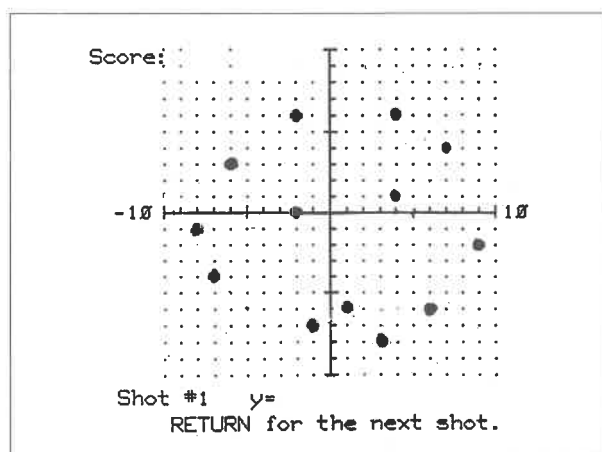
Primero: una de las expectativas, fundada o no, tanto del público en general como de la comunidad científica, es que la Investigación produzca resultados repentinos, o como se



en direcciones nuevas, puede cambiar radicalmente los contenidos y el enfoque curricular, puede transformar la motivación del alumno, puede transformar la sociología y la cultura del aula cambiando drásticamente el rol del docente.

### Primer ejemplo

Green Globbs (Dugadle, 1986) es un juego matemático basado en una idea simple pero muy ingeniosa. La pantalla del computador nos muestra un sistema de ejes cartesianos sobre la cual aparecen 13 "globos" localizados en posiciones que el programa elige al azar cada vez que uno comienza un nuevo juego. El objetivo del juego es "disparar" contra el mayor número de globos posible. El "disparo" consiste en producir una función cuyo gráfico toca, es decir, rompe, los globos, y para poder obtener ese gráfico hay que introducir la forma algebraica de la función. La siguiente ilustración muestra una réplica de una pantalla típica.



(Fig. 2)

En esta disposición del gráfico podríamos intentar una función lineal, una cuadrática etc. El puntaje que obtiene el alumno crece en forma exponencial, de manera que por el primer globo que logre romper obtendrá 1 punto, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto y así sucesivamente. Así, el juego invita al alumno a considerar la posibilidad de "romper" el mayor número de globos posibles con la misma función.

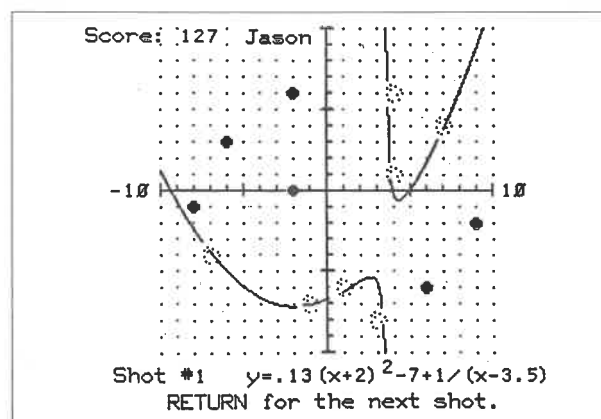
### ¿Qué ilustra este juego?

**Primero**, ofrece una posibilidad de graficar funciones con mucha facilidad descargando el peso del cálculo y la graficación, ambos tediosos, en la computadora que lo hace instantáneamente librando nuestras energías para pensar, analizar y razonar, en lugar de gastarlas en operar técnicamente.

**Segundo**, contrastemos el tipo de pensamiento que requiere este juego con lo que en general se requiere durante el estudio de análisis matemático. Tradicionalmente el ejer-

cicio más común consiste en, dada la forma algebraica, producir el gráfico de una función. Gran parte del estudio previo implica adquirir instrumentos para ese fin: sustituciones y resolución de ecuaciones para averiguar los puntos de intersección con los ejes, derivar e igualar la derivada a cero para estudiar posibles puntos extremos, paso al límite para investigar la existencia de asíntotas, etc. En el caso de Green Globbs, se trata precisamente de lo inverso, la construcción de una forma algebraica correspondiente a un cierto gráfico dado o que uno quisiera construir. Uno podría pensar en establecer un sistema de ecuaciones para encontrar el valor de los parámetros pero en general no es el tipo de actividad que este juego genera. En general los trabajos de observación de alumnos usando este juego muestran formas de pensar más informales, cualitativas e intuitivas en las cuales ellos investigan empíricamente el rol de los distintos parámetros y cómo influyen en la forma final del gráfico. Por ejemplo, en el caso de la ecuación de una recta, muchos alumnos comienzan tratando de visualizar la pendiente, desarrollando destrezas de estimación, y si la función que resulta no fuera la deseada, trabajan sobre las correcciones que sería necesario hacer. Esta forma de pensar informal, desarrolla la intuición y enriquece el substrato fenomenológico de los conceptos, que muchas veces para el alumno son opacos, ocultos tras los procedimientos formales. La siguiente es una situación que fue registrada en la literatura como un ejemplo del tipo de actividad cognoscitiva que este juego puede promover.

Dugdale (1993) narra el caso de un alumno atrapado por este juego y que se propuso lograr puntajes altos. Habiendo obtenido una distribución de globos como la indicada en la figura 2, él visualizó la parábola, cuya ecuación supo calcular, pero no se contentó con cuatro globos. Y su raciocinio fue el siguiente: quisiera obtener tres globos más que están en la posición vertical próximos a la recta  $x=3.5$ , para lo cual necesitaría que esta función sea parábola en casi todo su dominio, pero en las inmediaciones de 3.5 se comporte como una vertical. Después de mucho investigar diseñó la ecuación correspondiente al gráfico deseado:



(Fig. 3)

de educación matemática antes mencionados deberán tomar esa responsabilidad.

4. Muchos temas cambiarán, y los enfoques serán distintos. Se pondrá mucho más énfasis en el cómo y no tanto en el qué, se trabajará más en aspectos intuitivos, gráficos realzando el sentido común y se restará importancia a la enseñanza de algoritmos y recetas. Un ejemplo casi caricaturesco podría ser el tiempo que se invertía en aprender a operar con la tabla de logaritmos, sin saber demasiado lo que ello significaba. Yo recuerdo que recién en la universidad entendí que lo que hacíamos en la secundaria era interpolación lineal entre dos valores de la tabla para obtener un tercero intermedio que la tabla no mostraba.

Esto, en lugar de representar un corte con el pasado, puede implicar por lo contrario, un retorno a las fuentes de la historia de las matemáticas, en busca de las intuiciones primeras, de las dificultades iniciales, de las fuentes de insight.

5. El aula funcionará distinto, los roles del docente y del alumno cambiarán. El alumno tenderá a ser un pequeño investigador entre pares, el docente será un experto facilitador y a veces un colega.
6. Se prestará mucha atención a los resultados de la investigación que indique cómo los alumnos aprenden en estos nuevos medios.

Reviendo la lista anterior, quizá los descreídos entre nosotros diremos que más que una lista de cambios inexorables lentos o no, es una lista de deseos. Pienso que aunque sólo una parte de lo anterior empiece a ocurrir, y creo que sin duda ocurrirá, y aún cuando el ritmo de cambio no sea el deseado, creo que nos podemos permitir ser optimistas. Si organismos gubernamentales en el mundo continúan con la tendencia de comprar menos armas de guerra y se preocupan sinceramente (es decir asignando recursos financieros) por la ecología, la salud y la educación, la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias ganarán mucho terreno ■

## BIBLIOGRAFÍA

- Dugdale, S. and Kibbey, D., 1986, *Green Globbs and Graphing Equations* [A computer based instructional package]. Sunburst Communications, Pleasantville, NY.
- Dugdale, S., 1993. "Functions and Graphs - Perspectives on Student Thinking". In Romberg, T.A., E. Fennema and T. P. Carpenter (Eds.) *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. L. Erlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ. pp. 101-130.
- Pea, R., 1987. "Cognitive Technologies for Mathematics Education". In Schoenfeld, A.H. (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*. L. Erlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ. pp. 89-122.
- Whitehead, A. N., 1911. *An Introduction to Mathematics*. Williams & Norgate, London, p. 59, 61.

dice en inglés "breakthroughs": si ayer se desconocía el origen del SIDA, un buen día se aisló el virus, si ayer se desconocía tal o cuál partícula subatómica, hoy se pudo identificar, si ayer el teorema de Fermat era sólo una hipótesis, aparentemente se pudo probar; etc. En educación la expectativa de un avance espectacular es un tanto infundada. La investigación en educación producirá avances en nuestro entendimiento de los procesos de aprendizaje, en forma gradual y evolutiva. Por lo tanto debemos adoptar patrones de tiempo diferentes. Aún así sostengo que hoy en día entendemos mejor los procesos de aprendizaje que hace 20 años atrás. Y a medida que los paradigmas de investigación se vayan refinando, se producirán nuevos avances. La segunda observación se refiere a la brevedad en que enumeraré algunos resultados, brevedad que puede distorsionarlos y tornarlos en superficiales. Pero correremos ese riesgo y éste es un posible resumen de lo que la investigación ha producido.

### **Sobre la naturaleza del proceso de aprendizaje**

El aprendizaje de una disciplina compleja como las matemáticas, es un proceso lento, no lineal, donde hay avances y retrocesos y donde el contexto del estudio tiene una influencia crucial. Un concepto puede ser reconocido o ignorado de acuerdo a las características del problema, y sólo paulatinamente podrán apreciarse sus ramificaciones y múltiples conexiones con otros conceptos.

### **Sobre la naturaleza del "error"**

Las concepciones del alumno son consistentes aunque al docente muchas veces le parezcan incoherentes. Estas concepciones son el producto de tratar de acomodar el nuevo conocimiento a una estructura cognitiva existente, y en ese proceso ocurre lo que los docentes llamamos "errores". Este proceso de búsqueda del sentido del nuevo conocimiento producirá inevitablemente concepciones que no son consistentes con las del maestro, y por lo tanto será fútil la tarea de diseñar secuencias didácticas "perfectas" que traten de evitar "errores". En lugar de esforzarnos por construir esas secuencias nuestras energías deben concentrarse en entender al alumno, descubrir las concepciones subyacentes y diseñar tareas que apoyen la construcción del concepto en su forma más rica.

### **Sobre procesos metacognitivos y creencias**

La investigación ha identificado procesos de control, de planeamiento y uso de estrategias de trabajo, de distribución de recursos mentales, toma de conciencia de los propios mecanismos de aprendizaje, reconocimiento de los propios niveles de entendimiento y las creencias acerca

de las matemáticas y en qué consiste la actividad matemática. Estos temas han adquirido un lugar central en el estudio del aprendizaje y han logrado explicar aspectos del éxito y/o fracaso de los alumnos.

### **Sobre la interacción social**

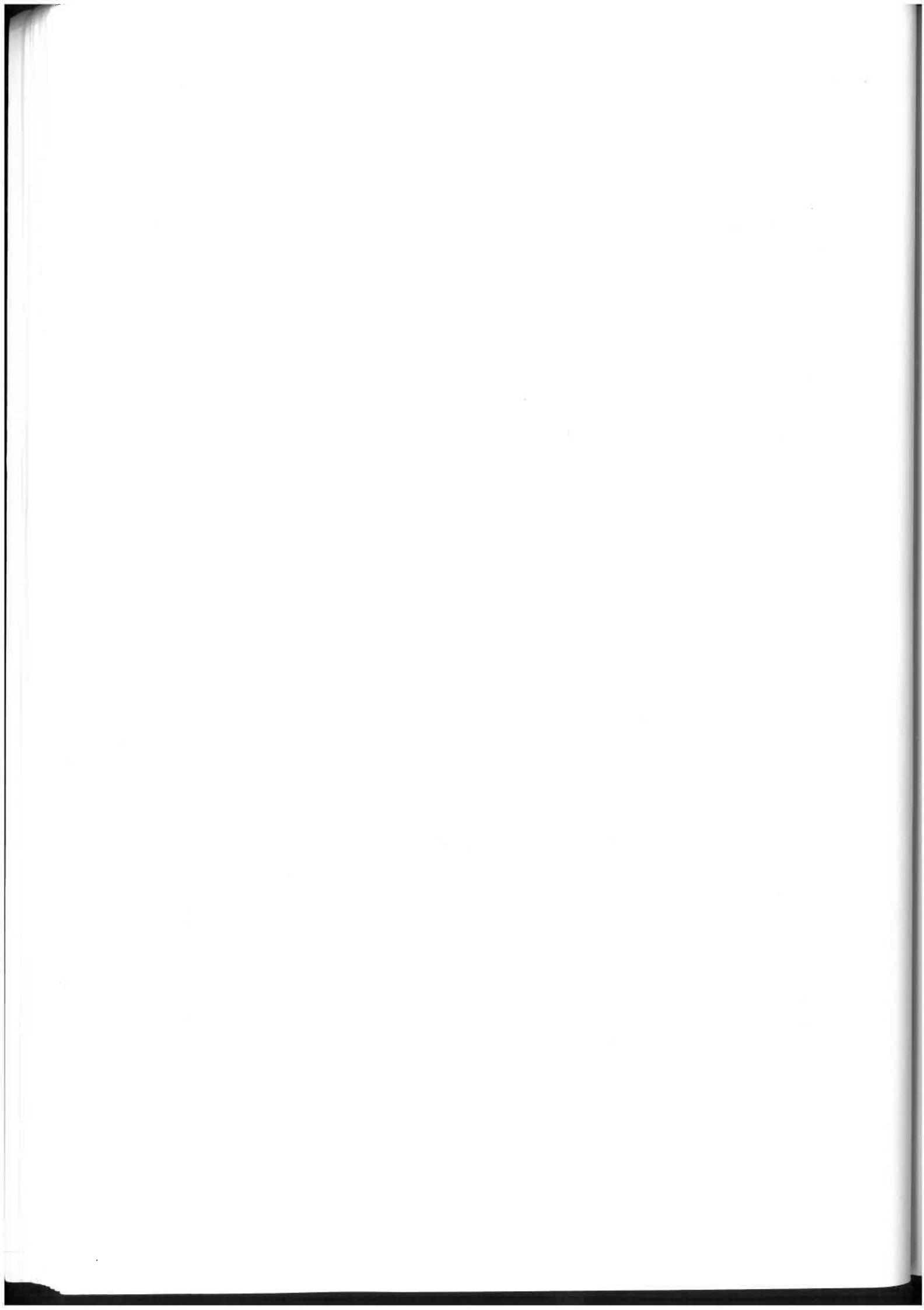
El diálogo, la interacción social, la "cultura" del aula son elementos claves que establecen las pautas de actividad que el alumno internaliza. Numerosos estudios se concentran hoy en día en el aula, en la creación de atmósferas de trabajo consistentes con las formas de trabajo profesional en matemáticas, transmitiendo la responsabilidad del aprendizaje y del diálogo al alumno, y apoyando su autonomía.

Y bien, he ilustrado lo que a mi juicio son los dos factores centrales que influirán en la educación matemática en el siglo XXI: la tecnología y los resultados de investigación. ¿De qué manera éstos influirán en las características de la educación matemática del futuro?

1. La tecnología será incorporada, quizá lentamente al principio, por medio de computadoras o calculadoras gráficas, o tal vez la multimedia. Esto es irreversible por dos motivos, primero las tecnologías se abaratan, y segundo los alumnos ya crecen con la tecnología, aprenden a interactuar con ellas desde niños, quizá mejor que nosotros. Por eso y porque además se está demostrando que hay formas diferentes de aprender con tecnologías, ellas pasarán a ser parte integral de la enseñanza de matemáticas y no sólo de matemáticas, sino de casi todas o todas las asignaturas.
2. Se constituirán grupos de educación matemática que irán desplazando a los escritores individuales de textos. Hoy en día producir material curricular incluye un análisis y una decisión de cuáles temas hay que enseñar, incluye basar los materiales en resultados de investigación cognoscitiva, y además incluye el continuo perfeccionamiento docente acorde con el espíritu con el que los materiales fueron creados. Estas tareas están entrelazadas y sólo pueden llevarse a cabo por un equipo que trabaje en un ámbito académico y con apoyo y recursos.
3. La continua preparación docente será una preocupación primordial. Sobre todo la preparación en servicio. Contrariamente a lo que se pensó en los primeros tiempos del microcomputador, el docente no sólo no es prescindible, sino que su rol es importantísimo, no como transmisor de conocimientos, sino como el experto facilitador, como el experto del cual el alumno puede aprender cómo piensa, opera y funciona un experto cuando está por resolver un problema cuya solución no es inmediata. Esto requiere una preparación ininterrumpida consistente en cursos, cursillos, seminarios, etc. Los grupos

# Grupos Temáticos

---



# 1. Matemáticas de ahora y enseñanza de las Matemáticas

## TEORÍA DEL CAOS Y RENOVACIÓN MATEMÁTICA

**Manuel Morán Cabre**

Dpto. de Análisis Económico. Univ. Complutense. Madrid

### I. ALGUNOS EJEMPLOS

Antes de entrar en consideraciones generales sobre las consecuencias filosóficas y matemáticas de la teoría del caos, empezamos con algunos ejemplos que servirán para ilustrar el tipo de problemas que estudia la teoría del caos y como pueden ser utilizados en el aula.

La teoría del caos nace del estudio de **sistemas dinámicos**, es decir, del estudio matemático del movimiento. La representación de este área en el actual curriculum de enseñanza media se limita a las progresiones aritméticas y geométricas, y aun así el enfoque más generalizado que se da a esos temas no es dinámico. A través de los siguientes ejemplos se puede ver la variedad de situaciones que se pueden estudiar con sistemas dinámicos, y cómo ello podría permitir un enfoque nuevo, basado en muchos casos en la experimentación gráfica y con ordenador, de nociones tan espinosas como las de sucesión, límite, punto de aglomeración etc.

#### a) Evolución de una población de mariposas en un ecosistema saturado. (Robert May, 1976)

El agotamiento de los medios de subsistencia en un ecosistema cerrado causa que la clásica ecuación

$$x_{k+1} = \alpha x_k$$

para el estudio de la evolución de una población sea poco realista en el caso en que la tasa de natalidad supere a la de mortalidad (caso en que  $\alpha > 1$ ). El biólogo Robert May propuso la ecuación no lineal

$$x_{k+1} = \mu(1-x_k)x_k$$

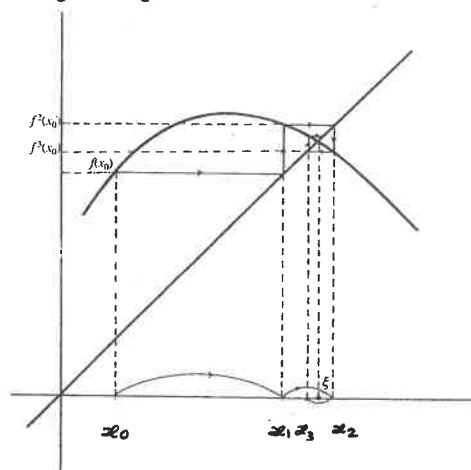
que tiene en cuenta los efectos de saturación del ecosistema. Si

$$f(x) = \mu(1-x)x$$

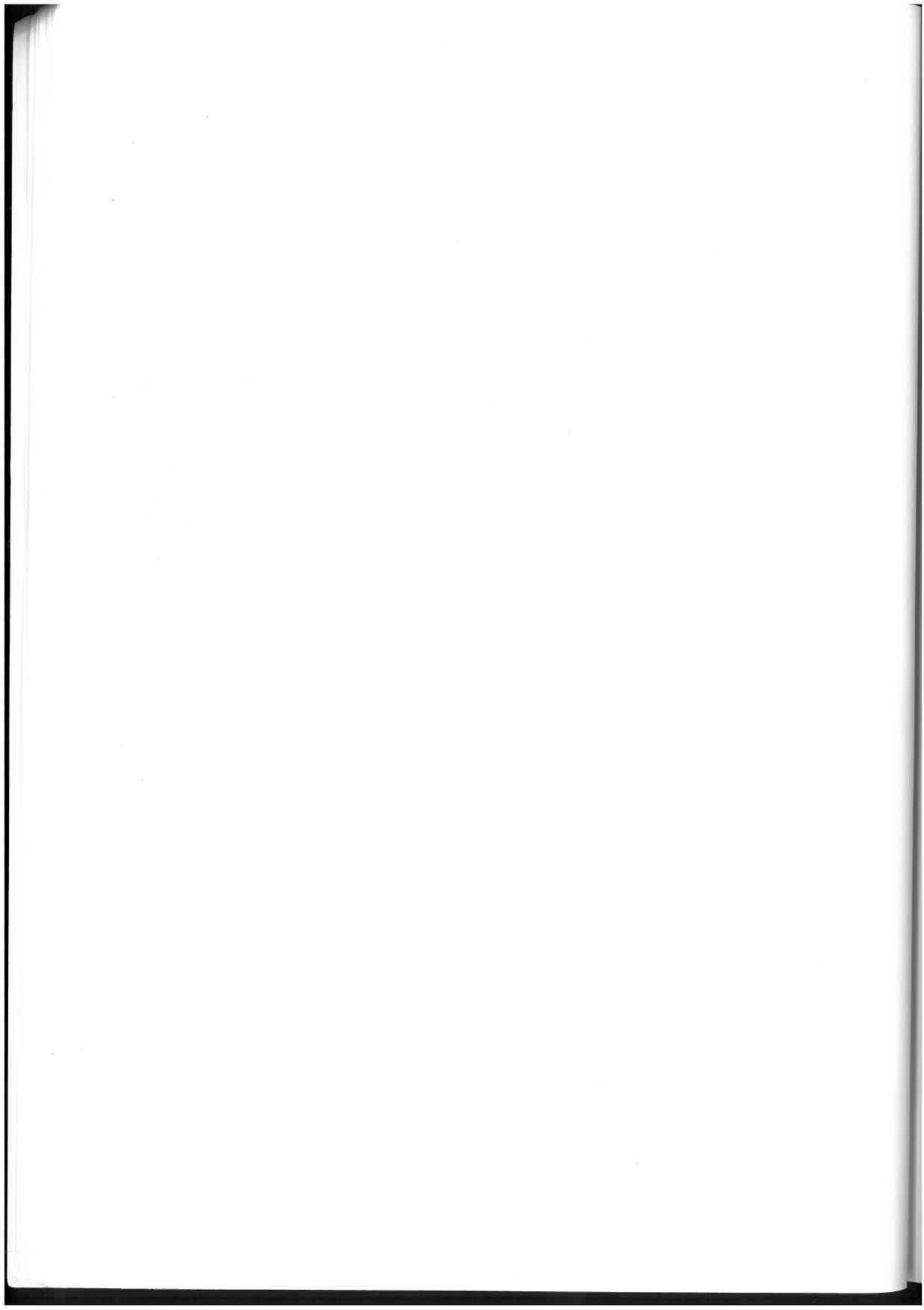
podemos calcular la población  $x_{k+1}$  en el periodo  $k+1$  mediante la ecuación

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Así pues, una representación gráfica de  $f$  permite el cómputo inmediato del tamaño de una población en función de la del periodo anterior. De hecho, si tenemos representado el gráfico de la función podemos saber con facilidad cuál es el tamaño de la población  $x$  al cabo de  $k$  periodos, si sabe cuál es su tamaño  $x_k$  en el periodo inicial, mediante el siguiente algoritmo gráfico.



Una vez calculado  $x_1$ , podemos llevar este valor sobre el eje  $X$  para calcular  $x_2$  y así sucesivamente. El mismo efecto se logra si en lugar de llevar los sucesivos valores sobre el eje  $X$  se utiliza la diagonal del primer cuadrante como se indica en la figura.





## II. ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LA TEORÍA DEL CAOS

### 1. Determinismo versus aleatoriedad

En el ejemplo **a)** de la primera parte hemos visto que para ciertos valores del parámetro  $\mu$  la población de mariposas evoluciona de forma caótica, sin pauta aparente. Supongamos que registramos unos datos  $x_0, x_1, x_2, \dots$  generados mediante el algoritmo

$$x_{k+1} = f(x_k), \text{ con } f = 4(1-x)x$$

¿Cómo saber que se trata de una serie generada mediante un mecanismo determinista, y no de una serie puramente aleatoria? Si se supone que podemos medir datos con infinita precisión, existen procedimientos para descubrir la ley determinista. Pero sabemos que en la práctica sólo se puede medir con una precisión finita, digamos de  $m$  dígitos binarios. Por el carácter caótico del sistema dinámico que estudiamos, la indeterminación acerca de la posición de  $x_k$  crece en un dígito binario con cada nueva iteración, de manera que al cabo de  $m$  iteraciones hemos perdido completamente toda información acerca de la posible conducta del sistema. En estas condiciones la ley determinista  $x_{k+1} = f(x_k)$  se comporta de forma completamente aleatoria si se observa al cabo de  $m$  unidades de tiempo.

Recíprocamente, consideremos el proceso estocástico correspondiente a tiradas repetidas de una moneda equilibrada. El espacio muestral  $\Omega$  de este proceso es el de todas las sucesiones de ceros y unos. En este espacio muestral existe definida la aplicación *paso del tiempo*  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  que a cada sucesión  $a = a_1, a_2, a_3, \dots, a_i \in \{0,1\}$ , hace corresponder la sucesión  $T(a) = a_2, a_3, a_4, \dots$ . El sistema dinámico  $x_{k+1} = T(x_k)$  en  $\Omega$  es *equivalente* al sistema dinámico  $x_{k+1} = f(x_k)$  en  $[0,1]$  (en un sentido que puede hacerse matemáticamente preciso; la idea se basa en representar  $\Omega$  en el intervalo unidad interpretando las sucesiones de ceros y unos como expresiones binarias de números reales). Si se conocen los  $m$  primeros dígitos de  $x_0$ , al cabo de  $m$  iteraciones habremos perdido toda la información inicial, y no tendremos ninguna información acerca de la conducta del sistema, como ocurría arriba. Si conocemos todas las cifras de  $x_0$ , entonces conoceremos

exactamente  $x_k$  para cualquier  $k$ , y el sistema es perfectamente determinista. Mientras que el sistema de May  $x_{k+1} = f(x_k)$  era tradicionalmente considerado como determinista, el proceso estocástico de tiradas repetidas de una moneda equilibrada es el ejemplo más clásico de un proceso aleatorio. La equivalencia de ambos, puesta de manifiesto por la teoría del caos, hace tambalear los conceptos tradicionales de determinismo y aleatoriedad.

### 2. Las matemáticas ¿Una ciencia experimental?

Los sistemas caóticos son intrínsecamente aleatorios. Su conducta no puede ser prevista, aún cuando se conozca su ley de evolución. ¿Cómo estudiar estos sistemas? La **teoría ergódica** muestra que podemos aprender de los sistemas dinámicos a partir de su observación, lo que establece una conexión clara entre las matemáticas y otras ciencias experimentales, particularmente la física. La teoría del caos es de hecho un área compartida por físicos y matemáticos, y en ella la investigación empírica, mediante el uso del ordenador, ha jugado un papel clave.

El análisis clásico de sistemas dinámicos buscaba la obtención de expresiones analíticas de la función  $f^k$  de un sistema, que permite, dada la condición inicial  $x_0$  del mismo, la obtención de su estado al cabo de  $k$  unidades temporales  $x_k = f \circ f \circ \dots \circ f(x_0) = f^k(x)$ . Pero esta tarea es en general imposible si  $f$  es no lineal. Sin embargo la aparición del ordenador hace posible de forma sencilla el cálculo iterativo de  $f^k(x^0)$ . De la observación de una sola **órbita**  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , puede en muchos casos deducirse propiedades genéricas de las órbitas del sistema. Ello ha proporcionado un impulso definitivo al estudio de los sistemas dinámicos no lineales, que es de hecho lo que ha originado el nacimiento de la teoría del caos. La investigación actual en este área incorpora la experimentación como fuente de conocimiento. Las matemáticas pasan de ser una ciencia deductiva a incorporar sistemáticamente mecanismos inductivos para la formulación de conjeturas. No sólo esto, sino que además la experimentación en matemáticas resulta ser incluso más accesible que en otras ciencias, al basarse en tecnología electrónica y no mecánica o química, como en el caso de la física y de las ciencias de la naturaleza ■

Este algoritmo gráfico nos permite encontrar de forma inmediata los **estados de equilibrio de la población**. Ensayando con diferentes valores del parámetro  $\mu$  se puede descubrir con sencillos procedimientos gráficos que una gran variedad de conductas son posibles, desde convergencia asintótica hacia los estados de equilibrio, hasta convergencia asintótica a regímenes periodicos de órdenes 2, 4, 8... Para ciertos valores del parámetro  $\mu$ , como por ejemplo, para  $\mu = 4$ , el sistema entra en **régimen caótico**: No hay convergencia hacia ningún estado de equilibrio ni hacia ningún ciclo periódico; por el contrario el sistema evoluciona aparentemente sin ninguna pauta regular de conducta.

### b) Cálculo de raíces cuadradas usando sistemas dinámicos

Presentamos aquí una aplicación de la teoría del caos a un problema de cálculo que resulta muy adecuada para la experimentación en el aula.

La teoría del caos parte, como en el ejemplo anterior, del estudio de la evolución de **sistemas dinámicos** en que el estado  $x_{k+1}$  del sistema en un periodo se obtiene mediante la ecuación

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

donde  $f$  es cierta función, llamada la **ley de evolución del sistema**, que en general es no lineal. Los puntos de equilibrio se caracterizan por la ecuación  $f(x) = x$ . Un punto de equilibrio  $\xi$  se dice **globalmente atractivo** si para cualquier valor de  $x_0$  se tiene  $x_k \rightarrow \xi$ . Si además se sabe que  $f'(\xi) = 0$ , entonces no sólo el sistema evoluciona hacia  $\xi$  a partir de cualquier condición inicial, sino además lo hace de forma extraordinariamente rápida. Se dice entonces que  $\xi$  es un punto **superatractivo**. Como ejemplo de aplicación, considerar la función

$$f(x) = \frac{c}{2x} + \frac{x}{2}$$

definida en  $\mathbb{R}^+$  y el sistema dinámico asociado,  $x_{k+1} = f(x_k)$ . Se comprueba inmediatamente que  $\sqrt{c}$  es un punto fijo, que es globalmente atractivo. Además se tiene  $f'(\sqrt{c}) = 0$  de forma que se trata de un punto superatractivo. Para calcular  $\sqrt{c}$  basta tomar cualquier  $x_0$  y entonces  $x_k \rightarrow \xi$ . La convergencia es tan rápida que para obtener 36 cifras decimales de aproximación a  $\sqrt{3}$  tomando  $x_0 = 2$ , bastan tan sólo cinco iteraciones. Este ejemplo es ideal para el trabajo en el aula con calculadoras de mano. También puede ser programado muy fácilmente por computador. Con ideas análogas pueden fabricarse otros algoritmos para realizar iterativamente otros cálculos.

### c) Solución iterativa de problemas geométricos

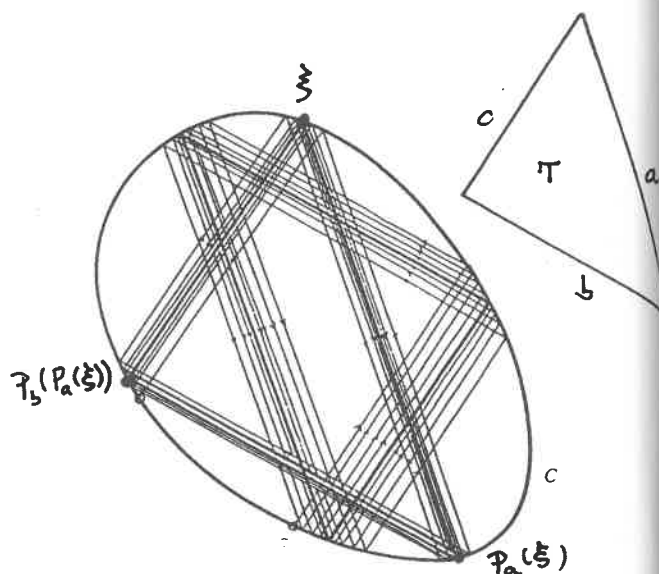
Se tiene una curva convexa y cerrada  $C$ , y un triángulo  $T$ . ¿Es posible construir un triángulo con lados paralelos a los de  $T$  e inscrita en  $C$ ?

Este problema admite una formulación y solución dinámica, que da lugar a un bonito algoritmo gráfico. Para ello llamamos  $a, b, c$ , a los lados del triángulo  $T$ . El lado  $a$  define una aplicación  $p_a: C \rightarrow C$  que a cada punto  $x$  de  $C$  hace corresponder la intersección de la recta paralela a  $a$  y que pasa por  $x$  con la curva  $C$ . Análogamente definimos  $p_b$  y  $p_c$ . La composición de las tres aplicaciones,  $f = p_c \circ p_b \circ p_a$  define un sistema dinámico

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Supongamos que  $\xi$  es un punto fijo, es decir, tal que

$$\xi = f(\xi) = p_c \circ p_b \circ p_a(\xi)$$



Las rectas que unen  $x$  con  $p_c(\xi)$ ,  $p_a(\xi)$  con  $p_b(p_a(\xi))$  y  $p_b(p_a(\xi))$  con  $\xi$  son paralelas a los lados de  $T$  y cierran un triángulo, luego son solución del problema. Puede probarse por medios elementales que el problema admite dos soluciones exactamente. Para buscar gráficamente estas soluciones se toma un punto arbitrario  $x_0$  y se construye la órbita  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Considerando  $g = f^{-1}$  y su sistema dinámico asociado  $x_{k+1} = g(x_k)$  se puede obtener la otra solución.

## 2. Concepciones epistemológicas de las Matemáticas y de su enseñanza

### MODAS Y CREENCIAS EN EPISTEMOLOGÍA MATEMÁTICA. SU RELEVANCIA PARA LA DIDÁCTICA

Camino Cañón

Universidad Pontificia de Comillas. Madrid

**XXXIX.-"He creído deber mío distinguir esos ídolos que obsesionan la inteligencia humana aplicándoles estas cuatro denominaciones (con el fin de que se comprendan mejor): ídolos de raza (prejuicios de la especie), ídolos de antro (prejuicios del individuo), ídolos del foro (prejuicios del lenguaje), e ídolos del teatro (prejuicios filosóficos)".**

(F. BACON, *Novum Organum*, 16).

**H**e querido empezar con esta cita de BACON, para poner de manifiesto con lenguaje clásico algo de lo que vamos a desarrollar en esta exposición, si bien aquí nos centraremos en los dos últimos: los prejuicios del lenguaje y los filosóficos.

Cada generación, según el contexto socio-histórico que le toca vivir, y en nuestro caso, cada generación de matemáticos usa determinadas palabras con prejuicios: las palabras 'conjunto', 'categoría', hace algunos años; expresiones como 'la certeza matemática', 'demostración deductiva',..., hoy. Dejando a un lado las historias personales que hayan podido llevar a esos prejuicios, se dan determinados fenómenos sociales en las comunidades matemáticas que hacen que haya modas, tanto en aceptar y valorar, como en cuestionar y rechazar. Y si bien los fenómenos de la moda tienen que ver con el éxito de algunos conceptos, estructuras o sistemas, también incluyen otro factor menos evidente que se corresponde con los Ídolos del Teatro, y que aquí vamos a tratar como creencias en torno a la matemática, a los objetos de los que trata y al conocimiento matemático en cuanto tal.

No hay mucho que argumentar para evidenciar que las modas generadas por los *Ídolos*, constituyen factores relevantes para las concepciones didácticas y para el trabajo del profesor de Matemáticas en el aula. Tampoco, espero,

necesita muchas razones el poner de manifiesto cómo las creencias básicas del profesor, que no son ajenas a las que reinan en su contexto, condicionan su propio quehacer. El propio texto del BOE sobre la ESO en Matemáticas, en su introducción dice lo siguiente:

"Las Matemáticas deben mucho de su prestigio académico y social al doble carácter que **se les atribuye** de ser una ciencia exacta y deductiva. La cualidad de la exactitud sin embargo, representa sólo una cara de la moneda, (...) De modo semejante, la tradicional idea de las matemáticas como ciencia puramente deductiva, idea ciertamente válida para el conocimiento matemático en cuanto producto desarrollado y ya elaborado, ha de corregirse con la consideración..."

En lo que sigue, veremos en primer lugar, el sentido en el que aquí hablamos de creencias, para pasar después a exponer de qué manera en el transcurso del tiempo desde Grecia hasta nuestro presente se han configurado esas creencias, se han cuestionado, se han abandonado y recreado otras nuevas. Por último nos preguntaremos ¿cuáles son hoy nuestras creencias?, las que están de moda, y las que a cada cual en el aula con la puerta cerrada de hecho le acompañan.

#### IDEAS Y CREENCIAS EN EL SENTIDO DE ORTEGA

"La creencia es —dice Ortega— certidumbre en que nos encontramos, sin saber cómo ni por dónde hemos entrado en ella."<sup>1</sup>

"No llegamos a ellas tras una faena del entendimiento, sino que operan ya en nuestro fondo cuando nos ponemos a pensar sobre algo" (Ibidem). En la literatura reciente sobre el aprendizaje de la Matemática, las investigaciones sobre la influencia de las creencias ocupan un lugar des-

1. J. Ortega y Gasset, *Ideas y creencias*. Editorial Nacional, 8ª Edición, p. 17.

## Mesa Redonda

### INNOVACIÓN EN MATEMÁTICAS Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Coordina:  
**Tomás Recio**

Participantes:  
**José Manuel Aroca, Carmen Corrales, Santos González y Juan Luis Vázquez**

#### Cuestionario para participantes

1. ¿Cómo se hacen las matemáticas ahora?
2. ¿Cómo afectan las nuevas tecnologías al proceso de creación matemática?
3. ¿Qué consecuencias didácticas pueden extraerse de un conocimiento más detallado del proceso creativo actual?
4. ¿Cómo se contemplan en este fin de siglo las grandes dis-

yuntivas: discreto-continuo, determinismo-azar, sintético-analítico...?

5. ¿Qué relaciones guardan en la matemática de hoy las grandes líneas de actividad: matemáticas puras, aplicaciones tecnológicas, ciencias de la computación, matemática física?
6. ¿Cuál habría de ser la proyección de los avances actuales de las Matemáticas sobre la enseñanza de las mismas?

Texto de **Santos González**  
Universidad de Oviedo

La Ciencia y la Tecnología están teniendo un papel protagonista en el cambio y modernización de la sociedad del milenio que pronto va a comenzar. Y como siempre sucede, las Matemáticas están jugando en este progreso un papel casi decisivo tanto en la consolidación y desarrollo de dichos avances como en la esperanza de que otros hitos vean pronto su luz. Es por ello que el papel de todos los protagonistas reales: docentes, investigadores, Centros, autoridades académicas, editoriales e incluso medios de difusión, debe contribuir a un desarrollo armónico de tales avances y a que los mismos sean asimilados por los alumnos y la sociedad en general de una forma óptima, moderna y eficaz.

Los avances de la Ciencia se producen hoy día a ritmo vertiginoso lo que conlleva un enorme esfuerzo de actualización permanente en todas las esferas de la enseñanza y más aún en Matemáticas. Contrasta obviamente, con la evolución y desarrollo en otras etapas de la historia. Así, por ejemplo, del Neolítico a la Imprenta el lapso es de 9000 años pero ahora las transformaciones en curso pueden no precisar más de quince años. Y en todos estos procesos de transformación está presente la Matemática, cada vez más utilizada en la Industria y en las empresas de servicios. Todos los sectores necesitan de ella: la Medicina, la Economía, la industria aeroespacial, la Informática, las Telecomunicaciones, la industria automovilística, la Música, el Arte, etc.

Sin duda, como Emma Castelnuovo hace notar en su obra

*Didáctica de la Matemática Moderna*, pág. 64:

*...la enseñanza de temas científicos (y puede añadirse técnicos) presenta problemas didácticos importantes que están estrechamente ligados con la enseñanza de las matemáticas, por lo que es necesario examinar las relaciones entre ambas ..., y como más tarde reconoce, ... la educación científica debe tener como finalidad hacer pasar de una visión mágica, sobrenatural, de las cosas que nos rodean a un conocimiento objetivo y a un sereno juicio de los fenómenos naturales; debe ser un continuo ascenso en el arte de saber observar.*

Por ello es necesaria una puesta a punto serena y permanente de los conocimientos y un intento, no fácil, de hacer llegar a los alumnos esos avances del desarrollo matemático y de sus numerosas aplicaciones en la sociedad actual. Así sucede, por ejemplo, con el fenómeno de la codificación y criptografía que cada vez tiene más auge y más implicaciones en aspectos que llegan *muy de cerca* a la sociedad en este momento. Introducir de forma inteligible a los alumnos éstos y otros numerosos temas que escapan de este rápido resumen, constituye una necesidad y un reto de la comunidad matemática actual. El papel del matemático cobra cada día más fuerza. Un reciente y recomendable artículo, *Los Bancos de la City londinense se disputan a los científicos prodigio*, publicado en *The Independent* y recogido en *El País*, 8-Enero-1995, pone de manifiesto este importante papel de las Matemáticas y de los matemáticos ante el fin de siglo. Difícil y apasionante pero, sin duda, una gran responsabilidad para todos ■

cimiento que se denominó Matemáticas, es obra de los griegos. A ellos debemos pues la gestación de las 'buenas razones' con que trataron de dar cuenta de esa realidad sorprendente que eran las Matemáticas.

Dice Piaget que hay razones psicológicas que dan cuenta del hecho de que sea posible utilizar durante mucho tiempo las operaciones lógico-matemáticas sin tomar conciencia de su existencia como operaciones. Esto explica que "las matemáticas griegas nacieran esencialmente realistas (o, como ha dicho Pierre Boutroux, 'contemplativas'); es decir, proyectaron en lo real los resultados de las operaciones, en lugar de reflexionar sobre éstas y manipularlas en su calidad de instrumentos móviles y libres de transformación y combinación.(...) Por eso, también es indudable que la primera de las teorías epistemológicas, que consistió en reflexiones de Pitágoras acerca de la naturaleza de los números, demostró ser cabalmente realista: de acuerdo con ese gran matemático, los números enteros constituyen los elementos de los objetos y de las figuras, como si de algún modo se tratara de átomos espaciales, y ello sin la menor sospecha de que tales números pudieran resultar de actividades, de operaciones o de acciones propiamente dichas del sujeto mismo. Para el realismo, pues, el sujeto cognoscente no interviene en el conocimiento: todavía no existe como sujeto activo, y se limita a contemplar".<sup>7</sup>

En esta explicación de Piaget se pone de manifiesto hasta qué punto lo que las Matemáticas sean pasa a ser integrado dentro del acervo de creencias de una cultura, y en ella según las pautas de la creencia se articularán razones para comprender mejor la plausibilidad de esa creencia.

El realismo griego articula de modos diversos —especialmente los pitagóricos, Platón y el propio Aristóteles— eso que algunos autores llaman realismo preteorético<sup>8</sup>: Si los hechos matemáticos son hechos, deben serlo acerca de algo; si las verdades matemáticas son verdad, algo debe hacerlas verdad. Por eso, las matemáticas se presentan primariamente como un conocimiento acerca de unos entes, cuya naturaleza habrá de ser muy especial para que el saber acerca de ellos se constituya en *theoremas*, en contemplación, en *theoria*.

No es este el lugar para hacer una presentación de la filosofía de Platón, pero me atreveré a esbozar algunos elementos que permitan situar alguna de las formas más arraigadas de las creencias en Matemáticas, aquellas que se suele decir, el matemático posee en su más celosa intimidad cuando trabaja, y de las que reniega en las charlas de café con los colegas. Nos hacemos las preguntas siguientes:

1. Qué entiende Platón por conocimiento matemático
2. Cómo concibe el acceso a él
3. Qué finalidades le asigna

### 1. Qué entiende Platón por conocimiento matemático

En el célebre pasaje de la recta (Rep. 507d-511e), distingue Platón entre *doxa* y *episteme*, a la que a su vez divide en *dianoia*, conocimiento propio de la Matemática, y *noesis*, propio de la Filosofía. La *episteme* está orientada "hacia los seres que no nacen ni mueren, antes son eternamente idénticos e inmutables" (*Filebo* 59 b-d).

El mundo sensible lo crea el Demiurgo como una copia del modelo matemático (Paradigma), haciendo también que el tiempo se rija por las leyes de los números. "Los razonamientos tienen un cierto parentesco con los mismos objetos que explican" (*Timeo* 29b). Los razonamientos que se refieren al Paradigma (*dianoia*) "se refieren a lo que permanece, a lo que es fijo y traslúcido para el entendimiento" así pues deberán ser "fijos e indemostrables, y en la medida en que es posible en los razonamientos del ser, deben ser irrefutables e irrefutables" (*Ibidem*, 29b-c).

Los razonamientos que se refieren a la copia del modelo, es decir, los que se refieren al mundo sensible y se basan en observaciones de los sentidos, conducen a resultados que están lejos de conllevar certeza, son sólo verosímiles: "no somos más que hombres, de manera que en esas materias nos basta aceptar una narración verosímil y no debemos buscar más" (*Ibidem*, 29d).

### 2. Cómo concibe el acceso a él

El camino de acceso al conocimiento matemático es la reminiscencia (*Fedón* 74 b-d) conducida por el arte de la mayéutica, como el célebre pasaje del *Menón*, 81e-86c, en que el esclavo conducido por las preguntas de Sócrates, bajo la única condición de entender el griego, llega a probar que la diagonal del cuadrado de lado 2 pies es inconmensurable con la longitud del lado.

El lenguaje es un medio cuya relevancia Platón matiza en diversos pasajes. En este del *Menon*, lo muestra como vehículo necesario para acceder al conocimiento matemático, pero el lenguaje es a menudo un camino engañoso (*República* vii; 527a-b) porque hablamos de acciones como 'cortar', 'añadir',... que realizamos sobre las imágenes empíricas de los objetos matemáticos; los objetos son realidades de otro mundo y a ellos no se les aplica sino metafóricamente ese lenguaje. Por otra parte, el lenguaje

7. J. Piaget, *Naturaleza y Métodos de la Epistemología*, Ed. Proteo, Buenos Aires, 1970, p. 27.

8. P. Maddy, 1990 p. 1.

proporciona elementos convencionales, imprescindibles para llegar al conocimiento (*carta vii 342d*)

### 3. Qué finalidades le asigna

La finalidad primera del conocimiento es la contemplación del Ser, por eso la Matemática le será indispensable al guerrero, no sólo "para entender algo de cómo debe ordenar el ejército", sino "si quiere ser hombre" (cfr. *República vii; 524a*).

Para conocer el mundo por otra parte, el conocimiento del Paradigma que eligió el Demiurgo para crearlo, es el único camino seguro, los demás sólo son aproximaciones verosímiles. Esta convicción de Platón fue fuertemente criticada por Aristóteles que veía en ella una negación del camino de la ciencia natural.

Para los usos de la vida corriente Platón considera que lo que se aplica no es la ciencia matemática, sino un saber que no le merece otra calificación más que 'matemática del vulgo' (*Filebo 56c*).

Hasta aquí y de manera somera esta aproximación a la visión que Platón transmite acerca de las Matemáticas, y que va a marcar decisivamente toda la reflexión que se haga sobre el tema. Como decía Piaget en el texto citado, la Matemática es realista: hay unos objetos a los que accedemos contemplativamente por el camino de la reminiscencia que requiere el apoyo de lenguajes diversos y a veces equívocos, y cuyas relaciones y propiedades aparecen expresadas en proposiciones cuyo carácter no puede ser otro que necesario y universal: nada empírico puede refutarlas, su verdad al referirse a entes que existen siempre y permanecen, está más allá de los sujetos que las piensan y de las culturas que las reconocen. Esta herencia está incrustada en el núcleo mismo de las creencias de nuestra civilización occidental y una buena parte de la historia de las ideas en torno al conocimiento matemático puede articularse en cómo se ha asumido o rechazado esta creencia. Pasamos a decir algo de ello en lo que sigue.

### LA CREENCIA EN LA MODERNIDAD

El giro copernicano que supone la modernidad para la epistemología sitúa al sujeto en el centro de la actividad del conocer; cuáles sean sus relaciones con el objeto conocido, si lo descubre o lo crea, si lo construye o lo reduce a otros objetos más básicos o al lenguaje mismo, serán variantes que se dan según los autores que piensan sobre el tema. Pero esta aproximación común está hecha desde un referente también común: la convicción, la creencia de que el conocimiento matemático es un conocimiento cualitativamente distinto de los demás tipos de conocimiento. El mismo empirismo en sus etapas iniciales reservará para el

conocimiento matemático un lugar difícilmente aislable del terreno de lo cierto.

Al igual que las demás cuestiones objeto del filosofar en esta etapa, también la matemática fue tratada de distinto modo por las dos grandes corrientes racionalista y empirista en los siglos XVII y XVIII. Y también Kant, al igual que sucede con otras grandes cuestiones, aportará un avance de síntesis que posibilitará suelo filosófico a los intuicionismos y constructivismos derivados de aquél, ya en nuestro siglo. Presentaré en primer lugar, algunas ideas de Leibniz en relación con Descartes y otras que expresan su relación y distancia con el empirismo, en particular con Locke.

Leibniz construye sobre la herencia de Descartes, tanto en Matemáticas como en Filosofía. Es contemporáneo de Newton y creador/descubridor del Cálculo Infinitesimal independientemente de él, que Voltaire caracterizará casi un siglo después como "el arte de nombrar y medir exactamente una cosa cuya existencia no puede ser concebida".

Con Descartes comparte la creencia en el carácter cierto del conocimiento matemático y el innatismo de las ideas matemáticas. Sin embargo, se distancia significativamente de él en la fundamentación del propio quehacer y en particular en su concepción del infinito. Lo claro y distinto cartesiano deja paso ahora a la creencia en el orden de algo que se presenta oscuro pero continuo: la claridad de una idea es independiente de la existencia de una imagen de la misma. También la concepción estática cartesiana deja paso a una concepción dinámica posibilitada por el principio de continuidad, que "permite considerar el reposo como un movimiento infinitamente pequeño (es decir como equivalente a una especie de su contradictorio), y la coincidencia como una distancia infinitamente pequeña, y la igualdad como la última de las desigualdades, etc." (*Carta a Varignon, 2-2-1702*). El infinito es así el rey y el origen del dinamismo matemático regido inicialmente por dos principios metafísicos: continuidad y orden que el trabajo tenaz de generaciones de matemáticos han conseguido domesticar ¡—al menos en parte—!

Pero si el quehacer matemático lleva a Leibniz a trabajar con ideas no claras y distintas, no le lleva sin embargo a abdicar del carácter necesario y universal de las proposiciones matemáticas: analíticas, eso sí, en la mente de Dios, y solo virtualmente analíticas en cuanto producto histórico. En cuanto tales, en cuanto productos del quehacer racional humano, históricos y perfectibles, pero su carácter de verdades de razón y no de hecho, con fundamento en las ideas innatas, independiente por tanto de nuestros sentidos, las hace ciertas.

El empirismo también diferenciaba dos tipos de verdades, las matemáticas correspondientes a relaciones de ideas, y las correspondientes a relaciones de hechos. En las dos



intervenían los sentidos, y por ende la certeza no quedaba asegurada en ningún caso. No obstante hasta Mill a mitad del XIX, no hay una articulación crítica que sitúe netamente el conocimiento de la Matemática en la misma arena que el conocimiento de las ciencias naturales.

Como hemos dicho anteriormente, es Kant quien se ocupa de ofrecer una aportación de síntesis que supera estas visiones y que mantiene la validez de la vieja creencia griega en la certeza del conocimiento matemático y en el carácter necesario y universal de sus proposiciones. La conocida propuesta de Kant de considerar los juicios matemáticos como 'sintéticos a priori', proporciona un nuevo referente para quienes después de él se han ocupado de revisar críticamente las creencias de que venimos hablando. La Matemática resplandece como obra de la razón que vuela por sus dominios como una paloma por un aire sin rozamiento alguno.

El empirismo inglés reaccionará ante Kant, como había reaccionado anteriormente ante Descartes. Joh Stuart Mill se echa a sus espaldas la ardua tarea de mostrar que no hay tal cosa como el llamado conocimiento cierto, y que el apriorismo kantiano resulta ser una justificación más, a la que no le resulta suficiente la actividad psichistórica del sujeto que conoce y produce conocimientos.

Para Mill no hay proposiciones necesarias. La necesidad es una creencia basada en el hábito que se ha ido generando a través de generaciones y asentando así verdades de observación construidas con la ayuda del principio de asociación. De ver un balón y un globo y la luna llena, hemos ido aprendiendo a ver un objeto al que hemos denominado esfera. La evidencia de los postulados y definiciones se reduce a esta 'evidencia heredada', y el método deductivo que constituye un salto cualitativo en el modo de hacer ciencia, está asentado sobre una 'inferencia aparente', pues no otra cosa es la deducción, ya que el estatuto de inferencia le corresponde únicamente a la inducción. La deducción no es otra cosa que un proceso de inferencia inductiva abreviada. Esta revisión de la creencia está presente hoy en muchos autores, y en particular en los que preconizan la 'pérdida de la certeza'.

### PUNTO DE INFLEXION Y POSTMODERNIDAD

El punto de inflexión en las creencias lo constituye la revolución epistemológica producida por la aparición de las geometrías no euclídeas. La reacción en los medios matemáticos fue unánime: encontraremos una roca firme que asegure de una vez por todas que la aritmética es el reducto de la creencia que sostiene el carácter necesario y universal de las proposiciones y la certeza de su conocimiento. Logicismo, formalismo e intuicionismo fueron tres

empresas ingentes sostenidas por hombros de gigantes. Los subproductos que aportaron no sólo a la Matemática, sino a la Filosofía fueron de extraordinario valor, pero la roca firme no estaba bajo las arenas movedizas de las paradojas.

"Nosotros no conocemos, solo conjeturamos", es una célebre frase de Lakatos cuya significación se inscribe en ese gozne con las escuelas de búsqueda de fundamentos y con la nueva trayectoria iniciada por Popper de dejar atrás la pregunta por las condiciones de posibilidad del conocimiento, para hacerse la pregunta por el cómo del avance de la ciencia. La obra de Lakatos marca el despegue de otro horizonte en la filosofía actual de la matemática en que la creencia heredada se ha transformado en perplejidad y la convicción de que no cabe la certeza ha ocupado en muchos el lugar de la vieja creencia.

La literatura de los años ochenta ha ofrecido títulos y estudios sobre los modelos de avance de la ciencia que más cuadran a una interpretación de la Historia de la Matemática que tenga en cuenta el carácter acumulativo de sus resultados. Wilder ofrece un modelo evolutivo regido por veintitrés leyes, Kitcher por su parte, inspirándose en el modelo revolucionario kuhniano toma de él el avance por paradigmas, rechazando la inconmensurabilidad de las etapas, Lakatos ofrece el modelo de zig-zag, de pruebas y refutaciones para la etapa de génesis de las teorías. Todos ellos, revelan una posición distante respecto de la creencia heredada, siendo quizás Wilder el que más cabida da a la dimensión de sociología de la ciencia, y consiguientemente a la entrada de una posición relativista en lo que había sido el reducto de la certeza del conocimiento.

Por mi parte, no quiero renunciar ni a la dimensión histórica del quehacer, ni a la consideración de necesidad formal propia de los resultados de teorías maduras. No es éste el lugar para exponer con detalle mi punto de vista. Baste decir que hay elementos complejos en la creencia heredada que necesitan revisión, pero que hay dimensiones de la no arbitrariedad del conocimiento matemático para cuyo abandono no encuentro razones, y me ha parecido en cambio haberlas encontrado para sus sostenimiento.<sup>9</sup>

Queremos terminar estas páginas recogiendo algunas de las preguntas que hoy no podemos ahorrarnos y que son relevantes para el quehacer didáctico en el aula. Son las preguntas acerca de nuestras creencias por el rigor, por el carácter de las demostraciones, de las definiciones, por el papel que otorgamos a la utilidad y a la armonía como factores de validación de un resultado. Son cuestiones cuya respuesta condicionará el modo de hacer, el modo concreto de enseñar, y sobre ellas podemos dialogar ■

9. He expuesto estas ideas en la última parte de mi libro: *La Matemática: Creación y Descubrimiento*. Univ. P. Comillas, 1993.

tacado<sup>2</sup>. Douglas<sup>3</sup> B. McLEOD, en un estudio sobre la influencia de los afectos —emociones, actitudes y creencias— en la educación matemática<sup>4</sup>, diferencia cuatro ejes en relación a las creencias: creencias sobre las Matemáticas, sobre uno mismo, sobre la enseñanza de la Matemática y sobre el contexto social al que pertenecen los alumnos. Aquí nos ocuparemos de las creencias del profesor respecto de las Matemáticas. Dice a este respecto HERSH<sup>5</sup>:

"Las propias convicciones de lo que es la Matemática afectan a la propia convicción de cómo debería ser presentada. La propia manera de presentarlo es una indicación de lo que uno cree que es lo más esencial en ello... La cuestión entonces no es '¿cuál es el mejor modo de enseñar?', sino '¿de qué tratan realmente las Matemáticas?' "

Existen en la literatura tipologías diversas en relación a las creencias respecto de la Matemática; recordemos a título de ejemplo la que ofrece ERNEST (1988):

1. Visión dinámica de la Matemática, como un campo de creación humana en continua expansión, en el cual se generan modelos y procedimientos que son destilados como conocimientos. La Matemática es algo abierto y sus resultados permanecen abiertos a revisión (perspectiva de resolución de problemas).
2. Visión de la Matemática como cuerpo estático y unificado de conocimiento. La Matemática entonces sólo se descubre, no se crea (visiones platonistas).
3. Visión de la Matemática como una caja de herramientas. La Matemática se hace acumulativamente en la medida en que hay objetivos externos a ella que puede ayudar a lograr (visión utilitarista).

Thompson, que hace una presentación detallada de las investigaciones efectuadas para estudiar con precisión la influencia de las creencias sostenidas por el profesor en su modo de enseñar, recoge también una síntesis de uno de sus propios trabajos y afirma:

"A pesar de que la complejidad de la relación entre concepciones y prácticas desafía la simplicidad de la relación causa-efecto, mucho del contraste existente entre la diversidad de énfasis puesto por distintos profesores puede ser explicado por su visión predominante respecto de la Matemática".<sup>6</sup>

Así podemos decir que:

- un instrumentalista enseña de manera prescriptiva enfatizando reglas y procedimientos.
- un platonista enseña enfatizando el significado matemático de los conceptos y la lógica de los procedimientos matemáticos.
- un matemático que esté en la línea de resolución de problemas, enfatizará actividades que conduzcan a interesar a los estudiantes en procesos generativos de la matemática.

No se trata —al menos no es esa mi propuesta—, de encasillar nuestras creencias en una tipología, que como cualquier otra deja fuera muchos matices y reduce a perfiles homogéneos aportaciones singulares y valiosas. Pero sí es importante caer en la cuenta de que nuestros modos de trabajo en el aula tienen fundamentalmente que ver con nuestras creencias. O dicho de otro modo, lo que nuestros profesores, también los de universidad, nos enseñaron y su modo de hacerlo, es inseparable de su propia concepción, de la que quizás algunos de nosotros hayamos tomado distancia, al modo como hemos tomado distancia de otras creencias 'en las que nacimos' como diría Ortega, y que la vida y el conocimiento nos han hecho explicitar y luego abandonar o en otros casos corroborar.

Lo que sigue se orienta a ofrecer una panorámica sintética de cómo se gestaron las creencias más arraigadas en torno a la Matemática, y cuáles han sido las vicisitudes a través de las cuales esas creencias han entrado en crisis en nuestra época de pensamiento postmoderno, en que no sólo se abandonan los grandes relatos, sino las certezas.

### LA GESTACION DE LAS CREENCIAS

Uno de los puntos controvertidos entre los filósofos que se ocupan de la Matemática, es el llamado 'la cuestión del origen'. ¿Nacieron las Matemáticas en Grecia y lo hecho anteriormente por las civilizaciones antiguas era una actividad empírica que preparó el terreno, pero que no merece la misma consideración que el producto racional logrado por los pitagóricos? Kant sería de este parecer. O bien, tenemos que pensar que entre los dos momentos hay sólo una diferencia importante, pero no un corte. Esta segunda posición sería la sostenida por las corrientes empiristas. Sea la que sea la representación del origen que adoptemos, hay un hecho en nuestra civilización occidental que es el que ahora nos importa: hacer objeto del filosofar ese dominio del cono-

2. Ver p.e. el artículo síntesis de Alba G. Thompson, de la Universidad de San Diego. Cfr. o.c. pp 127-145

3. cfr. 1986, p. 13.

4. cfr. o.c. pp 575-596.

5. cfr. 1986, p. 13.

6. o.c., p. 119. El artículo síntesis mencionado está en la pág. 132ss.



a) Por una parte, tanto en los profesores que llamaremos A y B, como en la profesora C observamos una clara tendencia a **relacionar la RP y los conocimientos matemáticos de una forma unidireccional**, con el énfasis exclusivamente centrado en éstos. Así, por ejemplo, los indicadores utilizados nos permiten afirmar que el **profesor A** cree que:

- La idea de *problema* conlleva inevitablemente referencias a conocimientos matemáticos y la idea de *resolución de problemas* está intrínsecamente relacionada con la «manipulación adecuada de los datos» a partir de una actitud *operativista* o *mecanicista*.
- Un problema puede servirle para *motivar* o atraer el interés del alumnado, o para *evaluar* la adquisición de determinados conocimientos, o para «*repasar*» conocimientos anteriores.
- Los problemas siempre deben ser propuestos al final de los temas estudiados, con la finalidad de que puedan «*aplicarse los conocimientos adquiridos*».
- La capacidad de resolver problemas, a pesar de considerarla *innata*, está muy relacionada con la profundidad y cantidad de conocimientos matemáticos aprendidos.
- Un objetivo importante suyo es *evidenciar* la resolución de los problemas propuestos, para que así los alumnos y alumnas «*aprendan*».
- Es indispensable que los conocimientos matemáticos implicados en la resolución de un problema y el proceso de resolución en sí mismo sean aquellos *esperados* por el profesor, aquellos en los que el profesor ha *instruido* a sus alumnos y alumnas.

Además, el estudio ha detectado otros aspectos interesantes y diferenciados en las creencias de los profesores B y C:

- En el **profesor B** se detecta una importante influencia de una creencia que podría resumirse en la siguiente frase: «*no debe dificultarse al alumnado la posibilidad de aprobar la asignatura*»; esta creencia influye directamente en reforzar su idea de que «*los problemas deben ser puestos al servicio de los conocimientos matemáticos*», en la medida en la que así puede *estandarizarse* el trabajo en el aula.
- La **profesora C** defiende a menudo posturas basadas en una creencia no estudiada (ni tan siquiera relacionada propiamente con las matemáticas) que resulta ser una actitud vital suya de «*superación, autoconfianza, insistencia,...*»; sin embargo esta creencia,

que muy posiblemente incide positivamente en aspectos afectivos relacionados con el trabajo con problemas en el aula, no modifican su opinión de que los problemas deben ser reducidos a *no-problemas*.

b) Por otra parte, el **profesor que llamaremos D** manifiesta un conjunto de opiniones y creencias, coherente internamente, en torno a lo que cree que *debiera ser* el trabajo con problemas en el aula; creencias que podríamos representar, en el marco anteriormente descrito, con una cierta tendencia a entender los problemas como «**herramientas para favorecer el pensamiento matemático**»; sin embargo continuamente hace referencias a limitaciones de tipo pragmático en el sentido de que «*de momento,<sup>1</sup> hoy por hoy, sin renunciar a mis principios, ¿qué puedo hacer?*». Así, por ejemplo:

- Su idea de *problema* incluye fuertes referencias al término *situación*, y prevé la posibilidad de un carácter *abierto*; su idea de RP pasa necesariamente por una fase *exploratoria*.
- Observa múltiples finalidades en la RP.
- Propone problemas en cualquier momento y bajo cualquier pretexto.
- Cree que uno de sus objetivos es presentar lo que él llama distintas «líneas de actuación» para la resolución de problemas, insistiendo muy claramente que lo diferencia de los términos *mecanismos* o *conocimientos matemáticos*.
- Provoca que se discutan siempre los problemas en grupos, e insiste muy especialmente en que no sirve de nada «observar buenas resoluciones».
- Cree que no se debe supra-valorar unas vías de resolución respecto a otras, ni unos conocimientos matemáticos implicados respecto a otros.

Sin embargo, como hemos dicho, en «la clase de hoy» reconoce no tener resueltos un conjunto de aspectos trascendentales como son: trabajar de manera efectiva problemas abiertos, valorar los avances en el aprendizaje de estrategias, y por supuesto coordinar estrechamente un trabajo de este tipo en el curriculum de matemáticas. Y esto le provoca inseguridad, y un buen número de contradicciones.

### 3. Un reflejo de estas concepciones: la estandarización de los enunciados

Estos sistemas de creencias en torno a la idea de *problema* y al papel que éstos deben jugar en la educación matemática conducen a los profesores a un conjunto de decisiones

## ¿PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS? ¿PARA QUÉ?

*Una contribución al estudio de las creencias de los profesores/as y alumnos/as*

**Antoni Vila Corts**

*I.B. Gabriel Ferrater. Reus, Tarragona*

### 1. Introducción

La trascendencia del papel de la resolución de problemas (RP) en la educación matemática ha sido recogida y analizada ampliamente en la mayoría de los grandes Proyectos Curriculares e Informes de los últimos 20 años.

Sin embargo, cabe preguntarse hasta qué punto y desde qué perspectiva el profesorado concibe esta trascendencia en el papel de la RP. Por supuesto debemos reconocer que en el lenguaje habitual en el aula se habla más a menudo de «obtener la solución del problema» que de «enfrentarse a él», se habla más a menudo de «organizar los datos del enunciado» que de «analizar la situación planteada», de «comprobar el resultado» que de «explorar situaciones parecidas o más generales», etc.

En la medida en la que estos tópicos del lenguaje respondan a creencias arraigadas en el profesorado, es razonable pensar que los problemas no pasan de ser *ilustraciones* de los conocimientos matemáticos y que la RP es importante sólo en la medida en la cual «se pone al servicio de éstos» y no al revés.

Esta hipótesis es la que se plantea en un estudio (Vila, 1995), del cual son aquí presentadas las conclusiones, sobre algunas concepciones en torno a la idea de *problema* y a su finalidad en la educación matemática.

### 2. Algunas creencias de los profesores en torno a la finalidad de la Resolución de Problemas en la Educación Matemática

Actualmente no se pone en duda la gran influencia que sobre la práctica de la educación matemática tiene el *sistema de creencias* de los profesores en torno a las propias matemáticas y a su enseñanza/aprendizaje (A.G. Thompson, 1984). En particular Kush y Ball (1986) identifican 4 visiones de «cómo deben ser enseñadas las matemáticas»: la que pone el centro de atención en la *construcción del conocimiento matemático* por parte del propio «aprendiz», la que lo pone en la *conceptualización de los contenidos*, en la *ejecución* de estos contenidos, o bien en «la clase» primando *aspectos afectivos*.

Desde esta perspectiva intentaremos dibujar unos *ejes de referencia* donde encuadrar las distintas visiones en torno

a la idea de *problema* y a su papel en la educación matemática, que nos permitan representar/identificar un rango suficientemente amplio de *sistemas de creencias*.

En uno de estos *ejes* situaremos aquellas visiones que dan a los problemas escolares un **papel subsidiario a los contenidos matemáticos**. Aquí encuadraremos tanto aquellas visiones *instrumentalistas* de las matemáticas (A.G. Thompson, 1984), como aquellas que reducen el papel de los problemas al de «*herramientas que permiten aplicar los conocimientos matemáticos*», entendiendo que esta *aplicación* no deja de poner el énfasis en los conocimientos y por lo tanto no es más que una *ilustración* de éstos. Estas visiones suelen entender el aprendizaje desde la tradición *conductista* (imitación de conductas, reproducción del saber,...), apareciendo íntimamente asociadas a un modelo observable de trabajo con problemas en el aula, aquel que definiremos como «**reducción de los problemas a no-problemas**».

En el otro *eje* situaremos aquellas visiones que entienden el problema como una herramienta didáctica para «**favorecer el pensamiento matemático del alumno**», entendiendo el término *pensamiento matemático* como lo describen Schoenfeld (1991) o, desde otras ópticas, Douady (1986) o Mason (1988). Un aspecto observable que caracteriza estas visiones es el de que los problemas son tratados en el aula a la vez «*como objeto y como instrumento de estudio*».

Bajo este marco de referencia fueron estudiados 4 profesores de matemáticas de 1º de BUP (Vila, 1995). Con la finalidad de acceder a una imagen de sus *creencias* se diseñó un estudio que permitiese describir el modelo de trabajo con problemas en el aula a partir de indicadores indirectos. Así, la fuente de información se centró en las manifestaciones efectuadas por los propios profesores (a partir de entrevistas en profundidad y cuestionarios) en torno a: las «pequeñas características» o «pequeñas decisiones» tomadas, las justificaciones que daban a estas decisiones, su opinión en torno a «casos límite» o directamente la expresión de sus «postulados ideales».

El análisis de esta información nos permite describir **2 perfiles distintos** entre los 4 profesores estudiados:

tiempo en «hacer» que en reflexionar sobre el problema, sobre lo que hacen y sobre para qué les sirve lo que están haciendo" (Callejo, 1994).

El estudio, diseñado y desarrollado en la línea previamente abierta por Woods (1987) y M. Luz Callejo (1994), y efectuado sobre la totalidad del grupo-clase de 1º de BUP de cada uno de los 4 profesores estudiados, nos permite constatar por una parte que el alumnado identifica estrechamente la *idea de problema* con la **idea de pregunta**, con enunciado verbal, pregunta que hace explícita referencia a conocimientos matemáticos, considerando además que esta categoría de problema es *intrínseca*, no dependiendo del resolutor. Podríamos interpretar de los datos obtenidos, que estos alumnos y alumnas supervaloran la importancia del enunciado en la medida en la que en él esperan encontrar claramente contextualizado el problema planteado, esperan encontrar también los referentes identificativos en cuanto al campo matemático en el que debe moverse la resolución y a los términos matemáticos que van a ser necesarios para efectuar los cálculos necesarios. Por lo tanto, al identificar el *problema* en estos términos, el alumnado en general considera el problema tan solo como una *situación escolar*, que requiere un *tratamiento escolar*. Así, podríamos decir que la diferencia entre *ejercicio* y *problema* radica, para ellos, en el hecho de que los problemas tienen enunciado verbal, y por supuesto los referentes antes mencionados no son tan evidentes.

Tan solo entre los alumnos y alumnas del profesor D, encontramos de forma significativa alguna referencia a la idea de *problema* en términos de *situación*, y relacionándole características que lo diferencian de una simple ejercitación o aplicación de conocimientos.

Por otra parte, y en cuanto a las creencias de este alumnado en general entorno a la RP, podemos concluir en primer lugar que mayoritariamente esperan o pretenden llegar a «**aprender un método para resolver problemas**» (método del cual se ha captado la idea de que efectivamente «*debe existir y hay expertos, como el profesor, que lo han aprendido*»), y que este método podrán dominarlo en la medida en la que dominen los **conocimientos matemáticos**. Estas creencias están fuertemente arraigadas, a pesar de que manifiestan (o quizás mejor, *reivindican*) que hace falta también otro tipo de habilidades para resolver problemas.

Otro aspecto también detectado (lo que constituye una conclusión central del estudio) es la existencia de una importante **relación entre la práctica escolar y estas creencias**. Es entre los alumnos y alumnas de A, B y C donde

más arraigadas están las creencias anteriores, y es entre los alumnos y alumnas de D donde menos. Sin embargo en algunos ítems del cuestionario sobre creencias administrado al alumnado de la profesora C se observan claras diferencias respecto a los casos A y B; la interpretación que se ha dado a este hecho hace referencia más a la actitud personal<sup>2</sup> de la profesora en clase o en actividades de tutoría que al modelo de trabajo con problemas o a sus creencias.

### 5. Un aspecto crucial: algunas de las dificultades con las que se encuentran los alumnos y alumnas al abordar determinados problemas

Continuando en la línea de analizar la trascendencia que las creencias del profesorado y sus consecuentes planteamientos en el aula puedan tener en el aprendizaje de alumnos y alumnas, un último objetivo del estudio fue el de explorar algunas **acciones** de éstos ante determinados problemas, de manera que pudiésemos tener una imagen de determinadas **dificultades** con las que pueden encontrarse cuando abordan «auténticos problemas».

Con esta finalidad se diseñó la fase del estudio en la que se analizaron las resoluciones dadas por la totalidad de alumnos y alumnas de los 4 profesores estudiados a una colección de 8 cuestiones, aislando en cada una de ellas distintas características (frecuentemente presentes en problemas abiertos o en situaciones-problema) siguiendo la línea de estudios anteriores (NCTM, 1981 y Puchalska-Semadeni, 1987). Se trataba de problemas con enunciados que hacían referencia a casos generales, que contenían una evidente falta o exceso de información, que contenían información claramente contradictoria, que hacían referencia a situaciones muy familiares pero imprecisas, o que proponían la obtención de un amplio conjunto de resultados admisibles o incluso la determinación de alguna regularidad en el conjunto de soluciones.

El análisis cualitativo de estas acciones explicitadas en las hojas de resolución (o implícitas en los cálculos, representaciones o comentarios anotados), y centrándonos únicamente en la fase de abordaje (Mason, 1988), nos permite concluir que las acciones más frecuentes en la resolución de estos problemas son: no responder, efectuar cálculos sin ningún sentido, efectuar anotaciones sin continuidad, no asumir que se está delante de un problema de matemáticas respondiendo a partir de experiencias personales anteriores o de creencias sin relación a las matemáticas, variar el propósito del enunciado, ...

2. Actitud personal, anteriormente mencionada, de espíritu de superación, autoconfianza e insistencia.

(en algunos casos incluso de forma inconsciente) en torno a la tipología de enunciados de las *cuestiones* que deben ser propuestas en el aula.

Así, los profesores A, B y C, que consideran que la RP debe moverse de forma subsidiaria a los conocimientos matemáticos, necesitan una fuerte *estandarización* en los comúnmente llamados «problemas»<sup>1</sup> que proponen a sus alumnos, para poder centrar sus esfuerzos en conseguir reducirlos a *no-problemas*. Entendemos por **estandarización** la inclusión sistemática de referentes que fácilmente puedan identificar diferentes aspectos: los procedimientos matemáticos adecuados para la resolución, el nivel de respuesta esperado, el contexto en el que se mueve el problema,... Esto es lo que permite que los problemas sean realmente «problemas de aplicación», que los alumnos sólo deban centrar sus esfuerzos en la aplicación adecuada del procedimiento matemático adecuado o del patrón de resolución esperado, y no deban pensar en qué procedimiento es éste, dado que es evidente por la situación en la cual el problema es planteado.

El análisis de cada una de las cuestiones contenidas en los materiales didácticos utilizados por estos 3 profesores (centrándonos exclusivamente en la unidades didácticas que se mueven en el campo de la aritmética y el álgebra), análisis contrastado con sus opiniones al respecto, nos muestra efectivamente que entre el 85% y el 95% de las cuestiones propuestas pueden considerarse *ejercicios* (destinados a facilitar la mecanización/automatización/compreensión de los conocimientos matemáticos), y la práctica totalidad del resto de cuestiones pueden considerarse *problemas contextualizados*.

Pero es que a su vez, para conseguir esta *estandarización*, los mismos profesores reconocen que hace falta tomar un conjunto de pequeñas decisiones (explícitas o implícitas) sobre los enunciados de estos problemas. Así, atendiendo a las características de la información contenida en el enunciado de las *cuestiones verbales* (los comúnmente llamados «problemas»), la práctica totalidad son *precisos*, hacen referencia a una situación *concreta* y no contienen ni exceso ni falta de información. Por otra parte, también la práctica totalidad de estas *cuestiones verbales* proponen el cálculo o la obtención de un resultado numérico.

Con lo cual las características de los enunciados de los problemas que los profesores A, B y C, plantean en el aula son una consecuencia de sus creencias, pero a la vez, al ser un reflejo de ellas, pueden considerarse un indicador más.

El caso del profesor D es distinto. Recordemos que el perfil determinado en el estudio lo situaba, aunque sólo en algunos momentos, cercano a la visión de *problema* como «herramienta didáctica para favorecer el pensamiento matemático». También como consecuencia (y reflejo) de este sistema de creencias, observamos que casi un 30% de las cuestiones propuestas en el aula no pueden considerarse *ejercicios* y serían los comúnmente llamados «problemas»; de éstos, la mitad pueden considerarse «auténticos problemas»: *problemas no contextualizados*, o bien *situaciones-problema*, o bien *problemas de estrategia*. Por otra parte solo el 55% de los enunciados de estas *cuestiones verbales* pueden considerarse *estandarizados*, proponiendo también problemas abiertos, o problemas que hacen referencia a situaciones generales, o a situaciones incoherentes, o bien conteniendo exceso o falta de información. Es, a su vez, el único profesor estudiado que, de forma significativa, plantea *cuestiones verbales* que tienen como propósito demostrar, explorar, ejemplificar, obtener pautas, tomar decisiones,... Sin embargo, el mismo profesor D reconoce que el hecho de que proponga problemas de estas características a sus alumnos no garantiza (y él lo duda) que haga un buen uso de estas situaciones didácticas; estas dudas provocan que raramente proponga problemas de estas características en pruebas escritas.

#### 4. ¿Tienen realmente alguna trascendencia estas concepciones y estos modelos? Una exploración de las creencias de los alumnos y alumnas

Analizada la estrecha relación existente entre las creencias de los profesores y sus decisiones en cuanto a planificación del trabajo con problemas en el aula, incluyendo las características de éstos, debemos plantearnos un aspecto crucial: *¿qué trascendencia pueden tener estas creencias en cuanto a la eficacia en el proceso de aprendizaje del alumnado?*

En uno de sus objetivos, el estudio aquí presentado se propuso efectuar una exploración de algunas creencias de los alumnos y alumnas en torno a la *idea de problema* y de *resolución de problemas*. Autores como M. Luz Callejo (1994), expresan su convicción de que determinadas creencias pueden dar lugar a comportamientos que no ayudan a los estudiantes a resolver los problemas con esperanza de éxito. Por ejemplo, en la línea de las conclusiones anteriores, esta autora afirma que «si los estudiantes creen que la resolución de un problema sólo exige la aplicación automática y directa de saberes y habilidades, invertirán más

1. Realmente, desde nuestra óptica negamos la categoría de problemas a la mayoría de cuestiones así planteadas a los alumnos; sin embargo mantendremos este nombre como «cajón de sastre».

## BIBLIOGRAFÍA

- Callejo, M.L. (1994): *Un club matemático para la diversidad*. Narcea, Madrid.
- Douday, R. (1986): "Jeux de cadres et dialectique outil-objet". RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, vol.7, n.2, pp 5-31.
- Kuhs, T.M. y Ball, D.L. (1986): *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills and dispositions*. East Lansing, Michigan State University, center on Teacher Education.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988): *Pensar Matemáticamente*. Editorial Labor-MEC. Madrid.
- N.C.T.M. (1981): *Report on the Second National Assessment of the Educational Progress*. NCTM. Reston, Virginia.
- Puchalska, E. y Semadeni, Z. (1987): "Children's Reactions to Verbal Arithmetical Problems with Missing. Surplus or Contradictory Data". FOR THE LEARNING OF MATHEMATICS. vol.7, pp 9-16.
- Schoenfeld, A.H. (1991): "Wath's all the fuss about Problem Solving?". ZDM, 9/91.
- Thompson, A.G. (1984): "The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice". EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS, 15, pp 105-127.
- Vila, A. (1995): *Els problemes estandarditzats a la classe de matemàtiques. Una contribució a l'estudi de les seves causes i conseqüències*. Treball inèdit. Programa de Doctorat en Did. de les Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Woods, D.R. (1987): "Misconceptions about Problem Solving". TEACHING THINKING AND PROBLEM SOLVING. Vol.9(4).

Analizando detalladamente estas acciones y relacionándolas con las creencias detectadas en estos mismos grupos-clase, podemos formular de manera razonable una hipótesis explicativa: los alumnos buscan en los enunciados de los problemas un conjunto de referentes habituales (consensuados explícitamente o implícitamente con el profesor, a partir de la práctica escolar anterior) que les permitan por una parte descubrir cuál es el procedimiento matemático (o el campo de conocimientos) al cual hace referencia, y por otra parte decidir la manipulación más adecuada de los datos contenidos en el enunciado; sin embargo estos referentes no son hallados en estos enunciados, o bien son hallados pero se trata de referentes inadecuados<sup>3</sup>; en cualquier caso, se intentan aplicar los «mecanismos» habituales, y al no «funcionar», o «funcionar de forma incompleta», el resultado es un bloqueo, una acción incoherente, o una «salida del problema» (por ejemplo, no asumiendo que se trata de un problema de matemáticas).

Profundizando más en el análisis anterior, podemos formular tres nuevas conclusiones. En primer lugar, los datos obtenidos en el estudio nos permiten establecer que no hay una clara relación entre aquellas acciones que en cierta manera podríamos calificar de satisfactorias (o que pueden llevar a una fase de ataque efectiva) y las calificaciones de matemáticas de 1º de BUP obtenidas por los alumnos durante el mismo curso<sup>4</sup>. Esta conclusión tiene importancia en la medida en la que nos anticipamos a una hipotética objeción a las conclusiones del estudio, objeción que vendría formulada en términos de «estamos hablando no tanto de problemas poco frecuentes en el aula, como de problemas más difíciles que los habitualmente propuestos en el aula; por lo tanto solo el alumnado mejor preparado tiene capacidad para enfrentarse a ellos con alguna garantía de éxito».

En segundo lugar, el hecho de haber trabajado en el aula con problemas de estas características (y por lo tanto bajo un modelo de trabajo distinto, en algunos momentos, del que hemos llamado «*reducción de los problemas a no-problemas*») aumenta las posibilidades de desarrollar acciones satisfactorias. Este es el caso de los alumnos y alumnas del profesor D.

Y finalmente, a pesar de la conclusión anterior, se ha constatado que no todos los problemas pueden considerarse abordados con un cierto éxito por los alumnos y alumnas del profesor D; ni tan siquiera en aquellos problemas en los que

las diferencias respecto a los otros grupos son más significativas podemos hablar de resultados satisfactorios. Así pues, podríamos formular una última conclusión en la línea de la efectuada por Puchalska y Semadeni (1987) con alumnos de 7 años: para conseguir una cierta efectividad, no es suficiente con el trabajo de forma aislada con problemas de este tipo, tal como vemos que se produce en el caso del profesor D.

## 6. Una reflexión final

El estudio aquí presentado nos ha mostrado un buen número de conclusiones que cabe considerar de una cierta trascendencia en cuanto a sus implicaciones didácticas. Pero principalmente nos ha inducido a emitir unas hipótesis no menos trascendentes, hipótesis que deberán ser contrastadas en posteriores estudios.

Estas conclusiones e hipótesis nos llevan a considerar que, en el caso en el que un profesor o profesora considere importante<sup>5</sup> que sus alumnos y alumnas aprendan a enfrentarse a situaciones que les son totalmente desconocidas, deberá en primer lugar *asumir*, no miméticamente, que la Resolución de Problemas debe jugar un papel *intrínsecamente* importante.

Esta creencia deberá quedar reflejada en su actitud en clase, en la atmósfera creada en el aula, y en las decisiones tomadas en el diseño y desarrollo curricular en cuanto a la pretensión, entre otras, de conseguir en el alumnado un cambio cualitativo en sus creencias (sobre la idea de problema y de resolución de problemas, sobre lo que se espera de ellos, y lo que ellos mismos deben esperar de la RP).

En caso contrario, no es fácil que sea la educación matemática recibida la que capacite al alumnado a enfrentarse con garantías de éxito a «auténticos problemas», incluso al alumnado «mejor preparado», y en cualquier caso no nos referimos al éxito solo en términos de «obtención de la solución buscada», sino también desde una perspectiva de tipo afectivo: «la satisfacción con la tarea desarrollada durante el proceso de resolución» ■

3. No olvidemos que se trataba de enunciados de problemas con características poco o nada frecuentes en la experiencia anterior del alumno, como el mismo estudio había detectado.

4. Los datos del estudio fueron obtenidos durante el mes de junio de 1994.

5. Queremos resaltar esta precisión.



de los distintos contextos— de los que ponen en juego los mejores matemáticos, desde Diofanto hasta nuestro s. XIX, para encontrarle sentido a ese 'centauro ontológico' que son -para Leibniz- las magnitudes imaginarias.

Intentaremos ahora aplicar esta metodología de análisis a aquel objeto matemático que el llamado *programa fuerte de sociología del conocimiento científico* no era capaz de explicar: el cero. Y lo haremos en dos contextos sociales e históricos bien diferentes, para observar cómo los dispositivos simbólicos que se ponen en marcha son, en cada caso, también radicalmente distintos.

Un cero aún sin conceptualizar es un blanco ideal para la actuación de dispositivos simbólicos, pues:

- se trata de una expresión sin referente aparente
- conduce a todo tipo de paradojas (como las de dividir por cero)
- no existe caracterización en el repertorio matemático durante siglos
- incluso definido, es un concepto mal comprendido (seguramente hasta la elaboración de la *t<sup>a</sup>* de grupos)

Cada problema que históricamente atañe -sabemos hoy- al cero, recorre los procesos simbólicos que distingue Sperber:

- 1º) El problema se va focalizando, por desplazamientos metafóricos, en torno a conceptos vecinos (vacío, no-ser, caos en Europa) o a otros símbolos ya cristalizados (Tao o Hun-tun en China).
- 2º) Estas focalizaciones dispararán un complejo de evocaciones inconscientes del repertorio de significados de cada sociedad: evocaciones conceptuales (inextenso), afectivas (horror, carencia), valorativas (la falta como defecto), gramaticales (partículas y sufijos negativos y privativos) o técnicas (suma, resta, técnicas numéricas, métodos de resolución de ecuaciones).
- 3º) Estas evocaciones se condensan (de distinto modo en cada contexto social e histórico) en los diferentes ensayos de conceptualizarlo formalmente, de operar con él, o de rechazar la mismísima posibilidad de que pueda existir algo semejante...

En la Grecia clásica, el texto que más aproximadamente evoca algo como nuestro cero pertenece al libro IV de la *Physica* de Aristóteles. Este texto se encuentra entre los muchos argumentos con los que Aristóteles intenta espantar racionalmente el pánico al vacío, y dice así:

"Pero no hay ninguna razón en la que el vacío (*kenón*) sea excedido por los cuerpos, de igual modo que 'nada' (*mèden*)

= nada hay que) no está en razón alguna con un número. Pues 4 excede a 3 en 1, y a 2 en más (que 1), y a 1 en todavía más de lo que excede a 2; pero cuando llegamos a nada (*mèdenós*) no hay razón alguna en la que 4 lo exceda, pues el número que excede debe dividirse en el exceso y el número que es excedido, así que 4 debería ser la suma del exceso y nada (aquí *oudén*, no *mèdén*: no hay concepto para ese 'nada'). Por esto, tampoco una línea excede a un punto (en ninguna razón), porque no está hecha de puntos. Similarmemente, el vacío no puede estar en razón alguna con lo lleno"

En el texto podemos observar que:

- 1º) Se trata de un razonamiento analógico (vacío/cuerpos = nada(no) / números) que en realidad es la puesta en lógica de un prejuicio (la aversión al vacío) mediante el recurso a la autoridad moral que se concede a las matemáticas.
- 2º) El razonamiento matemático sobre el que descansa la demostración ( $4=3+1$ ,  $4=2+2$ ,  $4=1+3$ ,  $4=mèden+4$ ) no es ni siquiera un razonamiento. Se inicia una serie que, por inducción, queda frustrada: la sinrazón de *mèden* no se demuestra, es evidente, es un prejuicio aún más hondo que el del horror al vacío y, por tanto, ni siquiera es objeto de reflexión: 'nada' no es pensable porque es lo que permite ponerse a pensar, que es como Ortega define una creencia. Al llegar ahí, el argumento toca fondo (el fondo de la evidencia colectiva, de la opinión común) y rebota: por analogía a la 'sinrazón' de 'nada' se concluye la sinrazón del vacío. El argumento es, además, un buen ejemplo de cómo se utiliza la *reducción al absurdo* para confirmar los prejuicios de los que ya se partía.

Entonces, ¿qué hay bajo esa evidencia? Por un lado, un rasgo cultural específico: el sustancialismo o cosismo griego, el predominio del sentido de la vista que se forma 'ideas' (abstractos) de las cosas. El número griego es así también algo lleno, pleno, visible: tanto en su versión pitagórica (números figurados, ¿cero?), como en la platónica ('multitud de unidades', ¿cero?, ¿uno?), como en la euclídeo-aristotélica (segmentos, ¿cero?). Por otro lado, un rasgo socio-religioso: la pérdida de la fe en los dioses (Severino) mueve a la especulación griega a construir un cielo de conceptos bajo el que protegerse: y protegerse en particular del miedo al devenir, de ese brotar las cosas de la nada y volver a la nada cuando se renuncia a recursos trascendentes: ¿Cómo instalar entonces la nada en el corazón mismo de ese cielo protector que son las ideas y, en particular las ideas matemáticas? No, para el cero no ha lugar en el nuevo culto a la razón que sustituye a la religión de sus mayores.

### 3. Historia de las Matemáticas: ¿qué enseñar y qué nos enseña?

#### RAÍCES CULTURALES DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS Y EL CERO

**Emmanuel Lizcano**

Facultad de Sociología. UNED. Madrid

**P**resentaré aquí, sintetizadas y reestructuradas, alguna de las indagaciones que desarrollo con pormenor en mi libro *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia* (Gedisa, Barcelona, 1993). Lo original de esta presentación es que reorganiza ciertos materiales allí estudiados, utilizando para ello un modelo de análisis antropológico capaz de aplicarse asimismo al estudio de la emergencia de cualesquiera otros objetos, operaciones o construcciones matemáticas. Comoquiera que las circunstancias en que los nuevos conceptos emergen en el alumno que los aprende por primera vez son, en cierto sentido, similares a los de su emergencia histórica (por diferente que sea el sustrato cultural desde el que emerjan en cada caso), creo que el método de análisis que aquí propongo tiene evidentes y útiles aplicaciones didácticas.

Para la antropología cognitiva de Dan Sperber (*El simbolismo en general*, Anthropos, Barcelona, 1978), lo simbólico no consiste tanto en un repertorio de objetos (símbolos) a interpretar o utilizar, cuanto en un dispositivo de conocimiento que actúa cuando el dispositivo conceptualizador resulta insatisfactorio. Este dispositivo simbólico no actúa sobre unos símbolos predefinidos, a los que interpretaría o deconstruiría, sino sobre problemas o situaciones para los que no hay conceptos elaborados: es un dispositivo de construcción de significado. Así, p.e., a la hora de intentar pensar un olor, para el que carecemos de un repertorio semántico adecuado, se produce un doble movimiento, a la vez afectivo e intelectual:

- 1º) un movimiento de focalización en una imagen, sensación o concepto que funciona como co-relato analógico del olor que se quiere pensar;
- 2º) una cascada de evocaciones convocadas por el poder atractor de aquel foco, sobre el cual vienen a precipitar, contribuyendo a darle forma. Este doble movimiento se correspondería más o menos

con las operaciones de desplazamiento y condensación que considera Freud, y con los dispositivos metafórico y metonímico que para Jakobson estructuran cualquier lenguaje. Desde esta perspectiva, es el proceso simbolizador -y no la matemática, según el proyecto leibniziano- el que está en el origen de todo lenguaje. Y, en particular, en el origen del lenguaje matemático y lógico.

Efectivamente, en cada problema matemático aún sin resolver, en el origen de cada concepto cuando aún no lo era, fracasa la conceptualización anterior igual que fracasa nuestro repertorio enciclopédico ante los olores. Y cada una de estas situaciones puede pensarse en términos de un proceso de simbolización.

De hecho, cada una de las situaciones en que el antropólogo observa la actuación de dispositivos simbólicos en sociedades primitivas apenas difieren de las análogas en las tribus de matemáticos y epistemólogos. El tratamiento que sufre el problema de los olores es análogo al que sufrirán los ensayos de conceptualización del cero (como veremos a continuación), de los números negativos, los irracionales o los infinitesimales, que han llenado de divertidos errores, de retórica y de poesía las páginas de los mejores matemáticos ("En matemáticas —decía Wittgenstein— son tretas gramaticales las que nos convencen"). Las paradojas que el problema de unos leopardos que les resultan ser cristianos a los *dorzé* y la negociación de sentidos que éstos llevan a cabo para preservar sus principios de clasificación, reproducen las mismas operaciones sociales e intelectuales con las que - como veíamos -los matemáticos y lógicos abordan y negocian el sentido de las paradojas aparecidas en teoría de conjuntos. O los dispositivos simbólicos que se disparan ante construcciones sintácticas sin referente empírico, como son, p.e., los centauros, apenas difieren —salvo en las circunstancias



- 2º) espacio extenso y homogéneo de representación, y  
3º) numerales alfabéticos.

Pero ¿de dónde sacan los matemáticos chinos el material y la inspiración con los que construir esos caminos y objetos que son *imposibles* para otros matemáticos, tan sabios al menos como ellos? Ese manatí no es otro que la sociedad china de la época, con su peculiar estructuración social y conformación mítico-simbólica.

Una buena pista para adentrarnos en ese universo imaginario de la China anterior a los Han nos la suministran los propios palillos numerales. Los mismos palillos que se usan en álgebra son también los empleados en multitud de otras operaciones, pero operaciones no matemáticas sino populares. Arrojando esos palillos se lee el futuro y se reflexiona sobre la propia historia y la historia del pueblo chino mediante las técnicas del I Ching, con ellos hacen los comerciantes sus cálculos, con ellos se juegan juegos siguiendo reglas no menos intrincadas que las del álgebra, y con ellos hasta se come. En esos palillos está, precipitado, materializado, buena parte del imaginario social y de la memoria colectiva del pueblo chino. Por medio de los palillos la actividad matemática se funde, y se confunde, con otras mil actividades cotidianas.

Pues bien, en su uso algebraico, esos palillos son de dos colores (negro y rojo) o de dos formas (sección cuadrada o triangular), que se corresponden con lo que nosotros llamaríamos números negativos y positivos, respectivamente. Números que, como el cero, tampoco tienen el menor sentido ni para el álgebra geométrica griega ni para la potente álgebra simbólica árabe. No tiene el menor sentido afirmar (como hace algún ilustre historiador de la matemática: Boyer) que: "la idea de los números negativos no parece haber ocasionado muchas dificultades a los chinos, puesto que estaban acostumbrados a calcular utilizando dos grupos de palillos". No tiene el menor sentido, pues una de dos: o la 'idea de números negativos' es distinta de los grupos de palillos y los pre-existe en algún olimpo matemático, o ambas cosas —idea y palillos— son la misma cosa (lo que parece más acorde con el modo de pensar chino, para el que las ideas son directamente lingüísticas). En cualquiera de ambos casos el problema queda intacto: ¿por qué los chinos, y sólo los chinos, operan con palillos de dos colores, que nosotros podemos hoy identificar con nuestra idea de números positivos y negativos?

La respuesta la obtenemos observando atentamente cómo trabajan estos palillos en el álgebra *fang cheng* para la resolución de sistemas de  $n$  ecuaciones con  $m$  incógnitas

(un método que no se conocerá en Europa hasta el s. XIX bajo el nombre de método de Gauss).

El objetivo del método es ir equilibrando entre sí (*qi tong*) palillos negros y rojos, de modo que se vayan destruyendo mutuamente, hasta conseguir que determinados lugares queden vacíos, que en ellos los palillos desaparezcan (*jin*) (lo que en matemática moderna se llamaría diagonalizar la matriz). Literalmente, se trata de un sofisticado método para producir nada, para obtener el vacío, un método que pondría los pelos de punta a los griegos.

Si ahora enfrentamos esto con toda la batería de argumentos con que Aristóteles, y toda la tradición occidental (matemática, estética, física, teológica), intenta expulsar al vacío del ámbito de lo pensable y de lo existente, acaso tenga sentido pararse a pensar en que estamos no sólo ante dos matemáticas inconmensurables, sino ante dos modos de pensar que no admiten común medida (y soy consciente del rechazo general que producen tesis como éstas, un rechazo que también sería interesante analizar en el marco de una antropología simbólica de los mitos modernos de Occidente).

Pero lo realmente interesante (aunque ahora no podamos ya pararnos en ello) es observar la perfecta homología que entrelaza a la terna matemática *zheng/fu/wu* (palillos-rojos/negros/hueco-en-el-tablero) con la terna simbólica *yang/yin/tao*. Una terna en torno a la que se anuda todo el complejo de significaciones imaginarias chinas y que alimenta tanto el vocabulario como los modelos teóricos de todos los saberes chinos: filosofía, física y química, geografía, astronomía, etc. Una terna que Granet ha estudiado magistralmente en su doble dimensión de dar forma —y también expresar— a las distintas dimensiones y dinanismos de la vida social en China: fiestas populares, disposición de las habitaciones de la casa, formas de gobierno de las comunidades locales, etc. El *tao*, como el hueco en el tablero de cálculo, se nombra siempre negativamente (bien mediante imágenes contradictorias, bien diciendo lo que no es). El *tao* divide —a la vez que enlaza— a las oposiciones en que consiste toda realidad (y, en particular, la realidad del número). Es el gozne que articula y permite el tránsito y la operación entre los opuestos, es el manatí del que emergen las alternancias y las oposiciones y lugar el sin marca en el que se remansan. Un estudio filológico detallado de esta homología (como el que ensayo en mi libro) confirma rotundamente el singular arraigo de la matemática china —y también de su lógica— en las mismas formas de memoria compartida que estructuran y dinamizan toda su vida social (p.e. los significados de *zheng* y *fu* en el lenguaje ordinario, o el carácter no-marcado de lo negativo respecto de lo positivo) ■

3º) Ante el problema del vacío, el argumento aristotélico pone en funcionamiento ejemplarmente aquel dispositivo simbólico que analizaba Sperber:

- a) Problema: vacío/cuerpos (paradojas, mal conceptualizado): un problema ante el que fracasa el dispositivo conceptualizador.
- b) Focalización: en torno a 'nada/número', por desplazamiento analógico ('de igual modo que': *hòs-per*, 'similarmente').
- c) Condensación de evocaciones sobre el nuevo foco: punto/línea, *aritmós* (asociación del número con los cuerpos), la asociación razón=relación(sumativa)=existencia, concepto de exceso o diferencia (que implica la exigencia de una sustrato común que permita sustraer=*aphaíresis*).

Si ahora nos trasladamos a la China de la época de los Primeros Han, lo primero que choca no es ya encontrarse con el cero en el texto clásico más antiguo de la matemática China ("Los nueve capítulos del arte matemático") sino con una multitud de ceros: unos que reciben distintos nombres según el contexto matemático en que aparecen (resolución de ecuaciones, cálculo de raíces cuadradas) y otros que aparecen en contextos que ni siquiera son matemáticos (técnicas adivinatorias, esquemas cosmogónicos). El cero está tan extendido en China como lo está en Grecia la aversión por él.

Pero vayamos de nuevo a los textos mismos. En el cap. 8º de "Los nueve capítulos...", el problema 8 dice:

"Al vender 2 vacas y 5 cabras para comprar 13 cerdos, hay un superávit de 1000 monedas. El dinero obtenido de vender 3 vacas y 3 cerdos da justo para comprar 9 cabras. Al vender 6 cabras y 8 cerdos para comprar 5 vacas, hay un déficit de 600 monedas. ¿Cuál es el precio de una vaca, de una cabra y de un cerdo?"

Hasta aquí, no parece haber nada nuevo. Pero la primera sorpresa surge al ver representado el planteamiento del problema: no en un espacio extenso como el euclídeo sino en un espacio simbólico, como el que desarrollará nuestra álgebra matricial del s.XIX. Pues bien, serán precisamente las características de estos espacios de representación las que den una realidad u otra, o incluso den o nieguen realidad, a lo que en ellos se representa. Será la representación la que construya la realidad de ciertos objetos, y no -como suele mantenerse- a la inversa.

En la figura podemos observar lo siguiente:

- 1º) La disposición de la matriz reproduce la de la lengua escrita china: en columnas de arriba a abajo y de izda. a dcha.

Igual que la expresión de una ecuación en Occidente reproduce la estructura de las lenguas indoeuropeas (la segunda línea:  $3x+3z=9y$  se corresponde con Sujeto-Verbo-Predicado: "3 vacas y 3 cerdos dan justo para 9 cabras"). Pero esta aparente trivialidad condiciona el que ciertas cosas puedan decirse y otras no, esto es, que ciertas cosas puedan existir entre los hablantes de una lengua y no existan para los de otra.

En la matriz, cada número (palillos) significa en función del lugar que ocupa en el conjunto, como los ideogramas chinos, que son invariantes. Sólo teniendo a la vista el esquema global (como en una partitura musical) se entiende cada frase o cada palabra.

El 'cero' de la segunda columna es, en el original, un hueco: en ese lugar no hay palillos (números). En nuestras lenguas, el hueco en la escritura es insignificante: se limita a separar dos significados, dos palabras. Pero ese hueco en la escritura china es un hueco que significa: y significa lo que significa por ocupar precisamente ese lugar y no otro. (Por cierto, el que sea el lugar el que signifique, y por lo tanto no haya la menor necesidad de atribuir un nombre especial '-cero'-al lugar vacío, ha llevado en ocasiones al flagrante etnocentrismo de decir que la China antigua desconocía el cero).

Si intentamos escribir esa columna en álgebra simbólica (!), resultaría:  $3x-9y+3z = 0$ . Pero no encontramos expresiones así hasta nuestro s. XVII. Ni para los griegos, ni para el álgebra alejandrina, ni para la potente matemática árabe, ni para el álgebra renacentista, tiene el menor sentido que 'algo' sea igual a 'nada', que 'nada' pueda predicarse de 'algo'.

Junto a las características lingüísticas y a las del espacio de representación, el tercer elemento que permite a la episteme china pensar el 'cero' es el singular tipo de materialidad en que se expresa su sistema de numeración. El hecho de que los números no se escriban, sino que se pongan al poner palillos en el tablero de cálculo, permite que (al operar los números entre sí) los palillos vayan cambiando de un lugar a otro, y que -en determinados momentos- determinados lugares se queden vacíos de forma 'natural'.

Pero si estos tres elementos (lenguaje, espacio simbólico de representación y palillos numerales) posibilitan el que pueda emerger algo como el cero, no determinan necesariamente esa emergencia. Son sólo un camino para que la nada pueda decirse: un camino que en el álgebra geométrica griega ya estaba bloqueado precisamente por las características específicas de esos tres elementos:

- 1º) lenguaje lineal (S-V-P), donde las palabras se remiten a conceptos externos (significados) en lugar de significar por sí mismas y por su situación en el contexto,

## 2. RESTAURAR EL ÁLGEBRA ÁRABE

Desde hace ya una treintena de años se está urdiendo otra trama que permite hacer desempeñar al álgebra árabe clásica un papel distinto, gracias fundamentalmente, desde mi punto de vista, a los trabajos de Roshdi Rashed y de Jens Høyrup. Aunque resulta poco menos que imposible enumerar en pocas líneas todo lo que cada uno de ellos ha realizado, o tratar de resumirlo, y más aún intentar encajar conjuntamente las piezas elaboradas por uno y otro, en este apartado presento un comprimido de todo ello.

A Roshdi Rashed se le debe el descubrimiento y el establecimiento, entre otros, del texto de cuatro de los libros de las *Aritméticas* de Diofanto que se daban por perdidos, en una traducción árabe de Qusṭā ibn Lūqā con el título de *Arte del Álgebra*, hecha pocos años después de la aparición del libro de al-Khwārizmī; el texto de un *Tratado sobre las ecuaciones* de Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī (s. XII), que desarrolla la obra algebraica ya conocida de ‘Umar al-Khayyām; y los textos de los libros de al-Ḥasan Ibn al-Ḥasan Ibn al-Haytham *Tratado sobre el Análisis y la Síntesis* y *Tratado sobre los Conocidos*, en los que éste no sólo retoma este método griego, sino que lo desglosa al considerar subtipos de los dos tipos, teórico y problemático, distinguidos por Pappus, y presenta ejemplos de aplicación de cada uno de los subtipos en las distintas partes de las matemáticas<sup>5</sup>. Es obvio que la aparición de estos textos desconocidos hasta la fecha obliga a volver a organizar partes importantes de la historia de las matemáticas, pero, además, su hallazgo no es fruto simplemente del azar, sino de un proyecto general<sup>6</sup> que, precisamente por tomar las matemáticas árabes clásicas como un corpus específico y no como mero transmisor de otros legados, hace buscar los documentos cruciales y no los anecdóticos.

Jens Høyrup, por su parte, ha desarrollado una nueva lectura de los textos algebraicos babilónicos que se propone no proyectar sobre ellos el álgebra posterior, sino recomponer el sentido del texto a partir de los usos de los términos técnicos —y, en general, la estructura del sistema matemático de signos con que están escritos— que están efectivamente presentes en ellos. Esta lectura ha tenido como consecuencia dejar de verlos como textos que tratan sobre números y propiedades aritméticas, para mostrarlos como textos geométricos en los que, sin embargo, los objetos y relaciones geométricos carecen de compromiso ontológico y pueden, por tanto, usarse para *representar* otros tipos de objetos<sup>7</sup>. Además, Høyrup ha rastreado varias tradiciones de planteamiento de problemas con formato de enigmas o pasatiempos y de técnicas para su resolución, presentes desde la época paleobabilónica hasta la Edad Media. La fuente de esos problemas, cuyos enunciados los presentan como si fueran problemas del “mundo real”, pero que, en todos los casos, es imposible que se presenten en la actividad práctica, la sitúa Høyrup en dos tipos de prácticas: por un lado, la de los ejercicios escolares en los que se pretende entrenar en el uso de técnicas y, por otro lado, la exhibición de la maestría en el dominio de las técnicas de una profesión. Esta última práctica, de los agrimensores en particular, habría constituido una tradición “subcientífica” persistente a través de los siglos en la que se habrían generado incluso técnicas para resolver problemas ahora ya ajenos a la actividad profesional y planteados con el único objetivo de mostrar el orgullo de la profesión, en concreto, las técnicas para resolver los problemas “de segundo grado”<sup>8</sup>.

Esa nueva lectura de los textos babilónicos de “álgebra” y ese establecimiento de tradiciones “subcientíficas” de resolución de problemas proporcionan unos antecedentes nuevos para el álgebra árabe clásica, que Høyrup no sólo postula como posibles, sino que presenta una prueba<sup>9</sup> de que efectiva-

5. Los dos primeros están editados por Les Belles Lettres en la colección *Sciences et Philosophie Arabes*, que dirige el propio Rashed: Diophante, *Tome III. Les Arithmétiques. Livre IV, et Tome IV, Livres V, VI et VII*. Texte de la traduction arabe de Qusṭā ibn Lūqā établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres, 1984; Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, *Œuvres mathématiques, Algèbre et Géométrie au XII<sup>e</sup> siècle. Tomes I et II*. Texte établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres, 1986. Los otros dos son los primeros de una serie de tres artículos que han aparecido en *Mélanges de l'Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire*: Roshdi Rashed, “La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham”, suivi du “Traité d'al-Ḥasan Ibn al-Ḥasan Ibn al-Haytham sur l'analyse et la synthèse”, *MIDEO*, vol. 20, págs. 31-231, 1990; y Roshdi Rashed, “La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham, – II: «Les Connus»”, suivi du “Traité d'al-Ḥasan Ibn al-Ḥasan Ibn al-Haytham sur les connus”, *MIDEO*, vol. 21, págs. 87-276, 1993.
6. Este proyecto se describe en su recopilación de artículos *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des Mathématiques arabes*, op. cit.
7. Cf. Jens Høyrup. “Algebra and Naïve Geometry. An investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought”. *Altorientalische Forschungen*. Vol. 17, págs. 27-69 y 262-354, 1990.
8. Cf. Jens Høyrup. “‘Algèbre d'al-ḡabr’ et ‘algèbre d'arpentage’ au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne”, in Fr. Mawet & Ph. Talon, eds., *D'Imhotep à Copernic. Astronomie et mathématiques des origines orientales au moyen âge*, pp. 83-110. Actes du Colloque International, Université Libre de Bruxelles, 3-4 novembre 1989 (Lettres Orientales, 2) Leuven: Peeters, 1992; y Jens Høyrup, “The Antecedents of Algebra”, *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints* 1994 nr. 1.
9. Cf. Jens Høyrup, “al-Khwārizmī, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: On the Origins of Islamic Algebra”, *ERDEM*, vol. 2, págs. 445-484, 1986.

## UNA RESTAURACIÓN DEL ÁLGEBRA ÁRABE

Luis Puig

Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València

### 1. INTRODUCCIÓN

La historia oficial del álgebra, la que aparece narrada en los manuales de historia de las matemáticas o la que se menciona como referencia cuando se habla de ella en los textos de enseñanza, suele tomar la forma del relato del progreso, lento pero inexorable, en el descubrimiento de técnicas y fórmulas para la resolución de ecuaciones y en el descubrimiento de un lenguaje en el que esas técnicas y esas fórmulas aparecen, al final de la historia, verdaderamente expresadas. Ese progreso se periodiza habitualmente mediante los términos "álgebra retórica", "álgebra sinco-pada" y "álgebra simbólica", que puntúan la línea de avance que culmina con Vieta y Descartes en los siglos XVI y XVII, desde una etapa primitiva en que el "álgebra" es "retórica", ya que los textos se escriben en lenguaje vernáculo —la época paleobabilónica entre 2000 y 1600 a. n. e.—, pasando por una etapa —representada por las *Aritméticas* de Diofanto (s. III)— en que los textos siguen escritos en vernáculo, pero con algunos términos técnicos escritos mediante abreviaturas. Esta segunda etapa es la que se denomina con el nombre que ideó Nesselman en 1842 de "álgebra sinco-pada".<sup>1</sup>

Pero un relato que se quiera canónico no puede dejar fuera de la historia el momento en que se constituye lo que llamamos matemáticas, es decir, la época de la Grecia clásica, que Diofanto, demasiado tardío, no puede representar. Afortunadamente, Zeuthen tuvo la idea, en 1886, de calificar de "álgebra geométrica" el libro segundo de los *Elementos* de Euclides<sup>2</sup>, con lo que, al añadirse esta supuesta álgebra a las otras especies de álgebras, ya no había ninguna dificultad para seguir la doctrina según la cual "la ciencia clásica es europea y sus orígenes son legibles directamente en la ciencia y en la filosofía griegas".<sup>3</sup>

Si la historia se narra siguiendo ese hilo, el álgebra árabe clásica, la que se desarrolla desde el siglo IX a partir del *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqābala* —*al-kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa'l-muqābala*— de Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, de cuyo título ha tomado su nombre el álgebra en la mayoría de las lenguas europeas, queda relegada al papel de mero intermediario entre la herencia griega y el Occidente cristiano medieval<sup>4</sup>, y, además, de intermediario malo, ya que no significa progreso alguno, sino que, por el contrario, se ve como un retroceso a la etapa del "álgebra retórica".

1. El texto en que G. H. F. Nesselman introdujo ese término es *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer, 1842. También en ese texto habla de "álgebra retórica", pero, por supuesto, sin referirse con este término al álgebra babilónica, cuyo corpus aún no había sido establecido.
2. Según Árpád Szabó, Tannery habló ya en 1882 de proposiciones algebraicas bajo forma geométrica. El texto en que Hieronimus Georg Zeuthen introduce esta noción de "álgebra geométrica" es *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Kopenhagen: Höst & Sohn, 1886. Como el mismo Szabó señala, aunque es cierto que los enunciados de esas proposiciones pueden traducirse con facilidad a enunciados algebraicos, desde ningún otro punto de vista puede calificarse esa parte del texto euclídeo de algebraico (cf. Árpád Szabó. *Les débuts des mathématiques grecques*. Paris: Vrin, 1977, págs. 367 y ss.).
3. Cf. Roshdi Rashed, "La notion de science occidentale". En *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des Mathématiques arabes*. Paris: Les Belles Lettres, 1984, pág. 301. En este texto, Rashed denuncia la existencia de esta doctrina, implícita o explícitamente, en la mayor parte de los trabajos de historia de las matemáticas y las consecuencias que tiene para la consideración de lo que se ha hecho fuera del Occidente cristiano.
4. O, incluso, desaparece. Esto es lo que sucede en el libro de Nicholas Bourbaki *Éléments d'Histoire des Mathématiques* [Paris: Hermann, 1969], en cuyo capítulo *L'Évolution de l'Algèbre* el álgebra árabe ni se menciona.



Raíces y tesoros igualan números; es como si tú dices, "un tesoro y diez raíces del mismo, igualan treinta y nueve dirhams"; es decir, ¿cuál será el tesoro que, cuando se aumenta con diez de sus propias raíces, asciende a treinta y nueve? (pág. 8)

Este texto, además, muestra que la identificación de la palabra 'raíz' con la incógnita o con la  $x$  también plantea problemas: por un lado, en el texto no se dice simplemente "la raíz", sino "la raíz del tesoro"; por otro lado, el resultado del problema tal como lo da al-Khwārizmī deja bien claro que lo que se busca no es la raíz, sino el tesoro:

[...] queda tres, que es la raíz del tesoro que buscabas; el tesoro mismo es nueve. (pág. 8)

de modo que, en todo caso, el enunciado de este problema habría que traducirlo por  $x + 10\sqrt{x} = 39$ , mejor que por  $x^2 + 10x = 39$ .

Tesoros, raíces y simples números o *dirhams* son pues los términos primitivos, las especies de números, cuyas combinaciones permiten establecer "todo lo que es necesario para calcular" en la práctica. Con ellos, puede atender al-Khwārizmī la petición del califa al-Ma'mūn de

componer un tratado conciso sobre el cálculo por al-jabr y al-muqābala, reducido a lo que es brillante e importante en las aritméticas utilizadas constantemente en los asuntos de herencias y legaciones, en los repartos y los procesos legales, en el comercio y en todos sus asuntos de agrimensura, de excavación de canales, de cálculos geométricos y otras cosas variadas de especie parecida. (pág. 3)

La conceptualización básicamente monetaria de los términos primitivos proviene probablemente de la tradición de "las gentes de *al-jabr*", pero desde el principio representan *especies de números que se usan en cálculos*, de modo que las distintas combinaciones de esos términos primitivos pueden concebirse como moldes formales. Veremos en la descripción del esquema general del libro que lo que viene inmediatamente después de la exposición de que éstos son los términos primitivos es precisamente el establecimiento de todas sus combinaciones posibles.

Al-Khwārizmī utiliza pues estos términos monetarios para representar las posibilidades que pueden presentarse al hacer los cálculos, ahora bien, para abordar la resolución de un problema concreto representa la incógnita mediante otro término: la palabra árabe *shay'*, que se traduce habitual-

mente por 'cosa'<sup>14</sup>. Según Rashed, esta palabra es un término coránico y de la lengua filosófica, y ahí significa "todo lo que puede ser imaginado, sin realizarse sin embargo en un objeto", por lo que tiene un carácter "vacío", susceptible de recibir cualquier contenido y, por tanto, es un candidato ideal para nombrar una incógnita que pueda ser un número o una magnitud<sup>15</sup>. En el ejemplo de cálculo literal (§ 3.2) y en el de problema (§ 3.3) se puede ver la interacción entre el término 'cosa' y los términos primitivos.

### 3.2. La organización general del libro

Ya hemos visto que el libro comienza con el establecimiento de los términos primitivos, tesoros, raíces y simples números, como las especies de números que se usan en los cálculos.

A continuación, al-Khwārizmī plantea que esas especies de números "unos pueden ser iguales a otros" y establece todas las posibilidades, tres simples y tres compuestas:

tesoros iguales a raíces,  
tesoros iguales a números,  
raíces iguales a números,  
tesoros y raíces iguales a números,  
tesoros y números iguales a raíces, y  
raíces y números iguales a tesoros.

Estas seis posibilidades de combinación de las especies de números tienen el carácter del conjunto completo de formas normales. El resto del cálculo consistirá pues en mostrar cómo resolver cada una de estas formas normales y cómo reducir cualquier problema a una de ellas. Los capítulos siguientes del libro son:

- Enunciado de las reglas que resuelven cada una de las formas normales. (Las reglas se enuncian para un tesoro y luego se muestra cómo reducir a éste el caso en que haya varios tesoros o partes de un tesoro.)
- Demostraciones de las reglas. (Veremos un ejemplo.)
- Cálculo literal: multiplicaciones del estilo de "diez menos cosa por diez más cosa", en las que aparece un cálculo que puede compararse con la "regla de los signos", aunque sea para ver lo que lo separa de ésta:

Quando dices diez menos cosa por diez y cosa, dices diez por diez, cien, y menos cosa por diez, diez cosas "subtractivas", y cosa por diez, diez cosas "aditivas", y menos cosa por cosa, tesoro "subtractivo"; por

14. En el álgebra de Abū Kāmil hay algunos problemas que se resuelven de dos maneras: una, expresando la incógnita con el término 'cosa'; la otra, representando además otras incógnitas auxiliares. Para ello, Abū Kāmil utiliza también términos monetarios, los nombres de dos monedas árabes: *dinar* y *fals*. (Cf. *The Algebra of Abū Kāmil*..., op. cit., págs. 102, 116, 133, 136 y 140, entre otras.)

15. Cf. Roshdi Rashed. Introduction et notes à *Les Arithmétiques*, tome III, op. cit., págs. 120-123.

mente actuaron como antecedentes de alguna manera. La prueba es un *Liber mensurationum*, escrito por un tal Abū Bakr, probablemente a comienzos del siglo IX y, en todo caso, antes del libro de al-Khwārizmī, cuyo original árabe no se ha encontrado, pero del que hay editada<sup>10</sup> una traducción latina del siglo XII, hecha por Gerardo de Cremona. Una parte de ese libro contiene una serie de problemas que están resueltos de dos maneras: una que sigue una pauta similar a la de los textos paleobabilónicos y otra que Abū Bakr indica que está hecha “según *al-jabr*” y que es muy similar a la que aparece en el libro de al-Khwārizmī. Esta segunda técnica correspondería a otra tradición subcientífica, propia de los que Thābit ibn Qurrah llama “gentes de *al-jabr*” o “seguidores de *al-jabr*”<sup>11</sup>, que probablemente eran algún tipo de contables.

Combinando lo que nos enseña Rashed con lo que nos enseña Høyrup, el libro de al-Khwārizmī aparece pues como el momento de fundación de una nueva disciplina teórica, a partir de la crítica de las técnicas desarrolladas en tradiciones “subcientíficas” ligadas a distintas prácticas, que es reconocido inmediatamente como una nueva disciplina y que tiene una continuación floreciente durante varios siglos en el mundo árabe.

### 3. UNA MIRADA DE CERCA AL TEXTO DE AL-KHWĀRIZMĪ

Una vez situado el libro conciso de cálculo de *al-jabr* y *al-muqābala* en el lugar en que lo he situado en el apartado anterior, lo que me propongo ahora es presentar un apunte de sus rasgos característicos. Para ello examinaré algunos de los términos técnicos que usa al-Khwārizmī, la organización general del libro y tres textos encadenados: el enunciado de una regla para resolver un tipo de ecuación, su justificación y su aplicación a un problema.

#### 3.1. Los términos primitivos

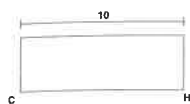
Si el libro de al-Khwārizmī se traduce al sistema matemático de signos (SMS) del álgebra elemental actual —como se ha hecho habitualmente—, trata de la resolución de ecuaciones cuadráticas y de problemas que pueden resolverse mediante éstas. Ahora bien, esa traducción hace que a menudo los enunciados de al-Khwārizmī parezcan torpes, redundantes o carentes de sentido. Ello se debe a que los términos que utiliza no tienen el significado que tienen en el SMS de ese álgebra los componentes de una expresión como  $ax^2 + bx + c = 0$ .

En efecto, al comienzo del libro, al-Khwārizmī introduce lo que normalmente se ha traducido por los tres términos del trinomio, que él llama “las tres especies de números”, pero la palabra que en las traducciones se ha hecho corresponder al cuadrado de la incógnita no es la palabra árabe que significa ‘cuadrado’, sino la palabra *māl*, cuyo significado es ‘posesión’ o ‘tesoro’. Si mantenemos la traducción literal ‘tesoro’ para *māl*, el texto de al-Khwārizmī queda así<sup>12</sup>:

[...] los números que son necesarios para calcular por *al-jabr* y *al-muqābala* son de tres especies, a saber, raíces, tesoros y simples números sin referencia a raíz ni a tesoro. Una raíz es una cantidad cualquiera que será multiplicada por sí misma, consistente en unidades o números ascendentes o fracciones descendentes. Un tesoro es la cuantía total de una raíz multiplicada por sí misma. Un simple número es un número cualquiera que puede expresarse sin hacer referencia a raíz o tesoro. (págs. 5-6)

El carácter monetario de *māl*<sup>13</sup> aún queda más subrayado en otros enunciados en los que explica el significado de las “ecuaciones” y, al hacerlo, los “simples números” pasan a ser *dirhams*, es decir, una moneda:

10. Hubert L. L. Busard, “L’algèbre au Moyen Âge: Le “Liber Mensurationum” d’Abu Bekr”, *Journal des Savants*, avril-juin, págs. 65-125, 1968.
11. La edición del texto de Thābit ibn Qurrah, escrito unos cincuenta años después de la aparición del de al-Khwārizmī, en el que figura esta denominación no he podido consultarla. Es de Paul Luckey “Thābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen”, *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte* 93, págs. 93-114, 1941. La referencia la he tomado de Høyrup, *The Antecedents of Algebra*, op. cit., pág. 22 y Høyrup, ‘*Algèbre d’al-ğabr*’ et ‘*algèbre d’arpentage*’..., op. cit., págs., 9-10.
12. He utilizado la edición de Rosen del libro de al-Khwārizmī [Frederic Rosen. *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund, 1831], modificando en ocasiones la traducción para hacerla más literal y teniendo en cuenta las observaciones que Høyrup hace en su trabajo “Oxford” and ‘Cremona’: On the relations between two Versions of al-Khwārizmī’s Algebra”. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter*. 3. Række: Preprint og Reprints 1991 nr. 1. También he consultado las traducciones latinas medievales editadas por Barnabas Hughes, “Gerard of Cremona’s Translation of al-Khwārizmī’s *al-jabr*: A Critical Edition”, *Mediaeval Studies*, 48, págs. 211-263, 1986, y Robert of Chester’s Translation of al-Khwārizmī’s *al-jabr*: A New Critical Edition, Boethius, Band XIV. Franz Steiner Verlag: Stuttgart, 1989.
13. En la traducción de Gerardo de Cremona *māl* mantiene ese carácter, ya que éste utilizó el término latino *census*. Robert de Chester, sin embargo, lo tradujo por *substantia*. Ahora bien, ni uno ni otro lo tradujo por ‘cuadrado’. La traducción de Gerardo de Cremona hizo fortuna y puede encontrarse en un buen número de libros medievales. También subraya este carácter monetario el término que usó Finzi en el siglo XV al traducir al hebreo el libro de álgebra de Abū Kāmil. Finzi tradujo *māl* por la palabra tomada prestada del castellano ‘algos’, con el significado obvio de ‘una cierta cantidad (de dinero)’ (cf. *The Algebra of Abū Kāmil, in a Commentary by Mordecai Finzi*. Hebrew text and translation, and commentary by Martin Levey. Madison, WI: The University of Wisconsin Press, 1966).



La longitud de las dos superficies juntas es igual al lado HC. Sabemos que su longitud es en números diez, ya que cada cuadrado tiene iguales sus lados y sus ángulos, y,



si uno de sus lados se multiplica por uno, eso da la raíz de la superficie,



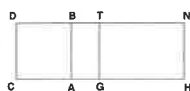
y, por dos, dos de sus raíces.



Cuando se declara que el tesoro y veintiún números es igual a diez de sus raíces,



sabemos que la longitud del lado HC es igual a diez números, ya que el lado CD es una raíz del tesoro.



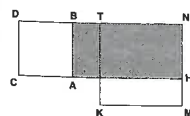
Dividimos el lado CH en dos mitades por el punto G. Entonces sabes que la línea HG es igual a la línea GC, y que la línea GT es igual a la línea CD.



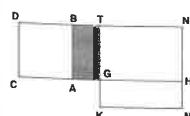
Entonces extendemos la línea GT una distancia igual a la diferencia entre la línea CG y la línea GT para cuadrar la superficie. Entonces la línea TK es igual a la línea KM, y resulta un cuadrado, de lados y ángulos iguales, que es la superficie MT.

Sabemos que la línea TK es cinco y ésta es consecuentemente la longitud de los otros lados.

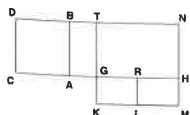
Su superficie es veinticinco, obtenida por la multiplicación de la mitad de las raíces por sí mismo, que es cinco por cinco, igual a veinticinco.



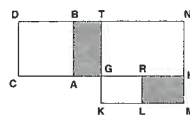
Sabemos que la superficie HB representa los veintiún números que se añaden al tesoro.



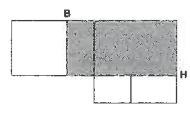
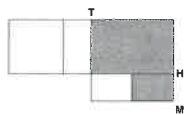
De la superficie HB, cortamos por la línea TK, uno de los lados de la superficie MT, dejando la superficie TA.



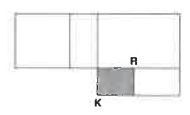
Tomamos de la línea KM la línea KL, que es igual a la línea GK.



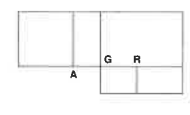
Sabemos que la línea TG es igual a la línea ML y que la línea LK, cortada de la línea MK, es igual a KG. Entonces la superficie MR es igual a la superficie TA.



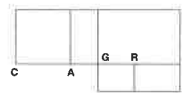
Sabemos que la superficie HT añadida a la superficie MR es igual a la superficie HB que es veintiuno.



Pero la superficie MT es veinticinco. Y así, restamos de la superficie MT, la superficie HT y la superficie MR, entre ambas igual a veintiuno. Nos queda una superficie pequeña RK, que es veinticinco menos veintiuno, que es cuatro.

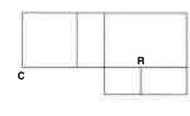


Su raíz, la línea RG, es igual a la línea GA, que es dos.

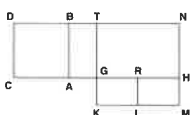


Si lo restamos de la línea CG, que es la mitad de las raíces, queda la línea AC, que es 3.

Ésta es la raíz del primer tesoro.



Si se añade la línea GC, que es la mitad de las raíces, resulta siete, o la línea RC, la raíz de un tesoro más grande.



Si se añade veintiuno a este tesoro, también el resultado será diez de sus raíces.

Ésta es la figura. (págs. 16-18)

El problema correspondiente:

Si una persona te pide esto: "He dividido diez en dos partes, y cuando he multiplicado una por otra, resultó veintiuno"; entonces tú sabes que una de las dos partes es cosa y la otra diez menos cosa. Multiplica por tanto cosa por diez menos cosa; entonces tendrás diez cosas menos un tesoro, lo que es igual a veintiuno. Separa el tesoro de las diez cosas y añádelo al veintiuno. Entonces tendrás diez cosas, que igualan veintiún dirhems y un tesoro. Quita la mitad de las raíces y multiplica el cinco que queda por sí mismo; es veinticinco. Quítale el veintiuno asociado con el tesoro; el resto es cuatro. Extrae su raíz, es dos. Quítalo de la mitad de las raíces, a saber, cinco; queda tres, que es una de las dos partes.



tanto, el producto es cien dirhams menos un tesoro<sup>16</sup> (pág. 17).

- Varios capítulos de cálculo con "radicales".
- "Los seis problemas": seis problemas que cada uno de ellos se reduce a una de las seis formas normales. En este capítulo es en el que aparecen las dos operaciones que dan nombre al cálculo (*al-jabry* y *al-muqābala*). Esas operaciones son las que permiten reducir una expresión cualquiera que traduce el enunciado del problema en términos de operaciones con la 'cosa' a una de las formas normales. (Veremos uno de ellos.)
- Más problemas variados.
- Un corto capítulo sobre problemas de transacciones mercantiles.
- Un capítulo de problemas de medidas de áreas, longitudes y volúmenes de figuras geométricas.
- Un larguísimo capítulo de problemas de herencias (ocupa de hecho la mitad del libro).

La descripción somera que acabo de hacer habla por sí sola: la organización del libro no tiene nada que ver con la de sus antecedentes, que se presentan siempre como colecciones de problemas, ordenados en ocasiones por las configuraciones geométricas de las que tratan (es el caso de muchas series de tablillas babilónicas) o por otros criterios, pero nunca presentados después de un catálogo completo de formas normales a las que pueden reducirse, ni con el acompañamiento de un cálculo que al hacerse con formas vacías, 'cosas', es sintáctico.

### 3.3. La quinta forma normal como ejemplo

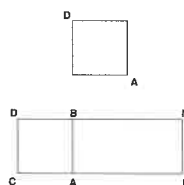
Finalmente, presento en este apartado la serie, enunciado de la forma normal, regla, justificación de la regla y problema que se reduce a ella, ejemplificada con la quinta forma normal.

La quinta forma normal y su regla:

Tesoros y números igual a raíces; es como si tú dices, "un tesoro y veintiuno en números igualan diez raíces del mismo tesoro". Es decir, ¿cuál será la cuantía del tesoro que, cuando se le añade veintiún dirhams, iguala el equivalente de diez raíces del mismo tesoro? Solución: Divide en dos las raíces; la mitad es cinco. Multiplícalo por sí mismo; resulta de ello veinticinco. Quítale el veintiuno asociado con el tesoro; el resto es cuatro. Extrae su raíz, es dos. Quítale la mitad de las raíces, que es cinco; queda tres. Esto es la raíz del tesoro que pedías y el tesoro es nueve. O puedes añadir la raíz a la mitad de las raíces, eso será siete; es la raíz del tesoro que tú pedías y el tesoro mismo es cuarente y nueve.

Cuando encuentres un ejemplo que te conduzca a este caso, intenta la solución por adición, y si esto no te ayuda, la substracción servirá ciertamente. Porque en este caso se puede emplear tanto la adición como la substracción, lo que no vale en ninguno de los otros casos en los que haya que dividir en dos las raíces. (págs. 11-12)

La demostración de la validez de la regla la presento desmenuzada, y acompaño cada fragmento del texto con la figura que se va construyendo para justificar los pasos de la regla. En el texto original sólo aparece la figura final después de la frase "Ésta es la figura". Además del carácter didáctico de la justificación de la regla, vale la pena entretenerse en observar el cuidado que tiene al-Khwārizmī de indicar que el cuadrado es una *representación* del tesoro —distinción que obviamente desaparece si se traduce *māl* por 'cuadrado' o por  $x^2$ —, y la distinción que hace entre la raíz del tesoro, que está representada por un lado del cuadrado que representa el tesoro, y la raíz de la superficie, que es un rectángulo de lado la raíz del tesoro y ancho una unidad, lo que le permite representar las diez raíces<sup>17</sup>.



Cuando un tesoro y veintiún dirhams son iguales a diez raíces, representamos el tesoro como un cuadrado cuyos lados son desconocidos, que es la superficie AD. A ésta añadimos un paralelogramo, la superficie HB, cuya anchura, esto es, el lado HN, es igual a uno de los lados de la superficie AD.

16. En vez de "negativas" y "positivas", he traducido "substractivas" y "aditivas", como hace Adel Anbouba, para ser menos anacrónico y mostrar que esas palabras derivan de los verbos "decrecer" y "añadir". Ahora bien, al-Khwārizmī, gracias a la esquematización del lenguaje que usa, puede decir también "menos cosa". Adel Anbouba señala que una expresión como "menos cosa por menos cosa igual tesoro aditivo" "va contra la gramática [...] pero es didácticamente cómoda" (cf. Adel Anbouba. "L'algèbre arabe aux IX<sup>e</sup> et X<sup>e</sup> siècles. Aperçu général". *Journal for the History of Arabic Science* vol. 2, págs. 66-100, 1978). Está claro que aquí no hay idea alguna de número negativo, pero la operatividad con lo substractivo es mayor que la que hay en las *Aritméticas* de Diofanto, ya que el SMS con que éstas se escriben no permite más que una inscripción de la *leipsis* en cada expresión.

17. Esta distinción entre la raíz del tesoro, que es una línea, y la raíz de la superficie, se convierte en el *Tratado de las ecuaciones* de Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, en el que lo que se estudia son las cúbicas, en muchas más distinciones: hay raíces lineales, planas y sólidas, y, lo que es más interesante, tesoros planos y sólidos. La raíz sólida es "un sólido cuya base es una raíz plana y la altura una unidad lineal" y el tesoro sólido "es un sólido cuya base es el tesoro plano y cuya altura es una unidad lineal" (cf. Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, op. cit., tome I, págs. 15-16).

## LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA: LA MATEMÁTICA, VERTEBRADORA DE LA CULTURA

José Luis Montesinos Sirera

Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia. La Orotava

La misión de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria es primordialmente la de cooperar a **formar** en el alumno unas capacidades que le permitan entender el complejo mundo que le rodea y a dotarle de esquemas lógicos y metodológicos mediante los cuales pueda seguir racionalmente una argumentación. El bachiller de este final de milenio necesita una **formación humanística** en este mundo tecnificado, que le dé acceso a manejar ideas por las que pueda asimilar la inmensa cantidad de conocimientos que se le ofrecen. El papel de las Matemáticas en la educación de los jóvenes ha sido hasta épocas recientes el de formar mentes organizadas, con criterio, con rigor, y así la Geometría y su libro de texto milenario "Los Elementos" de Euclides servían para desplegar todo un mundo armónico, deductivo y de una gran belleza formal.

Consideramos que hoy más que nunca, la principal función de las matemáticas es la de **formar a los alumnos** y que éstas han de ser presentadas **a través de la Historia**, en relación con la Filosofía y con el Arte, con la Física y la Cosmología, como un organismo vivo, en evolución e íntimamente ligada a los deseos del hombre de comprender la realidad. Oswald Spengler, matemático y exitoso ensayista de los años 20, en su libro "**La decadencia de Occidente**", desarrolla su teoría de la historia como una sucesión de ciclos culturales que nacen, se desarrollan, alcanzan su plenitud y fatalmente decaen. Para Spengler, no hay una matemática que se desarrolle linealmente y cuyo contenido va acumulándose a través de los siglos. Para él, hay tantas matemáticas como culturas, como ciclos históricos y cabría distinguir entre otras, **la matemática antigua**, de la cultura greco-romana, y la **matemática moderna** de la cultura occidental y cristiana, esencialmente distintas y que serían fruto y consecuencia de los componentes culturales de cada época y al mismo tiempo un factor decisivo en la configuración global de las mismas.

Veamos cómo, a nuestro juicio son dos las diferencias esenciales que se establecen entre ambas culturas y matemáticas:

- El concepto de **infinito**, y el tratamiento de los procesos infinitos que surgen cuando se intenta aprehender la realidad mediante la **razón**.

- La postura frente a la **Naturaleza**. En el caso de los antiguos, el hombre contempla e imita a la Naturaleza; en el caso de los modernos la Naturaleza se concibe como un objeto al que hay que poner al servicio del hombre.

La antigua Grecia, hasta Euclides, consideró la Geometría un arte antes que una ciencia tal y como hoy la entendemos. Las ideas platónicas de un **COSMOS**, armoniosamente organizado de acuerdo a arquetipos preexistentes y eternos, dotado de una **Simetría** —en el sentido original de ésta—: como algo bien proporcionado y en el que las partes estarían acordes con el todo, estructuran un proyecto de Geometría con voluntad de captar el mundo real. La Geometría Griega, producto de un alma que intenta realizarse en la imagen del mundo que la rodea, mide las relaciones de magnitud, medida y figura entre cuerpos sólidos. Es una geometría de un espacio **finito**, de pequeñas distancias, en donde el paradigma es el cuerpo humano; y así, el arte griego por excelencia es **la escultura**. En algún momento de la primera mitad del siglo V a.c. tiene lugar en Grecia un descubrimiento terrible para la aritmética pitagórica: **la existencia de magnitudes inconmensurables**. La realidad sensible para un griego es apolínea y la aparición de magnitudes inconmensurables y de procesos infinitos turba la serenidad helénica. Los números naturales no bastan ya para cuantificar y medir todos los segmentos de recta que producen las construcciones geométricas. El gran matemático **Eudoxo de Cnido** desarrollará toda una complicada **teoría de las proporciones** (que constituirá posteriormente el Libro V de "Los Elementos" de Euclides) y se salva así la **teoría de la semejanza** en geometría. El mismo Eudoxo enseña a salvar la dificultad de los procesos infinitos con el llamado **método de exhaución**, donde se concluye por reducción al absurdo la igualdad de dos áreas o volúmenes, demostrando que, si existe una diferencia entre ellas, ésta sería más pequeña que cualquier número por pequeño que fuese. Aquí está ya el espíritu de la moderna **teoría de los límites**.

Eudoxo es el gran dominador del infinito en la antigüedad y Aristóteles la autoridad que dictamina la prohibición del infinito "actual" tanto físico como mental. Aristóteles, el gran sabio de esta Cultura, recopilador de todo el saber de su época, veta el concepto de infinito como algo extraño,

O, si lo prefieres, puedes añadir la raíz de cuatro a la mitad de las raíces. La suma es siete, lo que también es una de las partes (págs. 41-42).

#### 4. EN PERSPECTIVA. COMPONENTES DE UNA ARQUEOLOGÍA DEL ÁLGEBRA

El apunte que he presentado aquí en torno al *Libro conciso de cálculo de al-jabry y al-muqābala* de Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī he querido situarlo frente a una cierta historia oficial del álgebra y lo he apoyado en los trabajos monumentales de dos historiadores, cuya producción no deja de ofrecer nuevos materiales día a día. Mi trabajo, sin embargo, tiene su origen en el programa de investigación iniciado hace ya años por Eugenio Filloy en el que el estudio de la historia de las ideas matemáticas se pone al servicio de la investigación didáctica. En él, la elaboración del álgebra simbólica, tanto en la historia como en el aprendizaje en la escuela, se veía como “la identificación final en un solo estrato de lenguaje de estratos anteriores de lenguaje irreductibles uno a

otro hasta que no se ha desarrollado el lenguaje más abstracto”<sup>18</sup>. Esta noción de ‘estratos de lenguaje’ ha sido transformada por el propio Filloy en una noción de sistemas matemáticos de signos SMS<sup>19</sup> que ha de ser lo suficientemente amplia como para que pueda servir como herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares —y estos textos se conciben como el resultado de procesos de producción de sentido—, así como de los textos matemáticos históricos —tomados como monumentos, petrificaciones de la acción humana o de procesos de cognición propios de una episteme. Para ello, en el caso del álgebra es preciso, a mi entender, entrelazar varias historias: la historia de la elaboración de SMS del álgebra, en particular, la de la operatividad sintáctica; la historia de los conceptos de número; la historia de las tradiciones subcientíficas de resolución de problemas; la historia de la idea de generar posibilidades hasta agotarlas; la historia del método de análisis y síntesis. Ésos son componentes de una arqueología del álgebra, que he querido tener presentes en este sucinto examen del libro de al-Khwārizmī, y que el estudio del álgebra árabe clásica contribuirá a desarrollar ■

18. Eugenio Filloy y Teresa Rojano. “La aparición del lenguaje aritmético-algebraico”. *L’educazione matematica*, vol V, págs. 1-16, 1984, pág. 3.

19. Esta noción de “sistemas matemáticos de signos” se introduce en Carolyn Kieran y Eugenio Filloy. “El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica”. Traducción de Luis Puig. *Enseñanza de las ciencias*, vol 7, págs. 229-240, 1989. Ver también mi texto: Luis Puig. *Semiótica y matemáticas*. Valencia: Episteme, col. Eutopías, 1994.

ese gigantesco instrumento que es el órgano. El Arte muestra el camino a la Filosofía y a la Ciencia: Nicolás de Cusa y Giordano Bruno hablan de un universo infinito; hay un nuevo renacer del platonismo; Copérnico y Galileo hacen tambalear la cosmología aristotélico-ptolemaica y una **nueva geometría** se desarrollará, acorde con la nueva ordenación espiritual de un mundo abierto, la Geometría de Descartes.

No nos adelantemos, ahora corresponde hablar de la figura que **Jorge L. Borges** situaría en el capítulo central de su irrealizada historia del infinito: El Cardenal **Nicolás de Cusa**, quien influido por San Agustín, abrirá unas estrechas y largas relaciones entre la Teología Cristiana y las Matemáticas del Infinito.

Cusa combina continuamente la teología con la matemática, cuyas figuras (las de la geometría) se prestan a una infinitización ideal que provoca una coincidencia con sus contrarios, gracias a la cual la inteligencia accede al inefable e infigurable infinito. Hay una inmanencia virtual del infinito en cada figura matemática finita que sólo la matemática "intelectual" puede hacer transmutarse gradualmente. Es así que un círculo infinito coincidirá con la recta infinita y la infinitización de las figuras anula las leyes que rigen la matemática racional, que trabaja con figuras abstractas, pero limitadas y cuantificables. La figura infinita adquiere así un valor metamatemático que la hace apta para traducir al Infinito simple. La figura matemática se convierte en una figura teológica.

Nicolás de Cusa es una figura temprana de ese crucial período de nuestra Historia que ha dado en llamarse Renacimiento, período de ruptura, siglos XV y XVI, en el que se abre paso un **Mundo Nuevo**. Copérnico, Bruno, Kepler, Galileo, construyen una nueva visión del Universo, ilimitada, inquietante, en la que el hombre deja de ser el centro en una cosmología que es ya de infinitos mundos.

**Descartes**, filósofo de primera categoría, no pasa de ser —según los historiadores de las matemáticas— una figura secundaria como matemático. Sin embargo su influencia sobre los matemáticos posteriores fue inmensa y con él empieza una **nueva matemática**, la matemática de la revolución científica y de la edad moderna. Descartes rompe con los modos y los preceptos de la matemática de los griegos y especialmente rompe con el veto aristotélico al infinito. Descartes vive en una época convulsa en donde de un **mundo cerrado** se ha pasado a un **universo infinito**, en la que han desaparecido las certezas y en las que el escepticismo y la duda son la norma. En una especie de huida hacia delante, Descartes va a dudar de todo, excepto de las matemáticas, y de Dios que le garantiza la veracidad de los razonamientos claros y distintos que alcanza con su

Método, concebido a partir de las matemáticas de los griegos.

En el año 1650 muere René Descartes dejando un legado intelectual de importancia fundamental para el desarrollo de la nueva ciencia. El Universo es ahora un complejo entramado regido por leyes mecánicas y el hombre, esa criatura finita e imperfecta, pero dotada de una mente en la que están sembradas las semillas del conocimiento, puede y debe tratar de desentrañar y dominar esas leyes. El nuevo científico, al ser consciente de vivir en un universo "**infinito**" y en movimiento, radicalmente distinto del mundo cerrado de los antiguos, tendrá que abandonar el espíritu de la matemática griega. Ahora prevalecerá la utilidad sobre la estética. La geometría no deberá temer "contaminarse" del movimiento de la Mecánica; **El rigor**, máximo logro que se imponían los griegos, pasará a un segundo plano. Se aceptará el "número irracional" sin tener que recurrir a la engorrosa definición de razón de magnitudes inconmensurables de Eudoxo y se tendrá que osar hacer uso de procesos infinitos. Se seguirán haciendo las demostraciones arquimedianas, pero obviando el largo y pesado método de exhaución. Todo ello porque **el fin lo justifica**. Y el fin es el de arrancarle los secretos a la Naturaleza: "... Conociendo la fuerza y la acción del fuego, del agua, del aire, de las estrellas, de los cielos y de todos los demás cuerpos que nos rodean (...) y convertirnos en los dominadores y poseedores de la Naturaleza". De esta manera, con el estudio y el trabajo, el hombre recuperará el Paraíso perdido.

Este mensaje recorre toda la Europa culta y el "**Discurso del Método**" será el libro científico-filosófico más leído y de mayor influencia de la segunda mitad del siglo XVII. Este mensaje lo recoge **Isaac Newton** quien desde muy joven aspira a ser un **filósofo de la naturaleza**.

Newton va a pasar muchas horas venciendo las dificultades de lectura que encierra un libro como "**La Géométrie**" de Descartes, pero sacará dos consecuencias fundamentales:

- Para aspirar a ser un filósofo de la naturaleza, hay que aprender el arte de las matemáticas, manipular con habilidad las técnicas del cálculo, en un mundo que exige conocimientos cuantitativos. Las matemáticas se concebirán no como un fin en sí mismas, sino al servicio de la Física y de la Filosofía de la Naturaleza.
- No hay problema que no pueda ser resuelto si actuamos con el método adecuado y con la necesaria tenacidad.

Siguiendo las pautas cartesianas, Newton se hace un consumado algebrista y aprenderá de Wallis, de su "**Aritmetica infinitorum**", a usar sin temor y sin rigor los algoritmos infi-

imperfecto, indeterminado, innombrable. Aristóteles ha comprobado el peligro que representa para la Razón algo que la misma Razón ha inventado: *"pero la consideración del infinito conlleva una dificultad (aporía), pues tanto al afirmar que no existe resultan muchos imposibles, como al afirmar que existe"* (Física 203 b 30-32).

Desde que Zenón de Elea, en el siglo V a.c. pusiese a la recién estrenada Razón en un callejón sin salida al enfrentarla con ciertos procesos infinitos, la Historia de la Matemática es un continuo sortear las dificultades que aquellos procesos conllevan. Aristóteles ha salido mal parado en su confrontación con las aporías de Zenón; el mal menor será aceptar la infinita divisibilidad de un segmento, pero sólo "potencialmente", en un proceso de divisiones sucesivas, y no "actualmente" como colección infinita exhaustivamente dada de todos sus puntos.

Sin embargo, esta "prohibición" del infinito actual no impide a los matemáticos realizar sus razonamientos: *"Este nuestro discurso, no pretende suprimir las investigaciones de los matemáticos por el hecho de excluir que el infinito por adición pueda recorrerse en acto. En realidad, ellos (los matemáticos), en el estado presente, no sienten la necesidad del infinito, y en realidad no se sirven de él, sino sólomente de una cantidad tan grande como se quiera, aunque siempre finita ..."* (Física 207 b, 31).

En el 300 a.c. Euclides, siguiendo las directrices aristotélicas, recopila y pone orden en toda la matemática existente, dotándola de una estructura axiomático-deductiva que fue modelo durante 2000 años para cualquier disciplina que pretendiese ser científica y rigurosa. No debemos confundir la geometría de Euclides con la "geometría euclídea" que nosotros (impregnados de infinitud) hoy concebimos. No hay un sólo paso o comentario en **"Los Elementos"** que indique la idea de un espacio (plano) infinito. De la aversión del texto euclídeo al concepto de infinito, sirva el ejemplo de la Prop. 20 del Libro IX: En lugar de decir que la serie de números primos es infinita, se dice, *"Hay más números primos que en cualquier conjunto de números primos"*.

Y con Euclides están los otros dos grandes matemáticos con los que se conforma la Edad de Oro de la matemática griega: Apolonio de Perga y Arquímedes de Siracusa. Apolonio, cuyo tratado sobre las cónicas tendrá que esperar cientos de años para ser entendido y aplicado a las Ciencias de la Naturaleza. Arquímedes, el gran científico de la antigüedad, es en quien más se prefiguran las características del moderno científico. Mejorará la técnica de exhaustión de Eudoxo y construirá un auténtico Cálculo, respetando exquisitamente la prohibición aristotélica del uso del infinito actual, lo que no le impide usar técnicas poco ortodoxas pero tremendamente bellas e imaginativas para conseguir los resultados que después demostrará en **Geo-**

**metría**, esto es, en el rigor de los griegos, con el método de exhaustión. Es en 1906 cuando el filólogo danés Heiberg descubre en un palimpsesto el Método Mecánico de Arquímedes, en el que éste explica a su amigo Eratóstenes, bibliotecario de Alejandría, su método de descubrir resultados que luego probará correctamente por otras vías.

Y quiero destacar antes de terminar con el periodo griego, la estrecha relación de la Matemática con el Arte, con la Belleza. La Matemática es ella misma un arte y así Aristóteles dirá en su Metafísica (Libro XII, cap. III): "Las formas que mejor expresan la belleza son el orden, la simetría, la precisión. Y las ciencias matemáticas son las que se ocupan de ellas especialmente."

**En resumen, el mundo griego es finito, armonioso, apolíneo, alejado de los extremos (horror vacui, horror infinitus).**

Es con el advenimiento del Dios cristiano, un Dios que premiará con bienaventuranzas sin fin o castigará eternamente y poseedor él mismo de atributos infinitos, que lo inmenso, lo infinito irá poco a poco impregnando de forma sutil el pensamiento y la cultura occidental.

En el siglo IV, el neo-platónico San Agustín, obispo de Hipona, construye la teología cristiana en concordancia con las ideas más profundas de la filosofía griega, pero desobedeciendo el precepto aristotélico acepta la existencia del "infinito actual" en la mente de Dios, "in mente Dei". Dice San Agustín en su libro "De civitate Dei": "Todo número está caracterizado por su propiedad, así que dos cualesquiera son distintos; por tanto los números son distintos y tomados singularmente son finitos y tomados todos juntos son infinitos. Dios, entonces, a causa de su infinitud, los conoce todos. ¿Cómo sería posible que la Ciencia de Dios conociese unos números e ignorase otros? ¿El que sostuviese ésto no sería un demente?". Con el apasionamiento característico de San Agustín, esta frase va a ser de excepcional importancia en el desarrollo de las matemáticas del Infinito. Inaugura así un procedimiento mediante el cual el hombre va a recurrir a la figura divina para acceder y manipular el infinito matemático.

En el siglo XIII, Santo Tomás incorpora oficialmente el "corpus" científico y la cosmovisión aristotélica a las doctrinas de la Iglesia. Es la física del "sentido común" la que rige el Universo, finito, donde cada cosa está en su sitio, y donde la bóveda de las estrellas fijas gira alrededor de la Tierra y del Hombre, centro del Mundo por voluntad del Dios Todopoderoso.

Pero el artista construye la Catedral Gótica, expresión de un alma desmedida que anhela el infinito, y **la música**, el arte dionisiaco, llenará de infinitas sonoridades el espacio con

**mercachifles de la enseñanza. Hay que mantener este idealismo. La cultura da luz”.**

Proponemos una matemática íntimamente ligada a la **Cultura**, presentándola a través de la **Historia**, en relación con la Filosofía y con el Arte, con la Física y la Cosmología. Proponemos unas **matemáticas humanistas**, insertas en una Enseñanza cuyo fin último debe ser la de

crear hombres y mujeres con personalidad y criterios propios.

Hacemos un llamamiento al colectivo de enseñantes de las matemáticas a que recuperen el profundo sentido de la Belleza en esa grandiosa construcción del hombre que es la Matemática y que no puede ser presentada como algo abstruso, sin sentido y sin vida ■



nitos, (cuadraturas, cálculos de tangentes, máximos y mínimos, indivisibles aritméticos, infinitesimales). Con 23 años, Newton se retira a sus posesiones de Woolsthorpe y durante los dos años siguientes (1665-66) realiza una de las obras más fecundas que se hayan dado por mente humana. Allí se engendra el cálculo infinitesimal y se esboza uno de los libros que más decididamente han influido en la historia de la ciencia y del progreso: **“Los principios matemáticos de la filosofía natural”**.

Las poderosas técnicas del álgebra, junto a razonamientos infinitesimales plenos de intuición, aunque carentes de rigor, hacen avanzar extraordinariamente la nueva ciencia y el Universo newtoniano es una inmensidad límpida y serena, un espacio infinito, homogéneo, donde hay diferencias que están medidas por proporciones que responden a una armonía.

Hemos visto que la geometría griega es un producto del intelecto humano en el que se funden la creatividad y la belleza, directamente inspirada en el orden y en la simetría presentes en la Naturaleza a la que se estudia de forma **reverente y contemplativa**. Casi dos mil años más tarde el joven René Descartes contemplará con admiración el rigor y la maestría de aquellas construcciones geométricas de los “antiguos”, hasta tal punto, que rechazará las otras disciplinas que estudia (en aquel Colegio de jesuitas parisino) por considerarlas confusas y faltas de rigor. Pero hay algo que no comprende y es el carácter estetizante y falto de utilidad práctica inmediata de aquellas construcciones. Y ahora el objetivo de su geometría, la geometría cartesiana, es radicalmente distinta. Ahora se trata no de contemplar, sino de **actuar**, para dominar a la Naturaleza y ponerla al servicio del hombre.

Es a comienzos del siglo XIX cuando la Enseñanza se estataliza en los países desarrollados europeos: Francia, Inglaterra y Alemania; y las matemáticas constituirán una disciplina obligada en todos los estratos de la educación. ¿Por qué un joven aristócrata inglés, bien dotado intelectualmente y destinado a ocupar altos cargos en la Administración a mediados del siglo XIX, debe estudiar “Los Elementos” de Euclides? Sin duda, por el valor formativo de aquella geometría sintética, que preparará a las “buenas cabezas” en el rigor y la creatividad.

¿Por qué continúan teniendo las matemáticas un papel tan importante en los currículos educativos de todos los países, hoy a finales del segundo milenio? No es fácil contestar a esta pregunta. Ahora también vivimos en una Democracia que alcanza a **todos**, a diferencia de la elitista Democracia griega, y en la que **todos** tienen el derecho y el deber a la Educación. La Ciencia, que ha alcanzado increíbles grados de sofisticación, ha sustituido en buena parte en la mitología popular a la Religión, y las matemáticas, ese lenguaje

abstruso e ininteligible para la gran mayoría, parece sustituir a la colección de recetas y fórmulas mágicas con las que el brujo de la tribu pretendía poner a su favor los designios de la Naturaleza.

Pienso que en la mayor parte de nuestros centros escolares las matemáticas han dejado de ser el instrumento educativo en el que se juntaban creatividad, espontaneidad, libertad y belleza, para convertirse en una repetición incesante de algoritmos desprovistos de sentido, y esto es más absurdo aún, en nuestra época: la era de los ordenadores, esos excelsos calculadores a nuestro servicio. También la geometría sintética, y sus posibilidades formativas, ha desaparecido completamente de la enseñanza secundaria y mantiene una decrepita existencia en la primaria.

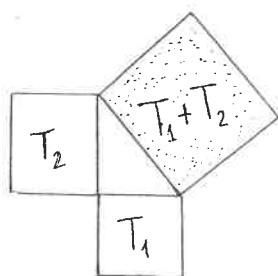
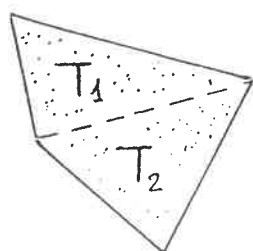
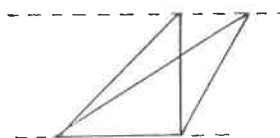
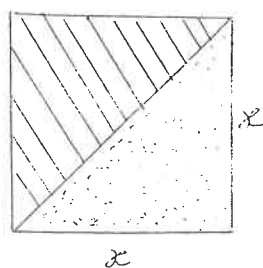
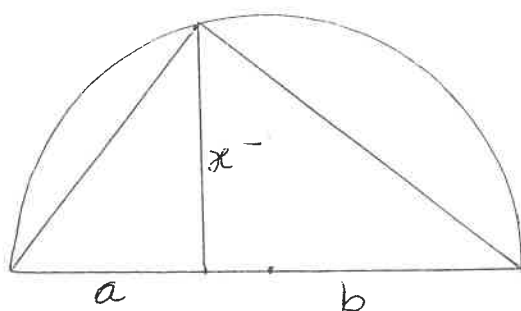
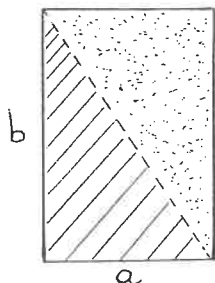
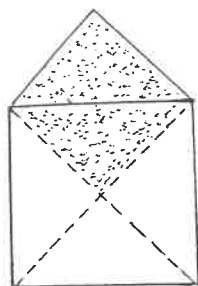
Es muy difícil convencer a una mayoría de alumnos de bachillerato de la utilidad práctica de las matemáticas en la vida laboral que les espera. Una vía podría ser la **“ecológica”**: vivimos en una sociedad **“contaminada” por el consumo, la destrucción de la naturaleza, la masificación y la irracionalidad**. Una posible manera de combatir estas lacras es pertrechándose de una **AUTENTICA CULTURA** que le permita tener una personalidad propia, en donde lo racional prime sobre lo irracional. Es necesario una vuelta a los orígenes. A mirarnos otra vez en la **CULTURA GRIEGA**, origen de nuestra civilización. Eje fundamental de esa Cultura es la Matemática y en ella la Geometría, que permite desarrollar la intuición y la creatividad y que dota a nuestro cerebro, con su práctica, de una estructura lógico-deductiva.

Emilio Lledó, uno de nuestros más lúcidos pensadores del momento, en una entrevista publicada en el diario El País el 6 de Junio de 1992 dice:

**“En la cultura clásica se luchó por entender, por seguir racionalmente una argumentación, y ahora, supeditados al flash de las imágenes, vivimos el enorme peligro de que el pensamiento no sea coherente, que sea epidérmico y puramente inconsistente. Los medios de comunicación tienen gran responsabilidad ante esto. La defensa sería la lectura, el cultivo del pensamiento abstracto”**.

Sigue diciendo Lledó: **“A pesar de todos los esfuerzos que se quieren hacer, el descuido de la Escuela y la Universidad son los principales defectos de nuestra cultura. Es necesario un planteamiento renovador y revolucionario, no de metodologías y sistemas pedagógicos, que a veces encierran enormes trampas, sino de amor al arte, a la matemática, a la cultura. El amor es el principio del conocimiento. Que no sean topes y metas extrañas que angustian, vendidas por baratos**

Como muestran los siguientes dibujos, la solución de los mismos es elemental, tan sólo son necesarios los siguientes conocimientos: Teorema de la altura, Teorema de Pitágoras y la medida del ángulo inscrito en una circunferencia.



Una vez examinados los esquemas y razonamientos anteriores, ¿por qué no habrían de resolverse los "tres problemas" planteados al inicio? Si nos detenemos un momento en el problema de la cuadratura del círculo, todo nos lleva a pensar que es bastante probable que se pueda solucionar en las condiciones prefijadas (utilizando únicamente la regla y el compás). En efecto: si son cuadrables los triángulos, cuadriláteros, pentágonos,... y en general cualquier polígono, ¿por qué no iba a serlo el círculo? Además, si ciertos trozos de círculo son cuadrables ["**las lúnulas**" de **Hipócrates de Quios** (470 - 400 a. J.C.)] ¿qué razón habría para no serlo todo el círculo? En definitiva ¿qué fallaba en el paso de lo particular a lo general?

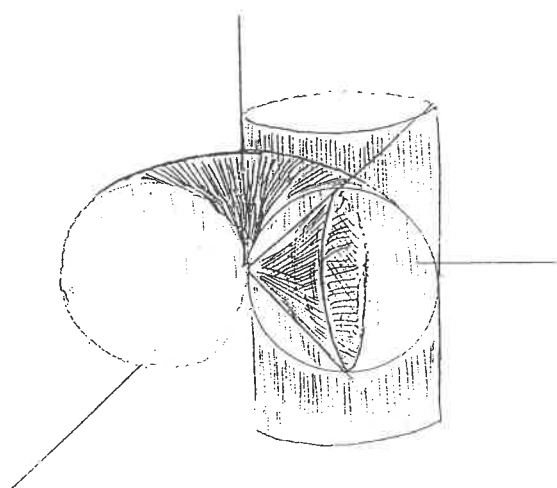
Para mí, el problema más interesante fue el de la duplicación del cubo. El deseo de buscar dos medias proporcionales entre dos valores dados pudo ser su origen, esto es: dados  $a$  y  $b$ , calcular dos valores  $x$  y  $y$ , tales que verifiquen las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

En el caso particular de que  $b = 2a$  obtenemos que el valor  $x$  es el valor del lado del cubo que estamos buscando.

Nos surge por tanto la siguiente pregunta: ¿Cómo construir los valores  $x$  y  $y$  medias proporcionales entre los valores  $a$  y  $2a$ ?

Una de las respuestas más sorprendentes es la que presentó **Arquitas de Tarento** (430 - 365 a. J.C.). Dice Arquitas que: la intersección de un cilindro recto, un cono circular y un toro da como solución un punto que justamente tiene como coordenada el valor que resuelve el problema de la duplicación del cubo.



## LOS TRES PROBLEMAS CLÁSICOS

**Santiago Fernández**  
C.O.P. de Santurce. Vizcaya

**D**urante mucho tiempo, siglos en algunos casos, varios problemas han resistido los "ataques" de toda la artillería matemática; la lista de tales problemas es demasiado larga para exponerla en estas breves páginas. La búsqueda obstinada, y en algunos casos estéril, ha resultado muy beneficiosa para el crecimiento de la matemática: se puede decir que el valor de lo imposible ha resultado, paradójicamente, altamente productivo.

Entre los muchos problemas planteados en este contexto, uno de los más singulares e interesantes es el llamado "tres problemas Clásicos". Nos referimos a: el problema de la cuadratura del círculo, el problema de la trisección del ángulo y el problema de la duplicación del cubo. El enunciado de los tres problemas es distinto, pero curiosamente los tres están ligados a un mismo destino y desenlace.

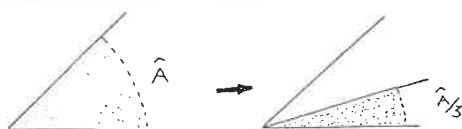
Estos problemas comenzaron a circular por la Grecia antigua hacia el siglo V a. de J.C. ¿Cómo surgieron? Hay muchas historias detrás de los mismos, pero seguramente su origen se encuentre relacionado con el afán de resolver problemas análogos a otros, que fueron solucionados de manera inmediata. Nos referimos a:

- 1) Dado un cuadrado cualquiera, construir otro cuadrado de área doble que el anterior (**Duplicación del cuadrado**).
- 2) Dado un ángulo cualquiera, construir un ángulo que sea la mitad del ángulo dado (**Bisección del ángulo**).
- 3) Dado un polígono cualquiera, construir un cuadrado cuya área sea igual a la del polígono (**Cuadratura del polígono**).

### DUPLICACIÓN DEL CUBO



### TRISECCIÓN DEL ÁNGULO



### CUADRATURA DEL CÍRCULO

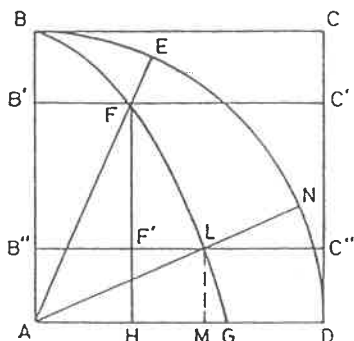


### ENUNCIADO DE LOS TRES PROBLEMAS

Utilizando únicamente regla y compás:

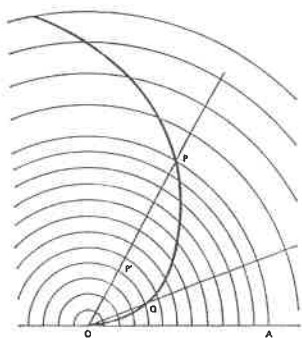
- 1) Dado un cubo cualquiera, construir otro cubo de volumen doble del anterior (**duplicación del cubo**).
- 2) Dado un ángulo cualquiera, construir un ángulo que sea la tercera parte del ángulo dado (**trisección del ángulo**).
- 3) Dado un círculo cualquiera, construir un cuadrado que tenga el mismo área que el círculo (**cuadratura del círculo**).

La trisección del ángulo también nos presentó curvas maravillosas y en las que subyace el enorme ingenio matemático; entre todas ellas merecen especial distinción la **cuadratriz de Hipías** y la **espiral** del genial **Arquímedes de Siracusa** (287 -212 a. J.C.).



La Cuadratriz de Hipías

La cuadratriz, es una curva que se genera al unir las sucesivas intersecciones de la recta AB cuando gira uniformemente sobre el punto A hasta llegar a la posición DA, y de la recta BC que se desplaza uniforme y paralelamente hasta llegar a la posición DA. Como puede observarse es una curva continua BFLG, obteniéndose el punto G por continuidad.



La espiral de Arquímedes

Este breve resumen no estaría "completo" si nos olvidásemos del problema de la cuadratura del círculo. Sin duda fue el más famoso de los tres problemas, se convirtió en un fabuloso rompecabezas. Tuvo dos vertientes: una aproximada, que condujo a problemas de rectificación de curvas,

y en particular de la circunferencia; aquí se sitúan métodos altamente ingeniosos para calcular  $\pi$  con una precisión asombrosa; cabe citar el procedimiento ideado por Specht en 1836. Calcula el número  $\pi$  con exactitud hasta la quinta cifra decimal; en efecto, según su procedimiento  $\pi$  toma el valor de 3,1415919 frente al exacto 3,1415927...

En la vertiente exacta el recorrido es difícil de resumir; no obstante tuvo unos hitos trascendentales en su caminar a lo largo de unos dos milenios. A finales del siglo XVIII **I. Lambert** y **A. Legendre** demostraron que el número  $\pi$  no es racional; más tarde, en 1882, **F. Lindemann** en una memoria publicada en los *Mathematische Annalen* demuestra —siguiendo un proceso similar al descubierto por **C. Hermite** en 1873 respecto a la trascendencia del número **e**— que también el número  $\pi$  es trascendente. En 1893 **D. Hilbert** realizó una demostración mucho más sencilla de la trascendencia del número  $\pi$ .

**Wantzell** pone fin a la aventura de los tres problemas, así enuncia un famoso teorema que lleva su nombre:

Un número real es construible con regla y compás si verifica dos condiciones (además son necesarias y suficientes):

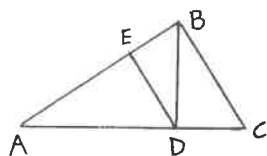
- 1) el número es algebraico sobre  $\mathbb{Q}$
- 2) el polinomio irreducible que le contiene como raíz es una potencia de 2.

Este resultado pone fin a la tremenda polémica, demostrando sin ninguna duda, que los **tres problemas son irresolubles en las condiciones expuestas al inicio**.

Después de este breve recorrido histórico por los tres problemas nos surgen varias cuestiones:

- a) ¿Llegaron a intuir los griegos la imposibilidad de los problemas?
- b) ¿Conocían el método de coordenadas? ■

La idea central de la construcción propuesta por Arquitas se basa en la división adecuada dentro del triángulo rectángulo ABC.



Si llamamos  $\overline{AE} = a$   
 $\overline{AC} = 2a$

Al ser semejantes los triángulos ABC, ADB y AED, se verifica que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

siendo  $\overline{AB} = y, \overline{AD} = x$

Por tanto la ingeniosa construcción tridimensional esconde un problema bidimensional que es el siguiente: dados los segmentos

$$\overline{AC} = 2a \text{ y } \overline{AE} = a$$

construir el triángulo que se muestra en la figura donde  $\overline{AD}$  es la solución del problema de la duplicación del cubo.

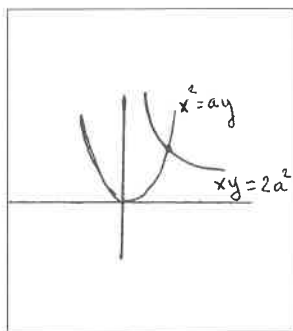
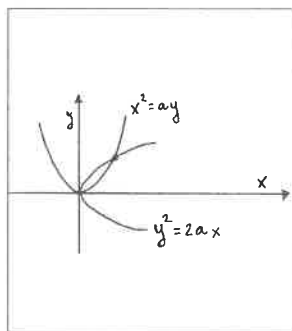
Ante esta sorprendente construcción surge una pregunta inquietante: ¿Fue Arquitas capaz de resolver el problema de la duplicación del cubo de manera sintética, o bien conocía de alguna manera un método basado en coordenadas?

**Menecmo** (374 - 325 a. J.C.) atacó el problema de forma diferente; para él las relaciones

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

le llevaron a las siguientes condiciones:

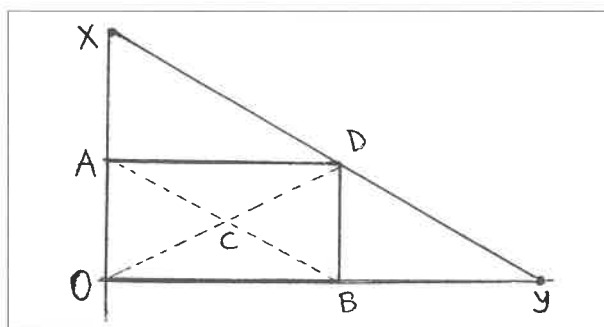
$$\begin{cases} x^2 = ay & (1) \\ y^2 = 2ax & (2) \\ xy = 2a^2 & (3) \end{cases}$$



que, como sabemos, (1) y (2) corresponden a ecuaciones de parábolas mientras que la ecuación (3) es una hipérbola.

El gran **Apolonio de Perga** (262-190 a. J.C.) también dedicó un tiempo a resolver el problema de la duplicación del cubo; él encontró una solución original y relativamente simple, se basa en la siguiente construcción:

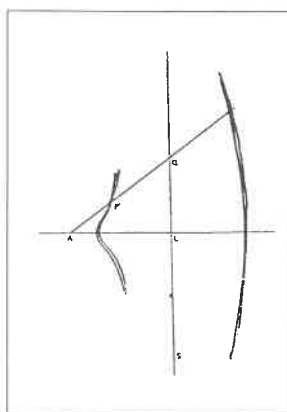
- 1) Se sitúa un rectángulo OADB sobre los ejes, de lados  $a$  y  $2a$
- 2) Se obtiene el punto medio del rectángulo, le llamamos  $C$
- 3) Construimos los puntos  $X$  y  $Y$  de tal manera que el segmento  $XY$  contenga el punto  $D$ , además  $X$  está en la recta que sostiene al segmento  $OA$  e  $Y$  está sobre la recta que sostiene a  $OB$ . Por último se ha de verificar que  $CX=CY$ .



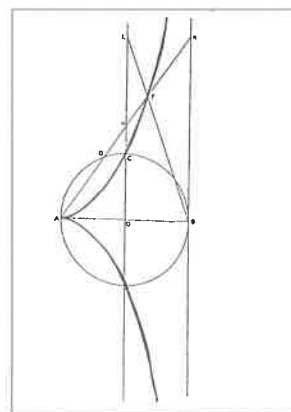
En estas condiciones, Apolonio afirma que: el valor de los segmentos  $AX=x$  y  $BY=y$  son las medias proporcionales entre  $a$  y  $2a$  (la demostración se puede realizar por varios procedimientos, uno de ellos es la aplicación conjunta del Teorema de Tales y de la proposición III,35 perteneciente a "Los Elementos" de **Euclides**).

En este breve resumen no podemos olvidarnos de la **concoide de Nicomedes** (vivió en el siglo II a. J.C.) y la **cisoide de Diocles**, contemporáneo de Nicomedes; las dos son dos curvas notables y además capaces de resolver el problema de la duplicación del cubo.

Concoide



Cisoide





bién en las obras de Arquímedes, que no dan ni la más ligera indicación de cómo se habían descubierto los magníficos resultados que describen.

Los matemáticos de los siglos XVI y XVII acogen con fruición y entusiasmo las obras clásicas, que ahora estaban a su disposición, pero preocupados porque el estilo sintético de exposición de la Geometría griega, y en particular de las obras de Arquímedes, privaba a los investigadores de la forma en que habían sido descubiertos los resultados; todos los matemáticos manifiestan, junto a su admiración, una cierta perplejidad y extrañeza ante la lectura de los clásicos. Quizá es Descartes el que con mayor claridad denuncia (en la regla IV de las **"Reglas para la dirección del espíritu"**) la insatisfacción de una curiosidad frustrada por la ocultación de los métodos de descubrimiento de la Geometría griega.

Hay dos honorables excepciones que son, por una parte, Arquímedes con su obra **"El Método"** (donde describe los procedimientos mecánicos que le condujeron a sus brillantes descubrimientos), que aunque perdida hasta 1906, actuó sin duda como variable oculta, y por otra, Pappus con el llamado **"Tesoro del Análisis"** del Libro VII de **"La Colección Matemática"**, donde se reproduce parte de la Geometría griega anterior, pero de una forma que se patentiza el camino que sigue la investigación matemática. Desgraciadamente la obra de Pappus fue ignorada o desconocida por los escritores árabes, intermediarios en el tránsito a occidente de la cultura clásica griega, permaneciendo oculta en manuscritos griegos originales que vieron de nuevo la luz en los siglos XVI y XVII, bajo el nuevo espíritu humanista de Commandino, Vieta, Fermat y otros muchos, que se propusieron la traducción, recuperación y restauración de las obras antiguas. Estos dos matemáticos griegos, Arquímedes y Pappus, son los únicos en toda la Geometría griega que dan a conocer la vía heurística de los descubrimientos, vía analítica en el caso de Pappus y también vía mecánica en el de Arquímedes.

## 2. NATURALEZA DEL CÁLCULO DEL SIGLO XVII

La Matemática del siglo XVII presenta una inflexión radical respecto a la Matemática clásica griega. El paradigma estilístico y demostrativo que impuso la filosofía platónica, cuyo exponente más representativo es la obra de Euclides **"Los Elementos"**, es violado por el principio de que lo que importa es la consecución de nuevos resultados, aunque sea sin expresión rigurosa. Se trata de crear y descubrir, se impone el lema *"primero inventar, después demostrar"*.

La Matemática griega es ponderada por su alto grado de rigor y es la fuente de formación y de inspiración de los matemáticos, pero se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos. En efecto, el camuflaje perma-

nente del infinito convierte a casi toda la Matemática griega en Geometría y el tratamiento absolutamente riguroso de los problemas infinitesimales requiere un subterfugio: *"el método de exhaución"* de Eudoxo, que obliga a tratar cada problema de forma particular, dependiendo de su estructura geométrica concreta, además de precisar un método complementario para prever los resultados. Por eso en el siglo XVII, tras la recuperación, reconstrucción, divulgación y asimilación del legado clásico, se impuso un nuevo clima psicológico y una nueva actitud hacia los problemas matemáticos, que permitió el desarrollo de multitud de nuevas técnicas infinitesimales, ya que era general el deseo de encontrar nuevos métodos para resolver rápidamente los problemas que las nuevas condiciones sociales planteaban, métodos que permitieran obtener de forma directa los resultados, aunque hubiera que echar por la borda el rigor.

Las especulaciones de la Escolástica medieval sobre el infinito y el continuo propiciaron que los matemáticos posteriores no fueran refractarios a la utilización de las técnicas infinitesimales. El Álgebra simbólica de Vieta y Descartes aplicada al material del Análisis geométrico recuperado de los antiguos, facilitó el desarrollo de técnicas formales que permitieron métodos de rápido descubrimiento más que demostraciones rigurosas. Finalmente la representación algebraica de curvas, vía la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, propició la rápida y sencilla formulación para la investigación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, rectificación, centros de gravedad, tangentes, máximos y mínimos, etc.

Con esta rica miscelánea de ingredientes matemáticos (problemas arquimedianos, técnicas algebraicas de Cálculo, Geometría Analítica y sobre todo el libre uso del concepto intuitivo de infinito), el siglo XVII produjo una impresionante profusión de nuevos resultados, a base de nuevas técnicas y métodos infinitesimales, que provocaron una progresiva aritmetización de problemas que en la antigüedad habían tenido un enfoque estrictamente geométrico.

En particular, respecto del Cálculo Infinitesimal, se abre al comienzo del siglo XVII una etapa empírica, que cubre los dos primeros tercios de este siglo, en los que manejando unos elementos con un estatuto ontológico no muy bien definido (*indivisibles, infinitamente pequeños, incrementos evanescentes, cantidades despreciables, etc.*), se desarrollan multitud de técnicas y métodos infinitesimales, que contribuyen a resolver de forma sorprendente antiguos y nuevos problemas, bajo la acción de profundas intuiciones, que supliendo la falta de rigor, evitan las contradicciones y el absurdo donde podía haber llevado tanto desenfreno conceptual, y que conducen, bajo una visión de generalización y unificación, a la destilación de un algoritmo universal, al descubrimiento simultáneo del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.



## LA ETAPA EMPÍRICA DEL CÁLCULO

**Pedro M. González Urbaneja**

I.B. San José de Calasanz. Barcelona

Se describe la naturaleza y se hace un análisis temático de los problemas más representativos de la etapa empírica del Cálculo Infinitesimal. Con el uso de "indivisibles" e "infinitamente pequeños" prima la argumentación heurística sobre la apodíctica, pero la fecundidad de las nuevas técnicas fue asombrosa. Soslayando la rigidez de la exhaución griega mediante artificios geométricos se resiente el rigor impecable de la geometría griega, pero se ingenian magníficos procedimientos heurísticos de rápido descubrimiento, abriendo el paso hacia la generalización y unificación de los problemas y métodos infinitesimales, es decir hacia la elaboración del algoritmo que desarrollan Newton y Leibniz.

### 1. LOS ANTECEDENTES GRIEGOS

La tempestad provocada por el descubrimiento pitagórico de los irracionales y la inquietud que introdujeron en el mundo griego las paradojas de Zenón de Elea, precipitó una profunda crisis de fundamentos en la Matemática que trajo consigo el "horror al infinito". Con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, las magnitudes geométricas ya no podían ser medidas mediante números, por lo que quedaban afectadas y debían ser reconstruidas todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones. Para conjurar la crisis de fundamentos había que soslayar el concepto infinitesimal de número irracional. Eudoxo de Cnido, de la escuela platónica, resolvió de forma brillante la antinomia radical entre finito e infinito. Introduciendo el concepto de "tan pequeño como se quiera", equivalente a nuestro proceso de "paso al límite", encuentra de forma provisional, con su teoría de magnitudes, una escapatoria a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, mediante un recurso genial que desarrolla en tres estadios: una definición (*igualdad de razones*), un

axioma (*axioma de Eudoxo-Arquímedes o axioma de continuidad*) y un método (*el método de exhaución*). La solución de Eudoxo fue un magnífico éxito científico, pero trajo como secuela que la filosofía platónica impusiera el rigor lógico como supremo valor, lo que cristalizaría en la sistematización axiomático-deductiva de la Geometría griega elemental en la compilación enciclopédica de "Los Elementos" de Euclides, estableciendo un severo modelo de exposición y demostración en Geometría que presidirá casi toda la producción matemática griega posterior, o por lo menos la que nos ha llegado en los grandes tratados clásicos.

En manos de Arquímedes el método de exhaución, conjugado con su genial y heurístico método mecánico de descubrimiento (*"método de la palanca"*, que Arquímedes describe en su obra "El método relativo a los teoremas mecánicos"), se convierte en un poderoso instrumento infinitesimal rigurosamente lógico que le permite alumbrar intuitivamente y convalidar apodícticamente numerosos resultados sobre cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad, que hoy obtenemos con nuestros perfeccionados y rigurosos algoritmos infinitesimales, y con los que Arquímedes, trascendiendo "Los Elementos" de Euclides, amplió de forma considerable el acervo matemático de su época.

Pero el respeto absoluto al paradigma estilístico euclídeo cercena considerablemente las posibilidades de expresión y oculta la vía del descubrimiento: el "*ars inveniendi*" de Galileo, quedando de manifiesto en exclusiva la vía apodíctica: el "*ars disserendi*". El Análisis geométrico griego (que Proclo atribuye a Hipócrates de Quíos, aunque es descrito por Platón en "La República" y por Pappus en la "Colección Matemática") era una fecunda heurística geométrica, el instrumento fundamental de investigación y creación matemática; pero, alcanzada tras el Análisis la Síntesis, en presencia de la demostración sintética cualquier Análisis era superfluo y como tal se suprimía de los grandes tratados. De esta forma, los griegos ocultaban la forma y el camino utilizados en la obtención de sus magníficos resultados matemáticos. Esto sucede en las grandes obras clásicas como "Los Elementos" de Euclides o "Las Cónicas" de Apolonio y tam-

frecuente iteración produce náusea en el lector.  
Cualquiera ducho en Matemáticas puede realizar tal prueba."

C. HUYGENS (*Horologium oscillatorium* de 1673):

"[...] No es de gran interés el que demos una demostración absoluta, después de haber visto que una perfecta demostración puede ser dada. Concedo que debería aparecer en una forma clara, ingeniosa y elegante, como en todos los trabajos de Arquímedes. Pero lo primero y más importante es el método de descubrimiento mismo."

Las frases transcritas son muy significativas para comprender la enorme influencia de Arquímedes sobre los matemáticos del siglo XVII, pero sirven sobre todo para mostrar la primacía de la argumentación heurística sobre la apodíctica, de la ponderación del método de descubrimiento por encima de la expresión rigurosa.

El método de los indivisibles recibió acerbos críticas dirigidas contra su propia naturaleza, debido al problema que plantean sobre la estructura del continuo, toda vez que contradecían la doctrina aristotélica del continuo, como divisible en partes del mismo tipo que la magnitud original, divisibles de nuevo indefinidamente. Por eso Fermat, Roberval, Wallis y otros, recogen estas críticas e intentan modificar los procedimientos de Cavalieri, para evitar los errores de dimensionalidad, manifestando que no se toman segmentos para la suma de todas las ordenadas, sino rectángulos de anchura infinitesimal, "*infinitesimales*", lo que desde el punto de vista del rigor no representa un gran progreso, pero salva, mejor que peor, la homogeneidad. Con ello se abre la segunda etapa del Cálculo Infinitesimal, sustituyendo los "*indivisibles*" por los "*infinitamente pequeños*" de igual dimensión geométrica espacial que la figura a la que pertenecen. Como no se sabe muy bien lo que es una magnitud infinitesimal ni lo que debe entenderse por una suma de infinitos sumandos, el rigor brilla por su ausencia, pero como contrapartida la fecundidad de los nuevos métodos fue asombrosa.

### 3. ANÁLISIS TEMÁTICO DEL CÁLCULO DEL SIGLO XVII ANTERIOR A NEWTON Y LEIBNIZ

El Cálculo del siglo XVII estuvo esencialmente vinculado a la investigación sobre curvas. Se insistió inicialmente en las curvas conocidas por los griegos (*las cónicas de Menecmo y Apolonio, la cuadratriz de Dinostrato, la conoide de Nicomedes, la cisoide de Diocles, la hippopede de Eudoxo, la espiral de Arquímedes, etc.*), pero enseguida esta colección se vio complementada por multitud de nuevas curvas, entre las que sobresalen "*las parábolas, hipérbolas y espirales generalizadas o de orden superior*" (llamadas de Fermat),

"*el caracol de Pascal*", "*el folium de Descartes*", "*la curva de Lamé*", "*la espiral logarítmica*", "*la kappa-curva*", "*la curva tangentoidal*", y ante todo la reina de todas las curvas: "*la cicloide*".

Contrariamente al punto de vista estático que fue casi exclusivo (salvo quizá en el estudio de la espiral de Arquímedes) en el tratamiento de las curvas en Grecia, en el siglo XVII se abre paso enseguida el punto de vista cinemático, de manera que desde el principio los problemas de diferenciación se presentan no sólo a propósito de tangentes sino también de velocidades. Particularmente el estudio de la espiral logarítmica y de la cicloide contribuye a la simbiosis de los métodos geométricos con los cinemáticos. En efecto, una curva se puede considerar como "*la trayectoria de un punto en movimiento*" y la tangente como la recta que "*pasa por dos posiciones consecutivas*". El principio de la composición de movimientos y más precisamente de la composición de velocidades permite a Torricelli, Roberval y otros, disponer de un método general de obtención de tangentes, para curvas que se pueden definir cinemáticamente.

Y todo ello a pesar de Descartes que trataba desdeñosamente de "*mecánicas*" a las curvas no algebraicas, y pretendía su exclusión de la Geometría. Para curvas algebraicas, Descartes da un método de obtención de tangentes, basado en consideraciones sobre raíces dobles, bajo un punto de vista en absoluto diferencial, independiente del concepto de límite y que es el de la Geometría Algebraica. Algoritmos formales pseudo-diferenciales fueron desarrollados para facilitar la obtención de las raíces dobles del método de Descartes con la regla de Hudde y adelantando la derivación implícita de funciones algebraicas con la regla de Sluse.

Pero no es ésta la forma imperante de pensar y hacer. En efecto, los métodos algebraicos sufrirán un cierto eclipse, absorbidos de forma provisional por los métodos cinemático-diferenciales de Roberval, Fermat y Barrow. Se defiende que las curvas definidas cinemáticamente son como las demás, no hay por qué hacer distinción, todas pueden estudiarse por los mismos métodos. La variable "*tiempo*" en los trabajos de Barrow se convierte en una variable independiente universal de la que dependerá la variación simultánea de varias magnitudes, como base de un Cálculo Infinitesimal de tendencia geométrica, ideas que son el punto de partida de Newton, para quien sus "*fluyentes*" son las distintas magnitudes funciones de un *tiempo*, que es un parámetro universal, mientras sus "*fluxiones*" son las "*derivadas*" respecto al tiempo, lo que supone la culminación de los métodos cinemáticos.

Otro aspecto decisivo del Cálculo del siglo XVII es que se empieza a intentar una clasificación de los problemas. Los problemas de diferenciación aparecen bajo tres aspectos:

Bajo esta perspectiva, resulta que los matemáticos que desarrollaron el germen del Cálculo Integral, habiendo bebido en las fuentes de los grandes tratados conocidos de Arquímedes, (que ahora tenían a su disposición), donde el método de exhaución presidía todo el desarrollo con un implacable rigor, al intentar soslayar la rigidez de la exhaución mediante artificios geométricos que les condujeran a procedimientos heurísticos de rápido descubrimiento, se aproximan de forma sorprendente a la técnica del método mecánico del “Método” de Arquímedes. Esto es particularmente cierto en el caso de B. Pascal (que aplica ingeniosamente su “método de la balanza”, llamada “*balanza de Arquímedes*” en los famosos problemas sobre la cicloide), y sobre todo, en el caso de Cavalieri, con sus indivisibles.

Aunque el siglo XVII no dispuso del “Método” de Arquímedes, el cúmulo de analogías con éste es evidente, lo que hace comprensible el que muchos matemáticos de esta época estuvieran convencidos de que Arquímedes disponía de un método especial de descubrimiento.

A comienzos del siglo XVII aparecen métodos infinitesimales que modifican y simplifican los métodos de Arquímedes, intentando obviar la necesidad de la doble reducción al absurdo de la exhaución. Con el uso de los *indivisibles* y los *infinitamente pequeños* se resiente el rigor en las demostraciones y van desarrollándose consideraciones sobre límites basadas en la incipiente Teoría de Números.

Para Cavalieri un área estaba formado por un número infinito de líneas paralelas o *indivisibles*, que al sumarlos con los recursos algebraicos de que disponía, podía, por una parte, ratificar los resultados clásicos (lo que daría seguridad a su método), y por otra, obtener cuadraturas y cubaturas no conocidas por los antiguos. Sorprende la estrecha analogía entre el “Método de los indivisibles” y el “Método mecánico” de Arquímedes. Pero Arquímedes tenía muy claro y así lo manifiesta en el preámbulo del “Método” que “*la investigación obtenida por este método no implica verdadera demostración*”, por eso ha de confirmar rigurosamente lo que descubre mediante el método de exhaución. La analogía está en la primera etapa de la creación, pues desde luego Cavalieri ya no necesita recurrir al recurso de la palanca para sumar sus indivisibles, el Álgebra le facilita esta operación y proporciona unas posibilidades de generalización imposibles de lograr con la Geometría griega.

El excesivo abuso de la intuición inmediata de las magnitudes geométricas y la violación del principio de homogeneidad espacial dimensional con los indivisibles, provocaba que no hubiera en el ambiente matemático un consenso acerca del valor demostrativo de los métodos utilizados. Algunos concebían el método de los indivi-

bles como simplemente heurístico y creían necesaria una demostración por exhaución (punto de vista arquimediano). En general se consideraba que los resultados obtenidos mediante indivisibles podían justificarse fácilmente con la exhaución, pero no era necesario porque concebían el nuevo método inventivo no más que como un lenguaje diferente, un estilo distinto de expresar unos mismos conceptos. Saben que los resultados son correctos porque saben y pueden probarlos rigurosamente mediante los métodos de Arquímedes. Vamos a reproducir algunas frases representativas de lo que se acaba de exponer:

J. KEPLER (*Nova stereometria doliorum vinariorum* de 1615):

“[...] Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos.”

P. FERMAT (*De aequationum localium... in quadrandis infinitis parabolis et hiperbolis* [Tratado sobre cuadratura] de 1658):

“[...] Basta hacer esta observación [sobre las condiciones para poder aplicar el método de Arquímedes] una vez para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras. (...) Así alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes [...]”

B. CAVALIERI (*Geometría Indivisibilibus continuorum ...*) de 1635:

“[...] Se podría demostrar todo esto utilizando las técnicas arquimedianas, pero supondría un gran esfuerzo.”

B. PASCAL (*Lettre à Carcavi*):

“[...] He querido hacer esta advertencia para mostrar que todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles, se demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos [como Arquímedes]: y que así ambos métodos no difieren más que en la manera de hablar.”

I. BARROW (*Lectiones Geometricae* de 1670):

“[...] Se podría alargar mediante un discurso apagógico [mediante la doble reducción al absurdo del método de exhaución], pero ¿para qué?”

J. WALLIS (*Arithmetica infinitorum* de 1656):

“[...] Este procedimiento es altamente heterodoxo, pero puede verificarse mediante el bien conocido método apagógico de figuras inscritas y circunscritas, lo que es supérfluo, porque la

máticos reducen la rectificación de la parábola a la cuadratura de la hipérbola, ejemplo importante porque aparece como caso particular según el cual la rectificación de la curva  $y=f(x)$  se corresponde con la cuadratura de la curva  $y=[1+f'(x)^2]^{1/2}$ , de manera que el problema de la rectificación forma una transición geométrica natural entre la diferenciación que presupone y la integración a la que se reduce, contribuyendo a vincular así los dos tipos fundamentales de problemas del Cálculo: las tangentes y las cuadraturas.

Precisamente el descubrimiento de que tales problemas, las cuadraturas y las tangentes, son en cierto modo inversos uno del otro, cuestión vislumbrada por Barrow (aunque el abstruso lenguaje geométrico-sintético que utiliza le impidió advertir que había descubierto el nudo gordiano del Cálculo Infinitesimal, el instrumento esencial para realizar las cuadraturas vía la operación inversa de cálculo de la tangente, es decir la antiderivación), en la mente de Newton y Leibniz fraguó de tal forma, que constituyó un componente esencial, en la sistematización del Cálculo por ambos, destilando de la rica miscelánea de técnicas infinitesimales anteriores un poderoso algoritmo instrumental para el cálculo sistemático de áreas y tangentes.

#### 4. CONCLUSIONES

Se ha descrito la naturaleza y los problemas más representativos de la etapa empírica del Cálculo Infinitesimal. En ella se ha dilapidado en general el rigor impecable de la exhaución griega, pero se han ingeniado magníficos métodos heurísticos de rápido descubrimiento.

A partir de aquí se plantea históricamente la necesidad de dos hechos fundamentales: a) la generalización y unificación de los problemas y métodos infinitesimales, es decir la elaboración de un algoritmo aplicable a todos los problemas y b) la reformulación sobre bases rigurosas del nuevo Análisis Infinitesimal. La parte a) es lo que llamamos el descubrimiento final del Cálculo por Newton y Leibniz. La parte b) es la puesta en orden lógico del Cálculo, que realiza Cauchy y sus continuadores, la llamada *Aritmetización del Análisis*.

Puede decirse que el Cálculo anterior a Newton y Leibniz es una ingente casuística de métodos heurísticos, aplicados a problemas geométricos específicos, que se resuelven mediante técnicas *ad hoc*, obteniéndose multitud de resultados particulares que, al traducirlos al lenguaje moderno, muestran los conceptos esenciales del Cálculo, que del alguna manera yacían en ellos, pero de forma tan fragmentaria que sólo se referían a problemas individuales y no a teorías generales. Pero la perspectiva de generalización estaba implícita en esos métodos. Si no se acertó a encontrar la técnica algorítmica general bastante tuvo que ver en ello el lenguaje matemático al uso, todavía primitivo, que se

utilizaba. El gran acierto de Leibniz es precisamente la elaboración de una notación especialmente afortunada, tan identificada con los propios conceptos y tan significativamente definitiva, que, a veces, nos resulta inevitable utilizarla, anacrónicamente, para exponer los resultados infinitesimales de sus predecesores. Su virtuosismo en la creación del simbolismo le permitiría traducir en fórmulas los resultados y en algoritmos los métodos, tanto los de sus antecesores como los descubiertos por él mismo, lo que a su vez le facilitaría la utilización de los recursos algebraicos para independizar el discurso matemático de las figuras geométricas y con todo ello reconocer y aislar los conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal, creando un cuerpo de doctrina dotado de algoritmos eficaces, es decir funcionando como un Cálculo operacional que resuelve todos los problemas planteados anteriormente, mediante procedimientos uniformes y con una proyección a nuevos y más complicados problemas, como un potente instrumento de investigación. En palabras del propio Leibniz, se trataba de hacer con las técnicas del Cálculo lo mismo que había hecho Vieta con la Teoría de Ecuaciones y Descartes con la Geometría.

No es fácil delimitar el nivel de contribución de cada matemático al nacimiento del Cálculo Infinitesimal. Mientras ciertas creaciones matemáticas de la época tienen un sello poderosamente individual como la Dinámica de Newton, la Geometría Proyectiva de Desargues, la Teoría de Números de Fermat, en lo que al Cálculo se refiere el descubrimiento se fue fraguando de una forma gradualmente atomizada en lentas transiciones casi imperceptibles mediante la inevitable y sucesiva aparición de nuevos conceptos, métodos y técnicas que un amplio y brillante elenco de matemáticos iban entrelazando entre sí de forma casi inextricable.

A lo largo del recorrido de la etapa empírica del desarrollo del Cálculo anterior a Newton y Leibniz, se van poniendo de manifiesto hechos muy significativos (el incremento de la variable independiente de Fermat y Barrow, el triángulo característico y sus semejantes vinculados a cada punto de la curva, la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, etc.) y sobre todo se va abriendo paso lenta y subrepticamente el concepto de límite. Aunque muchos matemáticos aplican intuitivamente nociones muy próximas a las nuestras, contextualizando sus resultados se advierten las dificultades inherentes al ejercicio del pensamiento aritmético en términos de límites, que tan imprescindible se fue manifestando durante dos siglos en la ardua tarea de reconstruir y sistematizar el Análisis, con fundamentos rigurosos.

Como conclusión, Newton y Leibniz, bajo concepciones y métodos infinitesimales diferentes, fueron capaces de separar la ganga geométrica de los resultados de sus antecesores, encontrando el principio general que les permitiría reducir las operaciones fundamentales del Cálculo Infinitesimal.

velocidades, tangentes y máximos y mínimos. Fermat unifica los tres aspectos e inicia el argumento diferencial de "incrementar la variable independiente" y, valorando el correspondiente incremento de la función, considerar por primera vez (aunque manteniéndose en el terreno de lo operativo y algebráico) el cociente incremental que definirá la primera derivada. Por ello Laplace y la mayor parte de los matemáticos franceses consideran a Fermat como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial. Coordinados los aspectos vinculados a la *primera derivada*, hay que decir que los relativos a la *segunda derivada* tardarán bastante más en unificarse, lo que llevará a cabo Huygens a propósito de las evolutas y del radio de curvatura de una curva.

Respecto al Cálculo Integral se estudiaban desde la época clásica griega los problemas de cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad. El siglo XVII ampliará considerablemente el número de cuadraturas y cubaturas en relación con la ingente cantidad de nuevas curvas que se definen, añade la rectificación de curvas y el cálculo de superficies de revolución (en la antigüedad sólo Arquímedes había tratado los casos particulares de la rectificación de la circunferencia en "**Sobre la medida del círculo**" y la superficie de la esfera en "**Sobre la esfera y el cilindro**"). Se emprendería una clasificación de los problemas según la naturaleza de la "*integral subyacente*". Para áreas y volúmenes el paso fundamental lo da Cavalieri con sus indivisibles, donde reconoce que muchos de los problemas resueltos por Arquímedes se reducen a la cuadratura de  $x^n$ , para  $n=1,2$ . Sigue inmediatamente el intento de generalizar la cuadratura de Cavalieri para  $n$  racional distinto de -1 (para  $n=-1$ , la llamada cuadratura de la *hipérbola de Apolonio* se tardaría bastante más tiempo en resolver), con una profusión de brillantes resultados sobre cuadraturas de hipérbolas y parábolas generalizadas, algunas obtenidas por indivisibles o infinitesimales, (Roberval, Pascal,...), otras mediante cuadraturas aritméticas (que se basarían en el modelo de la cuadratura de la espiral por Arquímedes) por medio de diversas fórmulas para la suma de las potencias de los primeros enteros obtenidas por consideraciones sobre números poligonales (Fermat) o sobre el triángulo aritmético (Pascal); otras obtenidas empíricamente a base de una buena dosis de inducción incompleta (Wallis) y otras por originales métodos como el de la progresión geométrica de Fermat.

De esta forma todos los problemas sobre áreas y volúmenes podían reducirse a cuadraturas. Dos problemas se consideraban equivalentes cuando dependían de la misma cuadratura. Por ejemplo Cavalieri demuestra que el problema del volumen de la pirámide y el de la cuadratura de la parábola son equivalentes porque ambos dependen de la cuadratura de  $x^2$ . Se disponía por tanto de una forma de clasificar los problemas según el grado de la dificultad de la cuadratura a que daban lugar.

Si a esto le añadimos que tanto Pascal como Barrow, obtienen mediante consideraciones geométricas resultados asimilables a los métodos de *integración por partes* e *integración por cambios de variable*, resulta que los matemáticos del momento pueden resolver ya infinidad de problemas que se reducen a cuadraturas elementales. Todo ello al inmenso precio de dar la espalda al pasado y aceptar el buscar la justificación de los métodos nuevos en la fecundidad de los resultados y no en el argumento riguroso.

Pero todavía quedaban por resolver los arduos problemas de la cuadratura del círculo y de la hipérbola de Apolonio, a lo que se enfocan ciertos trabajos de Saint-Vincent, Mercator, Wallis, Gregory y Newton, mediante procedimientos de interpolación indefinida de funciones circulares y logarítmicas, que pronto darán lugar con Newton y Leibniz a los métodos generales de desarrollo en serie. Entre los algoritmos infinitos obtenidos sobresalen los sensacionales descubrimientos de la serie de Mercator para el logaritmo en relación con la cuadratura de la hipérbola:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

así como el desarrollo de Wallis de  $\pi/2$  en producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots$$

y el desarrollo de la serie binomial de Newton:

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{128}x^8 \dots$$

ambos en relación con la cuadratura del círculo.

Los problemas de la rectificación de curvas se resolvieron más tardíamente. Históricamente la primera curva rectificable después del círculo fué la espiral logarítmica (llamada por Torricelli "*espiral geométrica*" para distinguirla de la espiral de Arquímedes, que sería la "*espiral aritmética*"). El problema fue resuelto por medios cinemáticos hacia 1640 por Roberval y Torricelli. Neil resuelve hacia 1658 la rectificación de la parábola semi-cúbica  $kx^2=y^3$ , llamada "*parábola de Neil*", mientras Roberval y Wren consiguen rectificar la cicloide hacia 1659. Por las mismas fechas Pascal obtiene la igualdad de la longitud de la espiral de Arquímedes con la de una parábola (*Egalité des lignes spirale et parabolique* de "**Les Lettres de A. de Dettonville**"). Respondiendo a estos éxitos de Wren y Pascal, Fermat escribe hacia 1659 un tratado general sobre rectificación ("**De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica**") en el que aplicando el material desarrollado en sus cuadraturas y con base en la parábola de Neil obtiene la rectificación de una familia infinita de curvas. Varios mate-

## UN PASEO POR EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

**Xavier Valls Aubert**

*Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les CC.EE. Univ. Autònoma. Barcelona*

### Introducción

La primera vez que oí hablar del último teorema de Fermat, fue cuando cursaba quinto de bachillerato. Un día el profesor, no recuerdo exactamente por qué motivo, nos explicó su extraordinario origen, y lo difícil que era darle una respuesta conclusiva, a pesar de la relativa sencillez de su enunciado. Los más grandes matemáticos desde los tiempos de Fermat hasta la actualidad habían intentado resolver el problema en vano. Los nombres de Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Dirichlet, Kummer y muchos otros están ligados a su historia. Algunos de ellos habían obtenido soluciones en casos particulares, pero nadie había sido capaz de resolverlo de forma general. A pesar de las advertencias que nos hizo el profesor de que no intentáramos hallar una solución pues ya debíamos comprender que el problema era muy y muy difícil, al llegar a casa, eché mano de la calculadora y estuve varias horas intentando hallar un contraejemplo. Evidentemente no hallé ninguno, pero ha sido uno de los problemas que me hizo ver claro mi interés por las matemáticas.

Demos un breve paseo por su apasionante historia.

### Un margen demasiado estrecho

Pierre Fermat era abogado y miembro del parlamento de Toulouse, y dedicaba su tiempo libre a las matemáticas. Su gran afición por ellas le ha convertido en una de las figuras clave de la historia de las matemáticas. Es uno de los creadores de la geometría analítica, y la teoría de las probabilidades, uno de los precursores del análisis infinitesimal y el fundador de la teoría de los números.

A finales de la década 1630-40, mientras estudia los trabajos de Diofanto sobre números, hace gran cantidad de notas en los márgenes del libro. Una de ellas, hace referencia a la proposición: "Dado un cuadrado dividirlo en dos cuadrados", y dice: "Por otro lado es imposible separar un cubo en dos cubos, o un bicuadrado en dos bicuadrados o en general separar cualquier potencia que no sea un

cuadrado en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una prueba realmente maravillosa de este hecho, pero el margen no es lo suficientemente amplio para contenerla"<sup>1</sup>.

El nombre de "Último teorema de Fermat" con el que se conoce este enunciado, no se debe a que fuera el último que enunció, sino, que de todas las proposiciones que Fermat propuso durante su vida y a las que no dio solución, ésta es la única a la que los matemáticos aún no habían sabido dar una respuesta completa.

Es curioso que, habiendo manifestado Fermat que tenía una demostración del teorema antes de 1640, no diera ninguna, pues murió veinticinco años después, en 1665. Este hecho y las dificultades que se han tenido que superar para dar una respuesta definitiva al teorema, hace dudar, a la mayoría de los matemáticos, de que la demostración tan maravillosa de Fermat fuera completamente correcta.

A principios de nuestro siglo, P. Wolfskehl ofreció un importante premio a quien obtuviera una prueba del teorema. El hecho de que pudiera haber una demostración elemental del problema, junto con la posibilidad de ganar el premio, desencadenaron una gran profusión de aficionados que creyendo haber resuelto el problema enviaban su solución a los matemáticos de prestigio para que las juzgaran. Explican que el eminente especialista en teoría de los números, E. Landau, ante la avalancha de soluciones, creó una tarjeta que decía, "Apreciado Sr./a: Se acusa recibo de su intento de demostración del último teorema de Fermat y se le devuelve. El primer error se halla en la página \_\_, línea \_\_." y Landau la hacía rellenar a sus estudiantes. Después de la Primera Guerra Mundial, con la devaluación del marco alemán el premio carece de valor monetario y por tanto hay muy pocos *amateurs* que crean haber hallado una respuesta. De todas formas, algunos se empeñan en que lo han conseguido y consideran que existe una conspiración de los matemáticos para que no se les reconozcan sus méritos.

1. ¡Cuántas veces no se habrá deseado que el margen no fuera mayor! De hecho A. Weil se pregunta qué hubiera pasado si Fermat hubiera tenido conciencia de estar escribiendo para la eternidad.



simal a un algoritmo universalmente válido, produciendo un cambio sustancial en el tratamiento y resolución de los problemas. Recogiendo todos los componentes de "lo heurístico" de la fase empírica anterior, Newton y Leibniz, sin

añadir grandes cotas de rigor, desarrollan "lo algorítmico" con la fecundidad, coherencia y generalidad de sus diferentes sistemas infinitesimales, abriendo la puerta a "lo riguroso" del Análisis moderno ■

## BIBLIOGRAFÍA

### I. OBRAS GENERALES SOBRE HISTORIA DEL CÁLCULO

- Baron, M. E.: *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. London Pergamon, 1969.
- Boyer, C. B.: *The History of the Calculus and its conceptual development*. Dover, New York, 1949.
- Castelnuevo, G.: *Le Origini del Calcolo Infinitesimale nell'era moderna*. N. Zanichelli Editore, Bologna, 1938.
- Edwards, C. H.: *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- González Urbaneja, P. M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Universidad, Madrid, 1992.
- Grattan-Guinness, I. y otros autores: *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos*. Alianza Universidad, Madrid, 1984.
- Toeplitz, O.: *The Calculus, a Genetic Approach*. University of Chicago Press, Chicago, 1963.

### II. OBRAS GENERALES SOBRE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

- Boyer, C. B.: *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad, Madrid, 1986.
- Collette, J. P.: *Historia de las Matemáticas, Siglo XXI*, Madrid, 1985.
- Colerus, E.: *Breve historia de las Matemáticas*. Doncel, Madrid, 1972.
- Eves, H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS College Publishing, New York, 1983.
- Kline, M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad, Madrid, 1992.
- Rey Pastor, J. y Babini, J.: *Historia de la Matemática*. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1951. Gedisa, Barcelona 1984.
- Smith, D. E.: *History of Mathematics*, Dover, New York, 1958.

### III. OBRAS SOBRE FILOSOFÍA DE LA CIENCIA Y DE LAS MATEMÁTICAS

- Brunschvicg, L.: *Les étapes de la Philosophie Mathématique*. Blanchard, París, 1972.
- Descartes, R.: *Reglas para la dirección del espíritu*. Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- Koiré, A.: *Estudios de Historia del Pensamiento Científico*. Siglo XXI. Madrid, 1971.
- De Lorenzo, J.: *Introducción al estilo matemático*. Tecnos, Madrid, 1971.
- Mondolfo, R.: *El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica*. EUDEBA, Buenos Aires, 1971.

ducto es un cuadrado perfecto  $u^2$ , estamos en las condiciones de la proposición anteriormente citada y por tanto  $v$  y  $w$  son cuadrados perfectos, es decir, deben existir enteros positivos  $p$  y  $q$  primos entre sí, tales que  $v=p^2$  y  $w=q^2$ . En definitiva podemos escribir:

$$c=v+w=p^2+q^2 \text{ y } b=v-w=p^2-q^2 \quad (2)$$

lo que demuestra que  $p$  ha de ser mayor que  $q$ , y además  $p$  y  $q$  han de ser de paridades opuestas, pues tanto  $c$  como  $b$  son impares. Un pequeño cálculo fácil de completar da además:

$$a = 2pq \quad (3)$$

Ya hemos resuelto nuestro problema, pues tenemos que para obtener una terna pitagórica primitiva basta con seleccionar dos números  $p$  y  $q$ , tales que  $p$  sea mayor que  $q$  y ambos sean de distinta paridad, y a partir de ellos construir la terna a partir de las relaciones (2) y (3) que hemos obtenido, tal como se puede comprobar en la tabla.

| $p$ | $q$ | $a=2pq$ | $b=p^2-q^2$ | $c=p^2+q^2$ |
|-----|-----|---------|-------------|-------------|
| 2   | 1   | 3       | 4           | 5           |
| 3   | 2   | 12      | 5           | 13          |
| 4   | 1   | 8       | 15          | 17          |
| 4   | 3   | 24      | 7           | 25          |
| 5   | 2   | 20      | 21          | 29          |
| 5   | 4   | 40      | 9           | 41          |
| 6   | 1   | 12      | 35          | 37          |
| 6   | 5   | 60      | 11          | 61          |

#### El último teorema para el exponente 4

Volvamos ahora al problema que nos ocupa. El mismo Fermat demostró la imposibilidad para el caso en que el exponente sea 4, es decir, para la ecuación  $a^4+b^4=c^4$ . De hecho lo hace para el caso más general  $a^4+b^4=c^2$ , pues es evidente que si dos cuartas potencias no pueden dar un cuadrado mucho menos podrán dar otra cuarta potencia. El tipo de razonamiento que utiliza para la demostración de este hecho, es un proceso creado por el propio Fermat, al que se denomina *descenso infinito* y consiste en suponer que se dispone de una solución y construir a partir de ella una nueva solución en números estrictamente menores. Si esto es **siempre** posible nos lleva a una contradicción, pues dada una solución, solo existen un número finito de soluciones menores.

Veamos como se aplicaría el descenso infinito en nuestro caso. Si tenemos tres números  $a$ ,  $b$  y  $c$ , tales que  $a^4+b^4=c^2$ ,

vamos a ver que es posible obtener otros tres números  $u$ ,  $v$  y  $w$  inferiores a los anteriores y tales verifican la misma relación  $u^4+v^4=w^2$ . Ahora podemos aplicar a  $u$ ,  $v$  y  $w$ , el mismo proceso y obtener otros tres números inferiores y que verifican la misma relación y así de forma indefinida. Como es imposible que existan infinitas soluciones menores que una finita dada, el error proviene de suponer que una tal solución existe.

Supongamos pues que tenemos una terna  $a$ ,  $b$  y  $c$ , tales que  $a^4+b^4=c^2$ , que es primitiva (no tiene divisores comunes). En particular  $a^2$ ,  $b^2$  y  $c$ , son una terna pitagórica, de la que podemos suponer que  $a$  es par, existen por tanto  $p$  y  $q$  tales que  $a^2=2pq$  y  $b^2=p^2-q^2$ . Esta última relación nos da otra terna pitagórica de hipotenusa  $p$ ,  $b$  impar y  $q$  par, por lo que podemos encontrar números  $m$  y  $n$  con  $p=m^2+n^2$  y  $q=2mn$ , de donde

$$a^2 = 4mn(m^2+n^2) \text{ con } m \text{ y } n \text{ primos entre sí}$$

y haciendo uso ahora de la proposición que hemos utilizado al hallar la ternas pitagóricas tenemos que tanto  $m$ , como  $n$ , como  $m^2+n^2$  deben ser cuadrados perfectos, es decir, existen  $u$ ,  $v$  y  $w$  tales que  $m=u^2$ ,  $n=v^2$  y  $m^2+n^2=w^2$  y en definitiva

$$u^4+v^4=w^2$$

con lo que hemos obtenido una ecuación igual a la de partida, pero en la que los números  $u$ ,  $v$  y  $w$  son más pequeños que los  $a$ ,  $b$  y  $c$  originales (ya que  $u^2=m<4mn(m^2+n^2)=a^2$ ). Hemos obtenido pues los tres números que nos permiten aplicar el razonamiento del descenso infinito.

Suponer que existen  $a$ ,  $b$  y  $c$ , tales que  $a^4+b^4=c^2$ , nos ha llevado a una contradicción, lo que nos obliga a decidir que tal relación no es posible en números enteros positivos. Por tanto el teorema es cierto para  $n=4$ .

#### La demostración de Euler para el caso $n=3$

El primero en dar solución al caso  $n=3$ , es decir, a la ecuación  $a^3+b^3=c^3$ , es Euler. En 1770 la publica, pero ya en 1754 había comunicado en una carta a Goldbach tener una prueba. Su demostración utiliza como en el caso de las cuartas potencias el método del descenso infinito, y propiedades de los enteros de la forma  $u^3+3v^3$ , que en aquel entonces no estaban del todo esclarecidas, por lo que se considera que su prueba no era concluyente.

Veamos qual era la argumentación de Euler. Supongamos que tenemos tres enteros,  $a$ ,  $b$  y  $c$  tales que verifican la relación  $a^3+b^3=c^3$ , podemos suponer que son primos entre sí. Por tanto uno de ellos es par. Si suponemos que  $c$  es par podemos hallar  $p$  y  $q$  enteros primos entre sí y de distinta

### Una generalización del teorema de Pitágoras

Antes de introducirnos en la propia historia del último teorema de Fermat, creo que es preciso aclarar la proposición a la que hace referencia la nota de Diofanto que Fermat comenta.

Todo el mundo recuerda haber estudiado en alguna ocasión el teorema de Pitágoras, que trata sobre triángulos rectángulos y cuyo enunciado es: "La suma de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al cuadrado construido sobre la hipotenusa", que reducido a la simplicidad de una ecuación se escribe

$$a^2 + b^2 = c^2$$

siendo  $a$  y  $b$  los catetos de triángulo rectángulo y  $c$  la hipotenusa.

También es posible que muchos recuerden que existe una solución muy sencilla de esta ecuación en números enteros, la dada por los números 3, 4 y 5, pues  $3^2 + 4^2 = 5^2$  como es fácil comprobar. Pero ésta no es la única solución en números enteros de dicha ecuación, sino que, como veremos en el próximo apartado, existen muchas más. Precisamente la proposición de Diofanto hace referencia a la búsqueda de todas las soluciones enteras posibles de dicha ecuación (descomponer un cuadrado en dos cuadrados), y de lo que se percató Fermat es que si cambiamos el exponente 2 por un 3, o por cualquier otro mayor, es decir, nos referimos a la ecuación

$$a^n + b^n = c^n, n > 2 \quad (1)$$

entonces no existe ninguna solución en números enteros no trivial, es decir, si no se admiten soluciones del tipo  $7^5 + 0^5 = 7^5$ , no existen números enteros  $a$ ,  $b$  y  $c$ , distintos todos de cero, para los que la igualdad sea cierta.

Es curioso que siendo la formulación del teorema tan simple, sea tan difícil hallar un razonamiento que nos permita tener la certeza absoluta de que la relación (1) no es posible para cualquier  $n$  mayor que 2.

### Ternas pitagóricas

Tal como hemos indicado anteriormente, Diofanto en su proposición, pretendía hallar una expresión general de todas las soluciones enteras de la ecuación  $a^2 + b^2 = c^2$ . Intentemos ver de qué manera.

La primera cuestión que creo interesante hacer notar es que si disponemos de una solución (por ejemplo, 3, 4 y 5),

entonces podemos considerar una infinidad de soluciones múltiplos de ésta (por ejemplo, 6, 8 y 10; 9, 12 y 15; ...), es decir, si  $a$ ,  $b$  y  $c$  nos dan una solución, las ternas de la forma  $ak$ ,  $bk$  y  $ck$ , también son solución (donde  $k$  es un número entero cualquiera). Por tanto, nos es lícito suponer que, en el caso de que  $a$ ,  $b$  y  $c$  sean una solución, no tengan ningún divisor común, pues si tuvieran un divisor común  $d$ , podríamos hallar una solución más primitiva dividiendo los tres números por  $d$ . Una tal solución la llamaremos precisamente *primitiva*. A partir de ahora supondremos que toda solución es primitiva.

Si suponemos que tenemos una solución primitiva  $a$ ,  $b$  y  $c$ , una segunda observación consiste en darse cuenta de que uno de los tres debe ser par, pues es imposible que los tres sean impares dado que la suma de dos números impares es un número par. Más aún,  $c$ , la hipotenusa, no puede ser par, pues su cuadrado sería múltiplo de 4, y por tanto  $a$  y  $b$  deberían ser impares, es decir, serían de la forma  $2n+1$ , y en consecuencia sus cuadrados tendrían una expresión de la forma  $4n^2 + 4n + 1$ , y la suma de los dos no podría ser múltiplo de 4. En consecuencia  $a$  o  $b$ , es par. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $a$  es par.

Antes de entrar de lleno en la parte final de este análisis, es preciso que el lector tenga presente la siguiente proposición, que es consecuencia inmediata del teorema fundamental de la aritmética: **Si el producto de dos números primos entre sí, es un cuadrado, entonces cada uno de los números debe ser un cuadrado.** El teorema fundamental de la aritmética asegura que para todo número existe una descomposición en producto de números primos y que esta descomposición es única<sup>2</sup>. Ahora, basta pensar que las descomposiciones en factores primos de ambos no tienen factores en común, por ser primos entre sí, y por tanto, la descomposición del producto puede considerarse como la yuxtaposición de las dos, pero en ésta todos los exponentes deben ser pares, y en consecuencia en las de los dos números los exponentes también serán pares y los números cuadrados perfectos.

Supongamos pues que tenemos una terna pitagórica primitiva  $a$ ,  $b$  y  $c$ , en la que  $a$  es par; podemos poner la relación  $a^2 + b^2 = c^2$  de la forma  $a^2 = c^2 - b^2 = (b+c)(b-c)$ ; como  $a$ ,  $b+c$  y  $b-c$  son todos pares podemos hallar enteros positivos tales que  $a=2u$ ,  $b+c=2v$  y  $b-c=2w$ , de donde obtenemos  $(2u)^2 = (2v)(2w)$  o bien  $u^2 = vw$ . Además,  $v$  y  $w$  son primos entre sí pues si tenemos un divisor común a ellos dos entonces también dividiría a su suma  $v+w=1/2(b+c)+1/2(b-c)=b$ , y a su diferencia  $v-w=1/2(b+c)-1/2(b-c)=c$ , que por hipótesis hemos supuesto primos entre sí. Nos encontramos pues, que tenemos dos números primos entre sí  $v$  y  $w$ , cuyo pro-

2. Como más adelante señalaremos, aquí reside una de las principales dificultades de la demostración del último teorema de Fermat.

teorema no es cierto, es decir, si existe algún  $n$  para el que podemos hallar números enteros  $a$ ,  $b$  y  $c$ , tales que  $a^n + b^n = c^n$ , entonces esta relación también es cierta para cualquier divisor  $p$  de  $n$ , pues si  $n = pq$ , podemos escribir  $(a^q)^p + (b^q)^p = (c^q)^p$ , y por tanto la relación es cierta para  $p$ . Ahora tenemos que o bien  $n$  es divisible por 4, o bien lo es por un primo impar. Como ya hemos visto que el mismo Fermat demostró la imposibilidad para  $n=4$ , en todo caso el divisor de  $n$  debe ser un primo impar. Por tanto, para demostrar el teorema no hay pérdida de generalidad si se supone que el exponente es un número primo impar.

No es hasta 1825, en que Legendre y Dirichlet dan una demostración de forma independiente para el caso  $n=5$  y en 1839, Lamé la da para  $n=7$ . Estas demostraciones son muy artificiosas y los argumentos que en ellas se utilizan de una enorme complejidad, siendo para cada caso diferentes. De hecho, en la carta a Goldbach, antes citada, Euler ya pone de manifiesto que su demostración para el caso  $n=3$  difiere en gran manera de la dada por Fermat para las cuartas potencias y que por tanto una solución global ha de ser de una gran dificultad.

A mediados de la década 1840-1850, de forma independiente, Lamé y Kummer se dan cuenta de que la causa de que al crecer  $n$  aumente la dificultad se halla en que uno de los factores en la descomposición de  $a^n + b^n$  tiene grado creciente. Entonces consideran la posibilidad de descomponer la expresión de forma completa en factores lineales, introduciendo un número complejo tal que  $\zeta^n = 1$ , es decir,  $\zeta$  es una raíz enésima de la unidad, y obteniendo la siguiente factorización:

$$a^n + b^n = (a+b)(a+\zeta b)(a+\zeta^2 b) \dots (a+\zeta^{n-1} b) = c^n$$

De hecho Lamé creía estar a un paso de hallar una prueba general del teorema. Ésta se basaba en el hecho de que para los enteros ciclotómicos, los números que se obtienen al introducir  $\zeta$ , verificaran el teorema de unicidad de la descomposición en números primos de forma análoga al que verifican los números enteros. Precisamente Kummer se percató de que esto no era cierto. Vio que en algunos dominios de enteros ciclotómicos los conceptos de número irreducible y de número primo, que en los enteros habituales coinciden, no son equivalentes.

De hecho la definición que usualmente damos de número primo, que sólo sea divisible por él mismo y por la unidad, corresponde a la de elemento irreducible, que en este caso decimos que cualquier posible factorización del elemento en producto de dos uno de ellos ha de ser una unidad. Mientras que la propiedad que a nosotros nos interesa de un número primo, es decir, que si divide a un producto ha de dividir a uno de los factores, ésta corresponde a la propia definición de número primo. Se demuestra fácilmente

que un número primo siempre es irreducible, pero hay ejemplos de que el recíproco no es cierto.

Fueron todas estas cuestiones las que obligaron a Kummer a introducir los conceptos de número ideal y primo regular, dando una demostración del teorema para los primos regulares. De hecho sólo hay tres primos no regulares (37, 59 y 67) menores que 100, y por tanto Kummer da respuesta al problema para todos los números menores que 100, pues posteriormente trató éstos de forma separada. Además, Kummer conjeturó que sólo habría un número finito de primos irregulares (lo que habría reducido el problema a tratar solo éstos), pero posteriormente se percató de la falsedad de este hecho. Posteriormente se ha demostrado que existe una infinidad de primos irregulares, pero en cambio, queda aún como problema abierto si el conjunto de primos regulares es infinito.

### ¡Por fin una solución! ¿Por fin?... Emoción hasta el último instante

Es preciso hacer notar que la historia de la resolución del último teorema de Fermat también ha sido apasionante. Amigos y colegas sabedores de mi gran afición en este problema me han suministrado gran cantidad de recortes de prensa con la noticia de que alguien reclamaba la gloria de su solución, nunca después confirmada. De todas formas parece que por fin podemos anunciar que realmente se ha encontrado la preciada solución, aunque también en este caso hemos tenido que sufrir.

El profesor de origen inglés Andrew Wiles de la Universidad de Princeton, en el transcurso de unas conferencias en Cambridge, a finales de junio de 1993, anunció que había dado solución al problema. Parecía que de esta forma se cerraba un interrogante que se había mantenido abierto durante más de tres siglos y medio, y que había generado gran cantidad de literatura matemática. Pues bien, el 4 de diciembre de 1993, el profesor Wiles confesaba que su demostración era incompleta y que por tanto el problema continuaba abierto, aunque también manifestó su confianza en poder dar solución a las lagunas aparecidas en un plazo de tiempo razonable. Realmente así ha sido pues, a mediados de diciembre pasado, la prensa informaba de que en la Universidad de Princeton el profesor Andrew Wiles y su equipo celebraban la resolución definitiva del problema.

La demostración del profesor Wiles está basada en los temas más avanzados y de mayor abstracción en el campo de la teoría de los números, como son: las formas modulares, las curvas elípticas y las representaciones de Galois, por lo que existen muy pocos matemáticos que puedan comprender en profundidad su argumentación. Además, ésta tiene una extensión considerable, unas 200 páginas. Por todo esto es posible que la comunidad matemática ten-

paridad de forma que  $a=p+q$  y  $b=p-q$  de donde  $a+b=2p$ . Entonces

$$c^3 = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 2p[(p+q)^2 - (p+q)(p-q) + (p-q)^2] = 2p(p^2 + 3q^2)$$

De igual forma si suponemos que  $a$  o  $b$  es par, pongamos  $a$ , podemos hallar  $p$  y  $q$  enteros primos entre sí y de distinta paridad de forma que  $c=q+p$  y  $b=q-p$  de donde  $c-b=2p$  y

$$a^3 = c^3 - b^3 = (c-b)(c^2 + cb + b^2) = 2p[(q+p)^2 + (q+p)(q-p) + (q-p)^2] = 2p(p^2 + 3q^2)$$

Es decir, en ambos casos llegamos a que la misma expresión  $2p(p^2 + 3q^2)$  ha de ser un cubo.

Ahora por analogía con las ternas pitagóricas sería conveniente que  $2p$  y  $p^2 + 3q^2$  fueran primos entre sí y por tanto cada uno de ellos habría de ser un cubo. Esto no es cierto únicamente si  $p$  es múltiplo de 3. Nos encontramos pues ante dos posibilidades: o bien  $p$  no es múltiplo de 3 y  $2p$  y  $p^2 + 3q^2$  son primos entre sí, o bien  $p$  es múltiplo 3. Abordaremos inicialmente el primer caso y después veremos cómo reducir el segundo al primero.

Suponemos que 3 no divide a  $p$  y que por tanto  $2p$  y  $p^2 + 3q^2$  son cubos. En este punto es donde la demostración de Euler tiene su punto flojo pues supone que la **única** forma de que  $p^2 + 3q^2$  sea un cubo es que existan  $t$  y  $s$  tales que  $p^2 + 3q^2 = (t^2 + 3s^2)^3$ , cuestión que no justifica de forma clara. Una vez establecida, la demostración es fácil.

A partir de la identidad:

$$\begin{aligned} (t^2 + 3s^2)(u^2 + 3v^2) &= \\ = t^2u^2 + 9s^2v^2 + 3(t^2v^2 + s^2u^2) + 6tsuv - 6tsuv &= \\ = (tu + 3sv)^2 + 3(tv + su)^2, \end{aligned}$$

podemos escribir:

$$\begin{aligned} (t^2 + 3s^2)^3 &= (t^2 + 3s^2)[(t^2 - 3s^2)^2 + 3(2ts)^2] = \\ = [t(t^2 + 3s^2) - 3s(2ts)]^2 + 3[t(2ts) + s(t^2 - 3s^2)]^2 &= \\ = (t^3 - 9ts^2)^2 + 3(3t^2s - 3s^3)^2 \end{aligned}$$

de donde  $p = t^3 - 9ts^2$  y  $q = 3t^2s - 3s^3$ . Si factorizamos estas expresiones obtenemos

$$p = t(t-3s)(t+3s) \text{ y } q = 3s(t-s)(t+s)$$

y por tanto  $t$  y  $s$  han de ser primos entre sí pues cualquier factor común lo sería también de  $p$  y  $q$  y además han de ser de distinta paridad, si no  $p$  y  $q$  serían ambos pares. Considerando que  $2p = 2t(t-3s)(t+3s)$  ha de ser un cubo, y que  $t-3s$  y  $t+3s$  son impares, cualquier factor común entre  $2t$  y  $t \pm 3s$  ha de serlo de  $t$  y  $t \pm 3s$  y en definitiva de  $t$  y  $\pm 3s$ .

Igualmente cualquier factor común de  $t-3s$  y  $t+3s$  ha de serlo de  $t$  y  $3s$ . En todos los casos llegamos a que  $t$  ha de ser múltiplo de 3, pero entonces  $p$  también lo sería en contra de la hipótesis. Es decir  $2t$ ,  $t-3s$  y  $t+3s$  son primos entre sí y cada uno debe ser un cubo, y por tanto existen  $x$ ,  $y$  y  $z$  tales que  $2t = x^3$ ,  $t-3s = y^3$  y  $t+3s = z^3$ , de donde

$$x^3 = y^3 + z^3$$

con lo que en el caso que  $p$  no sea divisible por 3, hemos conseguido el descenso, pues no es difícil ver que los valores de  $x$ ,  $y$  y  $z$  son menores que los de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Ataquemos ahora el caso en que  $p$  es divisible por 3. Tenemos que  $p = 3r$  y 3 no divide a  $q$ . Entonces  $2p(p^2 + 3q^2) = 3^2 2r(3p^2 + q^2)$ . Es fácil ver que  $3^2 2r$  y  $3p^2 + q^2$  son primos entre sí y en consecuencia son cubos. Volviendo a aplicar a  $3p^2 + q^2$  el punto débil del razonamiento de Euler, deben existir números enteros  $t$  y  $s$  que verifican

$$q = t(t-3s)(t+3s) \text{ y } r = 3s(t-s)(t+s)$$

Como  $3^2 2r = 3^3 2s(t-s)(t+s)$  es un cubo,  $2s(t-s)(t+s)$  ha de serlo y también en este caso estos factores son primos entre sí, por tanto igual que en el caso anterior existen  $x$ ,  $y$  y  $z$  tales que  $2t = x^3$ ,  $t-s = y^3$  y  $t+s = z^3$ , y obtenemos  $x^3 = y^3 + z^3$  donde aplicar el descenso. Con lo cual concluimos la demostración del último teorema de Fermat dada por Euler para el caso  $n=3$ . La primera prueba conclusiva la da Gauss utilizando propiedades de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ .

Como anécdota podemos añadir que Euler formuló una conjetura más general: ninguna potencia enésima puede ser suma de menos de  $n$  potencias enésimas, es decir la ecuación

$$a_1^n + a_2^n + \dots + a_r^n = a^n$$

no tiene soluciones en números enteros si  $r < n$ . Esta ecuación para el caso de dos sumandos se reduce al último teorema de Fermat. Esta conjetura se ha mostrado no ser cierta, pues existen contraejemplos como:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5 \text{ y}$$

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$$

el primero hallado por Lander y Parkin en 1966 y el segundo por Elkies y Frye en 1987.

### El último teorema para exponente $p$ primo impar

Ahora basta ver el teorema para exponentes primos impares. Veamos por qué. Si existe algún número para el cual el

## 4. Lenguaje y Matemáticas

### INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA EN LENGUAJE Y MATEMÁTICAS. TEMAS Y OBJETIVOS

**Joaquim Giménez**

*Dept. Enginieria Informàtica. Universitat Rovira i Virgili. Tarragona*

#### INTRODUCCIÓN

Desde el momento en que se interpreta la matemática como un lenguaje y se plantea la reflexión didáctica sobre las dificultades de los alumnos, se analizan unas relaciones complejas y un conjunto muy vasto de reflexiones. Se habla del uso de diversos lenguajes, del valor de la expresión verbal, de la interrelación de representaciones, el lenguaje como vehículo de lo comunicativo, etc. El objetivo general de estas líneas es pues, presentar una síntesis de la investigación actual, el tipo de problemas más importantes que se han tratado con algunos de los resultados conocidos.

En otro momento (Giménez 1994c), hemos analizado las investigaciones controladas y las tipificamos en cinco grandes categorías de acuerdo con el nivel de interdisciplinariedad de estos estudios: (1) elementos curriculares o super-estructurales, (2) influencias inter-estructurales en donde se incluye la comunicación (3) de desarrollo e implementación, llamadas también investigaciones funcionales, que incluirán el uso de variables sintácticas, inferencias y elementos semánticos diversos, (4) análisis sub-estructurales, en donde se habla de contexto, epistemología y política y, (5) reflexiones estrictamente teóricas. Esa tipología se centraba en la función de los estudios y no tenía en cuenta una mayor o menor aproximación del papel del lenguaje en el proceso enseñanza-aprendizaje. Así pues, desde una perspectiva didáctica, vamos a reflexionar ahora sobre los tipos de estudios de interés actual en cuanto sus vinculaciones con los procesos de intervención educativa. Por ello hemos establecido cuatro grupos de trabajos: (1) análisis generales sobre el lenguaje en matemáticas (como representación y comunicación), (2) el lenguaje en el desarrollo de la intervención educativa (como aspecto generador de conflicto cognitivo, como contexto y como mediador contextual), (3) el lenguaje y la construcción de conocimiento centrada en el alumno (la adquisición de procesos y la

regulación de aprendizaje) y (4) trabajos sobre la formación del profesorado.

#### 1. LENGUAJE Y ACCIÓN COMUNICATIVA EN GENERAL

Llamaremos representacionales aquellos trabajos que acen-  
túan el estudio de criterios de significatividad y significación así como la fuerza y dificultades de las representaciones como factor comunicativo. En efecto, han dejado de ser importantes los estudios analíticos sobre elementos de lenguaje en el currículo, para reconocerse como importantes las reflexiones sobre el lenguaje como representación. El proceso de comunicación se analiza *per se*, desde perspectivas como el análisis semiótico (Sanz 1994). Otros problemas de interés didáctico son ahora: los análisis de sistemas de representaciones usados en Matemáticas, su nivel de significatividad y suficiencia. El gran tema de las representaciones externas implica (Janvier & Vergnaud 1994) el análisis de situaciones externas estructuradas de tipo físico, o simbólico (sistemas lingüísticos, notaciones matemáticas formales). Por otra parte, en cuanto la construcción interna de sistemas de representación (Denis 1991) y significado, se analizan las incorporaciones individuales de las ideas matemáticas. Con todo ello, se encuentran los problemas de interpretación y en general de cambios representacionales (Janvier 1987) y el papel de la imaginación (Dreyfus 1994).

#### 2. LENGUAJE E INTERVENCIÓN EDUCATIVA

Una de las funciones del lenguaje es establecer puentes en lo que respecta al desarrollo de la actividad matemática. De ahí que a las investigaciones sobre elementos y dificultades



drá aún que esperar un cierto tiempo antes de que se sepa con seguridad si todos sus argumentos son correctos.

De hecho, hasta la aparición de la demostración del profesor Wiles, podríamos decir que el último teorema de Fermat se había prácticamente demostrado, dado que se sabía era cierto para todo número dentro de los límites computacionales. Pues Inkeri, en 1953, había demostrado que en caso de que se hallara un  $n$  para el que se verificara la igualdad, los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , serían tan grandes que el universo no sería lo suficientemente grande para poder escribir los

números que darían el contraejemplo al teorema, y además en 1987 Tanner y Wagstaff habían verificado el teorema para todo  $n < 150000$ , y en junio de 1993 se había demostrado para todo  $n < 4000000$ . Pero para que el teorema pudiera ser considerado como tal, precisamente faltaba una prueba que nos diera la certeza de que no podía existir ningún número  $n$ , fuera cual fuera su magnitud, para el que la ecuación (1) se verificara, y no hubiéramos de depender pura y exclusivamente de suposiciones, por más plausibles que éstas fueran. También, en este contexto se debe valorar la importancia de la solución dada por Andrew Wiles ■

## BIBLIOGRAFÍA

- Baker, A. 1986. *Breve introducción a la teoría de números*. Madrid. Alianza Editorial.
- Beiler, A. H. 1966. *Recreations in the theory of numbers*. New York. Dover.
- Bell, E. T. 1949. *Historia de las matemáticas*. México. Fondo de cultura económica.
- Boyer, C. B. 1986. *Historia de la matemática*. Madrid. Alianza Editorial.
- Dudley, U. 1978. *Elementary Number Theory*. San Francisco. W. H. Freeman and Company.
- Edwards, H. M. 1977. *Fermat's Last Theorem*. New York. Springer-Verlag.
- Graham, R.L.; Knuth, D.E.; Patashnik, O. 1989. *Concrete Mathematics*. New York. Addison-Wesley.
- Rey Pastor, J.; Babini, J. 1985. *Historia de la matemática*. Barcelona. Gedisa.
- Serres, M. 1991. *Historia de las ciencias*. Madrid. Cátedra.
- Weil, A. 1987. *Number Theory: An approach through history from Hammurapi to Legendre*. Boston. Birkhäuser.

determinantes de la naturaleza de un discurso que la participación individual en tareas de clase o discusión en pequeño grupo". Se observan variables como el diálogo y la cooperación (Yackel & Cobb 1993) centradas en los estudiantes, etc. El lenguaje es usado así, desde un nuevo estatus epistemológico para controlar la producción de significados en cuanto creación de una comunidad matemática (Civil 1994) que construye conocimiento.

Siguen siendo importantes las investigaciones de tipo etnográfico que relacionan lenguajes naturales y lenguaje matemático. En efecto es importante un análisis de lenguaje en situaciones fuera del aula (Civil 1994, entre otros), análisis del potencial didáctico de microproyectos sobre artesanía (Oliveras 1995), niveles de interpretación gráfica (Giménez 1994b), etc. Están dejando de ser importantes los estudios de tipo socio-lingüístico.

### 3. LENGUAJE Y PROCESOS DEL ALUMNO. NUEVOS CONTENIDOS EPISTÉMICOS

¿Existe una diferenciación entre un "lenguaje de razonar" y "lenguas para comunicar"? ¿Hasta qué punto los problemas terminológicos y de uso del lenguaje natural manifiestan dicha diferenciación? ¿Qué influencias hay entre ellos y los procesos reflexivos? Diversas investigaciones se centran en el papel del lenguaje en la modelización, el uso del lenguaje natural, el requerimiento estructural, la demostración o adquisición de habilidades de alto nivel, el papel de la visualización (Dreyfus 1994), etc.

El lenguaje es un vehículo de análisis histórico-lingüístico con contenido epistemológico (Chevallard 1991), que en muchos casos forma parte de una reflexión más amplia sobre la consecución de conceptos. Se dan en la historia diferentes dimensiones y usos de lenguaje. En todos ellos la metáfora juega un papel importante. Así, algo es transferido a otro al que no se le aplica normalmente. El análisis del contraste entre el abacista y el algorítmico en la época medieval es un paradigma claro del uso metafórico que diversos autores han revelado. En esas concepciones se basa el proceso llamado de matematización.

El proceso de generalización es uno de los elementos en los que se refleja la acción lingüística, no sólo con el uso de palabras, referentes y metáforas, sino con metonimias. Es decir, algo es referido a otro por el nombre o algún aspecto o atributo de él como cuando se dice "la raíz cuadrada de -1 es un número imaginario". La discusión teórica refleja diversos niveles de lenguaje desde el natural al simbólico. Ello se ejemplifica adecuadamente en el caso de las fracciones en nuestro artículo sobre la descripción (Giménez 1994). Kieren (1988) explica como se usa esos diversos

niveles de lenguaje para la construcción de conocimiento. La visión de recursividad (vuelta atrás en la reflexión) de autores como Maturana y Kilpatrick implica los procesos de evaluación y validación, así como la progresión de lo axiomático a lo particular es el énfasis fundamental de los trabajos de Hilbert y Bateson.

### Lenguaje y regulación del aprendizaje

En la construcción de muchos conocimientos tales como los que se dan en tareas de generalización, los estudiantes no usan lenguajes "oficiales" de las matemáticas, sino más bien el lenguaje natural (Laborde 1990). El lenguaje es un medio de regulación y control de la actividad y del pensamiento (Vigotsky 1962). Pero, ¿cómo se establece el paso entre diversos tipos de lenguaje? Sabemos que los problemas de lenguaje son parte clave de los procesos de comunicación (Laborde et al 1989), pero ¿cómo gestionar esos elementos en la formación de conceptos?

En los últimos años, el análisis de interacciones y socialización da lugar a nuevos análisis que se centran en el propio proceso enseñanza-aprendizaje (Durkin 1991) como un proceso de regulación. Se supera así una simple perspectiva funcional en el sentido que todos los estudios coinciden en la importancia que la verbalización tiene para el desarrollo constructivo general de aprendizaje de códigos aritméticos, códigos geométricos, etc.

¿Qué tipo de interacciones verbales (o mediante otros "lenguajes") facilitan el aprendizaje? ¿Qué tipos de problemas abren al estudiante a un uso amplio de diversos lenguajes? ¿Las actividades sintetizadoras y organizadoras hasta dónde permiten regular y autocontrolar el aprendizaje? ¿Qué consecuencias tiene respecto una mejora en la autoevaluación? Esas son algunas de las preguntas abiertas en este tema.

### 4. LENGUAJE Y EL PROFESOR. REPRESENTACIONES Y PROFESIONALIDAD.

Conocer los procesos de lenguaje que intervienen en la socialización y sus influencias sobre la construcción de conocimiento son parte de la formación del profesor de matemáticas. Por otra parte es importante que el profesor reconozca el valor social que el lenguaje matemático tiene en la actualidad en cuanto es un vehículo de la tecnología actual. ¿En qué consiste este nuevo papel instrumental? ¿Qué debe ser conocido por el profesor? ...

Así, en la gestión del profesor se pueden discutir usos de lenguaje como: procesos de descripción (Giménez 1994), explicitación del componente tecnológico (Keitel 1994) y

en el desarrollo e implementación en el aula, las llamásemos funcionales. Las variables que usualmente se consideran en ese tipo de estudios son: (a) sintácticas (tipos de lenguaje en matemáticas: verbal, escrito, algebraico, gráfico, de computación,...), (b) inferenciales, que incluye las que algunos llaman pragmáticas y, (c) semánticas con las consiguientes relaciones epistemológicas. Una descripción del trabajo hasta los 90 se encuentra en Giménez (1994) en donde se menciona una vasta bibliografía sobre el tema. Una colección de actividades e investigaciones se encuentra en el número monográfico 16 de la revista SUMA.

El análisis sintáctico contiene estudios sobre palabras y expresiones, dificultades de elementos relacionales lógicos, elementos de estandarización y anclaje conceptual explicado por factores sintácticos, etc. En otros casos se trata de observar *variables de la representación* e influencias negativas de las secuencias verbales. Ahí se han forjado términos como "colas verbales y perceptuales". En estos estudios se constata como los alumnos se dejan llevar por esas percepciones para no desarrollar los conceptos. Como pragmáticos se consideran los *procesos de construcción conceptual*. Así, el análisis de preconcepciones de los estudiantes tiene un tratamiento vinculado a elementos de lenguaje que no siempre puede ser considerado de naturaleza sintáctica o semántica. Merecen citarse también en este bloque los análisis sobre las *dificultades* de algunos alumnos con problemas específicos de lenguaje en la *interactuación* en el aula (sordos, discapacitados, etc.), y las búsquedas sobre los llamados vacíos de experiencia ("*lack of experience*") que promueven conflictos o contradicciones basados en problemas de tipo textual, que nacen de situaciones de interacciones y aprehensión de la realidad. El contenido semántico se ha observado no sólo estructuralmente sino en la necesidad de significado, estructuras subyacentes en la construcción de representaciones y significados, etc.

### Lenguaje y conflicto cognitivo

Algunos estudios sobre aprendizaje en el aula observan el papel del lenguaje en cuanto estudio de superación de distractores, intervención y uso de representaciones en el proceso de matematización (Sreefland 1991), etc. Con ello el uso de lenguaje es fuente de conflicto cognitivo. En otros análisis, el lenguaje se describe como obstáculo (Silva 1994). Ahí se encuentra el análisis de la introspección (Mason 1994).

Otro tipo de trabajos se refiere a lenguajes propios de la matemática. En el caso del álgebra se analizan errores representativos (Cortés 1994) y la producción de significado (Lins 1993). El lenguaje gráfico se analiza específicamente en muchos trabajos (M. J. Luelmo, Ed., 1995). Si bien desaparece un interés marcado por el análisis de varia-

bles centradas en los resultados del rendimiento, algunos trabajos sobre la evaluación de lo comunicativo en cuanto control del error, pasan a ser importantes.

### Lenguaje y contexto

Otro aspecto importante en el desarrollo de aprendizaje es el contextual. El análisis de la ostensividad por encima de la representatividad es la reflexión amplia que surge en el marco de la teoría de situaciones así como de la antropología didáctica (Chevallard 1992, Bosch 1994). En esa visión paradigmática, los elementos representacionales se analizan siempre como variables intervinientes (Steinbring 1988). Se observan problemas como la generabilidad, conveniencia, oportunidad, etc. de determinadas representaciones. Por otra parte el valor del lenguaje como contexto y no sólo como representación lleva a considerarlo como clave en procesos de producción. En investigaciones de este tipo, se analiza el tipo de lenguaje (Maier 1994), su nivel de profundidad, etc. como parte del análisis de la producción de conocimiento. Ello sigue manteniendo un carácter interestructural, pues los análisis se producen no sólo al interior de la búsqueda de lo matemático o lo lingüístico sino como interacción entre ambos.

### El Lenguaje como mediación contextual

Llamaremos ahora análisis interactivos a los trabajos que contribuyen claramente a relacionar el lenguaje con procesos de socialización externos al individuo y a la propia matemática. Con ellos se están definiendo cambios de perspectiva y se han abierto diversas vías de trabajo. La verbalización, asociada al marco de los procesos de aprendizaje, como una "red de vehiculación de presentación" está acentuando lo conductual, y el papel del lenguaje como elemento de socialización está cobrando interés.

La expresión contexto incluye aquí no sólo la interpretación individual de situaciones, sino también expectativas y obligaciones. Las interacciones usuales en que el contexto se manifiesta es la diferenciación de roles profesor-alumno en el diálogo de aula. El primero asume la reconducción y elabora descripciones en beneficio de otros, de tal forma que el alumno sólo interpreta la situación como simple suceso social (Yackel & Cobb 1993). En ese sentido, la expresión verbal es fundamental aunque el formato y las situaciones son elementos de dificultad que afectan a los conceptos. El lenguaje hablado se manifiesta de forma diferente según el papel de los interlocutores: (a) discurso exploratorio, en donde la planificación es lo importante, (b) hablar para uno mismo, reflexionando y organizando, (c) hablar para los demás centrado en la comunicación y (d) discusión en grupo, reconceptualizando y reorganizando. En ese sentido, Yackel ha mostrado que "la interpretación de una situación, las percepciones, expectativas y obligaciones, son más

como el análisis de las implicaciones de los mismos en la educación matemática. Los trabajos de popularización, video, uso de medios informáticos, ¿hasta que punto influyen en la construcción de conocimiento? Sabemos algunas ventajas en cuanto la capacidad de visualización, reconocimiento y codificación, pero no mucho más...

g) Implicarse en la reflexión política que implica el análisis de motivaciones que se dan según el tratamiento del lenguaje en la educación. Es decir, valorar las influencias de partir de la realidad de los individuos hacia el saber institucionalizado o el proceso inverso y analizar las dificultades que implica los posibles "usos de lenguaje" distintos que se derivan de una u otra concepción.

## BIBLIOGRAFÍA

- Boero, P. (1995) *Aspetti metodologici del progetto "Bambini, maestri, realtà"*. Univ. di Genoa.
- Brousseau, G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état. Univ. Bordeaux.
- Chevallard, Y. (1991) Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique, *Seminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* 1990-91, nº122, pp 103-117.
- Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. vol. 12,1,73-112.
- Civil, M. (1994) *Using a Logo environment to create a mathematics classroom community*. Paper presented to PME XVIII. Lisboa.35
- Cortés, A. (1994) *Word problems. From natural language to math. equation: the respect of homogeneity*. Paper presented to PME XVIII. Lisboa. 37
- Denis, M. (1991) Imagery and thinking, in Cornoldi & McDaniel (eds) *Imagery and cognition*. Springer Verlag.
- Dorfler, W. (1991) Meaning image schemata and protocols. P.Boero et al. (eds) *Proceedings PME XV Assissi* vol. 1, 17-32.
- Dreyfus, T. (1994) Imagery and reasoning in Mathematics Education. *Selected Lectures from the 7th Int. Congress on Mathematical Education*. Québec. 1992. Univ. Laval. Sainte Foy.
- Durkin, J. (1991) *Language in mathematics education*. Open University Milton Keynes.
- Giménez, J. (1994) "Lenguaje y matemáticas. Una separación sin relaciones". *SUMA* 16.
- Giménez, J. (1994b) *Role of intervals when functions are introduced*. Paper presented to PME XVIII. Lisboa. 40
- Giménez, J. (1994c) "Provocadores de descripción en el aula de Matemáticas". *SUMA* 16.
- Jacobson, E. (1975) Interactions between linguistics and mathematics education. Symposium UNESCO, CEDO & ICM. Kenia. UNESCO Report no. ED-74/CONF. 808 Paris. Unesco.
- Janvier, C. (ed) (1987) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey.
- Janvier, C & Vergnaud, G. (1994) Bases for the PME Working Group "Representations in Math Education". *Proceedings PME 18*. Lisboa.
- Kaput (1991) Notations and representations as mediators of constructive process. In V.Grassfield (ed) *Radical constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht. Kluwer. 53-74.
- Keitel, C. (1994) Graphic language. Conference in CIEAEM meeting. Toulouse.
- Kieren, T. (1988) Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development. In J.Hiebert & M. Behr (eds) *Number concepts and operations in the middle grades*. NCTM. Reston VA. 'pp.162-181.
- Knijnik, G. (1993) "An ethnomathematical approach in mathematical education: a matter of political power". In *For the learning of mathematics*. Montreal.
- Kulm, G. (1990) *Assessing higher order thinking in Mathematics*. American Association for the advancement of science. Washington.
- Laborde, C. (1990) Language and mathematics. In Howson & Kahane (eds) *Mathematics and cognition. A Research synthesis by IGPME* pp.53-69. Cambridge University Press. Cambridge.

gestión de la producción (Boero 1995), etc. El lenguaje se convierte en el vehículo clave para conseguir una concienciación y progreso en el uso de representaciones y reconocimiento de las relaciones que los estudiantes establecen sobre ellas (Llinares y Sanchez 1995).

Por otra parte, en la construcción conceptual implícita en lo dicho anteriormente, hay una dimensión de poder, si se admite que debemos partir de un conocimiento extra-escolar de la vida que sobrepase lo estrictamente técnico. Así, el conocimiento del lenguaje matemático es para algunos autores un proceso de adecuación (Knijnik 1993) y no tiene por qué ser explícitamente un proceso de institucionalización que parta de un planteamiento epistemológico distinto (Chevallard 1991). La discusión de los usos de lenguaje en ese sentido es importante en la construcción de un conocimiento institucionalizado y a buen seguro se darán en los próximos años más reflexiones sobre las relaciones entre usos de lenguaje y las concepciones políticas.

## 5. REFLEXIONES CURRICULARES A MODO DE CONCLUSIÓN

Hemos recuperado a lo largo de esta revisión el reconocimiento didáctico de distintos tipos de investigaciones: análisis generales sobre el lenguaje en matemáticas (como representación y comunicación), el lenguaje en el desarrollo de la intervención educativa (como aspecto generador de conflicto cognitivo, como contexto y como mediador contextual), el lenguaje y la construcción de conocimiento centrada en el alumno (la adquisición de procesos y la regulación de aprendizaje) y trabajos en la formación del profesorado.

Nadie pone en duda la necesidad de un mayor número de investigaciones en todos esos campos, pero nos atreveremos a proponer algunas conclusiones como resumen de los distintos trabajos realizados. En efecto, en cuanto la valoración general del lenguaje en la educación matemática se pone de manifiesto la importancia de:

**a)** Reconocer el valor curricular de nuestro DCB y adaptaciones autonómicas en cuanto transmitir el valor e importancia de tratar el paso del lenguaje natural a los diversos tipos de lenguajes en la educación matemática básica de los individuos. Nos parece que dichas formulaciones son más profundas que las propias aportaciones de los Standards. Además de promocionar dichas ideas, se requiere investigar más sobre las diferencias entre los "usos" de los diversos lenguajes y sus relaciones; implicaciones positivas o no de un uso más amplio del lenguaje natural para iniciar determinado trabajo. En ese sentido, lo ya conocido sobre el valor del lenguaje no debe aplicarse a la expresión verbal sino a todo símbolo

visual para: comprender, recordar, representar, comunicar, construir, generar y facilitar la creatividad, y reflexionar sobre lo ya realizado.

Consideramos que sería importante que los análisis estructurales (propios de la década pasada) se centraran más en su integración en el proceso de aula, más que análisis estáticos de un momento determinado. Así, aunque deben realizarse análisis de resultados de las aplicaciones curriculares, no deberían ser el centro de atención focal en los próximos años. En todo caso, precisamos reconocer las influencias que hay en cuanto "saber de esos análisis" para la formación del profesor.

- b)** Valorar —como hacen los análisis recientes de la construcción de conocimiento matemático— el uso de metáforas y metonimias como imágenes de situaciones. Pero queda mucho por ver qué tipo de imágenes es el más adecuado para diversos elementos conceptuales. A ese respecto, pensamos que los estudios epistemológicos - históricos que se están realizando deben influir positivamente en dicha búsqueda y deben incrementarse.
- c)** Manifestar el valor de los diversos modos de lenguaje no sólo como instrumento funcional de comunicación sino como valor clave del quehacer matemático. En ese sentido reconocer la existencia de muy diversos lenguajes actuales: esquemas, programación, grafos, etc. Debemos reconocer las concepciones de los alumnos sobre dichos lenguajes, su progresivo uso y reconocimiento como potenciales recursos de gran valor comunicativo. También en ese punto precisamos reconocer más la influencia de implementar dichos modos en alumnos jóvenes. ¿Cuando es el momento adecuado para introducir elementos de grafos? ¿Se puede hablar de generar la necesidad del uso de diagramas?
- d)** Implementar con mayor énfasis actividades de generalización y análisis que no pierdan de vista el elemento comunicativo de lenguaje. Como se ha mostrado, las influencias analizadas han propiciado o remodelado "nuevas teorías sobre la construcción del conocimiento matemático". Pero, en el campo de lo semántico queda aún mucho por investigar.
- e)** Reconocer la dimensión social del lenguaje y sus influencias no sólo sobre los elementos conceptuales y procedimentales, sino también actitudinales y de construcción de valores.
- f)** Saber que en una sociedad marcada por elementos tecnológicos donde la comunicación de masas juega un valor importante, no debe menospreciarse el uso de medios tecnológicos y de comunicación de masas así

## EL SENTIDO DE LOS SÍMBOLOS: GENERACIÓN DE INTUICIONES EN LA MATEMÁTICA FORMAL<sup>1</sup>

**Abraham Arcavi**

Weizman Institute of Science. Israel

Traducción: Blanca Baños Polglase

### Motivación

Está ampliamente aceptado que la correcta ejecución de las operaciones no debe ser el único objetivo en el aprendizaje y enseñanza de la aritmética. El conocimiento sobre cuándo usar una operación y cuestiones como la "percepción de los números" están recibiendo más atención cada día. En términos generales, el "sentido de los números" (NCTM, 1989; Sowder and Schappelle, 1989; Sowder, 1992) puede describirse como un sentimiento "no-algorítmico": la comprensión de la naturaleza de los números y sus operaciones, la necesidad de examinar la coherencia de los resultados, la noción de orden de magnitud y la libertad para reinventar nuevas formas de operar con los números distintas de la repetición mecánica de lo que se memorizó en la escuela.

Una situación paralela es la que se da en la manipulación de los símbolos algebraicos, en parte debido a la escasa comprensión que los alumnos de secundaria poseen de los mismos a pesar de haber sido instruidos en su manejo durante años. Incluso los alumnos más aventajados en las técnicas algebraicas no perciben el álgebra como una herramienta que les permita comprender, generalizar, revelar estructuras, relaciones y hacer demostraciones. Por ello, parece apropiado definir una noción paralela a la de "sentido de los números" para dar la idea de "sentido de los símbolos".<sup>2</sup>

### ¿Qué es "sentido de los símbolos"? Una primera aproximación

Comparado con la atención que recibe el término "sentido de los números", existe poca literatura referida al término "sentido de los símbolos" (una excepción es Fey (1990)). Este artículo está enfocado a la descripción y discusión de comportamientos que ilustran con ejemplos lo que entendemos como *sentido de los símbolos*.

### Haciendo amistad con los símbolos

A continuación, veamos el desarrollo de una clase típica. Empezamos por introducir los cuadrados mágicos 3x3, y planteamos el primer ejercicio:

"Completa las celdas vacías para obtener un cuadrado de suma 9"

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   |   |
|   | 3 |   |
| 2 |   | 1 |

y a continuación

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   |   |
|   | 2 |   |
| 1 |   | 5 |

en el que la suma debe ser 6. Esto nos permite introducir de forma legítima los números negativos. Después, dependiendo de la clase, propondremos uno o dos cuadrados mágicos simples más antes del siguiente, para el que solicitamos que la suma sea 8.

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   |   |
|   | 4 |   |
| 2 |   | 2 |

1. Esta es una versión resumida de un artículo del mismo título publicado en "For the Learning of Mathematics", 1994, 14(3), pp. 24-35

2. En este artículo, se entiende por símbolos los símbolos literales del Álgebra de la enseñanza secundaria.



- Lins, R. (1992) *A framework for understanding what algebraic thinking is*. PhD Thesis. Univ of Nottingham.
- Llinares, S. y Sánchez, V. (1995) "The understanding of school mathematics topics and instructional representations. The case of fractions and rational numbers by prospective elementary teachers" In Giménez, Llinares, Sanchez (eds) *Becoming a primary teacher. Issues on Mathematics Education*. To be appear.
- Luelmo, M. (1995) (ed.) Monográfico. *Lenguaje gráfico en Matemáticas*. en UNO, 4.
- Mason, J. (1994) Researching from the inside in Mathematics Education. Locating an I-You relationship. Ponte, J & Matos, J. (eds) *Proceedings for PME XVIII*, Lisbonne 176- 194.
- Maier, H. (1993) Problemi di lingua e di comunicazioni durante le ore di matematica. *La matematica ella sua didattica* 1
- Oliveras, ML. (1995) *Etnomatemáticas en trabajos de artesanía andaluza. Su integración en un modelo para la formación de profesores y en la innovación del currículo matemático escolar*. Tesis no publicada. Univ. Granada.
- Orton (1993) What is a pattern? In *Mathematics in school* 1, 8-10.
- Rojano, T. (1994) La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias* 12(1) 45-46.
- Sanz, I. (1994) *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos*. Tesis no publicada. Univ. del País Vasco. Donostia.
- Silva, L.C. (1994) *Linguagem. Um obstaculo epistemológico na construção do conhecimento formal da matemática*. Tesis de maestrado no publicada. Univ. Sta Ursula. Rio do Janeiro.
- Streefland, L. (1991) *Fractions in realistic mathematics education*. Kluwer. Dordrecht.
- Vigotsky (1962) *Thought and language*. MIT Press.
- Vinner, S. (1992) *In Vivo situations*. Unpublished paper Hebrew Univ. of Jerusalem.
- Yackel (1993) Children's talk in mathematics class as a function of context. In Hirabaiashi et al. (eds) *Proceedings of PME XVII*, Univ. of Tsukuba, II 199-206.

En nuestro ejemplo, la decisión de cambiar el curso de la acción significa algo más: está también motivada y arropada por un sentido de la estética, de la elegancia y de la eficacia, así como por la apreciación de que el trabajo matemático implica mucho más que el estoicismo de embarcarse en "enmarañadas" manipulaciones simbólicas. La idea es tener reacciones del tipo: "esto es muy complicado, técnico y poco creativo, **debe** haber otra forma".

La otra forma puede ser mirar el problema desde una perspectiva distinta, o cambiar la representación. En el caso anterior, las coordenadas cartesianas unidas a ciertas consideraciones geométricas nos sugieren otra forma de ver el problema; como el número de intersecciones entre las bisectrices de los ejes del plano cartesiano ( $x^2 - y^2 = 0$ , propiamente:  $y = \pm x$ ) y una familia de circunferencias de radio 1 centradas en el eje  $x$ . A partir de aquí, la solución es sencilla.

Es decir, en este caso el sentido de los símbolos implicaría un sentimiento de premonición de que la persistencia en el trabajo simbólico exigirá grandes dosis de esfuerzo. Más aún, incluiría la tendencia a intentar otros modos de representar el problema, en la seguridad de que pueden existir aproximaciones más elegantes y directas y deben ser consideradas. En otras palabras, el sentido de los símbolos incluirá intuiciones sobre cuándo utilizar los símbolos y cuándo no.

### Más allá de las manipulaciones: Leyendo a través de los símbolos

La resolución de simples ecuaciones algebraicas no requiere más que unas habilidades estándar que nos lleven al resultado, y la única lectura que requiere algo de razonamiento es dar sentido a una respuesta que está en la forma  $x = \dots$ .

De hecho, esta es una de las virtudes de los símbolos: nos permiten evadirnos, e incluso olvidar las referencias para conseguir resultados de forma eficaz. Alfred North Whitehead (1911) señaló la "enorme importancia de una buena notación" y la naturaleza del simbolismo en matemáticas.

"...gracias a la ayuda del simbolismo, podemos transcribir casi mecánicamente, a golpe de vista, razonamientos que de otra forma exigirían usar facultades más elevadas de nuestro cerebro.

Es un error común, repetido en miles de textos y en discursos de personas eminentes, el pretender que debemos cultivar el hábito de pensar lo que estamos haciendo. Precisamente es lo contrario. La civilización avanza ampliando el número de operaciones importantes realizables sin necesidad de pensar en

ellas. Las operaciones de pensamiento son como las cargas de caballería en una batalla —limitadas en número—, requieren caballos frescos, y sólo deben hacerse en momentos decisivos". (Whitehead 1911)

Sin embargo, creemos que Whitehead habría estado también de acuerdo con Freudenthal (1983):

"He observado, no sólo en otras personas sino también en mí mismo, que las fuentes de la inspiración pueden entumecerse con los automatismos. Se consigue realizar una determinada actividad con tal maestría que uno ya no se cuestiona el cómo y el porqué, y deja de concebirla como algo relevante y con significado".

Interrumpir el procedimiento simbólico mecánico para inspeccionar y conectar de nuevo con el sentido que subyace bajo la expresión puede ser, en palabras de Freudenthal, un buen ejercicio mental.

Por ejemplo, una alumna en el proceso de resolver una ecuación llega a  $3x+5=4x$ . En lugar de actuar mecánicamente, es decir restar  $3x$  a ambos lados, se detuvo y cambio de táctica: leyó los símbolos. Observó que si quería obtener  $4x$  a la derecha a partir del  $3x$  de la izquierda, tenía que añadir una  $x$ , por tanto el sumando 5 debía ser el valor de  $x$ . Aunque matemáticamente hablando ambos procesos son indistinguibles, existe una diferencia subconsciente importante. Desde nuestro punto de vista interrumpir una rutina algebraica para detenerse en la lectura y darse cuenta de una relación simbólica, como en este caso, es un pequeño pero sano ejercicio de sentido de los símbolos.

### Leyendo y manipulando

La solución de simples ecuaciones algebraicas, tal como se presentan en los textos y en las aulas, crea un "instinto" de manipulación operativa. Exige cierta madurez rechazar el impulso de comenzar a resolver

$$\frac{2x+3}{4x+6} = 2$$

y detenerse en la lectura de los símbolos. En este caso, se puede observar que sea  $x$  el valor que sea, como el numerador es la mitad del denominador la ecuación no puede tener solución. Esta inspección *a priori* de los símbolos con la esperanza de ganar algo de comprensión sobre el problema y su significado, también forma parte de lo que entendemos por sentido de los símbolos.

Uno de nuestros alumnos fue incluso más allá. Después de observar como hemos descrito arriba que no hay solución, se dijo: "Bueno, no tiene solución pero ¿y si "lo resuelvo" de

Dado que los ejemplos anteriores fueron fáciles, éste, que no lo es, representa una sorpresa. Tras varios intentos, repasar las cuentas, comenzar por diferentes celdas, algunos alumnos plantean la posibilidad de que sea una "misión imposible"; otros continúan con la aritmética en la certeza de haber cometido algún error. Una vez que todos los alumnos están convencidos de que no hay solución, surge de forma natural la pregunta: "¿Cómo es posible que los cuadrados anteriores tengan solución y éste no?"

Es evidente que depende de los datos y a partir de aquí los alumnos hacen sus conjeturas. Por ejemplo, el último cuadrado no se puede resolver porque la suma que nos piden es la suma de los tres números iniciales. Este tipo de discusión, con sugerencias, ejemplos y contraejemplos, mantiene a la mayoría interesados<sup>3</sup>. En general, si queremos que planteen la posibilidad de utilizar el álgebra tendremos que esperar bastante o bien marcarles la pauta con alguna pregunta dirigida: "¿Qué podemos utilizar para verificar o rechazar una conjetura?". En cierta ocasión, al ser el álgebra mencionada como posibilidad, un escéptico cuestionó: "¿De qué van a servir las letras?"

Consideramos que los individuos que saben realizar operaciones algebraicas, pero no consideran la posible relevancia de los símbolos para manifestar la estructura de un problema que ha despertado su curiosidad, no han desarrollado su *sentido de los símbolos* por completo. El *sentido de los símbolos* incluye disponer de ellos como posibles herramientas para la comprensión.

Otra muestra de la falta de *sentido de los símbolos* se manifiesta en el hecho de que algunos alumnos son incapaces de reconocer inicialmente la solución que tienen frente a ellos en el transcurso de la resolución algebraica de un problema. Por ejemplo, en el proceso de completar el cuadrado mágico "general" llegamos al paso:

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| 2<br>S-b-c |   | 1<br>S-a-b |
| 3<br>b+c-a | b | 4          |
| a          |   | c          |

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los números dados, y  $S$  la suma dada. Completar la primera celda (celda 1) exige la conciencia de que su contenido debe ser expresado en términos de  $a$ ,  $b$  y  $S$ . Algunos alumnos poco avanzados en álgebra estarán tentados de introducir una nueva variable, ya sea por su

poca experiencia en el uso de los símbolos para expresar relaciones o porque no tengan claro qué están buscando. En este caso particular las celdas 1, 2 y 3 se completaron sin mayor problema, y la celda 4 se completó por la suma de la columna resultando  $a+b-c$ . Llegados a este punto alguien indicó que la expresión de la suma de la fila central era  $3b$  y que no contenía a  $S$ . El hecho de que la condición  $S=3b$  representara la solución buscada supuso un esfuerzo para los alumnos de aquella clase.

Es decir, creemos que el sentido de los símbolos debe incluir la invocación de los símbolos en los contextos apropiados y el reconocimiento de la solución simbólica. Podríamos incluso pretender un poco más. Sería deseable que cuando los símbolos se utilicen y las soluciones se reconozcan, el "poder de los símbolos" sea apreciado: sólo con el uso de los símbolos una conjetura o un argumento pueden ser definitivamente aceptado o rechazado.

Si el sentido de los símbolos exige que reconozcamos en qué situaciones son apropiados o indispensables, también requiere que sepamos cuando nos hemos ahogado en manipulaciones técnicas y debemos abandonarlas.

Por ejemplo: "¿Para qué valores de  $a$  el sistema de ecuaciones  $x^2-y^2=0$ ;  $(x-a)^2+y^2=1$ , tiene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 o 8 soluciones?"<sup>4</sup>

Problemas como éste, que se expresan en términos algebraicos, invitan o inducen fuertemente a una solución del mismo tipo. Por tanto, no es de extrañar que muchos alumnos se lancen en picado sobre las operaciones algebraicas sin ver, o aún viéndolo, lo arduo de la labor y lo sencillo que resulta cometer errores. Evitar la tentación inicial de proceder simbólicamente e intentar otro tipo de aproximaciones requiere un saludable "control" del sentido de los símbolos. De forma resumida, este control es:

"una categoría de comportamiento referida al modo en que los individuos usan la información potencial a su disposición. Está enfocada a las decisiones principales sobre qué hacer en un problema, decisiones que en sí mismas pueden "generar o romper" los intentos de resolución. Dentro de esta categoría se consideran comportamientos de interés: hacer planes, seleccionar objetivos principales y secundarios, tutelar y comprobar las soluciones según van surgiendo, y **revisar o abandonar planes cuando los resultados indican que así deba hacerse**". (Schoenfeld, 1985, enfatizado añadido).

3. La dinámica de las discusiones es interesante y rica, pero no es el objeto de este artículo.

4. Este problema se ha tomado de *Mathematical Problem Solving Class* de Alan Schoenfeld.

consideramos sentido de los símbolos la intuición de cuál es la elección óptima en determinados casos.

### Habilidades operatorias flexibles

Incluso en los contextos en que creemos, coincidiendo con Whitehead, que es necesario operar mecánicamente sin reparar en el significado, deberíamos tener una guía "formal" o "técnica" del sentido de los símbolos que mantenga el control de lo que hacemos. La correcta manipulación simbólica es algo más que la obediencia ciega de las reglas; hay aspectos del sentido de los símbolos que se pueden considerar incluso cuando obviamos los referentes. Por ejemplo, percibir la posible circularidad de una manipulación, la visión "panorámica"<sup>5</sup> de algunas expresiones simbólicas y las manipulaciones orientadas por objetivos formales.

### Círculos y panorámicas

Tener una visión panorámica es sentir los símbolos no sólo como una concatenación de letras, sino poder distinguir relaciones como, por ejemplo, en Wenger (1987):

"Si uno puede ver a través de la maraña de símbolos que la ecuación,

$$w\bar{u} = 1 + 2\sqrt{1+u}$$

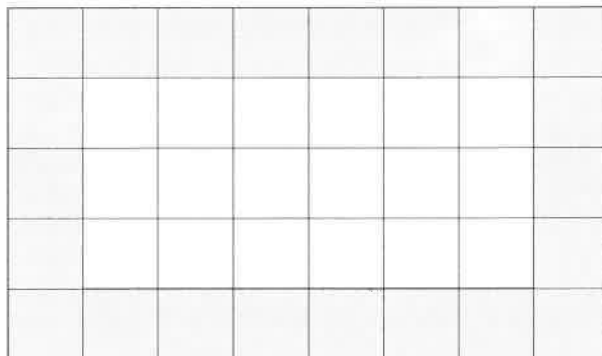
en la que se trata de hallar  $v$  es lineal en  $v$ , el problema está prácticamente resuelto; las ecuaciones de la forma  $av=b+cv$ , tiene solución de la forma  $v=b/(a-c)$ , si  $a \neq c$ , independientemente de lo complicada que sea la expresión de  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Los alumnos siempre tienen dificultades con este tipo de problemas. Realizarán manipulaciones correctas de las ecuaciones, llegarán a ecuaciones más complicadas o volverán, tras varias ecuaciones intermedias, a la ecuación de la que partieron "yendo en círculos". Nótese que los alumnos suelen realizar las operaciones correctamente en estas situaciones".

La primera observación es lo que consideramos una visión panorámica, mientras que la última se refiere a la manipulación circular.

En el mismo parrafo Wenger señala que los alumnos "a menudo parecen realizar los pasos al azar, sin ninguna estrategia en mente". Esta observación nos lleva al próximo punto a considerar.

### Objetivos formales

"Un rectángulo (puede ser un cuadrado) se dibuja en un papel cuadriculado con las celdas de los bordes marcadas



En este caso, el número de celdas marcadas alrededor del borde no es el mismo que el número de celdas interiores sin marcar.

¿Es posible dibujar un rectángulo de este tipo en el que el número de celdas marcadas coincida con el número de celdas sin marcar?" (Problema 87 en Longley-Cook, 1965, de la forma que aparece en Gardner, 1983).

A continuación incluimos una solución propuesta por un matemático. Comienza por suponer que  $2a+2(b-2)$ , es el número de celdas marcadas, por tanto  $ab-[2a+2(b-2)]$ , es el número de celdas interiores. Igualando, tenemos la ecuación  $ab-4a-4b-8=0$  (1). La expresión sugiere la búsqueda de una factorización, de la que se puedan deducir todos los posibles valores para  $a$  y  $b$ . Un primer intento le lleva a  $a(b-4)-4(b-2)=0$ , pero es imposible factorizarla. Sin embargo, se percató de que transformando  $(b-2)$  en  $(b-4)$  se podría factorizar. Para conseguirlo añadió 16 a ambos lados de la ecuación (1), lo que le condujo a la ecuación  $(b-4)(a-4)=8$ , de la que se obtienen las dos únicos rectángulos posibles,  $6 \times 8$  ó  $5 \times 12$ .

Esta solución muestra dos estadios del sentido de los símbolos: la representación de los datos de forma útil y manejable y después las operaciones formales dirigidas a un determinado propósito.

### Símbolos en retrospectiva

En un aula (de primero de facultad) obtuvimos una solución distinta al problema del rectángulo. Pasado un intervalo de tiempo en el que los alumnos operaban con los símbolos sin obtener resultados alentadores, uno llegó a la solución que describimos anteriormente. En este punto, una matemática que se hallaba de forma casual en la clase, presentó una solución que ella había encontrado y que no se apoyaba en el uso de símbolos. Según su propio testimonio, su experiencia del Origami, arte japonés de doblar papel, había sido la fuente de su inspiración. Mentalmente ella doblaba una de las filas del borde sobre la fila interior adyacente. De esta

5. N. de la T.: Se traduce "gestalt" por panorámica.

todas formas?" Posiblemente este estudiante para el que resolver la ecuación significaba realizar las manipulaciones mecánicas habituales quería expresar la necesidad de saber de qué forma el álgebra expresa la ausencia de soluciones. Desgraciadamente, la respuesta no es muy alentadora: las operaciones habituales nos llevan sin ningún problema a  $x=-3/2$ . Nuestro alumno se quedó boquiabierto ante la contradicción y le costó lo suyo resolverla. Al sustituir  $x=-3/2$ , constató que es el único valor que no puede ser sustituido en la expresión, y ello le confirmó en sus intuiciones. No fue muy locuaz, sin embargo le sugerimos que estaba aprendiendo algo sobre el lenguaje de los símbolos y las trampas en las que podemos caer si simplemente nos dedicamos a operar con ellos de modo irreflexivo.

### Expresiones equivalentes - sentidos diferentes

Iniciamos esta sección con dos ejemplos. Cuando operamos con la fórmula para calcular la media aritmética de dos números, una alumna observa que una simple manipulación transforma  $(a+b)/2$  en  $a/2+b/2$ . Pero, no contenta con esto, llega a una nueva conceptualización de la media de dos números: "es un número hecho con la mitad de uno y la mitad del otro". Esta reconceptualización emerge de mirar expresiones simbólicas equivalentes, no como resultados formales, sino como fuentes de nuevos significados.

El siguiente es otro ejemplo de comportamiento similar. "Toma un número impar, eleválo al cuadrado y réstale 1. ¿Qué se puede afirmar del número resultante?" El problema puede ser representado por  $(2n-1)^2-1$ . De aquí pasaríamos a la forma equivalente  $4n^2-4n$  para llegar a una conclusión general. A primera vista, la conclusión es que el número resultante es múltiplo de 4. Sacando factor común  $4n^2-4n=4n(n-1)$ , y si ahora leemos los símbolos, tal vez nos demos cuenta que el resultado es siempre un múltiplo de 8 (dado que  $n$  y  $n-1$  son enteros consecutivos y uno ha de ser par). Distintos reagrupamientos de los símbolos nos revelan algo más. Si escribimos  $4n(n-1)$  como

$$8 \frac{n(n-1)}{2}$$

no es sólo evidente que el resultado es un múltiplo de 8, es un múltiplo especial de 8; el factor que multiplica al 8 es un número triangular. Estos dos ejemplos tienen una moraleja común. En ambos se incrementa el grado de comprensión al obtener expresiones equivalentes a partir de manipulaciones operativas con los símbolos. Ésta puede ser considerada otra faceta del sentido de los símbolos: la intuición y confianza los símbolos como guía en la búsqueda de peculiaridades.

### La elección de los símbolos

Cuando transcribimos un problema en símbolos, uno de los primeros pasos es elegir qué representar y cómo. La elección, como veremos en los ejemplos siguientes, puede tener efectos cruciales en el proceso de resolución y en los resultados.

Primero consideremos de nuevo el ejemplo del apartado anterior. Si el número impar se representa por  $n$  en lugar de por  $2n-1$ , la expresión obtenida es  $n^2-1$ . A pesar de la legitimidad de la elección de la notación, los resultados obtenidos posiblemente nos den menos información. Si factorizamos  $n^2-1=(n-1)(n+1)$ , sabremos que el número es el resultado del producto de dos números pares consecutivos. Uno de los números debe ser múltiplo de 4, por tanto el resultado será múltiplo de 8. Sin embargo, no queda claro qué tipo de múltiplo de 8 es. La elección de  $2n-1$ , en lugar de  $n$ , introduce en el propio símbolo la información inicial, y por ello el resultado también ofrece más información sobre la estructura del número obtenido.

La elección de los símbolos no sólo puede mantener oculta parte de la información, a veces impide la resolución. Consideremos el siguiente problema, tomado de SNARK, 1977.

*John fue a cobrar un cheque por una suma inferior a 100\$. El cajero confundió los dólares con los centavos (es decir, si el cheque era de 19.45\$, pagó a John 45.19\$). John tomó el dinero y después de gastar 3.50\$, se percató de que tenía el doble del valor del cheque. ¿A cuánto ascendía el valor del cheque?*

Si nos decantamos por representar el valor del cheque por  $x$ , es bastante improbable que progrese en la resolución. Por otro lado, expresar cada uno de los cuatro dígitos por una variable distinta nos conduciría a una situación enrevesada. La elección óptima sería representar con una variable los dos dígitos de los dólares y con otra los dos dígitos de los centavos.

No queremos decir con esto que una elección inicial inadecuada de las variables indique necesariamente una falta de sentido de los símbolos, pero sí que deseáramos resaltar la importancia de considerar al menos tres aspectos. Primero, la libertad de la elección de notación. Los mismos "tipos" de números pueden ser representados de distintas formas. Tres números enteros consecutivos pueden representarse por  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$  o por  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$  o bien  $n-2$ ,  $n-1$ ,  $n$ . La elección puede simplificar los cálculos, incluso el resultado final. Segundo, la concienciación de que la elección inicial no es un camino sin retorno. Podemos reiniciar la representación de otra manera si lo creemos más conveniente ó bien si la elección anterior ha resultado improductiva. Tercero, queremos incluir dentro de lo que

símbolos. Parafraseando la definición que para "sentir" da el Diccionario Enciclopédico de Oxford, sentir los símbolos es una rápida y acertada apreciación, comprensión e intuición de los símbolos.

De acuerdo con lo anterior, el sentido de los símbolos incluiría:

- Sentido estético y comprensión por el poder de los símbolos: cómo y cuándo deben ser utilizados para representar relaciones, generalizaciones y demostraciones que de otra forma serían invisibles o estarían escondidas.
- Sentir cuándo se deben abandonar los símbolos para intentar otras formas de aproximación, para poder obtener soluciones más claras, elegantes y sencillas.
- Habilidad para manipular y leer expresiones simbólicas como aspectos complementarios en la solución de un problema. Por un lado, el alejamiento del significado necesario para las manipulaciones unido a una visión panorámica de la expresión simbólica genera una rápida

y eficiente manipulación de los símbolos. Por otro lado, la lectura reflexiva de las expresiones simbólicas añade relaciones y da sentido a los resultados.

- Conciencia de que se pueden construir las expresiones simbólicas que expresen una información verbal o gráfica dada, lo que puede ser útil para avanzar en la resolución de un problema.
- La posibilidad de seleccionar una posible representación simbólica y si no resulta satisfactoria tener el coraje de abandonarla y tener recursos para encontrar otra mejor.
- La necesidad de verificación continua del significado de las expresiones simbólicas mientras se resuelve el problema, comparando y contrastando esos significados con la propia intuición o con los resultados que se esperan obtener.
- Percibir los distintos papeles que juegan los símbolos en los diferentes contextos. ■

## BIBLIOGRAFÍA

- Fey, J., 1990. "Quantity". In Steen, L.A. (Ed.), *On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy*. National Academy Press, Washington, D.C., pp. 61-94
- Freudenthal, H., 1983. *The Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel, p. 469.
- Gardner, M., 1983. *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*. W. H. Freeman and Company, NY.
- Longley-Cood, L.H. *Fun with Brain Puzzlers*. Fawcett, 1965. (As quoted in Gardner, M., 1983. *Wheels, Life and other Mathematical Amusements*. Freeman and Co., pp. 10-18.)
- Moschkovich, A. H. Schoenfeld, and A. Arcavi, 1993. "Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them". In Romberg, T. A., E. Fennema and T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representations of Functions*. L. Erlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ. p. 69-100.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1989. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM, Reston, VA, pp. 36-37.
- Resnick, Z., 1991. *Functions* (Hebrew Textbook from The Mathematical Chapters Series for 9th grades). The Department of Science Teaching, The Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel, p. 151.
- Schoenfeld, A. H., 1985. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc., p. 27.
- Sfard, A., 1992. "Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification - The Case of Function". In Harel, G. and E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (MAA Notes, Vol. 25), Mathematical Association of America, Washington DC, pp. 261-289.
- SNARK, 1977. *Revista de Juegos y Entretenimientos*. Año II, Número 7, Homo Ludens SRL, Buenos Aires, Argentina, p. 5.
- Sowder, J., 1992. "Estimation and Number Sense". In Grouws, D.A. (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company, New York, pp. 371-389.
- Sowder, J., 1989. *Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics: Report of a Conference*. Center for Research in Mathematics and Science Education, College of Sciences, San Diego State University.
- Wengen, R. H., 1987. "Cognitive Science and Algebra Learning". In Schoenfeld, A.H. (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. L. Erlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ. pp. 217-251.
- Whitehead, A. N., 1911. *An Introduction to Mathematics*. Williams & Norgate, London, p. 59, 61.



forma ambos números el de las celdas del borde y el de las interiores coincidían excepto por dos de más en el borde. Repitiendo el proceso con la otra fila del borde, se añadía dos celdas extras que no coincidían. Después doblaba las columnas de los bordes (sin las celdas de los bordes que ya habían sido eliminadas) quedando pues 8 celdas extras sin pareja (dos celdas extras por cada esquina). Si quería que el número de celdas interiores y de los bordes coincidiese, necesitaba emparejar las 8 celdas. Para tal propósito necesitaba 8 celdas interiores formando un rectángulo. Sólo hay dos posibilidades:  $1 \times 8$  ó  $2 \times 4$ . Desdoblado el origami en los dos casos, obtenía los rectángulos originales solución del problema. Una solución ingeniosa y bella en sí misma: general, sin símbolos y claramente visual. Uno de los alumnos expresó lo que para él tenía de sorprendente: esta solución alternativa, sin símbolos estaba claramente relacionada con la solución algebraica explicada en clase (y señalada en el párrafo anterior). Este estudiante remarcó que al resolver una ecuación algebraica que representa un determinado problema, nos desprendemos del significado de los símbolos y sus referentes. Los pasos intermedios no se observan en correspondencia con la situación real, son realizados de una forma mecánica (y por tanto eficiente) hacia la solución. De todas formas, en este caso, la solución simbólica y la del origami guardan estrecha relación.

En la ecuación simbólica el 8 aparece como mero artificio de la manipulación en el proceso de factorizar la ecuación. Posteriormente, gracias a la solución del origami, vemos el sentido del 8 y de la ecuación.

Cuando se resuelve un problema mediante una modelización matemática, se suele establecer la equivalencia entre los símbolos y su significado al comenzar (al crear el modelo) y se retoma al final (para interpretar el resultado en los términos del problema original). Durante los cálculos es normal operar de forma mecánica sin tener en mente la equivalencia de significado. A este estudiante de nuestro ejemplo los símbolos le "hablaban claramente", porque era capaz de reconocer el significado real que había en ellos y en los pasos intermedios, algo que es bastante infrecuente. Esto es algo a considerar como un claro ejemplo de sentido de los símbolos.

### Símbolos en su contexto

En el caso de una relación lineal  $y=mx+b$ , a pesar de que  $x$ ,  $y$  ("variables") y  $m$ ,  $b$  ("parámetros") representan números, el tipo de objetos matemáticos que se obtienen al darles valores pueden ser completamente distintos. En el plano cartesiano, dando valores numéricos a  $x$  e  $y$ , se fija

un punto determinado en el plano, y dando valores a  $m$  y  $b$  se determina una recta. Es decir  $y=b$  puede interpretarse de dos formas dependiendo del contexto. Si se obtiene como resultado de sustituir  $x=0$  en  $y=mx+b$ , entonces hemos encontrado la ordenada (o familia de ordenadas) en que la recta corta al eje  $y$ . Pero, por otro lado, si  $y=b$  se obtiene como resultado de sustituir  $m=0$  en  $y=mx+b$ , habremos encontrado la familia de rectas de pendiente 0<sup>6</sup>.

En esta sección sugerimos que un componente deseable en el sentido de los símbolos consiste en el reconocimiento "in situ" de los diferentes papeles (a la vez que similares) que juegan los símbolos en el álgebra de la secundaria. Ese reconocimiento conlleva saber analizar la multiplicidad de significados dependiendo del contexto, y la habilidad para manejar diferentes objetos y procesos (Sfard, 1992; Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi 1993).

El siguiente es un ejemplo de un caso en que un alumno no fue capaz de comprender los diferentes papeles que pueden jugar los símbolos. El problema, de su libro de texto (Resnick, 1991) era: "Hallar, si es posible, un número que al ser sustituido en  $d$ , dé lugar a una función lineal". Doce expresiones venían a continuación, la última de las cuales era  $y=(x^2-4)/(d-2)$ . Suponiendo que se tenga una idea clara de los diferentes papeles que juegan los símbolos, la solución es sencilla. Sea cual sea el número sustituido en  $d$  (claramente no el 2), la función no puede ser lineal. Nos quedamos perplejos con el razonamiento del alumno. Tras una visión panorámica descompuso  $x^2-4$  en  $(x-2)(x+2)$ , y como para él  $x-2$  podía simplificarse con  $d-2$  si  $d=x$  ( $d \neq 2$ ) se obtenía una ecuación lineal,  $x+2$ . En este caso, su operatividad simbólica, útil en otras ocasiones para simplificar, interfería claramente su visión sobre el papel que representaban los símbolos. Su razonamiento no fue en ningún momento dubitativo, ni trató de verificar su solución, por el contrario se sentía exultante por haber realizado la tarea encomendada. No cuestionó la legitimidad de su razonamiento en absoluto. Por nuestra parte la reacción no fue muy afortunada ya que no conseguimos hacerle comprender dónde estaba el error. Tal vez estaba más allá de su capacidad el comprender la "ilegalidad" del paso  $d=x$ , al menos en ese momento.

### ¿Qué es sentido de los símbolos?

Si inspeccionamos las características comunes de los comportamientos anteriores, nos encontraremos en una mejor situación para caracterizar el sentido de los símbolos. En términos generales podemos decir que el sentido de los símbolos es una compleja y multifacética forma de "sentir" los

6. Un uso cuidadoso de la notación de conjuntos requeriría escribir en el primer caso  $\{(x,y)/x=0, y=b\}$ , mientras que en el segundo caso sería  $\{(x,y)/ y=b\}$ .

ciones indudables entre lo que se considera Matemática y el Lenguaje Natural. Algunos autores restringen el ámbito del Lenguaje Matemático al que se expresa de forma simbólica específica. En el nº 16, 1994 de la revista SUMA, dedicado monográficamente al Lenguaje y Matemáticas, Joaquín Giménez (Giménez, 1994) hace un buen repaso de las relaciones entre el lenguaje verbal y Matemáticas; tiende a decantarse por una separación en distintos lenguajes matemáticos y así habla de los lenguajes matemáticos y en particular de lenguajes gráfico-visuales y cuando se refiere a lenguaje matemático en singular parece que sólo se trata del expresado verbalmente, pero no establece separaciones tajantes e incluso indica la conveniencia de reconocer la existencia de diversos lenguajes: esquemas, programación, grafos, etc. Finalmente algunos autores dan un paso más y hablan ya claramente de "distintos tipos de lenguajes matemáticos (numérico, gráfico, algebraico, probabilístico, etc.)" (Sánchez Benito, 1994, pág. 16) o "que hay diversos lenguajes matemáticos: lenguaje físico, lenguaje ordinario o natural, lenguaje gráfico y lenguaje simbólico" (Fernández, 1994, pág. 35). Estimo que estos tipos de lenguajes son un intento de clasificación del lenguaje matemático por criterios sintácticos en el caso de Fernández, por criterios semánticos en Sánchez Benito y por ambos en Giménez.

No me parece grave llamar lenguajes matemáticos a parcelas del mismo separadas por criterios sintácticos o semánticos, para utilizarse en contextos dados. Pero estimo más conveniente entender el Lenguaje Matemático como un todo y llamar "texto matemático" a toda expresión básica completa de conocimiento matemático, por ejemplo la descripción de una situación, el enunciado de un problema, el proceso de solución del mismo, una construcción gráfica, la demostración de un teorema, etc. En todo texto matemático suele aparecer mezclada expresión verbal y simbólica específica; también la gráfica en muchas ocasiones. La expresión manipulativa y las acciones sólo son relevantes en los primeros niveles y pueden constituir signos aislados, pero es difícil que lleguen a constituir una expresión autónoma, o sea, un verdadero texto del Lenguaje Matemático. Todo esto implica que es difícil que un texto matemático esté expresado sólo en forma verbal, o gráfica o simbólica específica, aunque ésta tienda a expresarse como dominante a medida que se aumenta de nivel. Y si la separación por criterios expresivos, sintácticos, es difícil, también lo es por criterios semánticos y no parece conveniente reproducir las viejas divisiones de la Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometría,...) en divisiones del Lenguaje Matemático, especialmente en los primeros niveles que son los que nos ocupan.

## 2. Para qué usamos el Lenguaje Matemático

El dominio del Lenguaje Matemático tiene como finalidad última la competencia comunicativa, o sea, entendernos

cuando hablamos de Matemáticas. También se usa el Lenguaje Matemático en el resto de la Ciencia, como una especie de lenguaje intérprete de la misma y en los niveles superiores de conocimiento puede ser difícil establecer una frontera entre Matemática y otros campos científicos. Los lenguajes se aprenden practicándolos. Nuestras habilidades matemáticas naturales son muy limitadas y si queremos resolver problemas matemáticos tenemos que aprender el Lenguaje Matemático, lo mismo que hay que aprender el lenguaje musical para componer sinfonías. Estimo que el parecido, en este sentido, es mayor entre Matemática y Música que entre Matemática y Retórica, pues nuestras competencias innatas son mucho mayores en lenguaje natural.

Cada cultura tiene un "sistema de prácticas" para aprender, investigar o difundir la Matemática. A nosotros nos interesa el sistema de prácticas escolares, o sea, de qué modo proponemos, en esta época y en cada nivel escolar, unas prácticas para aprender el lenguaje matemático y cómo podemos determinar el nivel de competencia comunicativa alcanzado.

Si nos fijamos en otros lenguajes (el natural, el pictórico, el musical, etc.) parece claro que lo que se pretende es que seamos capaces de entender los textos de esos lenguajes y producirlos, a nivel individual y social, cuanto más originales mejor. Y que existen diferentes niveles de comprensión cuando contemplamos una representación teatral, oímos una sinfonía o vemos un cuadro, y que sólo una pequeña minoría humana es capaz de producir verdaderos textos originales. La cultura matemática, por su relación con el campo científico-técnico, tiene además un uso fuertemente instrumental, que hace necesario que se logren, a nivel social, niveles de competencia matemática muy variados.

## 3. Cómo se aprende el Lenguaje Matemático y procesos lingüísticos básicos implicados en la comprensión y producción textual

En otras épocas, el aprendizaje de un lenguaje, incluido el matemático, empezaba por los elementos expresivos mínimos: letras, notas musicales, cifras,... Actualmente tiende a ponerse en contacto al aprendiz, casi desde el comienzo, con **textos elementales**, y se van aprendiendo las formas expresivas de modo simultáneo al avance en la comprensión y producción de textos cada vez más complejos.

En clave matemática diríamos que se propone desde el principio la resolución de pequeños problemas, con base en expresión manipulativa o acciones, descripciones verbales y uso de notaciones personales, no estándares. El vocabulario básico se va adquiriendo de forma paulatina al mismo tiempo que se avanza en la construcción de notaciones estándares y expresión gráfica, así como en traducción de una forma de expresión a otra. Además, ya no se enseña

## PROCESOS LINGÜÍSTICOS BÁSICOS DE COMPRENSIÓN Y PRODUCCIÓN DE TEXTOS MATEMÁTICOS

Inés Sanz Lerma

Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales. UPV/EHU

### 1. Qué entiendo por Lenguaje Matemático

Partiré de la hipótesis de que toda Representación de lo que llamamos Matemática se hace en Lenguaje Matemático. El Lenguaje Matemático se expresa de diversas formas:

- Expresiones manipulativas y acciones
- Expresiones verbales, orales y escritas
- Expresiones simbólicas específicas.

La Representación o Función Semiótica, en la cual interviene siempre el aparato cognitivo humano, consiste en la unión de un elemento expresivo con un contenido mediante un código, que es una regla de correspondencia entre ambos originándose así una representación elemental o signo. Las representaciones pueden variar de una cultura a otra, de un individuo a otro y a lo largo de la vida de un individuo. La cultura en general y especialmente la instrucción matemática en el caso que nos ocupa, tiende a fijar los signos o representaciones. El ideal de correspondencia unívoca o función entre expresiones y contenidos rara vez se consigue y hay que contar con que se den casos de sinonimia, polisemia, usos metafóricos de las expresiones del Lenguaje Matemático, etc.

En general las Representaciones del Lenguaje Matemático no están formadas por signos aislados sino que la base expresiva es un Esquema Simbólico o sistema Sintáctico, formado por un conjunto de caracteres expresivos y reglas más o menos explícitas para combinarlos, y un Campo de Referencia o sistema Semántico, que es una estructura matemática, ligados por una regla de correspondencia o Código, así:

Esquema Simbólico CÓDIGO Campo de Referencia  
(Kaput, 1987)      →

Sistema Sintáctico CÓDIGO Sistema Semántico  
(Eco, 1977)      →

En los primeros niveles de enseñanza-aprendizaje abundan las representaciones verbales, junto a las manipulativas y las acciones. La representación verbal se va especializando en representar contenidos matemáticos a partir del lenguaje

natural, constituyéndose un **registro matemático** (Halliday, 1978), una forma de hablar y escribir que incluye un vocabulario específico y formas especiales de argumentar. Simultáneamente se va construyendo la representación gráfica y la simbólica específica, sólo en parte derivada de la expresión verbal y apoyada en formas expresivas especiales, fuertemente pulidas por la cultura. Las representaciones matemáticas gráficas o simbólicas específicas no son fácilmente traducibles a expresión verbal, oral o escrita, hay que **leerlas**, o sea, **comprenderlas** como un todo. Su verbalización no pasa de ser una simple descripción de las expresiones que las forman. La verdadera traducción consiste en verter el campo semántico, o sea, la estructura matemática que soportan, a expresión verbal adecuada que en general es independiente de los grafismos o expresiones simbólicas que sustentaban la representación. O sea, hay que comprenderlas antes de traducirlas, y lo mismo en el proceso inverso, cuanto se trata de expresar un problema o situación enunciada verbalmente a expresión gráfica o simbólica específica. Por eso son tan importantes los procesos de traducción de una forma de expresión a otra y el progreso en su dominio está claramente ligado al progreso en la comprensión de la Matemática. Las dificultades de este proceso son bastante conocidas (ver un ejemplo en Grupo Azarquié, 1994).

Una vez establecida la representación gráfica y la simbólica específica, sobre esas formas expresivas actúan **reglas de transformación sintácticas**, que suelen ser mucho más sencillas que las difíciles reglas de transformación semántica que operan en los procesos de traducción señalados. Estas reglas sintácticas permiten transformar expresiones y son muy productivas, por lo que su manejo adecuado es siempre un objetivo de la enseñanza-aprendizaje. Las reglas de transformación sintáctica no son independientes de los contenidos, ya que el sistema sintáctico y el semántico están coordinados; por eso, aunque puede ser un objetivo llegar a aplicarlas automáticamente, para no sobrecargar la capacidad del sistema cognitivo, es preciso insistir en su comprensión en todos los niveles de aprendizaje y uso de la Matemática.

Hoy se habla mucho de Lenguaje y Matemática pero en muchos casos sólo se trata de poner de manifiesto las rela-

El problema en que está inmersa dirige la atención a ciertos elementos de la misma y hay que saber extraer de la tabla los datos que son pertinentes al problema, pues a partir de una misma tabla se pueden plantear diferentes problemas.

Para llegar a comprender las tablas de datos hay que practicar su lectura y construcción desde las más elementales, con pocos datos, y bajo diferentes formas expresivas. Hay que cuidar en todos los niveles la corrección expresiva, diferenciando las de doble entrada a las de entrada simple claramente, dedicando especial atención a las más significativas, entre las que se encuentran las tablas de correspondencias entre medidas y las de clasificación por una o dos características.

En los libros escolares se usa muchas veces la tabla como forma de expresión alternativa a un esquema o resumen, para representar un conjunto de datos verbales o numéricos (Sanz Lerma, 1995). Las facilidades tipográficas actuales hace que se pueda imprimir casi cualquier conjunto de datos bajo forma de tabla; pero los niños han de aprender a construirlas, lo que implica saber representarlas, y no se les debe recargar con grafismos innecesarios. Por eso opino que deben reservarse para las situaciones en que son verdaderamente pertinentes.

Las tablas de datos pueden presentar **ambigüedades expresivas** originadas generalmente en la rotulación incompleta o inadecuada y en la falta de unidades de medida. Estas ambigüedades se pueden eliminar algunas veces al leer el texto verbal que las acompaña, pero estimo que no deberían producirse salvo en los casos en que el problema consista en deshacer la ambigüedad, o sea, en completar la tabla.

La lectura de tablas de datos puede llegar a alcanzar un cierto grado de rutinización, que puede ser un objetivo deseable, ya que ello facilitaría la lectura de datos que aparecen en la vida diaria (prensa, documentos e informaciones de centros de servicios). Su construcción es siempre una tarea compleja ya que exige dominar procedimientos de medida y representaciones de datos aislados y tomar decisiones sobre criterios de secuencialización, ordenación o clasificación del conjunto de datos obtenidos o suministrados por el enunciado del problema. Si se trata de varios conjuntos de datos hay que elegir criterios de correspondencia entre ellos. En fin de cuentas la finalidad esencial de una tabla es hacer patentes las estructuras matemáticas subyacentes (correspondencias y clasificaciones esencialmente), por lo que el aprendizaje de esa forma expresiva sólo tiene sentido si sirve de soporte al aprendizaje de los conceptos matemáticos que representa ■

## BIBLIOGRAFÍA

- Durkin, K., and Shire, B., eds. (1991). *Languages in mathematical education*. Philadelphia: Open University Press.
- Eco, U. (1977). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen (4ª edición, 1988).
- Giménez, J. (1994). Lenguaje verbal y matemáticas: separación sin relaciones. Estado de la investigación. *Suma*, 16, 54-67.
- Grupo Azarquel (1994). Estrategias utilizadas en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico. *Suma*, 16, 48-53.
- Halliday, M.A.K. (1978). *Language as social semiotic. The social interpretation of Language and meaning*. Londres. Edward Arnold.
- Hernández Domínguez, J. y Socas Robayna, M. M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas. *Suma*, 16, 82-90.
- Kaput, J.J. (1987). Representation Systems and Mathematics. *Problems of Representation in the teaching and learning of Mathematics*, Hillsdale: LEA, 19-26.
- Palarea Medina, M.M. y Socas Robayna, M.M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma*, 16, 91-98.
- Sánchez Benito, A. (1994). La expresión oral y escrita en las Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria: una experiencia de trabajo en el aula. *Suma*, 16, 99-110.
- Sanz Lerma, I. (1995). *La construcción del Lenguaje Matemático a través de libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos*. Leioa: Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

“copiando” de una muestra o patrón y se potencia la creatividad desde los primeros niveles. Está claro que esto se debe en gran parte a que hoy las máquinas son mucho mejores copistas que el ser humano y que realizan los algoritmos y actividades repetitivas de cualquier lenguaje mucho mejor que las personas, con lo cual estas actividades han pasado a ser socialmente irrelevantes.

Los **procesos lingüísticos básicos** de comprensión y producción textual son:

- Lectura comprensiva de textos matemáticos bajo diferentes formas expresivas.
- Producción textual (descripción de situaciones problemáticas, representación bajo diferentes formas expresivas, procesos de construcción y demostración).
- Traducción de una forma de expresión a otra.

Estos procesos básicos implican una serie de procesos elementales como:

- Reconocimiento de vocabulario matemático.
- Representación de relaciones entre conceptos (mapas conceptuales, clasificaciones y seriaciones).
- Interpretación de vocabulario básico (vía descripciones, definiciones).
- Reconocimiento de datos de un problema bajo diferentes formas expresivas, aislados o en conjuntos estructurados (tablas, gráficas,...).
- Aplicación de reglas sintácticas de transformación de expresiones simbólicas, incluyendo ejecución de algoritmos.
- Procedimientos elementales de construcción gráfica.

Los procesos lingüísticos básicos se pueden reconocer de forma inmediata en alguno de los modelos de resolución de problemas. Hernández y Socas (Hernández y Socas, 1994) esquematizan así tres modelos de competencia para la resolución de problemas aritmético-verbales:

Las fases 1 y 2 en los primeros modelos y la 1 en el tercero corresponden a los procesos de lectura comprensiva de un texto matemático; las fases 3, 4 y 5 en los primeros y la 2, 3 y 4 en el tercero corresponden a la producción textual y posible traducción de una forma expresiva a otra. En el último no aparecen explícitamente los procesos de traducción, tal vez porque son modelos dirigidos a problemas aritméticos elementales y los datos se suponen dados bajo simbolismo específico.

Los tres modelos incluyen una última fase correspondiente a procesos de evaluación. La evaluación puede ser esencialmente un proceso de lectura comprensiva del texto producido al resolver el problema. En algunos casos menos elementales implica traducción a otra forma expresiva y nueva producción textual.

#### 4. Un caso particular: lectura y construcción de tablas de datos

Desde los primeros niveles se proponen problemas cuyo objetivo es obtener datos a través de procesos elementales de medida (incluyendo en ellos recuentos, clasificaciones y seriaciones) y hay que aprender a representar estos conjuntos de datos bajo la forma expresiva típica de tabla. Simultáneamente se presenta la necesidad de aprender a leer las tablas de datos ya construidas, que suelen ser fuentes de datos para los problemas. Hay algunos casos intermedios, como completar una tabla, que implica tanto saber leer la tabla como construirla en parte. Finalmente también aparecen procesos de traducción de una forma expresiva a otra, especialmente de tablas de datos numéricos a gráficos y viceversa.

La tabla de datos constituye en sí misma un texto matemático autónomo, si es completa y está bien construida. Los rótulos de filas y/o columnas identifican los tipos de datos y su lectura comprensiva suministra directamente la información.

| Puig y Cerdan (88) | Hernández y Socas (94)                                   | De Corte y Verschaffel (89) |
|--------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------|
| 1. Lectura         | 1. Lectura                                               | 1. Lectura                  |
| 2. Comprensión     | 2. Comprensión                                           | 2. Elección de operaciones  |
| 3. Traducción      | 3. Representación-ejecución y solución visual-geométrica | 3. Ejecución                |
| 4. Cálculo         | 4. Representación-ejecución y solución formal            | 4. Solución                 |
| 5. Solución        | 5. Solución                                              | 5. Verificación             |
| 6. Revisión        | 6. Comprobación                                          |                             |

geómetra. El título del capítulo es: "Posiciones relativas de dos circunferencias" (Exteriores, interiores, tangentes exteriores, secantes, tangentes interiores y concéntricas). Me pregunto si Luis "sabr " Geometría algún día.

Luis existe, cursa tercer ciclo de primaria, y la construcción de la cometa más pesada de la historia, le ha servido para aprender la indeformabilidad de los triángulos, gracias a la intervención educativa llevada a cabo por su vecino, el carpintero del barrio, a la voz de  pero a ti que (...) te enseñan en la escuela?

La anécdota es cierta. También es desafortunadamente cierta la existencia del libro, publicado, durante este mismo curso. La  nica licencia que me he permitido, es el hecho de asignar este libro a este niño, pero para el caso, da lo mismo.

Quisiera hacer hincapié en el hecho que est  completamente fuera de mi intención afirmar que en este momento **todos** los libros de texto de Reforma se pueden reconocer en esta anécdota. Ciertamente existen algunos libros que se han planteado la enseñanza de la geometría de una manera mucho más funcional, y con una presencia muy importante en sus planteamientos.

## LOS LIBROS DE TEXTO Y LOS PROGRAMAS DEL DCB

### La duda

Uno de los interrogantes principales (no resuelto hasta el momento) que me surgieron cuando hice un pequeño estudio sobre el tratamiento de la Geometría en los textos escolares, fue el de imaginarme el motivo por el cual bastantes textos continúan insistiendo en seguir convirtiendo la geometría, casi exclusivamente, en una lista de nombres muy alejados a mi entender del niño, de sus necesidades, e incluso de la sociedad.

Pens  que un motivo podría ser, al tratarse de textos escolares, la influencia de los contenidos dictados desde la administración, y me puse a trabajar en ellos. Sin embargo en la primera lectura de los contenidos, queda clarísimo que no es éste el motivo de la opción tomada por algunos autores.

No es mi deseo polemizar sobre las decisiones curriculares llevadas a cabo por los autores de ciertos textos escolares, en las que puedo estar o no de acuerdo, sino resaltar que, a mi entender,

**los contenidos referentes a geometría presentados por bastantes textos escolares actuales, difieren de manera importante, de la filosofía presentada en el DCB.**

Por otra parte, cabría plantearse que seguramente también deben ser realmente distintos los objetivos generales y las capacidades que conllevan, factor preocupante, a mi entender.

### La propuesta

Si los objetivos y contenidos del DCB ofrecen una propuesta funcional, ligada a la realidad y alejada de verbalismos inútiles, pens  que una idea a desarrollar en esta conferencia podría ser la de proponer dos o tres puntos de vista distintos, que dieran a los maestros elementos de reflexión para realizar la **toma de decisiones** en el momento de elaborar los proyectos curriculares.

La propuesta opta claramente por la funcionalidad de los aprendizajes, la verbalización de éstos, y la inclusión de las tareas concretas en un marco de realización de un proyecto más amplio (por ejemplo estudiar coordenadas en un contexto de lectura de mapas). Propuesta que coincide a mi entender con las intenciones del DCB.

**Parece interesante tener diferentes modelos de organización de la Geometría, donde los contenidos estructuradores<sup>3</sup> sean distintos, ya que nos permitirán más flexibilidad a la hora de querer trabajar por rincones, proyectos, temas integrados, globalizaciones, interrelación, etc.**

## LOS DESARROLLOS CURRICULARES

### Análisis de la Geometría en el DCB

La lectura ha consistido en analizar los contenidos referentes a Geometría que aparecían en los currículums oficiales del MEC, y organizarlos según diferentes criterios de clasificación, para ver, por un lado la coherencia de su planteo, y por otro, las posibles nuevas interpretaciones que podrian aparecer.

Para este trabajo sólo he tenido en cuenta la lista referente a los **contenidos de procedimientos**, dejando de lado los

3. Entendemos por contenidos estructuradores, aquellos que el maestro elige como eje principal alrededor de los cuales se estructura la asignatura. Por ejemplo *Polígonos, ángulos*, etc. o bien *Construcciones geométricas, mosaicos*, etc., o incluso *Localizar, construir, medir*...



## 5. Matemáticas en educación infantil y primaria

### GEOMETRÍA: DE CATÁLOGO A PROYECTO: ¿HAY ALGUIEN QUE TENGA ALGÚN PROBLEMA?

**David Barba (El Quinzet)**

*Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad Autónoma. Barcelona*

#### INTRODUCCIÓN

Esta conferencia sobre Geometría se centrará en dos puntos principales.

Una primera parte tratará sobre la toma de decisiones para organizar el curriculum, la Geometría en los libros de texto, la propuesta del DCB, y desarrollará sugerencias sobre distintas maneras de resolver el problema.

La segunda parte tratará sobre la dinámica de las clases de Geometría, convertidas muchas veces en puras identificaciones de estereotipos o bien en memorización de definiciones, y donde raramente se plantea la resolución de problemas. Se presentarán ejemplos de actividades.<sup>1</sup>

#### SABER GEOMETRÍA

Luis, un niño de once años, juega con unos listones de madera. Intenta construir una cometa en forma de prisma, que ha visto en una demostración de vuelo de cometas a la que fue, hace pocos días.

Después de un cierto tiempo, ha finalizado la primera parte, la estructura de una de las caras (un rectángulo).

Una vez construido, lo coge con la dos manos, y efectúa una pequeña presión, para comprobar su rigidez.



Su cara de contrariedad, al ver la facilidad con la que se deforma, es el anuncio de una intervención rápida para paliar el problema.

Coge otro listón y lo clava paralelamente a los anteriores, más o menos a la misma distancia. Sigue moviéndose...



¿Será por listones? Continúa clavando más y más hasta convertir el rectángulo en una especie de jaula, ... que continua deformándose a la menor presión.



Seguramente podríamos afirmar que Luis no "sabe" geometría.

Un libro de Matemáticas, abierto precisamente por la<sup>2</sup> lección de Geometría contempla impasible los esfuerzos del frustrado

1. Debido a que las actividades son sobradamente conocidas, en este resumen solamente se presenta la primera parte, tanto por razones de espacio como para no cansar al lector con ejemplos que ya pertenecen al dominio público.
2. En este caso el artículo *la* no hace referencia a la lección del día, sino a la *única* lección del libro dedica a la Geometría (de un total de 20)

**El estudio de la figuras planas y del espacio consistirá en efectuar clasificaciones a partir de comparación de figuras, construirlas siguiendo criterios, y analizarlas por composición y descomposición de otras conocidas, o bien a partir de sus regularidades y simetrías.**

**Paralelamente a esto, la necesidad de leer, interpretar y construir mapas, planos y maquetas, definir trayectorias, nos llevará a los conceptos asociados a la organización del plano y a sus relaciones de incidencia (coordenadas, paralelismo, perpendicularidad, etc.)**

### Segundo análisis: Clasifiquemos "por verbos"

Sin embargo, esta primera clasificación traicionaría un poco la mentalidad con la que hemos enfocado esta reflexión. Si el punto importante sobre el que centramos la organización de la materia son los contenidos procedimentales, no se puede defender con mucha pasión el hecho de organizar después la materia por conceptos.

Así pues, analizemos los contenidos y observemos bajo qué **acciones** (verbos) los autores del DCB han organizado los contenidos y en qué campos distintos son aplicados.

Por cuestiones de espacio, solamente haré referencia a los verbos que salgan tres veces como mínimo en la formulación de los 12 contenidos de procedimientos (decisión completamente arbitraria por mi parte, pero que pienso que puede dar una visión general interesante).

Así pues las acciones más generales que nos presenta el DCB en referencia a los contenidos de procedimientos son: **Utilizar, construir, describir, leer e interpretar.**

Así pues, buscaremos estas acciones en los contenidos y haremos una pequeña reflexión para cada uno de ellos.

### Utilizar

Estos son los tres contenidos en los que aparece este verbo:

- 6) **Utilización** de instrumentos de dibujo habituales para la construcción y exploración de formas geométricas.
- 12) Elaboración y **utilización** de estrategias personales para llevar a cabo mediciones y estimaciones de perímetros y áreas.
- 7) **Utilización** adecuada del lenguaje geométrico básico en la descripción de objetos familiares.

Así pues se nos define un "módulo" que planea alrededor de la acción **utilización**, que podríamos especificar como sigue:

- Utilizar los instrumentos de dibujo para DIBUJAR.
- Utilizar el lenguaje geométrico para DESCRIBIR.
- Utilizar estrategias de medida personales para MEDIR.

### Construir

Los contenidos relacionados son:

- 4) Lectura, interpretación y **construcción** de planos y maquetas utilizando una escala gráfica.
- 6) Utilización de instrumentos de dibujo habituales para la **construcción** y exploración de formas geométricas.
- 8) **Construcción** de figuras geométricas a partir de datos previamente establecidos.

Contenidos que podríamos reelaborar como sigue:

- Construir planos y maquetas y (o para) saberlos LEER e INTERPRETAR.
- Construir figuras planas con instrumentos de dibujo para EXPLORAR formas y propiedades.
- Construir figuras a partir de datos para INTERPRETAR informaciones.

### Describir

- 1) **Descripción** de la situación y posición de un objeto en el espacio en relación a uno mismo y/o a otros puntos de referencia apropiados.
- 3) Elaboración, interpretación y **descripción** verbal de croquis e itinerarios.
- 7) Utilización adecuada del lenguaje geométrico básico en la **descripción** de objetos familiares.

- Describir para LOCALIZAR objetos
- Describir para INDICAR trayectorias
- Describir para DETERMINAR O DEFINIR figuras o cuerpos

### Leer

- 2) Representación y **lectura** de puntos en los sistemas de coordenadas cartesianas.
- 4) Lectura, interpretación y construcción de planos y maquetas.
- 5) **Lectura**, interpretación y reproducción de mapas.

La idea global de estos tres contenidos, la juntamos con la siguiente idea (interpretar) ya que a mi entender son inseparables.

### Interpretar

- 3) Elaboración, **interpretación** y descripción verbal de croquis e itinerarios.
- 4) Lectura, **interpretación** y construcción de planos y maquetas utilizando una escala gráfica.

contenidos de conceptos, con la intención de huir de la "lista de la compra" en la que se torna, demasiadas veces, la enseñanza de la Geometría.

**Elegir los contenidos de procedimientos como estructuradores del currículum da una visión distinta a la organización de la materia.**

Para facilitar la lectura del artículo reproduzco aquí dichos contenidos:

- 1) *Descripción de la situación y posición de un objeto en el espacio en relación a uno mismo y/o a otros puntos de referencia apropiados*
- 2) *Representación y lectura de puntos en los sistemas de coordenadas cartesianas*
- 3) *Elaboración e interpretación verbal de croquis e itinerarios*
- 4) *Lectura, interpretación y construcción de planos y maquetas utilizando una escala gráfica*
- 5) *Lectura, interpretación y reproducción de mapas*
- 6) *Utilización de instrumentos de dibujo habituales para la construcción y exploración de formas geométricas*
- 7) *Utilización adecuada del lenguaje geométrico básico en la descripción de objetos familiares*
- 8) *Construcción de figuras geométricas a partir de datos previamente establecidos*
- 9) *Comparación y clasificación de figuras planas y cuerpos geométricos utilizando diferentes criterios*
- 10) *Formación de figuras planas y cuerpos geométricos, a partir de otras, por composición y descomposición*
- 11) *Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos*
- 12) *Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones y estimaciones de perímetros y áreas*

Así pues, y haciendo una interpretación personal de los programas, plantearé diferentes propuestas de organización, usando como base las formulaciones de los contenidos que nos propone el MEC.

### **Toma de decisión en los planteamientos curriculares: Diferentes lecturas**

#### **La lectura de los programas según los contenidos "clásicos"**

Siguiendo un planteamiento "clásico", podríamos intentar reconocer en los contenidos propuestos cuáles están en

relación con los temas básicos, para después usar estos contenidos como **contenidos estructuradores** del currículum de Geometría.

Cuando hablamos de contenidos "clásicos" nos referimos a los que podrían corresponder a una clasificación como la siguiente

1. Figuras planas y del espacio.
2. Movimientos y transformaciones.
3. Elementos, relaciones de incidencia y de organización del plano y del espacio.

La clasificación de los contenidos según estos criterios nos permite clasificarlos en dos grandes grupos:

- 1) Los correspondientes al **estudio de las figuras** (planas y del espacio) los hallamos buscando las palabras **figura** o **cuerpo** en el texto, y fueron los siguientes:

- Comparar y clasificar utilizando diferentes criterios.
- Formar a partir de composición y descomposición de otros.
- Buscar elementos de regularidad y simetría.
- Construir a partir de datos previamente establecidos.

Estos cuatro puntos nos ofrecen una interesante secuencia didáctica: Comparar para clasificar, estudiar composiciones y descomposiciones, descubrir regularidades y construir o dibujar a partir de datos, son contenidos que pueden **repetirse cíclicamente** ya que la evolución vendrá dada por los conceptos o procedimientos cada vez más elevados que los niños vayan incorporando a sus descripciones.

En este sentido, los niveles de Van Hiele pueden ser un marco de referencia válido para formalizar estas secuencias, sin embargo no es éste el espacio indicado para profundizar sobre esta idea.

- 2) El resto de contenidos de procedimiento no nos permite hacer una clasificación clara, si bien podemos apuntar la idea que las transformaciones geométricas y los elementos de organización del plano son recogidos de una manera funcional, bien sea para clasificar figuras, bien sea para leer o interpretar mapas, planos, etc.

En resumen podríamos afirmar que una clasificación de los contenidos procedimentales cercana a las secuencias "clásicas de la Geometría" podría ser la siguiente:

mapas en lo referente a aspectos funcionales o de aplicación.

Englobaría los contenidos siguientes:

- 1) Descripción de la situación y posición de un objeto en el espacio en relación a uno mismo y/o a otros puntos de referencia apropiados.
- 2) Representación y lectura de puntos en los sistemas de coordenadas cartesianas.
- 3) Elaboración e interpretación verbal de croquis e itinerarios.
- 4) Lectura, interpretación y construcción de planos y maquetas utilizando una escala gráfica.
- 5) Lectura, interpretación y reproducción de mapas.

### Construir

Dos son los contenidos que hacen referencia a este tipo de acción:

- 6) Utilización de instrumentos de dibujo habituales para la construcción y exploración de formas geométricas
- 8) Construcción de figuras geométricas a partir de datos previamente establecidos.

### Expresar

Entendido como sinónimo de describir o identificar, este grupo de objetivos nos da entrada a la parte que siempre ha estado presente en la Geometría: vocabulario y propiedades, pero visto desde la óptica de la comunicación, bien sea a partir de sus características bien sea por descubrimiento de sus rasgos comunes o propiedades.

Desde el punto de vista de los contenidos de Geometría englobaría la parte del estudio de las figuras así como de las transformaciones geométricas en relación a las propiedades de las figuras (ejes de simetría, giros, ...).

- 7) Utilización adecuada del lenguaje geométrico básico en la descripción de objetos familiares.
- 9) Comparación y clasificación de figuras planas y cuerpos geométricos utilizando diferentes criterios.
- 10) Formación de figuras planas y cuerpos geométricos, a partir de otras, por composición y descomposición.
- 11) Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos.

### Medir

Medir, otro de los grandes olvidos en los libros de texto de primaria, quedando reducida, a partir de segundo ciclo, a unas extrañas habilidades consistentes en saber desplazar

una coma hacia la derecha o hacia la izquierda para resolver cuestiones tan interesantes como ¿cuántos mm son 3dm?, con la pretensión oculta, de conseguir que los alumnos contesten 0. 0003 dm.

- 12) Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones y estimaciones de perímetros y áreas.

Medir para ayudar a localizar, expresar, construir, y ... medir, es dar a la medida una dimensión comunicativa de la importancia que a nuestro entender se merece.

Una organización de la Geometría (o de las Matemáticas) que se fije en estos aspectos, en lugar de la "lista de la compra" suponemos que será mucho más funcional, cercana y divertida, tanto para nuestros alumnos, como para nosotros mismos.

**Si elegimos como contenidos estructuradores el modelo de las actividades de Bishop, es muy fácil que casi sin darnos cuenta dotemos de funcionalidad y relación con el entorno a nuestras clases de Geometría.**

**Por otro lado "cumplimos programa" ya que sólo hemos hecho una reorganización de los contenidos.**

### Reflexión final

En esta primera parte se ha intentado ofrecer una propuesta de organización de la Geometría que acerque más la materia al entorno y la realidad de clase.

Realmente no se plantea que **toda** la Geometría tenga que organizarse así. Seguramente lo mejor será elegir algunos temas y trabajarlos clásicamente y otros a partir de este tipo de actividades.

Pienso que un posible problema pueda ser el miedo que a veces producen las Matemáticas, y pienso también que hay que perderlo, como el carpintero que aconsejó a Luis. Sin embargo no se trata de un acto de valentía inconsciente, el camino no es fácil y seguramente, lo mejor es dejarnos aconsejar por alguien que domine un poco más que nosotros la materia, en caso de inseguridades "pedagógicomatemáticas". Si nos lo proponemos, la Geometría es un instrumento excelente para divertirse y aprender.

Para terminar quería dejar claro un aspecto. Puede deducirse de mi explicación que un curso de Geometría planteado a partir de conceptos "clásicos" no comparte los

5) Lectura, **interpretación** y reproducción de mapas.

Una lectura global de los seis contenidos referentes a leer e interpretar nos llevaría a afirmar:

Leer e interpretar para: ORGANIZAR el plano a base de coordenadas, INTERPRETAR y CONSTRUIR planos y maquetas.

**Organizar los contenidos en relación a sus "verbos", nos lleva a un planteamiento donde las pautas de evaluación estarían presididas por la observación de acciones, como construir (utilizar, etc.).**

**Por ejemplo: "Cuando construye (planos, formas geométricas, figuras según criterios) su nivel es... Utiliza el lenguaje adecuado..., etc.**

**Puede presentar el problema de la falta de costumbre y seguridad para el maestro ya que es un lenguaje muy "lejano" a los temas clásicos.**

### **Tercera lectura. Actividades relacionadas con el entorno que nos "sugieran" geometría**

El anterior análisis de los contenidos nos acerca a un planteamiento de la organización de las clases más general.

Parece que en según que actividades sea más funcional fijarse en aspectos como: saber utilizar, construir o leer planos, figuras o trayectorias que no en conceptos "sueltos", como decir si el gato está dentro o fuera del laberinto (por ejemplo).

Sin embargo, siendo un buen esquema de reflexión, no estamos seguros que la excesiva "distancia" a los contenidos clásicos de la Geometría no cree cierta inseguridad a los maestros en el aspecto de "cumplir programa".

Viendo este problema, parece que vale la pena acordarse de Alan Bishop y de sus planteamientos de organización de currículum que tengan en cuenta la multiculturalidad.

Por otra parte, este enfoque no sólo nos da un esquema consistente de organización del programa, sino que además hace hincapié en el tratamiento de la diversidad en los aspectos de diferencias culturales.

Esta propuesta fue desarrollada en una conferencia<sup>4</sup> del II congreso internacional sobre investigación en la Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas en 1987, y publicada en la Revista Enseñanza de las Ciencias.

En un apartado de la conferencia afirmaba (referido a la necesidad urgente de encontrar los caminos del currículum de matemáticas "multicultural"):

*"(hay) seis tipos de actividades relacionadas con el entorno en las que todos los grupos culturales participan y que por lo tanto son universales. Estas actividades son: Contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar".*

Para posteriormente, relacionar estas actividades con ideas importantes para las matemáticas.

Así pues, y después de la lectura anteriormente presentada, me pareció interesante aglutinar la propuesta anterior atendiendo a la clasificación presentada por este autor (restringida a los aspectos geométricos): **Localizar, Construir, Expresar y Medir.**

A primera vista entiendo que puede parecer más difícil para un maestro, pensar una programación organizada de esta manera. Sobre todo condicionados por la presión de asegurar unos contenidos. De hecho es cierto, pero hay tres motivos por los cuales me parece que vale la pena presentar este trabajo.

En primer lugar, la facilidad con la que estas actividades pueden ser incorporadas en trabajos por proyectos, o en organización de rincones en clase.

En segundo lugar la facilidad de producir interacciones que nos ofrecen tareas de este tipo, el trabajo en grupo, la discusión y la confrontación de ideas van íntimamente ligadas a esto.

Y el tercer motivo, ciertamente mucho más triste: la escasa importancia tanto social como escolar que realmente tiene la Geometría nos permite poder "jugárnosla" mucho más. Así pues la clasificación de los contenidos quedaría de ésta manera:

#### **Localizar**

Bajo este concepto incluimos los objetivos que responden a acciones identificadas en el DCB asociadas a los verbos **Describir, representar, interpretar, elaborar, y leer**, referidos básicamente a aspectos de organización del plano en lo referente a los aspectos geométricos, y a lectura de

4. Bishop A.J. "Aspectos sociales y culturales de la educación matemática". Enseñanza de las Ciencias 1988, 6(2), 121-125.

## LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA ETAPA INFANTIL

**María Antonia Canals**

*Grupo Perimetre. Girona*

### **Qué es hacer Matemáticas en la Etapa Infantil**

Podríamos preguntarnos, y de hecho mucha gente se pregunta, qué significa en realidad hacer Matemáticas con niños de 0 a 6 años. Parece muy generalizada la idea de que antes de que aparezca la capacidad de hacer operaciones con los números, en realidad la actividad matemática es nula.

El hecho de dudar de la posibilidad de una verdadera actividad matemática para los niños menores de 6 años, nos lleva a un replanteamiento más radical sobre qué entendemos por Educación Matemática como tal, independientemente de la edad a la que queramos referirnos.

No quiero definir aquí qué es hacer Matemáticas en la escuela. Otros lo han hecho ya, y mucho mejor de lo que yo lo haría. Sólo quiero subrayar el carácter general de la actividad escolar que creo más relevante para que ésta pueda calificarse de matemática, contemplado desde la óptica de la Etapa Infantil, ya que estoy convencida de que ésta nos ayuda enormemente a llegar al fondo de la cuestión.

Hacer Matemáticas es desarrollar el hábito de "pensar matemáticamente", es decir, de mirar el mundo con ojos matemáticos, con ojos que observan su entorno y en él descubren las cantidades, las formas, la posición y las medidas de las cosas, y después interiorizan estas observaciones, las relacionan entre sí, las generalizan, y en consecuencia, son capaces de interpretar el mundo que nos rodea con mayor profundidad y de solucionar situaciones inéditas que en él se presentan. Naturalmente éste es un proceso personal, que cada persona humana realiza a lo largo de su vida, y de una forma proporcionada a sus capacidades y a su situación de cada momento.

Entonces, ¿por qué no habría de realizarlo igualmente un niño o una niña menor de 6 años? Precisamente, los niños a esta edad viven casi totalmente de la observación de lo

que les rodea, en el sentido de que de ella lo aprenden todo, y el proceso de interiorización de lo observado es en ellos más intenso, más rápido e incluso más eficaz que en nosotros.

Sin embargo, cuando nos fijamos no en el proceso, sino en los resultados concretos, que evidentemente son muy distintos en el niño y en el adulto, tendemos a calificar de "matemáticos" únicamente los de éste último, sin caer en la cuenta de que esta valoración es muy superficial. En cambio, si profundizamos más en lo que constituye realmente el proceso personal de la educación matemática, podemos afirmar que "pensar matemáticamente" es tan propio de los pequeños como de los mayores.

En efecto, los niños y niñas, a la edad que corresponde a la Educación Infantil, son capaces de observar su entorno y establecer relaciones a partir de las cualidades de los objetos. Precisamente el diseño curricular es clarísimo a este respecto cuando afirma cuál es la base del pensamiento lógico-matemático del niño. Como veis, aquí tenemos pues todo un campo para la Educación Matemática en estas edades.

Pero no es éste el único campo. Los niños también observan las cantidades y las relacionan: empiezan a saber donde hay más y donde hay menos... y aun más concretamente, donde hay dos cosas, o ninguna, o muchas... y como consecuencia de la interiorización de estas observaciones y relaciones cada vez más perfeccionadas van construyendo nada menos que la noción de número, una noción casi gigante para una corta edad. Y también, desde que aprendieron a andar, y no independientemente de ello, relacionan posiciones, formas y magnitudes en el espacio.

Otras muchas cosas hacen y aprenden los niños de 0 a 6 años pero he querido citar estos tres grandes campos, que son ya clásicos cuando hablamos de la Matemática, como para indicar que esta ciencia (que como veis aquí más que "ciencia" debería llamarse "vida"), no sólo no es ajena al desarrollo normal de la persona en las primeras edades, sino que le es consubstancial.



objetivos de la Reforma, o no es funcional o es inútil para los niños. No querría dar esta impresión. Éste es el comentario hecho sobre bastantes de los textos actuales, que bajo la apariencia de explicar contenidos clásicos, en el fondo, ni tan siquiera cumplen este papel de manera correcta.

Sirva de ejemplo cualquiera de los libros de P. Puig Adam, adecuados al antiguo plan de Bachillerato. Cada vez que tengo que plantear una actividad de Geometría sea en el esquema de organización que sea, los consulto (¡una vez más!) y a veces, sólo haciendo fotocopias sale la mejor lección que podría imaginar.

Se puede elegir cualquier organización a la hora de decidir los contenidos estructuradores, pero sería interesante que:

- **Nos sintamos cómodos, sin presiones curriculares o de “reformatis”**
- **Los criterios de selección respondan realmente a una intencionalidad**
- **El día que no sepamos el motivo de una actividad más vale no hacerla**
- **Tener un libro de Puig Adam bajo la almohada.**

## ACTIVIDADES

Puede parecer que la propuesta necesite de mucha más información para llevarla a cabo. Sin embargo, desde hace mucho tiempo, las propuestas presentadas en artículos, libros, jornadas, etc. están en la línea del esquema presentado. Trabajar con el tangram, utilizar espejos, construir figuras del espacio con el polidróno, hacer mosaicos, etc.,

son actividades presentadas desde hace muchísimo tiempo por compañeros que no cito ya que la lista sería interminable.

### ANA, EL TANGRAM, LA AMIGA ÍNTIMA Y TELEFÓNICA

La maestra ha pedido a sus alumnos que para el día siguiente traigan a clase un tangram, construido sobre un cuadrado de 15x15 cm y les ha hecho el croquis en la pizarra.

Ana, al llegar a casa, abre su carpeta y observa con contrariedad, que el croquis no aparece por ninguna parte. Decide llamar a Julia para que le dicte por teléfono la estructura del tangram.

Julia se pone al teléfono, coge su tangram e intenta describir a su compañera la disposición de las piezas.

No os cuento la bronca que los padres de Ana le pegaron el día que llegó la factura del teléfono, ni la cara de asombro que puso la maestra cuando vio el supuesto tangram construido, ni la encendida discusión “preadolescente” que hizo que Ana y su mejor amiga estuvieran tres largos días sin hablarse.

Seguramente todo esto sucedió debido a que seguramente Julia no “sabía” geometría, y que en su libro de matemáticas abierto por la página 156 y acompañando a un dibujo de dos paralelas cortadas por una secante se leían palabras como “opuestos por el vértice, correspondientes, alternos internos...”

Julia existe, tiene 11 años, el libro también, acaba de cumplir 9 meses... ■

primeros años de la infancia. Hasta aquí, todo muy bien. Pero después de este primer intento tan loable, parece que se perdió el impulso, y se prosiguió colocando cada asignatura en alguno de los tres bloques citados. Y así volvemos a estar como antes: las Matemáticas, las mismas de siempre, sólo que metidas dentro del tercer bloque, junto con los distintos "lenguajes": verbal, escrito, gestual, plástico y musical.

Todo esto me parece un primer paso importante, pero insuficiente en la línea de facilitar la interdisciplinariedad y la relación entre los diversos aprendizajes. Por otro lado, pienso que todo lo que las Matemáticas tienen de medio de representación y comunicación, es decir de lenguaje, que es mucho, no lo tienen sólo en la etapa Infantil, sino también, y casi diría en mayor grado, en las etapas siguientes. Paradójicamente, en la de Primaria se insiste muy poco en este aspecto, y se destaca mucho el aspecto funcional, en relación con el medio; en cambio en Infantil, no se encuentran elementos matemáticos en el segundo bloque, que es el de conocimiento del medio. Estas incongruencias son lamentables porque vienen a acentuar la ruptura ya demasiado grande entre las dos etapas.

Creo que debemos dar un paso más y plantearnos con mayor profundidad donde está el verdadero lugar de las Matemáticas en este nuevo planteamiento, a partir de su papel y de sus objetivos en la Educación Infantil, tal como acabamos de describirlos.

### **Otras áreas de conocimiento relacionadas con la Educación Matemática. El sentido de la globalización**

Las Matemáticas comprenden un conjunto de actividades muy diversas unas de otras: pensemos, por ejemplo, en lo distinto que es para un niño de 5 años, empezar a comprender los números o bien situarse en el espacio. Por esto, el papel que tienen en la educación es múltiple.

Al formular los objetivos hemos hablado ya del aspecto formativo, es decir, de la organización progresiva del pensamiento lógico, como aspecto fundamental a estas edades. A mí me parece que las actividades y juegos en que se concretan las relaciones lógicas deberían contemplarse dentro del bloque primero por lo que tienen de afirmación de la autonomía personal. Pero también es cierto que con estas actividades se inicia el uso de unos primeros diagramas sencillos, signos de afirmación y de negación, etc., que no son más que un lenguaje que permite expresar las distintas

estructuras y relaciones observadas; estamos pues, en el tercer bloque.

En el terreno de las cantidades, podemos decir que tanto los números como el cálculo y las medidas, tienen un gran papel en la comunicación de la información entre las personas; es evidente que aquí hay un gran componente de lenguaje matemático, que nos sirve para interpretar y describir los fenómenos cuantitativos de nuestro mundo. Así, esta parte de las Matemáticas tiene su lugar en el tercer bloque, el de representación y comunicación. Pero también es cierto que los niños pequeños están todavía muy lejos de dominar este lenguaje, y que tanto para ellos como para nosotros, la primera noción de número o cantidad sale de la realidad misma y nos ayuda a conocerla mejor; por tanto debería estar también contemplada en el segundo bloque, de conocimiento del medio.

Finalmente la Geometría no puede separarse del conocimiento del medio. Yo no puedo concebirla como un lenguaje, sino que creo que el lenguaje de la Geometría es la Expresión Plástica. El espacio es el primer medio que el niño explora desde que nace, y muy particularmente desde que anda, y la Geometría a estas edades consiste en el progresivo conocimiento y organización mental del mismo. Por esto me parece evidente que esta parte tan importante de las Matemáticas no puede estar en otro bloque temático que en el segundo.

Resumiendo, esta visión de lo que son las Matemáticas en la Etapa Infantil, daría como resultado el repartirlas entre los tres bloques del actual diseño curricular. Esto serviría para que el esfuerzo iniciado y explícitamente proclamado por la reforma, de romper el esquema de las clásicas "asignaturas", se fuese convirtiendo en alguna cosa real y consecuente, y no quedase únicamente en palabras.

Y, sobre todo, esto podría permitirnos enfocar el tratamiento de las Matemáticas en la escuela, no como una materia que forma un todo inamovible y separado de las otras materias, sino como un conjunto de diversas áreas de conocimiento, estrechamente enlazadas con otras que provienen de otros campos del saber, pero que confluyen todas, tanto en el entorno y en la vida de los niños y niñas, como en el mismo acto del aprendizaje. Pienso que este planteamiento es una base para la globalización, y al mismo tiempo es indispensable para que el acercamiento de los pequeños al campo de las Matemáticas tenga un sentido realista y llegue a ser un proceso humanizador ■

### Objetivos generales y específicos de la etapa. Aspectos formativo y funcional

Os recomiendo leer y analizar detenidamente los "objetivos de la enseñanza de las Matemáticas", declarados por la Asociación de Matemáticas de América (del Norte), en 1990.

Os aseguro que leerlos es realmente un placer. A parte de ello, yo los veo tan íntimamente ligados al desarrollo integral de la persona desde su nacimiento, que no puedo dejar de considerarlos como básicos para todas las etapas, y por consiguiente también para la que aquí nos ocupa. En efecto, los pequeños los cumplen cuando dan los primeros pasos en el conocimiento del espacio y cuando ponen los cimientos del futuro conocimiento de los números. Por esto creo que como objetivos generales básicos no hace falta añadir ninguno más.

Para definir unos objetivos específicos de la Matemática en Infantil, precisamos poner el acento en las características del "pensar matemáticamente" que son más propias de esta etapa. Hagamos el intento de formularlos.

En el párrafo del D.C.B. que antes he citado, vemos que destaca como objetivo prioritario en Infantil el "desarrollo del pensamiento lógico-matemático del niño". Evidentemente este aspecto, que suele llamarse "formativo", siempre es importante, pero en la etapa Infantil adquiere quizás un papel más relevante, porque prepara la maduración de diversas capacidades básicas, como son el inicio del pensamiento lógico, la operatividad y la noción de cantidad o número propiamente dicho. Me alegra ver que las orientaciones del diseño curricular, no sólo no olvidan este aspecto, sino que para los más pequeños, incluso lo priorizan. En relación con él, podríamos expresar de forma más concreta los objetivos siguientes:

- "Establecer relaciones de clasificación, seriación y ordenación entre objetos atendiendo a las distintas cualidades de los mismos perceptibles por los sentidos".
- "Identificar objetos y grupos de objetos por afirmación o por negación de algunas de sus cualidades".
- "Reconocer los elementos inicial y final en las situaciones de cambios de cualidades".

Pero al mismo tiempo, creo que no hay que olvidar otros objetivos derivados del aspecto "funcional", es decir, de la estrecha relación entre la Matemática y la realidad del entorno, que es el aspecto que la actual reforma de la enseñanza pone más en relieve en el aprendizaje de las Matemáticas. Podríamos expresar algunos de la manera siguiente:

"Establecer relaciones cuantitativas (de más que, menos que, y tantos como), entre distintas colecciones de objetos del entorno, atendiendo a la cantidad de elementos, y entre

distintas magnitudes, atendiendo a medidas intuitivas y prácticas".

- "Efectuar experimentalmente primeras operaciones de contar, añadir, quitar, componer y descomponer cantidades discretas de elementos, asociando los resultados a números dígitos".
- "Situar los objetos en el espacio, respecto a uno mismo y entre sí, teniendo en cuenta todas las relaciones topológicas básicas y las nociones de líneas recta y superficie plana".
- "Observar formas sencillas de figuras de dos y de tres dimensiones, atendiendo a las propiedades antes citadas, y reconocerlas en los objetos usuales del entorno."

Finalmente, ya que en el "pensar matemáticamente" de estas edades, destaca el proceso de interiorización de todo lo observado, y teniendo en cuenta los principales procedimientos que favorecen este proceso, podríamos añadir los objetivos siguientes:

- "Estimar cantidades previamente a cualquiera acción de contar".
- "Representar gráficamente con dibujos sencillos, situaciones en que intervienen cantidades".
- "Representar plásticamente (con pintura y materiales en volumen) las relaciones espaciales observadas, y las propiedades topológicas de las figuras y cuerpos".
- "Expresar verbalmente las acciones realizadas manipulativamente y las relaciones de todo tipo observadas".

Evidentemente estos objetivos tendrán que desglosarse en otros mucho más detallados, pero aquí no es el caso. Y dejamos *expresamente* los que se refieren al dominio de las técnicas, para el primer ciclo de Primaria.

### Reflexiones sobre el actual diseño curricular

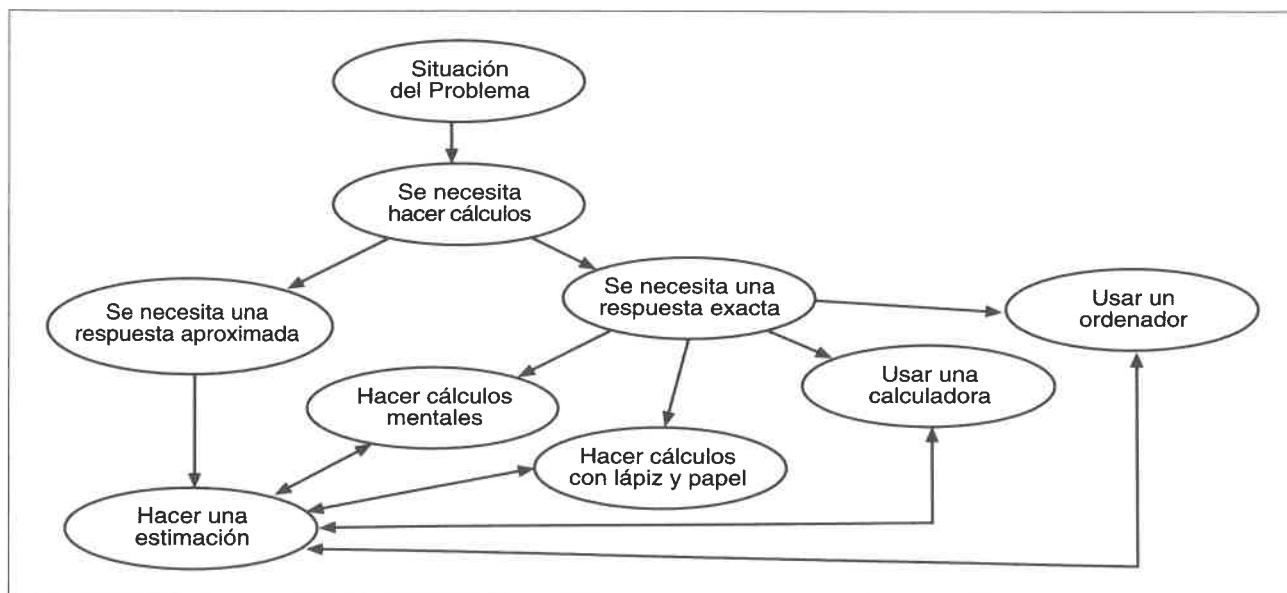
El diseño curricular de la reforma en la etapa Infantil, ha querido romper con el clásico esquema de las asignaturas, reuniendo las distintas áreas del saber en una nueva forma alrededor de tres bloques temáticos, que son:

- 1) conocimiento de sí mismo y autonomía personal;
- 2) conocimiento del medio;
- 3) representación y comunicación.

Creo que esto se ha hecho con la intención de terminar con la separación entre las distintas materias, tan artificial en los

escritos y con calculadoras. Que los algoritmos escritos estándar que vienen enseñándose en las escuelas son el resultado de un largo proceso de depuración de técnicas para realizar las operaciones, pero que hubo otros antes y hay otros en la actualidad. El considerar el algoritmo de la resta, de la división, etc. en singular frente a algoritmos para restar, multiplicar, dividir, etc., es posiblemente la razón de que tantos niños confundan algoritmo con operación, de modo que aprender a sumar por ejemplo, no es saber cuando hay que sumar, sino saber realizar sin fallos el algoritmo de la suma. Carpenter y Moser (1979) señalaban algo que todos hemos podido comprobar, esto es, que se ha cargado el acento (y sigue cargándose) en que los niños adquieran destreza y soltura en las rutinas de cálculo escrito, independientemente de si comprenden o no los fundamentos de tales técnicas.

Los algoritmos del tipo que fueren se enseñan y aprenden para facilitar los cálculos y los cálculos no debemos olvidar que se realizan para resolver problemas. Esto es, la enseñanza y el aprendizaje del cálculo se justifican por su necesidad para resolver problemas que es el fin. Sin embargo en muchas clases de Primaria, se realizan un montón de cálculos solamente para adquirir "práctica" y muchos problemas se les presentan para que realicen cálculos. Con ello se está perdiendo el propósito de los cálculos desde que el hombre empezó a calcular: hacernos capaces de resolver aquellos problemas que era necesario resolver. Y ante un problema, en lugar de acudir inmediatamente a los algoritmos de lápiz y papel, casi sin pensar, los alumnos han de ser capaces de decidir si tienen que efectuar un cálculo y si necesitan una respuesta exacta o aproximada. Conveniría que cada resolutor de problemas se parase a considerar el camino más conveniente a tenor de lo expresado en el siguiente cuadro:



Estándares Curriculares y de Evaluación USA.

### ALGORITMOS ESCRITOS PARA EL CÁLCULO

Los algoritmos escritos que se vienen enseñando en las escuelas durante el último siglo se les llama estándar porque los usa todo el mundo de la misma manera, sean cuales sean los números. Son el resultado de un largo proceso histórico de búsqueda de los matemáticos para conseguir algoritmos rápidos y seguros. Los defensores de estos algoritmos dicen que "un algoritmo es bueno, si permite hacer algo sin necesidad de tener que pensar acerca del significado de cada paso". Cuando uno de estos algoritmos se introduce a edad muy temprana, se da prioridad al automatismo en detrimento de la comprensión. ¿Cuántas programaciones hemos visto que contemplan eso de conseguir automatismos de ...? El automatismo se convierte en maquinismo: no tener que pensar en lo que se hace, manejar reglas que no se entienden, etc. En el automatismo, el mejor sistema es la estandarización: todos por el mismo camino y de la misma manera.

Plunkett señala como características de los algoritmos escritos estándar las siguientes:

**Escritos.** La operación permanece en el papel y se puede corregir.

**Estandarizados.** Se puede comprobar que todo el mundo hace lo mismo.

**Contraídos.** Hay pasos ocultos y se incluye la distributividad y la asociatividad. Ejemplos:

- El llevarse en cada una de las columnas de la suma y en cada uno de los productos parciales de la multiplicación.
- El prestar o llevarse en la resta.
- Realizar los cálculos intermedios de memoria en la división.

## CÁLCULO MENTAL, ESCRITO Y CON CALCULADORAS. ¿CÓMO VAMOS A CALCULAR PARA EL AÑO 2000?

Juan Emilio García Jiménez

C.E.P. de Villarrobleto. Albacete

**“Dígame vuestra merced: ¿Cuánto me dará por cada azote que me diere?**

**Toma tú el tiento a lo que llevas mío, y pon el precio a cada azote.**

**Ellos —respondió Sancho— son tres mil y trescientos y tantos; dellos me he dado hasta cinco: quedan los demás; entren entre los tantos estos cinco, y vengamos a los tres mil y trescientos, que a cuartillo cada uno, que no llevaré menos si todo el mundo me lo mandase, montan tres mil y trescientos cuartillos, y son los tres mil, mil y quinientos medios reales, que hacen setecientos y cincuenta reales; y los trescientos hacen ciento y cincuenta medios reales, que vienen a hacer setenta y cinco reales, que juntándose a los setecientos y cincuenta, son por todos ochocientos y veinticinco reales. Estos separaré yo de los que llevo de vuestra merced, y entraré en mi casa rico y contento, aunque bien azotado”.**

*El Quijote, II, 71*

**E**s muy posible que en la época de nuestro amigo Sancho las habilidades de cálculo que pudieran mostrar algunas gentes fuesen de tipo mental y esto que ahora a nosotros nos cuesta bastante, fuese en la época por su práctica cotidiana algo natural en muchas gentes. Mucho ha llovido desde entonces y en nuestros días cabe constatar cómo la práctica instruccional durante al menos el último siglo de los algoritmos escritos estándar, ha relegado el cálculo mental a la más mínima expresión. A pesar de que la mayor parte de las operaciones de cálculo que necesitamos hacer en la vida diaria requieren del cálculo mental, muy pocas personas demuestran habilidades suficientes para realizarlas. A muchos nos ha ocurrido que en el restaurante a la hora de repartir el importe de la factura entre varios amigos, sale aquello de ¡a ver, los de matemáticas! o ¡saca la calculadora! Observamos por otra parte que algunos niños, hijos de vendedores ambulantes, demuestran unas extraordinarias destrezas para las matemáticas mentales a pesar en muchos casos de su falta de escolaridad.

Martin Gardner se refiere al calculista profesional Zarah Colburn en los siguientes términos: “*Cuando se le pedía multiplicar 21734 por 543, decía inmediatamente 11.801.562. Al preguntarle cómo lo había hecho, explicó que 543 es igual a 181 veces 3 y como es más fácil multiplicar por 181 que por 543, había multiplicado primero 21734 por 3 y luego el resultado por 181*”.

Isaac Asimov en su libro *La edad del futuro I*, publica un capítulo titulado “La sensación de poder” en el que se cuenta el insólito don de un hombrecillo (Myron Aub) que era capaz de calcular con procedimientos mentales y escritos, sin necesidad de computadoras. Produce “sensación de poder” el dominio de ciertas técnicas o habilidades que los demás no poseen en un mundo mucho más allá del año 2.000. El autor se pregunta por las consecuencias que tendrá para una sociedad cada vez más y más computerizada, el olvido de la simple aritmética. Bien está el que aparezcan estas “vendas” antes de que se ocasionen las heridas, pero la promoción de las calculadoras como herramientas didácticas en las clases de matemáticas lleva aparejado, según el parecer de muchos de nosotros, una **revalorización de la estimación y el cálculo mental** y su práctica sistemática en las aulas.

En una reciente visita al aula de un compañero, pregunté a los niños cuánto sería  $100 - 87$ . Cuando respondieron que 13, les pedí que me explicasen cómo lo habían hecho. Uno de ellos respondió que  $87 + 10$  son 97 y 3 más hacen 100. Otro dijo:  $87 + 3$  son 90 y con 10 más tenemos 100. Un tercero explicó que él había hecho  $100 - 80 = 20$  y después a 20 le quitaba 7. Da que pensar el hecho de que estos niños, como tantos otros, hayan dedicado tantas horas de clase en Primaria (algunos estiman que casi los  $2/3$  del tiempo de matemáticas) practicando una y mil veces los algoritmos escritos estándar para que a la primera ocasión que se les presenta, realicen sus cálculos de modo natural a “su manera”.

Como es bien sabido se entiende por algoritmo al procedimiento mecánico secuenciado que seguido paso a paso nos lleva a resolver la situación planteada. Conviene afirmar antes de seguir adelante que hay algoritmos mentales,

capacidad para relacionar, comparar y seleccionar datos a la hora de operar. Y en diversos lugares, señala el mencionado currículo la necesidad de favorecer el desarrollo de estrategias personales de cálculo mental.

El cálculo mental debería introducirse antes de que los niños dominen los algoritmos escritos estándar. Al hacerlo después, lo que hacen es que realizan los cálculos como si estuvieran escritos, pero "de cabeza". Si planteamos matemáticas mentales después de los algoritmos escritos harán por ejemplo  $36+48$  pensando 8 y 4 hacen 14; ponemos el 4 debajo y llevamos 1, luego hacemos  $3+4$  son 7 y 1 que llevamos hacen 8. total 84. Es más fácil calcular así:  $30+40=70$ ;  $8+6=14$ ;  $70+14$  hacen 84. O bien  $36+40$  hacen 76 y 8 más son 84. Para hacer  $8 \times 45$  pensamos así: 8 cuarentas dan 320 y 8 cincos son 40, en total sale 360. Si se hace de esta segunda manera, estamos aplicando además las propiedades asociativa y distributiva y consideramos a los números por sus decenas y unidades.

Algunas características del cálculo mental, dignas de consideración por las ventajas que comportan para el niño, a la hora de desarrollar su comprensión del cálculo. Los algoritmos mentales son según Plunkett:

1. **Fluctuantes** y difíciles de fijar.
2. **Variables.** De entre 80 niños, Jones registró 16 métodos diferentes para resolver  $83-26$ .
3. **Flexibles.** Se pueden adaptar a los números con los que hay que operar. Por ejemplo, se emplean diferentes métodos para las siguientes restas:  $83-79$ ,  $83-51$  y  $83-7$ .
4. **Activos.** Se hace una elección del método a utilizar aunque no siempre sea consciente.
5. **Holísticos.** Trabajan con números completos:  $4 \times 35 = 2 \times 70 = 140$ ;  $4 \times 28$ :  $4 \times 30 = 120$ ,  $-8$ , 112.
6. **Constructivos.** Desde la pregunta hacia la respuesta. Ejemplo:  $37+28$ , 37, 47, 57, 67, 65.
7. **No están diseñados para memorizarlos.** No obstante pueden recordarse si se desea.
8. **Necesitan la comprensión del proceso completo.** Un niño que realiza una operación mental, entiende lo que hace. Su uso desarrolla la comprensión.
9. **Iconicos.** O se refieren a un icono como la representación de un número por una línea o un cuadrado, o se fundan en la enumeración serial, como en  $32+21$ , 32, 42, 52, 53.
10. **Frecuentemente dan una aproximación rápida a la respuesta correcta.**
11. **Limitados.** No son para aplicarse a operaciones de dificultad como  $269 \times 23$ .

Desde luego estos métodos o estrategias de cálculo mental son los que debemos apoyar si lo que deseamos es el uso y el desarrollo de la comprensión del número y de las operaciones a realizar con ellos. La tesitura a la que nos

tenemos que enfrentar los profesores de matemáticas es la de dedicar tiempo y esfuerzo a los algoritmos escritos por el orden, la eficacia y porque es como se ha enseñado durante los últimos 100 años o bien las estrategias personales de cálculo mental por su comprensión, independencia y porque es lo que realmente usa la gente.

Para favorecer la madurez de cálculo mental en nuestros alumnos debemos superar esa práctica frecuente en muchas clases de dedicar unos minutos cada día a la práctica de cálculos mentales de modo aislado. Debemos generar redes conceptuales partiendo de hechos básicos.

Por ejemplo:  $6 + 7$ ,  $60+70$ ,  $600+700$ ,...  
 $4 \times 15$ ,  $14 \times 15$ ,  $24 \times 15$ ,  $34 \times 15$ ,...  
 $6 \times 7$ ,  $6 \times 70$ ,  $600 \times 700$ ,  $0'6 \times 700$ ,...  
 ¿Cómo sumarían  $1950 + 157$ ?

Estos procedimientos sugieren interesantes regularidades y ayudan a desarrollar el sentido numérico.

Otros ejemplos de actividades son las que se pueden realizar a partir de la tabla del 100:

- Sumas y restas mentales de decenas y unidades.
- Analizar las múltiples relaciones que se descubren en ellas.
- Contar de 10 en 10 por columnas hacia adelante y hacia atrás.
- Seguir mentalmente direcciones como "a partir del 16 sigue dos filas hacia abajo, luego tres lugares a la derecha, ¿qué número está en esa posición?".

## SUGERENCIAS

- Realizar sesiones diarias de cálculo mental y en general ante cualquier actividad plantear como hábito la estimación previa.
- Utilizar juegos matemáticos como excelentes provocadores del cálculo mental y la estimación.
- Discutir en clase las estrategias personales de cálculo mental. En primer lugar aquellas que sean poco correctas y desde luego ponderar las más creativas u originales.
- Identificar situaciones cotidianas que requieren de la estimación y el cálculo mental. Si los alumnos ven que resultan destrezas prácticas, se estimularán para mejorar.
- Reflexionar sobre los intervalos razonables en la estimación de acuerdo con cada situación.

Si desarrollamos bien con los niños las matemáticas mentales, puede incluso favorecerse los métodos escritos no estándar para las operaciones.

**Automáticos.** Se pueden enseñar y practicar sin necesidad de entender lo que se hace.

**Simbólicos.** Las operaciones se hacen por manipulación de símbolos, sin referencia a problemas del mundo real.

**Generales.** Funcionan con cualquier número grande o pequeño.

**Analíticos.** Los números tienen que "romperse" en dígitos (decenas, unidades,...).

**Favorecen la pasividad cognitiva o suspenden la comprensión.**

Los algoritmos de lápiz y papel están en crisis, al menos de la manera en que han venido enseñándose hasta ahora. Miguel de Guzmán escribía en 1989: *"Hasta hace poco tiempo era frecuente en nuestras escuelas dedicar gran energía y largo tiempo a rutinas tales como la división de un número de 6 cifras por otro de 4. Y también a la extracción de la raíz cuadrada de un número de 6 cifras con tres cifras decimales"*.

¿Para qué sirve tanto esfuerzo dedicado a esto? El entrenamiento en los algoritmos escritos estándar era útil socialmente hace 30 ó 40 años. Si uno lo hacía bien, podía conseguir un buen empleo en cualquier empresa de la época. La rapidez y seguridad en el manejo de los números grandes en operaciones a mano, no es hoy un valor apreciado.

E. Maier en un famoso artículo titulado *¿Destrezas matemáticas básicas o destrezas para la supervivencia escolar?* se planteaba ya en 1987 si algunos procedimientos de lápiz y papel para hacer cálculos como  $136,7 \times 56,8$  ó  $7584:354$  podían ser considerados como básicos o eran simplemente destrezas de supervivencia en la escuela. Para saber si unas determinadas destrezas son o no básicas, podemos preguntar a amigos o familiares no vinculados a la escuela. Si ninguno ha utilizado una determinada destreza en los últimos meses, entonces es que se trata de una destreza sólo relevante para tener éxito en la escuela.

Para evitar la identificación algoritmo-operación, deberíamos hacer que nuestros alumnos lleguen mediante un proceso pausado a los algoritmos escritos estándar. Antes de eso, deberían utilizar tantos algoritmos escritos diferentes como puedan ser realizados: por ejemplo utilizar todos los posibles métodos de resta.

El ya citado M. Gírling afirma respecto de los algoritmos escritos: *"No voy a indicar que los algoritmos escritos no deberían enseñarse, pero si diré que sóloamente deberían enseñarse como parte del arsenal de técnicas de que disponemos para ayudar a la comprensión de los números y no porque sean útiles"*. Y Stuard Hillary (1986) se cuestiona lo que va a quedar de una parte tan enraizada en el currículum de matemáticas como es la de los algoritmos estándar de las

operaciones aritméticas. El informe Cockcroft plantea la pregunta sobre cual va a ser el balance entre cálculo mental, escrito y con calculadora. Fuera de la escuela, la pregunta —señala el informe—, ya ha sido contestada: **mentalmente cuando se pueda, con calculadora cuando no.**

La presión de los "abolicionistas" va en aumento, de manera que hemos de plantearnos algunos cambios que pueden ir en el sentido "constructivo" de nuestro currículo. Construir los algoritmos usuales puede hacer comprender que una tarea matemática puede ser realizada de diferentes formas.

He aquí algunas sugerencias para la enseñanza/aprendizaje de estos algoritmos:

- Empezar por un contexto problemático.
- Utilizar la manipulación, la exploración y el descubrimiento a partir del manejo de ábacos, regletas, bloques multibase, etc.
- Emplear varios algoritmos para cada operación y finalmente el estándar. A medida que vayan entendiendo el significado de números y operaciones, los alumnos deberían inventar sus propios algoritmos y discutirlos, compararlos y evaluarlos con sus compañeros y con el profesor. Tienen que pensar cómo funcionan los diversos algoritmos y cómo se relacionan con el significado de la operación y los números utilizados.

## ESTIMACIÓN Y MATEMÁTICAS MENTALES

Gran parte de los cálculos que realizamos en la vida cotidiana necesitan de la estimación. Se ha establecido que más del 80% de los usos matemáticos en la vida real de los adultos, tienen que ver con cálculos hechos mentalmente. La estimación supone el producir una respuesta suficientemente próxima a la real para poder tomar decisiones. El cálculo mental es el proceso de producir una respuesta exacta sin ninguna ayuda calculatoria externa. La estimación es útil antes de efectuar un cálculo para tener una idea aproximada de la respuesta:  $35 + 56$  dará un resultado próximo a 90. La estimación también resulta útil después de efectuar un cálculo para juzgar "lo razonable" del resultado obtenido:  $26 \times 45$  no puede dar 2150. La estimación está relacionada con la resolución de problemas y con el cálculo y se mejora naturalmente con la práctica reiterada y de forma sistemática.

Respecto del cálculo mental cabe señalar que está relacionado con la mayor parte de las operaciones que se necesitan en la vida diaria que, dicho se de paso, son las más fáciles. El currículo de Matemáticas para Educación Primaria señala en las "Orientaciones específicas" que el cálculo mental desarrolla: la concentración, la atención, el interés y la reflexión para decidir y elegir, la confianza en sí mismo, la flexibilidad en la búsqueda de soluciones y la



- **Planteamiento y resolución de problemas.** En primer lugar la calculadora nos permite abordar problemas con datos reales, problemas que hasta ahora se evitaban por la dificultad operatoria que suponían los números de esos datos. La calculadora nos permite realizar esos tediosos cálculos con rapidez y centrar toda nuestra atención y esfuerzo en la resolución del problema. En los problemas hay mucho que hacer antes y mucho después, como señala Fielker, la calculadora sólo hace los cálculos.

### ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO SOBRE EL AÑO 2000

En el pasado, tal vez porque teníamos demasiados contenidos que enseñar y poco tiempo, no se ha trabajado suficientemente la comprensión. Puesto que comprender resulta más lento y difícil, se han venido enseñando muchas matemáticas elementales de manera mecánica. El futuro en la enseñanza y aprendizaje del cálculo pasa por situar el énfasis en el cálculo mental puesto que así se mejora la aptitud numérica que se necesita para entender la aritmética, manejar calculadoras y en general para desenvolverse mejor con los números.

Hasta ahora se ha venido confundiendo conceptos de operaciones con algoritmos y éstos se han identificado

exclusivamente con los escritos estándar. Desde esta premisa, las calculadoras son vistas como un peligro. Y esto no es así. Los niños necesitan comprender la naturaleza de los números y procedimientos de cálculo con ellos y para la mayoría de las operaciones que necesitamos hacer en la vida diaria, los métodos de cálculo son mentales. En un artículo justamente famoso, Michael Girling escribe: "No es necesario que enseñemos, al menos a todos los alumnos, los métodos refinados de las divisiones largas".

El hecho de que pongamos el énfasis en las matemáticas mentales no implica que los niños realicen menos operaciones en la escuela, es seguro que harán más. Y sobre todo, lo que es importante es que lograremos que adquieran una mejor comprensión de los números en el sistema decimal de numeración y de los conceptos de las operaciones con ellos. Se trata de que los niños usen sus propios algoritmos mentales o como señala nuestro nuevo currículo de Primaria: "estrategias personales de cálculo mental". Siempre será mejor que la aplicación repetida una y mil veces de algoritmos escritos estándar que no comprenden. Si las matemáticas mentales ocupan el papel relevante que les corresponde en la enseñanza/aprendizaje del cálculo, la posición de las calculadoras será el complemento ideal para mejorar la adquisición de conceptos y para las operaciones más complejas ■

#### MERECEN MENOS ATENCIÓN

- Memorizar reglas y algoritmos.
- Practicar con tediosas operaciones de lápiz y papel.
- Encontrar formas exactas para respuesta.
- Memorizar procedimientos como la multiplicación en cruz, sin entenderlos.
- Practicar el redondeo de números fuera de contexto.

#### MERECEN MÁS ATENCIÓN

- Desarrollar el sentido numérico.
- Desarrollar el sentido operacional.
- Crear algoritmos y procedimientos.
- Usar la estimación tanto para la resolución de problemas como para comprobar lo razonable de los resultados.
- Explorar las relaciones entre representaciones de números naturales, fracciones, decimales y sus operaciones.
- Desarrollar estructuras conceptuales para razón, proporción y porcentaje.

**Resumen de cambios que deberán producirse tanto en el contenido como en dónde se ponga el énfasis en los aspectos de cálculo y operaciones en Primaria (Estándares USA).**

### CÁLCULO Y CALCULADORAS

Por fin después de más de 20 años de existencia de las calculadoras de bolsillo, parece llegado el momento en que su utilización se va generalizando por las aulas de Educación Primaria. En esta época se puede hacer fácilmente con una calculadora que cuesta lo mismo que un par de kilos de plátanos, todo aquello que hemos venido enseñando tradicionalmente en las clases de matemáticas. Y en este momento de implantación de una reforma de la educación en general y de las matemáticas en particular, se están tomando decisiones en todos los centros sobre lo que es importante en el curriculum de matemáticas. La presencia de la calculadora en las clases ya no es discutible, ahora podemos discutir sobre cómo, cuando y para qué utilizarla. Para aquellos que aún muestren cierta resistencia a la misma, habrá que señalar que la calculadora no reemplaza la comprensión numérica. Es más, la comprensión de los números y el significado de las operaciones que con ellos realizamos, resultan de primera necesidad para un uso adecuado de la calculadora.

Como acertadamente señalan F. Hernán y M. Carrillo es aceptable que nos preguntemos ¿Por qué? y ¿Para qué? sobre el uso de las calculadoras, pero no es de recibo si alguien junta las preguntas en una sola ¿Por qué-para qué? Se revela una postura de rechazo a las calculadoras apoyada en una práctica didáctica implícita:

- desproporción entre la atención dedicada al cálculo escrito y al mental (de manera que éste se practica poco o nada);
- enseñanza unívoca de los algoritmos escritos de lápiz y papel, repetidos una y otra vez hasta el hastío, si es preciso.

Son muchas las autorizadas fuentes internacionales (Informe Cockroft, Informe Prism, comunicados del NCTM, "Las matemáticas en la década de los 90" de Valencia y Kuwait,...) que recomiendan el uso habitual de las calculadoras en las clases de matemáticas como herramientas didácticas. No disponemos de espacio suficiente para apuntar siquiera de forma resumida los argumentos de todo tipo en favor del uso racional de las calculadoras. Higgins en un famoso artículo titulado "Calculadoras y sentido común" advierte del peligro que supone el uso indiscriminado por profesores y alumnos de las calculadoras. Si alguien nos averigua el importe de dos artículos iguales al precio de 85 pesetas cada uno, o el 20% del algo, empleando una calculadora, eso no es emplear el sentido común. Eso es rechazable y daría la razón a aquellos que piensan que "anquilosan el cerebro" porque se emplean como sustituto del acto de pensar.

La utilización inteligente de la calculadora permitirá desarrollar la estimación y el cálculo mental por medio de actividades que anticipen el resultado que aparece en pantalla.

La estimación, la aproximación y el redondeo se facilitan por la observación del tipo de números que aparecen en pantalla. Las relaciones entre las notaciones numérica, fraccionaria y decimal se descubren usando las calculadoras. Pero además con la ayuda de la calculadora se puede facilitar el conocimiento de las relaciones entre los números, sobre las cantidades grandes y pequeñas, la notación decimal, etc. En general la calculadora nos permite la búsqueda de propiedades y regularidades en los números y el cálculo: propiedades y jerarquía de las operaciones, elaboración de algoritmos de cálculo propios, divisibilidad, etc.

Plunkett hace una clasificación de operaciones típicas distribuida en cinco columnas:

| ROJA         | NARANJA       | AMARILLA      | VERDE          | AZUL             |
|--------------|---------------|---------------|----------------|------------------|
| $5 + 9$      | $135 + 100$   | $139 + 28$    | $592 + 276$    | $3964 + 7123$    |
| $13 - 8$     | $85 - 20$     | $83 - 26$     | $592 - 276$    | $5960 - 4918$    |
| $4 \times 7$ | $5 \times 30$ | $17 \times 3$ | $931 \times 8$ | $931 \times 768$ |
| $35 : 5$     | $90 : 3$      | $72 : 4$      | $693 : 7$      | $8391 : 57$      |

Propone la adquisición de técnicas mentales para las columnas roja, naranja y amarilla; usar algoritmos escritos o calculadoras para la columna verde y, desde luego, calculadoras para la columna azul.

Es recomendable usar calculadoras en el aprendizaje de las matemáticas para:

- **Potenciar la estimación y el cálculo mental.** Actividades y juegos (tres en raya, atraviesa el panel, producto máximo, golf con calculadora,...) en los que la calculadora hace de catalizador de la actividad estimativa y mental.
- **Introducir y reforzar conceptos sobre numeración decimal y operaciones.** Realizar operaciones con restricción de determinadas teclas, productos que no caben en pantalla, divisiones como  $402:43$  con veinte cifras decimales,...
- **Favorecer el gusto por los números y la capacidad numérica a partir del planteamiento y desarrollo de investigaciones.** Estudio de determinadas regularidades en periodos, a partir de un cociente dado ( $0'6736$ ) determinar dividendo y divisor, aumentar en una unidad numerador y denominador, etc.

## 6. Las Matemáticas en los nuevos bachilleratos

### LA CIRCUNFERENCIA Y OTRAS CURVAS ESPECIALES

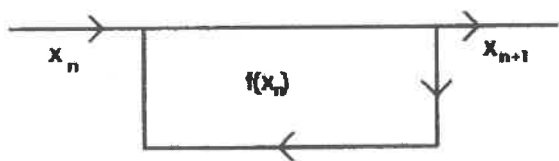
**Magdalena Morata**  
**Juan Carlos Orero**  
Grupo Cero de Valencia

#### LA CIRCUNFERENCIA Y OTRAS CURVAS ESPECIALES

La geometría es el conocimiento de las imágenes. Pero este conocimiento surge a partir de unos procesos dinámicos mentales, que se formalizan por medio de una actividad algebraica. Por otra parte, las ideas algebraicas están, generalmente, sustentadas en modelos geométricos. **Geometría** y **álgebra** aparecen, en este nivel (y en este trabajo), estrechamente relacionadas.

Si el papel de la geometría en la vida cotidiana, en la naturaleza, en las ciencias y en el arte está fuera de toda duda, el estudio de las curvas, a nuestro juicio, debe ocupar un lugar fundamental en la educación matemática. En este taller se ha intentado mostrar un posible tratamiento de algunas curvas: **circunferencias**, **espirales**, **cicloides**. El uso del ordenador permite hacer un estudio dinámico, empírico y constructivo de las mismas y facilita la verificación de conjeturas y la realización de investigaciones.

Los procesos que generan las curvas estudiadas son iterativos, de **retroalimentación**: la misma operación se realiza repetidamente, de forma que la salida de una iteración es la entrada de la siguiente. Este tipo de procesos puede representarse por medio del siguiente esquema:



La retroalimentación permite explicar situaciones complejas por medio de algoritmos sencillos. Además, un mismo algoritmo, al cambiar ligeramente las condiciones iniciales,

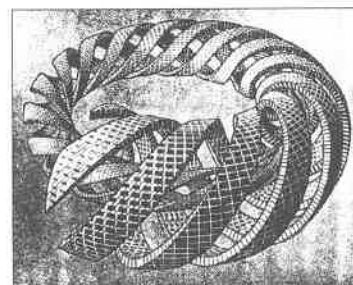
puede ser modelo de procesos aparentemente muy diversos. Este carácter nos abre un camino para introducirnos en el mundo de los **fractales**.

Este enfoque, además de favorecer el desarrollo de la imaginación y la intuición y la interacción de diversas habilidades y procedimientos, permite poner en contacto diversos campos de las matemáticas como números, geometría, geometría fractal, álgebra, sucesiones.

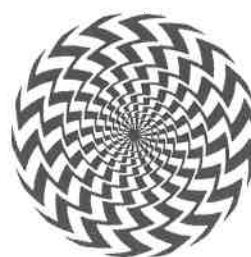
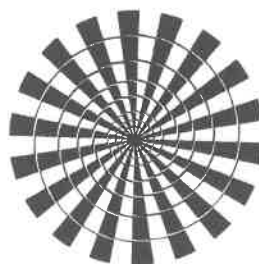
#### 1. ESPIRALES

##### 1.1. ¿Espirales?

Las espirales han fascinado a los matemáticos, pero también a los artistas, desde hace muchísimo tiempo.



- Las siguientes ¿**espirales**? han sido creadas por Nicholas Wade [5]. Obsérvalas atentamente.



**BIBLIOGRAFÍA**

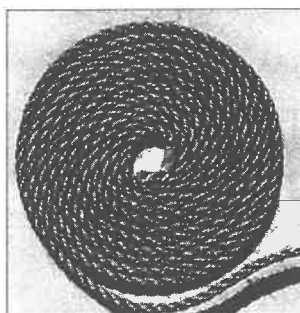
- Carrillo M. y Hernán F.: *"Recursos en el aula de Matemáticas"*. Ed. Síntesis. Madrid.
- Dickson, L.; Brown, M. y Gibson, O.: *"El aprendizaje de las Matemáticas"*. Ed. Labor, 1991.
- Fielker, D.S.: *"Usando las calculadoras con niños de 10 años"*. Conselleria de Educació, Cultura y Ciencia. Generalitat de Valencia.
- Higgins, J. L.: *"Las calculadoras y el sentido común"*. Arithmetic Teachers.
- Kazuko Kamii, C.: *"El niño reinventa la aritmética"*. Aprendizaje Visor, 1985.
- Maier, Eugene A.: *"Destrezas matemáticas básicas o destrezas para la supervivencia escolar"*. Arithmetic Teachers, 1987.
- National Council of Teachers of Mathematic. *Estándares Curriculares y de Evaluación*.
- Plunkett, Stuart.: *"Descomposición y toda esa porquería"*. Mathematics in School 8. (Mayo 1979).
- Sowder, Judith: *"Cálculo mental y aptitud numérica"*. Arithmetic Teachers, 36.

- ◆ ¿Cuál es la pauta que regula el decrecimiento de los lados de los triángulos o de los cuadrados?
- ◆ ¿Qué figuras son autosemejantes?

### 1.3. Espirales arquimediana y logarítmica

Estas son dos de las espirales más conocidas. Su estudio es muy sencillo si se utilizan coordenadas polares.

La espiral **arquimediana** es un buen modelo para el enrollamiento de una sogá o una alfombra o las pistas de un disco. La distancia entre sus espiras se mantiene siempre constante. Se podría definir, por lo tanto, a partir de la siguiente relación: *cuando el ángulo aumenta en progresión aritmética, el radio también crece en progresión aritmética.*

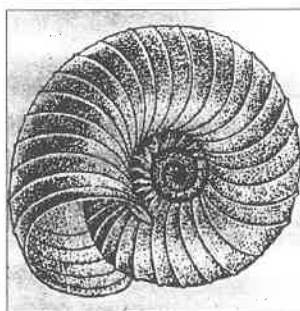


Así, si  $r_1, r_2, r_3 \dots$  son los radios correspondientes a puntos de la espiral separados entre sí por un ángulo  $\alpha$ , se verifica que:

$$r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = \dots$$

Por lo tanto, esta curva puede modelizarse por la ecuación  $r = k\alpha$ .

La espiral **logarítmica**, cuyo ejemplo más conocido es la concha del "nautilus", obedece a la siguiente regla: *cuando el ángulo se incrementa en progresión aritmética, el radio aumenta en progresión geométrica.*



La relación entre radios consecutivos  $r_1, r_2, r_3 \dots$  correspondientes a puntos de la espiral separados entre sí por el mismo ángulo  $\alpha$  es:

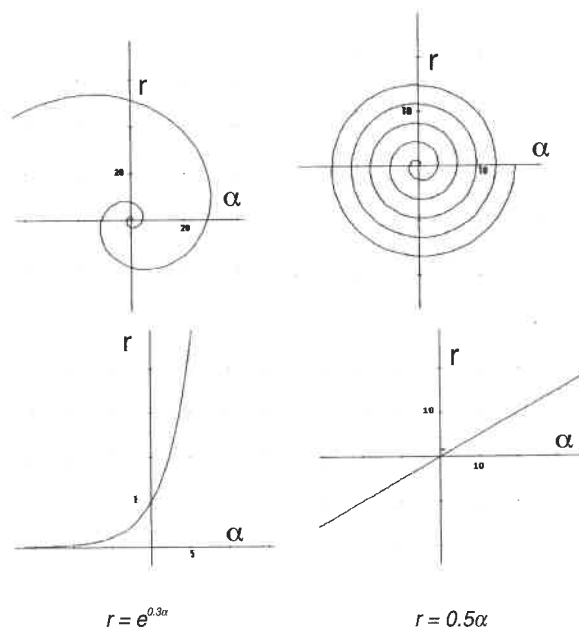
$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \dots$$

y, como consecuencia, la ecuación que la define es  $r = e^{k\alpha}$ .

Si  $k=0$ , se obtiene una circunferencia. Para  $k>0$ , la espiral se construye de dentro a fuera, creciendo indefinidamente. Si  $k<0$ , la espiral se enrolla hacia el origen del sistema de referencia, a medida que el ángulo aumenta.

- Dibuja las gráficas en coordenadas polares y cartesianas de una espiral arquimediana y otra logarítmica. Compáralas.

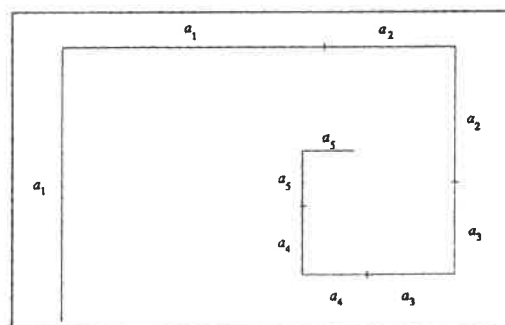
Es interesante visualizar simultáneamente la **gráfica en polares**, que muestra el desarrollo de cada espiral, y la **gráfica cartesiana** correspondiente, que resalta claramente el diferente crecimiento o decrecimiento de los radios en cada caso: **lineal** para la arquimediana y **exponencial** para la logarítmica.



### 1.4. Longitud

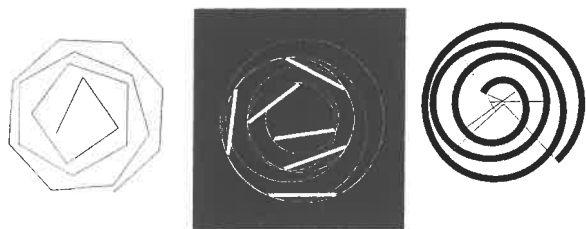
- Un grupo de objetos que parecen desafiar las medidas de longitud son las espirales. Pero, ¿es esto realmente cierto? ¿Tienen las espirales una longitud finita o infinita?

Vamos a considerar una familia particular de espirales poligonales. El proceso iterativo de construcción, que se puede apreciar en la figura adjunta, facilita el estudio de su longitud. Para ello partimos de una sucesión decreciente de números positivos:  $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$



• **Quince variaciones sobre un mismo tema**

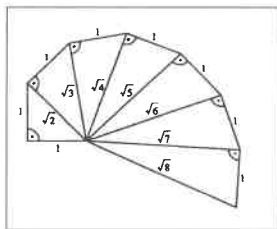
Las siguientes figuras forman parte de la obra "Quince variaciones sobre un mismo tema" del artista Max Bill, miembro de la Bauhaus. Todas han sido desarrolladas a partir de la espiral poligonal de la izquierda.



- ¿Cuál es el algoritmo que permite construir el tema inicial?
- ¿Cómo se han construido los restantes, a partir de éste?

### 1.2. La espiral pitagórica

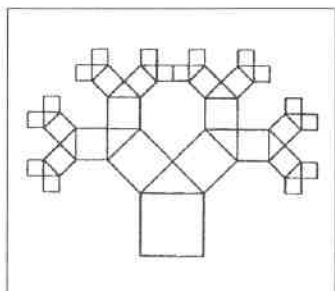
El cálculo de raíces cuadradas ha inspirado a algunos matemáticos interesantes creaciones geométricas. Una de ellas, que permite construir  $\sqrt{n}$  para cualquier número  $n$  entero, es la llamada **espiral pitagórica**:



- Escribe el algoritmo que permite generar la espiral anterior. ¿Cómo varían los ángulos que forman dos radios consecutivos?
- Construye la figura correspondiente al algoritmo que sigue:
  1. Dibuja un cuadrado.
  2. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles, de modo que su hipotenusa coincida con un lado del cuadrado.
  3. Dibuja un cuadrado sobre cada uno de los catetos del triángulo anterior.
  4. Repite los pasos 2 y 3 sobre cada uno de los cuadrados.

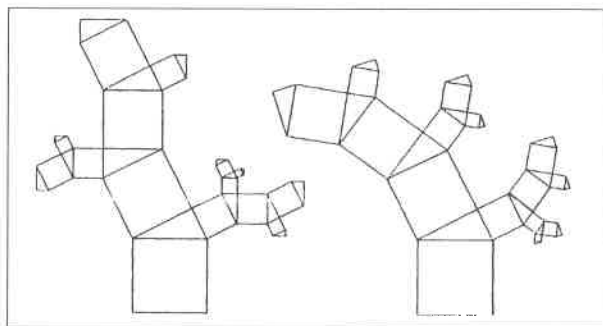
¿Qué relación tiene con la espiral anterior?

Esta es la figura resultante de iterar el algoritmo cuatro veces. Se trata de un **árbol pitagórico**.

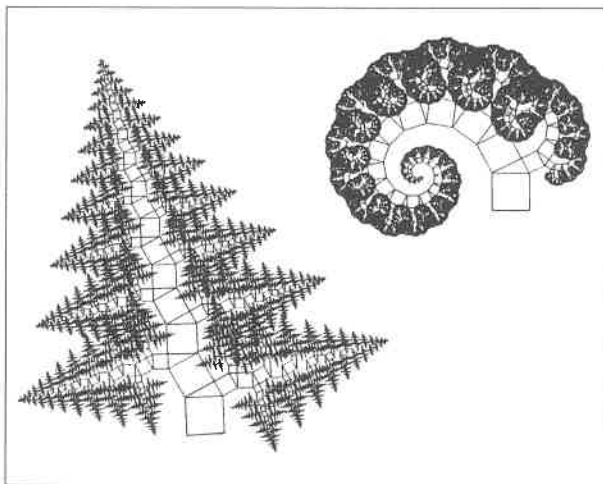


- ¿Qué tipo de árbol se obtendrá si el triángulo rectángulo no es isósceles?

Hay dos posibilidades, según que los triángulos se sitúen siempre con la misma o diferente orientación. Las figuras que se obtienen con pocas repeticiones:



no se diferencian demasiado entre sí, pero si se repite el proceso muchas veces el resultado es sorprendente.



Mientras que la primera tiene una estructura en espiral, la segunda recuerda claramente a un árbol. Sin embargo, ambas se construyen por medio de un mismo proceso de retroalimentación y son autosemejantes.

- ¿Y si el triángulo no es rectángulo?

Al introducir este nuevo grado de libertad se abre camino a una gran variedad de formas, que van desde un mosaico al modelo de una col. Estas son algunas sugerencias:

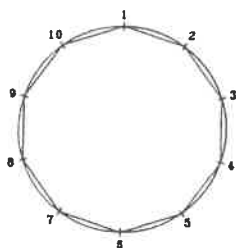
- ♦ triángulo equilátero,
- ♦ triángulo isósceles con el ángulo mayor de  $90^\circ$ ,
- ♦ triángulo isósceles con el ángulo menor de  $90^\circ$ ...
- La comparación de las diferentes estructuras obtenidas plantea nuevas e interesantes cuestiones:
  - ♦ ¿En qué casos se produce un solapamiento?

## 2. CURVAS CICLOIDES

Las siguientes propuestas enfocan un estudio dinámico de la circunferencia como fuente de formas sugerentes en un doble sentido artístico y matemático. La analogía, que permite conectar cosas aprendidas en diferentes contextos, será el hilo conductor que haga surgir estas formas.

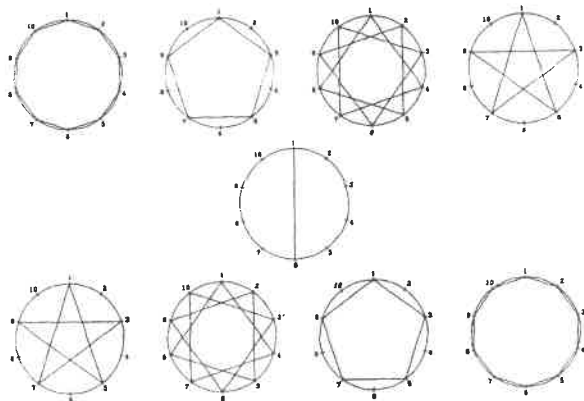
### 2.1. Polígonos en la circunferencia

Consideremos una circunferencia sobre la que hemos distribuido regularmente diez puntos numerados 1, 2, 3, ..., 10, dividiéndola en diez arcos iguales. Si unimos con un segmento de recta, empezando por 1, cada punto  $i$  con el punto siguiente  $i+1$ , obtendremos un decágono regular.



Pero, ¿qué ocurre cuando ensayamos otras formas regulares de unir los puntos; cada punto  $i$  con  $i+k$  mediante un segmento que subtienda  $k$  arcos consecutivos?

Obtenemos la siguiente secuencia de polígonos:



Usamos para nombrar cada polígono el símbolo  $P\{10,k\}$  en el que 10 es el número de arcos en que está dividida la circunferencia, y  $k$  el número de arcos que subtiende cada nuevo segmento trazado.

Un vistazo a esta secuencia hace que nos planteemos inmediatamente algunas preguntas:

¿Qué tipo de polígonos hemos obtenido? ¿Para que valores de  $k$  obtenemos polígonos regulares convexos y para qué otros polígonos regulares estrellados? ¿A qué se debe la notable simetría interna que muestra la propia secuencia? ¿Podríamos haber anticipado el número de lados de cada nuevo polígono antes de empezar a unir los puntos sobre la

circunferencia? ¿Qué secuencias obtendremos para cualquier división de la circunferencia en un número  $n$  arbitrario de arcos? ¿Podemos siempre anticipar la forma de cualquier polígono  $P\{n,k\}$ ? ¿Qué es, por ejemplo, un  $P\{27,15\}$ ?

### 2.2. Las cicloides

Una de las propiedades fundamentales de la circunferencia es, precisamente, que puede rodar.

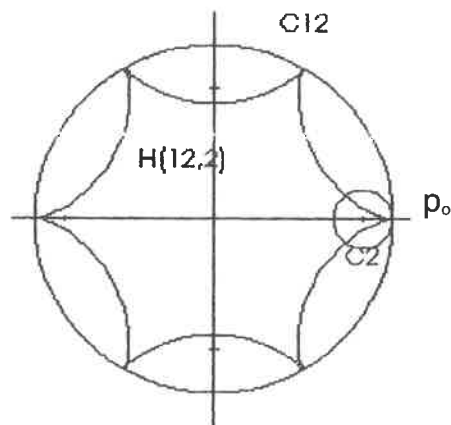
Hagamos rodar sin deslizamiento una circunferencia apoyada sobre una recta. Fijemos nuestra atención en el punto de contacto de ambas figuras y sigamos la trayectoria que describe este punto cuando la circunferencia se desplaza girando.

La curva así obtenida es la cicloide (Galileo 1515-99).



Consideremos ahora dos circunferencias. Una circunferencia de radio 2 ( $C_2$ ) se apoya interiormente en otra de radio 12 ( $C_{12}$ ). Llamemos  $P_0$  al punto de contacto entre ambas circunferencias. Hagamos rodar sin deslizamiento a  $C_2$  sobre  $C_{12}$  y sigamosle la pista a  $P_0$ .

¿Qué curva describirá ese punto?



En efecto la curva está formada por seis pequeños arcos que constituyen una especie de hexágono regular de lados curvos. Designaremos esta curva con la notación  $H(12,2)$  y la llamaremos Hipocicloide de parámetros 12 y 2, donde 12 y 2 representan, respectivamente, los radios de la circunferencia exterior e interior.

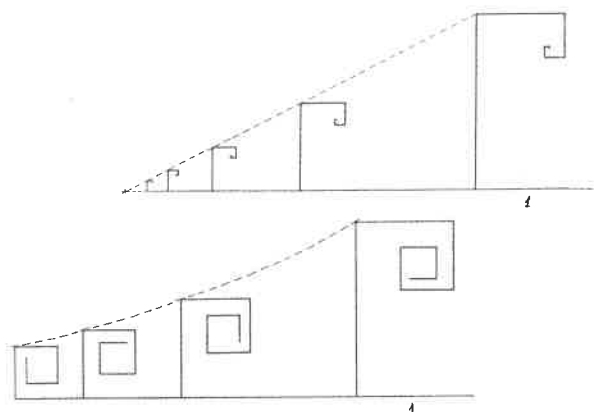


— ¿Cuál es la longitud de la poligonal anterior?

El cálculo de la expresión  $2 \sum_{i=1}^{\infty} a_n$  nos permite obtenerla. Pero, ¿es esto siempre posible?

- ♦ ¿Cuál es la longitud de la espirales generadas a partir de las sucesiones de término general  $a_n = (1/2)^n$  y  $a_n = 1/n$ ?

Las siguientes figuras, en las que las espirales se van desdoblando a lo largo de una recta muestran que, mientras que la longitud de la primera es finita e igual a 4, la segunda tiene una longitud infinita.

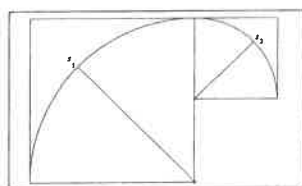


En efecto, la suma de una **serie geométrica** de término general  $a_n = a_1 r^n$ , cuando la razón  $r < 1$ , viene dada por  $\frac{a_1}{1-r}$ , y por lo tanto la longitud de la primera espiral es igual a

$$2 \frac{1}{1-1/2} = 4$$

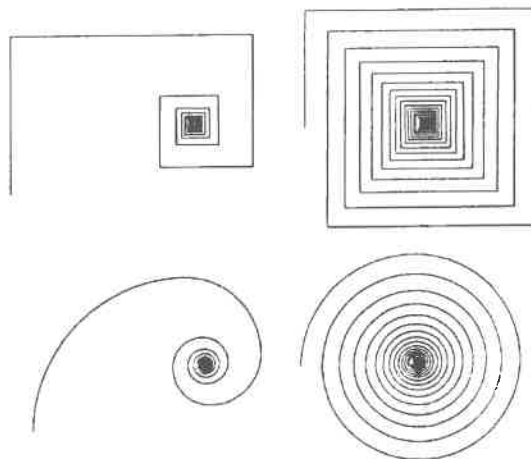
En cambio, la segunda ha sido generada a partir de la **serie armónica**, cuya suma es infinita. Paradójicamente, tenemos una longitud infinita en un área finita.

- ♦ A partir de las anteriores es posible obtener espirales curvas, por medio del algoritmo mostrado en la figura adjunta:  
Construye las curvas correspondientes a



las dos espirales poligonales anteriores y calcula sus longitudes.

- ♦ Dos de las siguientes espirales tienen longitud finita, mientras que la de las otras dos es infinita. ¿Podrías distinguirlas a simple vista?



- ♦ Dibuja la espiral poligonal y curva correspondiente a la sucesión de término general  $a_n = (1/\phi)^n$  donde  $\phi$  es el número de oro. ¿De qué espiral se trata? ¿Qué longitud tiene?

### 1.5. Autosemejanza

El matemático Jacobo Bernoulli dedicó un tratado, titulado **Spira Mirabilis**, a la espiral logarítmica. Con la expresión **Eadem Mutata Resurgo** resumió una de sus propiedades más interesantes: la **autosemejanza**, que la relaciona con los **fractales**.

- ♦ Dibuja la espiral  $r = e^{-0.35\alpha}$  y amplíala con un factor 3. ¿Qué relación hay entre ambas curvas?
- ♦ Se obtiene la misma espiral, pero ¿qué transformación geométrica hay que aplicar a la segunda gráfica para que coincida exactamente con la primera?  
Aplicar a la espiral geométrica de ecuación  $r = e^{k\alpha}$  un cambio de escala  $p$  es equivalente a girarla un ángulo  $\beta$  que verifica la condición  $p = e^{k\beta}$
- ♦ ¿Qué cambio de escala y qué rotación dejan invariante la espiral  $r = e^{-0.061\alpha}$ ?
- ♦ ¿Cuáles de las figuras tratadas anteriormente son autosemejantes?

puedan investigar el efecto que produce la variación de estos parámetros sobre el aspecto de las figuras.

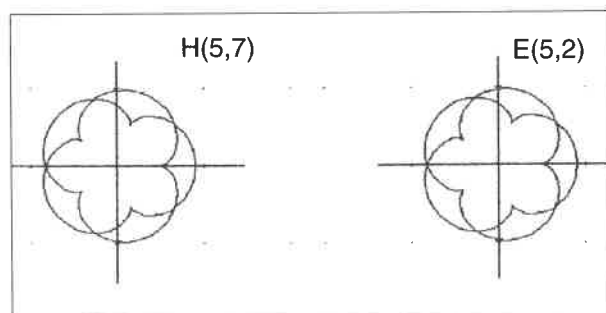
Las expresiones paramétricas de estas curvas son:

| EPICICLOIDES                           | HIPOCICLOIDES                          |
|----------------------------------------|----------------------------------------|
| $x(t) = (a+b)\cos t - b\cos((a+b)t/b)$ | $x(t) = (a-b)\cos t + b\cos((a-b)t/b)$ |
| $y(t) = (a+b)\sin t - b\sin((a+b)t/b)$ | $y(t) = (a-b)\sin t - b\sin((a-b)t/b)$ |

Estas ecuaciones son triplemente paramétricas. Conviene observar que  $a$  y  $b$  (los radios de las circunferencias) son fijos para cada curva particular y  $t$  variable. Variando los parámetros  $a$  y  $b$  obtenemos toda la familia de epicicloides.

Las ecuaciones de las curvas nos permitirán hacer algunas cosas que no nos permitiría el trazado mecánico de las mismas con un soporte físico. Por ejemplo nos permitirá rodar una circunferencia  $C_b$  interiormente sobre otra fija  $C_a$  aún cuando su radio  $b$  sea mayor que  $a$ .

Veamos ahora dos nuevas imágenes obtenidas a partir de las ecuaciones:



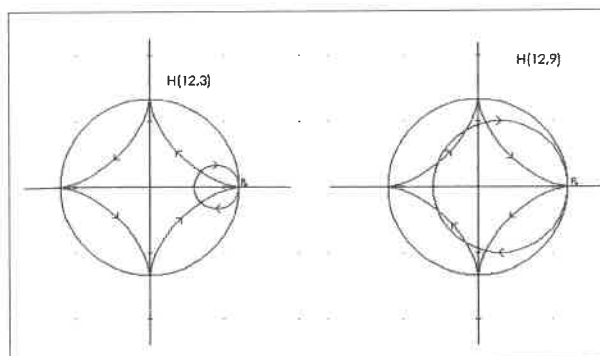
En estas imágenes y en las de la secuencia precedente podemos observar un par de propiedades interesantes:

$$H(12,3) = H(12,9) \text{ y en general} \\ H(a,b) = H(a,c) \text{ cuando } c=a-b$$

$$H(5,7) = E(5,2) \text{ y en general} \\ H(a,c) = E(a,b) \text{ cuando } c=a+b.$$

Intentaremos una aproximación geométrica y otra algebraica para dar una explicación de la primera de las propiedades.

Si miramos la pantalla del ordenador durante los trazados de  $H(12,3)$  y de  $H(12,9)$  observaremos que, en cada caso, el punto que traza ambas curvas —idénticas— las recorre en sentidos inversos.

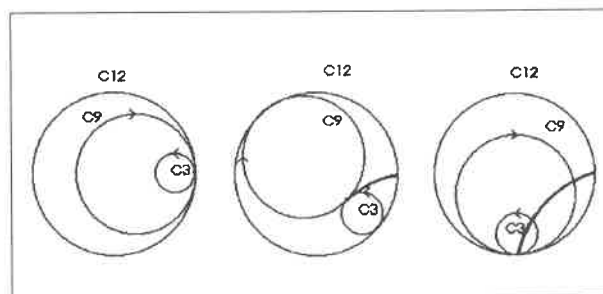


En el trazado de los polígonos sobre la circunferencia  $P\{12,3\}$  y  $P\{12,9\}$  se da una situación equivalente, ya que unir dos puntos con un segmento recorriendo 9 arcos en un sentido es lo mismo que unir los mismos puntos recorriendo 3 arcos en el sentido opuesto.

Podemos conjeturar que con las epicicloides ocurre algo parecido.

Para explicar la igualdad  $H(12,3) = H(12,9)$   $12=3+9$ , vamos a reforzar el punto de vista dinámico. En primer lugar vamos a suponer que  $C_3$  y  $C_9$  recorren la circunferencia  $C_{12}$  en sentidos opuestos pero con la misma velocidad angular. Esto permitirá que cuando la circunferencia  $C_3$  haya recorrido su longitud, la circunferencia  $C_9$  haya hecho lo mismo en el sentido opuesto y las tres circunferencias serán de nuevo mutuamente tangentes como en la posición de partida.

Veamos la secuencia correspondiente a tres etapas de este trayecto: la posición inicial, el momento en que las circunferencias interiores han recorrido la mitad de su longitud sobre la circunferencia de apoyo y finalmente cuando ambas han recorrido toda su longitud.



Para demostrar el caso general,  $H(a,b)=H(a,c)$  cuando  $a=b+c$ , basta hacer la sustitución  $t=bt'$  en la ecuación de  $H(a,b)$  y la sustitución  $t=ct'$  en la ecuación de  $H(a,c)$ , para asegurarnos una velocidad angular igual y constante y sentidos de giro opuestos para cada circunferencia rodante. De este modo se obtiene:

$$H(a,b) = H(a,c) = \\ = [c \cos(bt') + b \cos(ct'), c \sin(bt') - b \sin(ct')]$$

De la visión de esta curva surge irremediabilmente la imagen mental de los polígonos regulares que hemos construido sobre la circunferencia. Parece innegable que hay similitudes entre ambas situaciones, pero ¿en qué sentido?

Nos hacemos nuevas preguntas.

¿Qué ocurrirá si variamos el radio de la circunferencia interior?, ¿podemos anticipar la apariencia de una  $H(12,5)$ ?, ¿podemos usar de alguna forma lo que conocemos acerca de la construcción de polígonos en la circunferencia?, ¿qué similitudes y qué diferencias hay entre ambas situaciones?, ¿qué relación hay entre una  $H(12,2)$  y una  $H(6,1)$ ?, ¿y entre  $H(12,5)$  y  $H(12,7)$ ?, ¿podemos anticipar la apariencia de cualquier  $H(a,b)$ ?, ¿obtendremos siempre una curva cerrada?, y, si es así, ¿cuántas vueltas completas tendrá que dar la circunferencia que rueda hasta cerrar la curva?

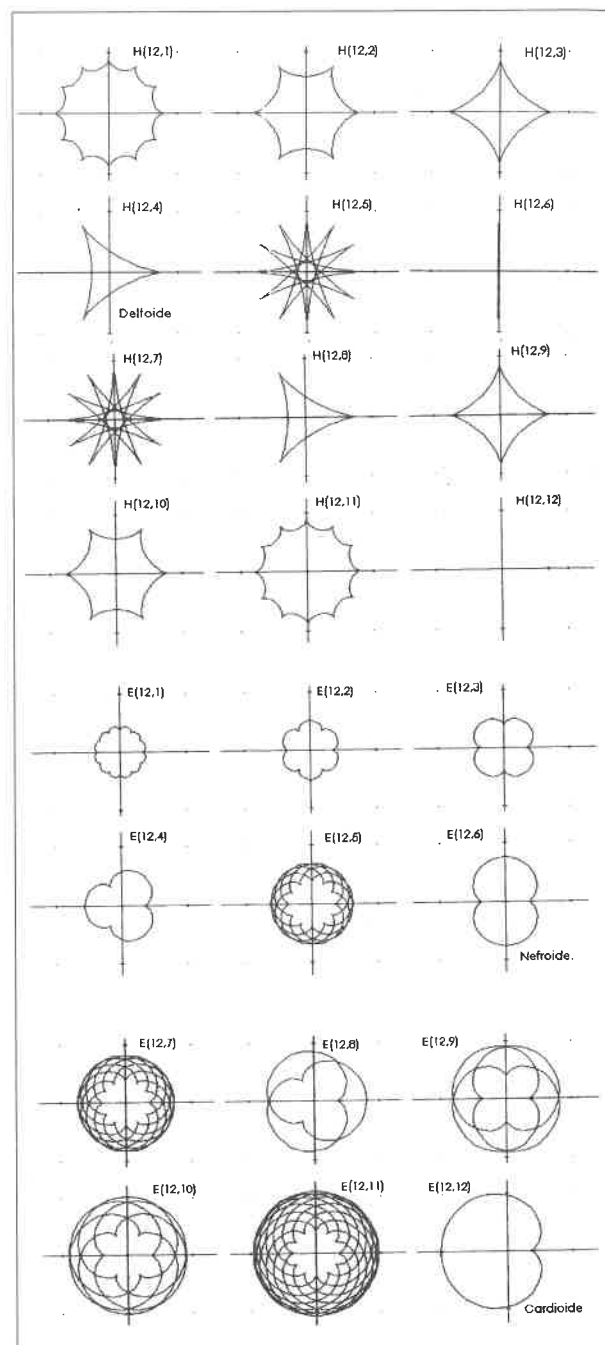
¿Qué ocurrirá si consideramos una nueva familia de curvas haciendo rodar sin deslizamiento una circunferencia  $C_a$  que se apoya exteriormente sobre otra  $C_b$ ?

Obtendremos las Epicicloides de parámetros  $a$  y  $b$ :  $E(a,b)$ . ¿Cuál es su aspecto?, ¿valdrá para ellas lo estudiado en las hipocicloides?

Llegados a este punto nos gustaría disponer de un procedimiento mecánico para el trazado de estas curvas. Claro, que hacer girar una circunferencia sobre otra sin deslizamiento es una tarea bien difícil, ya que la circunferencia, en esencia, es una curva resbaladiza. Podemos construir dos círculos de cartulina gruesa para obtener las curvas punto a punto o trabajar con ruedas dentadas; proveernos de un espirógrafo.

Una forma de sustituir el trazado mecánico de epicicloides e hipocicloides consiste en obtener una simulación de este trazado mecánico en el ordenador. Los lenguajes de programación y el software que conocemos no nos permiten por el momento hacer esta simulación de forma cómoda. Esto supone un contratiempo muy importante a la hora de tratar el tema en clase, pero veremos que es posible obtener una imagen de cada una de estas curvas —con ayuda del ordenador— usando otros procedimientos.

El primero de estos procedimientos, muy fecundo porque permite poner en contacto la geometría con el álgebra, consiste en hallar las ecuaciones de las curvas y obtener sus representaciones gráficas usando un programa como DERIVE u otro similar. De este modo se han obtenido las siguientes imágenes que pueden ayudar a obtener respuestas para algunas de las preguntas planteadas anteriormente.



El cálculo de las ecuaciones es complejo, pero esta complejidad resulta ciertamente enriquecedora en el aula porque permite poner de manifiesto el enorme valor de algunos procedimientos algebraicos simples pero poderosos como la suma de vectores, el uso de las expresiones polares de los mismos o las ecuaciones paramétricas de las curvas y algunas propiedades geométricas de ángulos y circunferencias de especial interés.

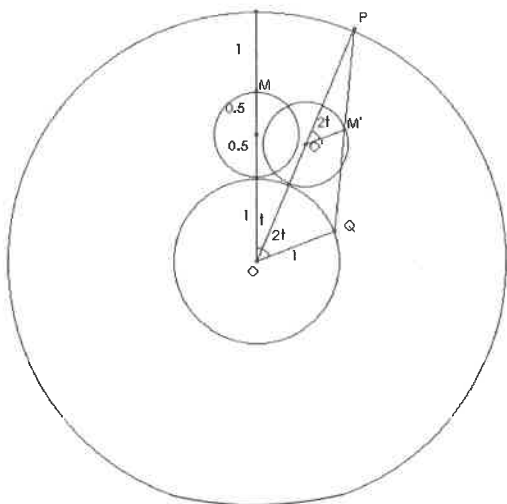
En clase, además de calcularlas, podemos preparar un archivo con la ecuaciones de las epicicloides y de las hipocicloides de parámetros  $a$  y  $b$ , de modo que los alumnos

No es difícil comprobar que cada  $M(r, R)$  es una epicicloide  $E(a, b)$  de parámetros

$$b = R/2$$

$$a = (R-r)/2$$

Así, la curva  $M(1, 3)$  es idéntica a la  $E(1, 0.5)$ , que salvo la escala es idéntica a una  $E(2, 1)$  como se puede observar en la figura anterior. Una explicación geométrica de este hecho se obtiene estudiando la siguiente figura.



La circunferencia  $C_{0.5}$  se apoya sobre la circunferencia  $C_1$  y tiene su centro en el punto medio del radio  $R=3$ . Cuando el radio  $R=3$  gira un ángulo  $t$ , el radio  $r=1$  gira un ángulo  $3t$  y

el punto  $M$  gira alrededor de  $O'$  sobre  $C_{0.5}$  un ángulo  $2t$  transformándose en  $M'$ . El ángulo  $POQ = 3t - t = 2t$ .

Los triángulos  $POQ$  y  $PO'M'$ , entonces, son semejantes y por lo tanto  $PM'/PQ = OM'/OQ = 1/2$ , y el punto  $M'$  de la epicicloide  $E(1, 0.5)$  coincide con el punto medio del segmento  $PQ$ .

El mismo argumento geométrico se puede generalizar para valores cualesquiera de los radios  $R$  y  $r$ .

Si en lugar de hacerlos girar en el mismo sentido, hacemos que los radios  $R$  y  $r$  giren en sentidos opuestos obtendremos las hipocicloides.

Esta nueva definición de las epicicloides y las hipocicloides nos permitirá finalmente obtener sus ecuaciones de una forma sencilla:

$$\frac{1}{2} [R \cos(rt) + r \cos(Rt), R \sin(rt) + r \sin(Rt)]$$

para las epicicloides

$$\frac{1}{2} [R \cos(rt) + r \cos(Rt), R \sin(rt) - r \sin(Rt)]$$

para las hipocicloides

Es interesante observar la simetría que presentan ambas ecuaciones y la similitud con las obtenidas al final del apartado 2.2.

La circunferencia puede continuar dándonos sorpresas, pero eso será tema de otros trabajos ■

## BIBLIOGRAFÍA

- [1]. *Matematica nella realtà*, Castelnuovo E., Boringhieri, Torino 1977.
- [2]. *The Art and Science of Visual Illusions*, Routledge and Kegan Paul, London 1982, citado en [7].
- [3]. *Geometric Images*, ATM, Devon, 1982.
- [4]. *Curves*, Allen & alter, Leapfrogs, Norfolk 1982.
- [5]. *Images of infinity*, Hemmings-Tahta, Leapfrogs, Norfolk 1984.
- [6]. *París: arte abstracto, arte concreto. Cercle et carré. 1930*, IVAM Centro Julio González, Generalitat Valenciana, Valencia 1990.
- [7]. *Fractals for the classroom, vol 1 y 2*, Peitgen-Jürgens Saupe, Springer-Verlag, New York 1992.

Un argumento dinámico similar - dos circunferencias  $C_c$  y  $C_b$  que ruedan respectivamente por el interior y por el exterior de  $C_a$  girando en el mismo sentido con velocidad angular idéntica - permite verificar la igualdad  $H(a,c)=E(a,b)$  cuando  $c=a+b$ . Esta última igualdad permite reducir ambas familias de curvas a una sola: la de las hipocicloides o la de las epicicloides.

### 2.3. La circunferencia no deja de dar sorpresas

En el inicio de esta sección vimos una construcción estática de los polígonos  $P\{n,k\}$  sobre la circunferencia, y ahora vamos a ver una construcción dinámica.

Imaginemos un punto de la circunferencia  $P_0$  que está situado inicialmente en 0 y que recorre la circunferencia, dividida en  $n$  arcos iguales, en el sentido de las agujas del reloj con una velocidad lineal constante que le permite recorrer  $k$  arcos en un segundo. Si marcamos las posiciones sucesivas del punto  $P_0$  a intervalos regulares de un segundo obtendremos una sucesión de puntos  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_m$  que serán los vértices sucesivos de un polígono  $P\{n,k\}$  que será:

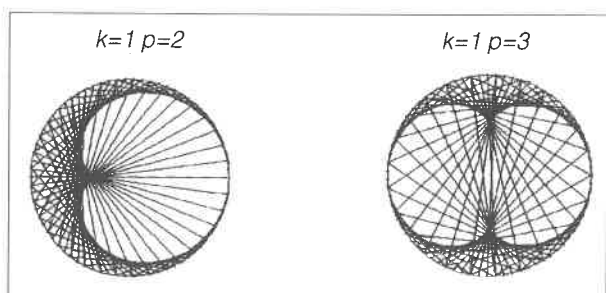
- regular convexo si  $n/k$  es entero
- regular estrellado si  $n/k$  es racional
- otra cosa si  $n/k$  es irracional

Vamos a explotar esta idea para obtener nuevas figuras.

Consideremos, no uno, sino dos puntos  $P_0$  y  $Q_0$  que coinciden inicialmente y movámoslos sobre la circunferencia con velocidades lineales constantes pero diferentes en el sentido de las agujas del reloj hasta que vuelvan a coincidir en la misma posición inicial.

Supongamos que  $P_0$  recorre  $k$  arcos en un segundo y que  $Q_0$  recorre  $p$  arcos en un segundo. Para que ambos puntos vuelvan a coincidir en la posición inicial, es conveniente dividir la circunferencia en un número de arcos que sea múltiplo de  $k$  y de  $p$ .

Unamos ahora, cada segundo, las posiciones sucesivas  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_m$  con las correspondientes  $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  y veamos las figuras que obtenemos para diferentes valores de  $k$  y de  $p$ .



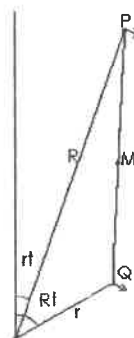
¡Obtenemos de nuevo las epicicloides!

¿Qué ocurrirá si hacemos girar cada uno de los puntos en sentidos opuestos?

La elaboración de un programa recursivo que simule esta situación en un lenguaje similar a WINLOGO está al alcance de los alumnos y provee una forma diferente de construir estas curvas. En la elaboración de un programa de estas características intervienen muchos conceptos matemáticos de tipo numérico, geométrico y algebraico amén de procedimientos algorítmicos recursivos o iterativos de gran interés. La explicación de por qué se obtienen las cicloides y las epicicloides de este modo queda fuera de los objetivos del bachillerato.

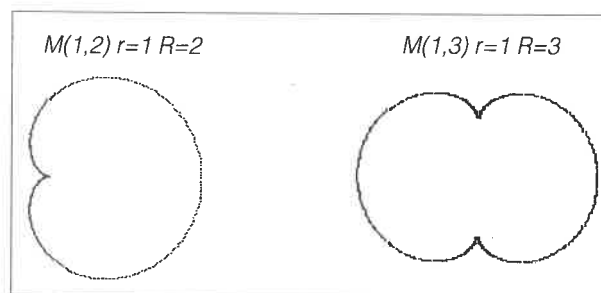
Para finalizar consideremos otro procedimiento que consiste en hacer girar los extremos de dos radios  $R$  y  $r$  —inicialmente coincidentes— alrededor del otro extremo fijo, común a ambos radios.

Cada radio va a girar con una velocidad angular proporcional a la longitud del otro radio: el radio  $R$  girará con velocidad angular  $rt$ , y el radio  $r$  girará con velocidad angular  $Rt$ .



Las posiciones de los extremos  $P$  y  $Q$  de cada radio determinan en todo momento un segmento. Observaremos el lugar geométrico que describe el punto medio  $M$  de este segmento; un lugar geométrico que designaremos  $M(r,R)$ . Para visualizarlo, podemos elaborar un programa que permita dibujar ese lugar geométrico para diferentes valores de  $R$  y  $r$ .

De ese modo se han obtenido las siguientes curvas:



como la prueba de la  $\chi^2$ , como una alternativa a las comprobaciones estadísticas que asumen una distribución particular (generalmente normal). Las técnicas no paramétricas (que incluyen asimismo medidas tales como la prueba del signo, la U de Mann-Whitney) son extremadamente versátiles, fáciles de usar, y su potencia proviene a menudo directamente de la combinatoria y de la distribución binómica (de la población o de la muestra), y se adecúan especialmente bien a muestras pequeñas. Ya que estos métodos van alcanzando cada vez más popularidad, es esperable que lleguen a convertirse en parte integrante de futuro currículo de estadística.

Hay que animar a todos los estudiantes a descubrir generalizaciones que relacionen el efecto de modificar un conjunto de datos por medio de transformaciones aditivas o multiplicativas de la media, la mediana, la moda y la varianza. La tecnología proporciona un medio fácil de calcular las estadísticas de los datos modificados, lo cual lleva, al ser analizadas, a generalizar los resultados. Los futuros universitarios deben ser capaces de obtener estos resultados por medios algebraicos.

### ¿Por qué incluir este contenido en el bachillerato?

Los datos, resúmenes e **inferencias estadísticas** se encuentran en el trabajo y en la vida diaria de los individuos con más frecuencia que cualquier otra forma de análisis matemático. Por lo tanto, resultaría esencial que todos los bachilleres adquieran, a nivel adecuado, las aptitudes que se tratan en este documento. Para conseguirlo, es necesario que se dé a la estadística un lugar más prominente en currículo de la enseñanza secundaria.

Se podría afirmar que **la estadística y la probabilidad son parte fundamental de nuestra cultura**. Estamos inmersos en un mundo en el que las necesidades de tratar, transmitir e interpretar la información son cada vez mayores. Estas necesidades exigen un tratamiento de los datos en términos de estadística y probabilidad al cual la escuela no puede ser ajena. Basta con abrir un periódico para percatarse de la multiplicidad de situaciones en las que conceptos estadísticos y probabilísticos aparecen involu-  
crados.

Existen numerosos ejemplos de cómo la estadística y la probabilidad afectan a los individuos en su vida diaria:

- ¿Qué implicaciones tiene un cambio del índice de precios al consumo respecto a los aumentos salariales?
- ¿Cómo influye la redacción de las preguntas en los cuestionarios y referéndums sobre los resultados?

- ¿Cuál debe ser la inversión en hospitales, colegios, medios de transporte,... teniendo en cuenta los datos del censo nacional?
- A la vista de la experiencia acumulada, ¿debe ser obligatorio el uso del cinturón de seguridad en los coches?
- ¿Debe vacunarse un niño teniendo en cuenta la efectividad de la vacuna y el riesgo de efectos secundarios?
- ¿Existe alguna relación entre el tabaco y el cáncer de pulmón?
- ¿Qué implicaciones tiene el control de calidad sobre la compra diaria?
- ¿Por qué haciendo una pequeña encuesta se puede predecir el resultado de unas elecciones?

Determinados aspectos de **estadística y probabilidad intervienen en el trabajo de muchos profesionales**, que deben tomar decisiones en función de la interpretación que se dé a unos determinados datos, o del grado de confianza probabilístico que un determinado resultado proporcione. Tanto en la empresa privada como en la administración se están tomando continuamente decisiones a partir de los resultados de una encuesta y la interpretación de sus resultados, se leen tablas de datos, se interpretan gráficas de control de calidad, etc. Estas decisiones serían tanto más acertadas si se tuviera consciencia de la importancia del estudio estadístico previo a la toma de la decisión, junto con un mínimo conocimiento de la interpretación correcta y análisis de los datos obtenidos.

Desde el punto de vista educativo, **el estudio de la probabilidad y de la estadística ayuda al desarrollo personal del alumnado**. El estudio de estos contenidos en un contexto aplicado permite el desarrollo de habilidades matemáticas, tanto cognitivas como metacognitivas: planificación del estudio, desarrollo de habilidades numéricas, introducción a la modelización matemática de problemas reales, conocimiento más profundo de la naturaleza e importancia de la variabilidad, tratamiento de la incertidumbre, etc. El estudio de la estadística utilizando datos de problemas reales, predispone al alumnado a formar sus opiniones de acuerdo con la evidencia proporcionada por los datos, haciendo frente a sus prejuicios, pensando más conscientemente sus argumentos y dándose cuenta de las complejidades de los temas tratados. En definitiva, le lleva a tomar decisiones con una información mayor.

Hay que destacar la potencia de **la estadística y la probabilidad, en tanto que constituyen una aplicación importante de las matemáticas**. La búsqueda de modelos teóricos que permitan describir ciertas situaciones del mundo real y que no se encuentran en modelos deterministas, hallan respuesta en el campo de la estadística y la probabilidad. El cómo medir ese grado de incertidumbre

## LA INFERENCIA ESTADÍSTICA EN LOS BACHILLERATOS

**Onofre Monzó del Olmo**

CEP de Godella. Valencia

**Tomás Queralt Llopis**

CEP de Torrent. Valencia

### INTRODUCCIÓN

A lo largo del presente documento vamos a intentar contestar algunas preguntas que consideramos todo profesor de matemáticas en la etapa de Bachilleratos deberá hacerse, en lo que se refiere a la inclusión de aspectos de **inferencia estadística** en el nuevo currículum: el **¿por qué** incluir este contenido?; el **qué**, es decir, ¿qué aspectos de la inferencia estadística sería posible desarrollar?; el **cómo** trabajar este tipo de contenidos, ¿hay alguna consideración metodológica sobre su tratamiento?

Como decía el profesor Santaló, las ideas de probabilidad y estadística son tan importantes y ponen en juego tan diversos temas de la matemática, que no conviene asignarles cierto tiempo de determinado año y luego no hablar más de ellas. Si la enseñanza en espiral es recomendable para toda la matemática, lo es doblemente para el capítulo de probabilidades y estadística. Desde la escuela primaria, mediante experiencias elementales, cada año hay que introducir ejemplos más complicados, con su tratamiento más perfeccionado, señalando los puntos clave de "dependencia" e "independencia", probabilidades compuestas, esperanza matemática, varianza, hasta las leyes más usuales de la probabilidad. En los últimos años de enseñanza media cabe dar ejemplos sobre estimadores y verificación de hipótesis.

Más recientemente el profesor Miguel de Guzmán señala que la probabilidad y la estadística son componentes muy importantes en nuestra cultura y en muchas de nuestras ciencias específicas. Deberían constituir una parte importante del bagaje cultural básico del ciudadano de nuestra sociedad. Es éste un punto en el que todos los sistemas educativos parecen concordar. Y, efectivamente, son muchos los países que incluyen en sus programas de enseñanza secundaria estas materias, pero en pocos esta enseñanza se lleva a cabo con la eficacia deseada.

Otras propuestas actuales recomiendan que los estudiantes tienen que llegar a conocer de forma intuitiva la nociones de azar, representatividad y sesgo con relación a las

muestras mejorando así su capacidad de enjuiciar las afirmaciones estadísticas. Estas estructuras conceptuales darán a los estudiantes las herramientas adecuadas para poder rechazar, por ejemplo, las afirmaciones publicitarias de la televisión, como las que muestran a toda una serie de gente eligiendo la misma pasta de dientes. (En este caso está claro que no se cumple la condición de representatividad.) Si queremos que alcancen a comprender los conceptos *muestreo*, *teorema central del límite* e *intervalo de confianza*, los estudiantes deben haberse ejercitado en la construcción y análisis de distribuciones de muestras por medio de simulaciones. Estas experiencias ofrecen a los estudiantes las herramientas y el punto de vista que les harán falta para interpretar afirmaciones de los medios de comunicación como por ejemplo, "Las encuestas indican que el 55% de los electores, con un error del 32%, prefieren al candidato X (con fiabilidad del 90%)." Los campos de la estadística y de la probabilidad se entrecruzan en este caso. Los futuros universitarios deben también aplicar este concepto de muestreo el diseño de experimentos propios para comprobar hipótesis.

Los estudiantes deben darse cuenta de que puede surgir un sesgo tanto en la interpretación de los resultados como en el muestreo: la predisposición o las expectativas de la persona que realiza la interpretación pueden afectar interesadamente al mensaje que se extraiga de los resultados estadísticos. Esto ocurre a menudo en la presentación e interpretación de datos que se realiza con fines políticos.

Los futuros universitarios deben familiarizarse con distribuciones tales como la normal, *t* de Student, Poisson o  $\chi^2$ . Los estudiantes deben ser capaces de decidir en qué casos resulta adecuado utilizar estas distribuciones en el análisis estadístico (p. ej. para obtener los intervalos de confianza o para efectuar test de hipótesis). Las actividades docentes deben centrarse en la lógica que existe tras el proceso tanto como en la "comprobación" misma.

En los últimos años se han venido usando cada vez más los métodos no paramétricos o métodos de distribución libre,



**científico.** El proceso de extraer conclusiones acerca de una población basadas en las observaciones de una muestra de esa población (**inferencia estadística**) presenta dos posibles fuentes de dificultad:

- a. El posible sesgo de los datos de la muestra.
- b. Un tamaño muestral pequeño que no permita generalizar los resultados.

La representatividad de una muestra respecto de una población depende no solamente de las unidades observacionales, sino también de la variable observada. Así, para describir la población de la que hemos extraído los datos, intentaremos describir el conjunto de observaciones que habríamos obtenido si el proceso de generar los datos se repitiese indefinidamente. Dado que no solemos conocer exactamente las características de una población, utilizamos las muestras para describirlas, de modo que las características muestrales serán una **estimación** de las correspondientes características poblacionales. Así pues, **la estimación de parámetros es un tipo de inferencia estadística**.

Algunos rasgos de una distribución —como la media— pueden representarse por un único número, mientras que otros —como la forma— no pueden. Así, el **estadístico** es aquel valor numérico que describe una muestra, y en correspondencia, el **parámetro** es la medida numérica que describe una población.

Para datos categóricos, puede describirse una población estableciendo las proporciones o frecuencias relativas de cada categoría. Las proporciones exactas de la población  $\pi$  no son conocidas, y usaremos las correspondientes proporciones muestrales como estimadores  $\hat{\pi}$ . De modo que  **$\hat{\pi}$  es un estimador de  $\pi$** . Si la variable observada es cuantitativa, podemos determinar los estadísticos de la muestra:  $\bar{X}$ ,  $s$ , mediana, ... y cada uno de ellos será un estimador de su correspondiente parámetro poblacional, cuya notación suele ser  $\mu$  para la media poblacional, y  $\sigma$  para la desviación típica.

Una meta importante del análisis de datos es distinguir entre las características de los datos que reflejan hechos reales y características que pueden reflejarse sólo por efecto del azar. El modelo de **muestreo aleatorio** proporciona un marco de trabajo para realizar esta distinción. La realidad se contempla como una población, los datos son vistos como una muestra aleatoria de la población, y los efectos del azar se observan como errores de muestreo, esto es, la discrepancia entre la muestra y la población. Así, la variabilidad entre muestras aleatorias de la misma población es llamada **distribución en el muestreo**. Mientras una muestra aleatoria puede ser o no parecida a la población de la que procede, una distribución en el muestreo puede especificar

cuán cerca estamos de la realidad en términos de probabilidad.

De acuerdo con el modelo de muestreo aleatorio, vemos los datos en un experimento como una muestra aleatoria de una población. Pero para visualizar la variabilidad en el muestreo, necesitamos ensanchar nuestro marco de referencia incluyendo, no meramente una sencilla muestra, sino todas las muestras posibles que podamos sacar de la población. Este mayor marco de referencia se llamará meta-experimento. Un **meta-experimento** consiste en infinitas repeticiones, o réplicas, del mismo experimento. Así, si el experimento consiste en sacar una muestra aleatoria de tamaño  $n$  de alguna población, el correspondiente meta-experimento supone sacar repetidas muestras aleatorias de tamaño  $n$  de la misma población. El proceso de sacar repetidamente es seguido indefinidamente con los miembros de cada muestra reemplazados antes de sacar la siguiente. Notar que un meta-experimento es una construcción teórica más que una operación que es realizada realmente por algún investigador. El concepto de meta-experimento proporciona un lazo entre la variabilidad en el muestreo y la probabilidad. Puesto que la probabilidad de un suceso puede ser interpretada a la larga como la frecuencia relativa de ocurrencia de un suceso, y elegir una muestra aleatoria es una operación de azar, el meta-experimento consiste en muchas repeticiones de esta operación de azar, y por tanto las probabilidades concernientes a una muestra aleatoria pueden interpretarse como una frecuencia relativa en un meta-experimento. Así, la distribución en el muestreo describe la variabilidad entre las muchas muestras aleatorias en un meta-experimento.

Para estudiar el muestreo aleatorio de una gran población dicotómica, podemos usar la distribución binomial para calcular probabilidades de todas las posibles composiciones de la muestra. Estas probabilidades en orden determinan la distribución en el muestreo de  $\hat{\pi}$ . Si la variable observada es cuantitativa, la cuestión de similaridad entre muestras y población es más compleja que para datos dicotómicos. Analizar la distribución en el muestreo de la media muestral nos lleva a contestarnos preguntas del tipo: "¿Cuán cerca de  $\mu$  está  $\bar{X}$ ?", de donde nos aparecerá el concepto de **error típico de la media** como medida de esta discrepancia. Se puede interpretar en términos de error esperado en el muestreo, el cual refleja por una parte su dependencia del tamaño muestral (es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de  $n$ ), y de la desviación típica muestral como estimación de la desviación típica poblacional.

## CONTRASTE DE HIPÓTESIS

La probabilidad y la estadística deben desarrollarse de forma que se resalte su interrelación. Si se quiere que los

ante una situación cuyo resultado se desconoce de antemano tiene su modelo dentro de este campo. Así, la estadística y la probabilidad proporcionan aplicaciones de las matemáticas llenas de sentido.

**La estadística y la probabilidad son utilizadas en muchos temas del curriculum de enseñanza media**, así como en los planes de estudio de muchas carreras. En muchas asignaturas de enseñanza media se utilizan recursos estadísticos para interpretar datos, como gráficas, parámetros estadísticos, distribuciones de frecuencias, etc., así como recursos e interpretaciones probabilísticas, como en física cuántica, etc.

El biólogo estudia el crecimiento y los cambios en el tiempo de las poblaciones de seres vivos, estima el tamaño de las poblaciones por medio de muestras o por métodos de captura-recaptura, aplica modelos probabilísticos al estudio de la genética, diseña experimentos que analiza estadísticamente, compara el efecto de un determinado tratamiento o alimentación sobre una muestra y analiza si el resultado del efecto es estadísticamente significativo como para aplicarlo sistemáticamente con objeto de mejorar cosechas o crecimientos de ganado,...

El geógrafo utiliza los datos del censo para estudiar el crecimiento de las ciudades, se pregunta por los recursos naturales y por cuánto pueden durar, analiza los índices de nacimientos y muertes relacionándolas con la explosión demográfica,...

El sociólogo utiliza encuestas, censos, índices, estadísticas, ... como fuentes de datos sociológicos, debiendo utilizar técnicas estadísticas para su análisis.

El historiador necesita utilizar datos históricos como una de sus fuentes de investigación del pasado, debiendo enfrentarse a los problemas de poca calidad de los datos y de cambio de definición de los mismos.

El economista deberá manejar encuestas, índices de inflación, mediciones de la economía del país, el índice de precios al consumo, proyecciones de tendencias actuales,...

El físico utiliza la media aritmética para mejorar la exactitud de sus mediciones, mide los efectos de los fenómenos físicos, debe tener en cuenta la variabilidad de los resultados de experimentos repetidos, expresa la posición de una partícula en el átomo en términos de probabilidad,...

## MUESTREO

Recientemente el profesor Caludi Alsina proponía un listado de capacidades que todo ciudadano o ciudadana debería

ser capaz de alcanzar al finalizar sus estudios obligatorios de matemáticas de los que podríamos destacar:

- Conocer los márgenes de error y de acierto de sondeos y encuestas en sus distintas variantes (opinión, tendencia de voto, resultado electoral, ...)
- Conocer la técnica para realizar muestreos entre la población, sabiendo apreciar la representatividad de la misma a la vista del método de selección seguido y de la amplitud muestral considerada.

La finalidad del muestreo es proporcionar diseños muestrales, esto es, métodos de selección y de estimación, que arrojen los mejores resultados (usualmente mínima varianza) al menor costo posible. Para un costo dado podemos utilizar diferentes diseños muestrales, algunos de los cuales pueden diferir únicamente en la manera de efectuar la estimación, pero podrán compararse entre sí en términos de la varianza de su distribución en el muestreo o de su error cuadrático medio.

Sabemos que el valor correcto de un parámetro poblacional se puede determinar a través de un censo, es decir, por el estudio de toda la población. Sin embargo, en el muestreo, al tomar una muestra sólo revisamos una fracción de una población, y en base a ella, inferimos el valor del parámetro en la población completa. Es evidente que en estas condiciones existirá un error en la estimación. Siempre, o casi siempre, existirá un error, no estamos exentos de él; pero éste es controlable, ya que la varianza de la media muestral se encuentra en función del tamaño de la muestra.

El usuario de la información debe ser consciente de este error, con respecto al parámetro poblacional existe un determinado porcentaje de él que está dispuesto a aceptar como error de muestreo.

Sin embargo, como el azar está presente en cada muestra que se elige, el estadístico no puede asegurar para todas las muestras posibles un mismo error.

## ESTIMADORES

La descripción de un conjunto de datos (muestra) puede tener interés por sí misma, pero habitualmente el propósito del investigador es extraer resultados aplicables a más unidades de las estrictamente observadas. La **estadística** proporciona una base racional para ese proceso de generalización, que tiene en cuenta la variabilidad de los datos. **La idea clave en la aproximación estadística es considerar la muestra como una parte de la población, siendo esta última el foco real de interés práctico y/o**

cesó de inferencia, ésta no debe ser enseñada como una mera colección de técnicas, sino como una materia práctica dedicada a obtener y procesar datos con vista a realizar afirmaciones (deducir consecuencias, verificar hipótesis o tomar decisiones) sobre las situaciones reales que han generado los datos. Hay que desarrollar en los estudiantes una apreciación de cómo trabajar con datos, cómo obtener indicaciones claras de ellos y cómo evitar o reconocer los peligros de una mala representación de los mismos.

Se debe proporcionar al alumnado las estrategias mínimas que permitan realizar el recorrido adecuado que en todo proceso estadístico se produce: partir de plantear el problema, analizando la situación planteada y determinando qué se pretende, cómo y a través de qué variables; continuar con el diseño de la recogida de datos, paso que normalmente se obvia y que requiere de una especial atención, en tanto en cuanto determina la calidad del resultado de nuestro estudio, ya que en él se debe decidir determinadas cuestiones que garanticen la adecuación al modelo de muestreo aleatorio; a continuación, una vez obtenidos los datos, realizamos un análisis exploratorio de los mismos, obteniendo los estadísticos requeridos e interpretándolos de acuerdo con la muestra; y a partir de la confirmación del modelo como adecuado, tomar una decisión.

El alumnado debe trabajar las ideas estadísticas en una variedad de situaciones prácticas para experimentar la aplicabilidad de los modelos, llegando al nivel de tomar decisiones con base estadística (a un nivel apropiado). Los ejemplos deben ser extraídos de diversas partes del currículum, así como de importantes áreas de la vida real. Los datos a analizar pueden ser obtenidos de estadísticas oficiales, de artículos periodísticos de actualidad, o del entorno escolar del estudiante. El énfasis debe estar puesto en la comprensión

por el estudiante de los principios y conceptos estadísticos, así como en la correcta interpretación de los datos.

No es necesario ni aconsejable una justificación teórica completa de todos los contenidos. Hay ideas estadísticas que son importantes pero cuya justificación teórica requiere unos conocimientos matemáticos superiores al nivel del alumnado. En tales casos se debe utilizar simulaciones, juegos, experimentos y ejemplos reales para ilustrar tales ideas.

Se debe evitar el enseñar solamente las fórmulas apropiadas, transmitiendo así la idea de que la estadística es una mera colección de técnicas. Sin embargo, cuando la justificación teórica de una idea estadística esté al alcance del alumnado, debe ser expuesta. En cualquier caso, el conocimiento intuitivo prepara para un conocimiento riguroso: el alumnado debe haber experimentado previamente con problemas reales o simulados, los conceptos y técnicas que, después, le serán introducidos formalmente, concienciándose de la utilidad de los mismos.

Una excesiva atención al cálculo mecánico de los parámetros estadísticos puede hacer perder la visión del aspecto inferencial de la estadística. Por ello, es recomendable la utilización de las calculadoras como herramienta de cálculo, pero teniendo en cuenta que cualquier pregunta que requiera cálculos debe requerir también una discusión de los resultados obtenidos.

El uso de calculadoras permitirá no utilizar excesivo tiempo en asegurarse de que el alumnado sabe calcular medias, varianzas, rectas de regresión,... y dedicar más tiempo al análisis de la naturaleza de los datos, a los detalles del muestro y a la interpretación de los datos ■

## BIBLIOGRAFÍA

- Alsina Alcalá, C. *¿Para qué aspectos concretos de la vida deben preparar las matemáticas?*. UNO, 1994, 1, 37-43.
- Burrill, G. (1992). *Data analysis and statistics across the curriculum* (Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series. Grades 9-12). NCTM. Reston, Virginia.
- Daniel, W. W. (1993). *Biostatística*. Editorial LIMUSA. México D.F.
- Dregroot, M. H. (1988). *Probabilidad y Estadística*. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.: Wilmington.
- Engel, A. (1988). *Probabilidad y Estadística*. 2 Vol. Mestral: Valencia.
- Gil, D. Y de Guzman, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. Editorial Popular, S.A.. Madrid.
- Grilles, J.M. Y Pla, F. (1991). *Probabilidad y Estadística Materiales bachillerato experimental*. Generalitat Valenciana.
- N.C.T.M. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. SAEM "Thales". Sevilla.
- Santalo, L. A. (1977). *La educación matemática hoy*. Teide. Barcelona.

estudiantes comprueben sus hipótesis en estadística, hay que proporcionarles sólidas estructuras conceptuales de distribuciones de probabilidad.

Al resolver los problemas, los estudiantes pueden asimilar matemáticas nuevas y adquirir en el proceso la estructura conceptual de la distribución  $\chi^2$ .

Además de proporcionar información en relación con un problema (de estadística) específico, los resultados pueden usarse también para confirmar el valor teórico que se puede hallar en una tabla de la distribución  $\chi^2$ . Esta última actividad entra claramente dentro del dominio de la probabilidad.

Si bien se habrá visto que dos medias pueden compararse usando un intervalo de confianza para la diferencia, se considera de interés explorar otras aproximaciones a la comparación de medias: el proceso conocido como test de hipótesis. Debe quedar claro que un test estadístico de hipótesis es un proceso para valorar la compatibilidad de los datos con lo que llamamos hipótesis nula: los datos se consideran compatibles con ella si cualquier discrepancia con lo que plantea es atribuible al azar (o sea, al error de muestreo). Los datos juzgados como incompatibles con la hipótesis nula es cogido como evidencia en favor de la hipótesis alternativa. En cualquier caso el planteamiento de un contraste de hipótesis se hace con la sana intención de rechazar la hipótesis nula. Pero ha de remarcarse que el que no se rechace ésta no supone su aceptación. Debemos ir con cuidado en la expresión de la conclusión, y no decir que hay evidencia a favor de la hipótesis nula, sino sólo que hay evidencia insuficiente en su contra: "ausencia de evidencia no es evidencia de ausencia", decía el astrónomo Carl Sagan.

El proceso de test parte de suponer que  $H_0$  es cierta, y entonces preguntarnos si los datos contradicen tal asunción. Esto ocurre cuando la probabilidad de las diferencias que se han obtenido entre los valores observados y los esperados es muy pequeña, con lo cual la hipótesis nula se rechaza. El cálculo de esta probabilidad permite introducir el concepto de **p-valor**: el **p-valor** de los datos es el área bajo la curva de la distribución nula (curva de probabilidad suponiendo cierta  $H_0$ ) más allá de los valores que limitan la zona crítica. Así el **p-valor** de los datos es una medida de su compatibilidad con  $H_0$ : un gran **p-valor** (cerca de 1) indica que los datos son compatibles con  $H_0$ , mientras que un **p-valor** pequeño (cercano a 0) indica incompatibilidad de los datos con  $H_0$ . Una confusión común es interpretar el **p-valor** como la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta. Dicha equivocación es la que cree que si  $H_0$  ha sido rechazada al 5 %, entonces la probabilidad de que  $H_0$  sea cierta es del 5 %.

La utilización del test de la  $t$  de Student proporciona un mecanismo sencillo de aplicar, pero poco intuitivo. En cual-

quier caso, se puede introducir la distribución nula del estadístico test viendo la evolución de la forma de su curva densidad a medida que aumentan los grados de libertad, hasta ser completamente normal cuando éstos son infinitos. Pese a ello es una herramienta potente que se puede utilizar para muestras pequeñas.

Como alternativa se presenta la posibilidad de utilizar el test de Mann-Whitney como modelo para comparar dos muestras independientes. Es un competidor del test  $t$ , pero es distinto, puesto que el test de Mann-Whitney es válido pase lo que pase con la forma de la distribución poblacional. Es llamado por lo tanto de tipo *libre distribuido*. Además, el test de M-W no se centra en un parámetro en particular tal como la media o la mediana; por esta razón se le llama de tipo *no paramétrico*.

El estadístico del test de M-W se denota por  $U_s$ , y mide el grado de separación o cambio entre las dos muestras. Un gran valor de  $U_s$  indica que las dos muestras están muy separadas, con relativamente poco solapamiento entre ellas, y por tanto incompatibilidad de los datos con  $H_0$ . Para que el test de M-W sea aplicable necesitamos que sea razonable ver los datos como unas muestras aleatorias de sus poblaciones respectivas, con las observaciones dentro de cada muestra independientes, y las dos muestras independientes una de otra. Entonces el test es siempre válido sin importar la forma de las distribuciones poblacionales.

El test de M-W y el test  $t$  se dirigen a responder la misma cuestión, pero tratan los datos de distinta manera. A diferencia del test  $t$ , el test de M-W no usa los valores reales de  $Y$  sino sólo sus posiciones relativas en el rango ordenado. Esta es la fuerza y la debilidad del test. Por otro lado, el test de M-W puede no ser eficiente: puede faltar potencia porque no usa toda la información contenida en los datos. Esta ineficacia es especialmente evidente para muestras pequeñas.

Ninguno de los dos test es claramente superior al otro. Si las distribuciones poblacionales no son aproximadamente normales, el test  $t$  puede no ser válido. Además, el test de M-W puede ser mucho más potente que el test  $t$ , especialmente si las distribuciones poblacionales son altamente sesgadas. Si las distribuciones poblacionales son aproximadamente normales con iguales desviaciones típicas, entonces el test  $t$  es mejor, pero sus ventajas no son necesariamente muy grandes; para tamaños muestrales moderados, el test de M-W puede ser tan potente como el test  $t$ .

## CONCLUSIONES

Si bien se supone que el estudiante de bachillerato ya ha tenido un contacto previo con contenidos de probabilidad y estadística, por la especial significación que tiene el pro-

mica; no son estudios especializados pero de hecho todo el mundo está pensando en el *futuro* estudiante universitario y en su supervivencia en un medio ambiente académico especializado.

Sin duda ninguna este juego de fuerzas genera sobre el bachillerato, y en particular sobre las Matemáticas, un conjunto de tensiones que conviene identificar y comprender. Las cuestiones que se listan al principio pretenden servir de lanzadera para que tales tensiones sean analizadas desde distintos puntos de vista: la formación profesional, la universidad, la administración educativa, la formación del profesorado, ...

Si no hubiese más remedio que establecer una clasificación del origen de las mencionadas tensiones, se podrían señalar cuatro grandes grupos de fuentes problemáticas, relacionadas entre sí, naturalmente, pero de características bien diferentes.

En primer lugar se puede mencionar una de carácter intrínseco y hasta cierto punto novedoso. Los nuevos bachilleratos institucionalizan la existencia de modalidades distintas, que ya eran un hecho en el curso de orientación universitaria, y que a su vez contemplan la posibilidad de recorridos formativos diferenciados. Esta diferenciación queda plasmada en la oferta de una pluralidad de asignaturas de matemáticas —Matemáticas del bachillerato científico y tecnológico, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, Matemáticas de la forma, ...—. Diversidad supone y permite riqueza, pero también complejidad estructural y esfuerzo para poner de manifiesto la distinta naturaleza de cada una de esas asignaturas.

El segundo grupo que se puede señalar agrupa al conjunto de relaciones entre las Matemáticas del bachillerato, esto es de la Educación Secundaria Postobligatoria, y las Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria. Aunque nadie se atreve a escribirlo en ningún sitio, parece estar muy extendida entre los profesionales de la docencia en Matemáticas la idea de considerar el bachillerato como el reducto en el que —por fin— se podrá meter caña, matemática se entiende. Pero esta idea, de imponerse, imprimiría explícitamente un indeseado carácter al bachillerato y

relegaría a las matemáticas de la etapa obligatoria a un inesperado papel subsidiario.

En tercer lugar cabe mencionar que la relación entre las Matemáticas en el Bachillerato y las Matemáticas en la Universidad no son precisamente idílicas. Buena parte del profesorado universitario atribuye la responsabilidad del fracaso en matemáticas de sus estudiantes a la *deficiente preparación matemática con la que acceden a la Universidad*. Pero obviamente esta explicación no es más que una cortina de humo tendida sobre los propios problemas que la Universidad tiene y que no quedan resueltos, ni siquiera planteados, por lamentar la desaparición de las integrales binómicas de los programas del bachillerato. Por otra parte, éste sería un lamento inocuo de no ser porque *efectiva y objetivamente* ha habido un ilógico, pero real e irreversible de momento, desarrollo independiente de los planes de estudio de la Enseñanza Secundaria y de la Enseñanza Terciaria. Así, paradójicamente, en muchas diplomaturas y licenciaturas los planes de estudios han sido aprobados antes de cerrarse el diseño de los nuevos bachilleratos y, en consecuencia, teniendo como punto de referencia, si es que ha habido punto de referencia, un BUP y un COU a extinguir.

Finalmente, la cuarta fuente de tensiones es la existencia de una prueba de Acceso a la Universidad que tiene asignada una misión puramente *pseudoadministrativa*, redistribuir la demanda entre las distintas carreras, pero que *de facto* juega, o puede jugar, un fuerte papel de condicionante del curriculum de las Matemáticas del bachillerato. Es una realidad incuestionable que la inmensa mayoría de los profesores de COU o del último curso de los nuevos bachilleratos utilizan como base para el material de trabajo en el aula las pruebas de selectividad propuestas los cursos anteriores en su distrito universitario. Mucho más dudoso es que en el proceso que conllevan estas pruebas —designación de responsables, redacción de los exámenes, ...— sea tenido en cuenta de manera consciente este papel curricular o, lo que a lo mejor es ya pedir demasiado, se planifique cuidadosamente neutralizar este efecto curricular que es altamente indeseable y que no tiene en absoluto nada que ver con el sentido y con la misión de las pruebas de acceso a la Universidad, si es que éstas tienen algún sentido ■

Texto de **Javier Brihuega**  
Centro de Desarrollo Curricular. Madrid

Dentro de las distintas modalidades de Bachillerato hay distintas opciones de Matemáticas, algunas significativamente diferentes.

## **LAS MATERIAS DE MATEMÁTICAS EN LAS MODALIDADES DE BACHILLERATO**

Tanto en la modalidad de **Ciencias de la Naturaleza y de la Salud**, como en la de **Tecnología**, las Matemáticas tienen *el mismo currículo*. Destaca en él la mayor fuerza de un carácter formalizador y teórico, la presencia de mayores

## Mesa Redonda

### LA ENCRUCIJADA DEL BACHILLERATO

Coordina:

**Francisco Jesús García**

Participantes:

**Javier Brihuega, Serapio García, Luciano González,  
José Antonio Mora y Mariano Soler**

#### Cuestionario para participantes

1. Una vez fijados en todas las administraciones educativas los currículos de Matemáticas del Bachillerato, ¿qué valoración puede hacerse del conjunto de objetivos propuestos y de contenidos prescritos?
2. El bachillerato LOGSE se estructura en Modalidades que presuponen un cierto grado de especialización, o al menos de diversificación, de modo que el perfil de los estudiantes de las distintas modalidades puede diferir sustancialmente. ¿Está bien recogida esta diversificación en los currículos? ¿Está capacitado el profesorado de matemáticas para afrontar esta diversificación? ¿Qué necesidades formativas podrían derivarse?
3. Una de las salidas académicas naturales del Bachillerato es la Universidad. Sin embargo, es notorio que los planes de estudios universitarios se han confeccionado en la inmensa mayoría de los casos independientemente, cuando no previamente, al plan de estudios del Bachillerato. ¿Qué implicaciones se derivan de esta realidad? ¿Habrá un puente o un abismo entre el Bachillerato y la Universidad?
4. La LOGSE determina la existencia de una prueba de acceso a la Universidad. ¿Qué influencia *de facto* provocará la prueba de selectividad sobre el desarrollo de las asignaturas de matemáticas? ¿Derivará esta situación en la existencia de dos currículos, el *oficial* prescrito por los documentos y el *real*, impuesto o pactado, tácita o explícitamente, por o con la Universidad?
5. Curiosamente pocas veces queda resaltado el hecho de que el Bachillerato es también Enseñanza Secundaria, aunque sea postobligatoria, tendiéndose a resaltar más las propiedades que separan a las dos etapas, ESO y Bachillerato, que las características comunes. ¿Hay un puente o un abismo entre la ESO y el Bachillerato?
6. ¿Puede considerarse el diseño de las asignaturas de matemáticas del Bachillerato lo suficientemente versátil como para atender la profusa variedad de familias y módulos profesionales?
7. Una cuestión relativamente abierta todavía en el diseño de los Bachilleratos es el listado de *asignaturas optativas*. Si se cumple el espíritu de la LOGSE, no debería ser imposible contemplar la posibilidad de una cuarta asignatura de matemáticas que, con carácter optativo, podría ser ofertada en alguna o en todas las modalidades del bachillerato. ¿Qué objetivos y, sobre todo, qué contenidos *no troncales* y *no contemplados* en las asignaturas ya existentes podrían configurar esta eventual asignatura? ■

Texto de **Francisco Jesús García García**,  
Coordinador. CEP de Alicante.

El título de esta mesa redonda es algo más que una simple metáfora. En el bachillerato convergen toda una serie de factores que convierten esta etapa educativa en un auténtico

nudo gordiano del que todo el mundo espera demasiado. Pero muchas de esas esperanzas son parcialmente contradictorias entre sí: el bachillerato es una etapa no obligatoria, pero *de hecho* va a ser casi generalizada —ya lo es prácticamente—; no es una enseñanza preuniversitaria pero *de hecho* la Universidad es el principal atractor de su dinámica.

3. No tendría por qué producirse ruptura entre el bachillerato y la Universidad y sería relativamente fácil, si se quisiera realmente, encontrar puntos de acuerdo y colaboración. Pero me temo que el funcionamiento de la Universidad, a todos los niveles, seguirá prescindiendo de lo que se hace o intenta hacer en otros niveles educativos.
4. Seguramente, la manera de entender, aplicar y valorar la prueba de selectividad por parte de la Universidad influirá en los programas del bachillerato, sobre todo en el enfoque de los contenidos y en la metodología usada, que vendrá mediatizada por la superación de dicha prueba. Habrá de intentarse conseguir que la Universidad acepte "todas" las propuestas que contienen los currículos de matemáticas en el bachillerato y que las contemple a la hora de confeccionar y valorar la prueba de selectividad.
5. Con los programas de la E.S.O. y los bachilleratos en la mano, no parece haber un salto enorme entre los dos niveles educativos, incluso se podría hablar de una continuidad razonable. Sin embargo, el carácter terminal de la E.S.O. y el más propedeútico del bachillerato pueden traer consigo unas diferencias demasiado grandes en cuanto al grado de profundización y formalización en los conceptos.
6. Creo que no. En primer lugar, y dejando aparte las matemáticas de la forma del bachillerato artístico, solamente hay dos programas distintos de matemáticas: las del bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud junto con el de Tecnología por un lado y por otro el de las matemáticas del bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales. Esto no supondría mayor problema si el alumno/a tuviera oportunidad de poder elegir cualquiera, o ambas, de las dos opciones. Pero en la práctica, el itinerario no parece ser tan flexible como indica la optatividad prevista porque en el 2º curso no se puede elegir, por ejemplo, unas matemáticas II de Sociales si no se ha cursado antes las matemáticas I de dicho bachillerato.
7. Enlazando con lo dicho en la cuestión anterior, debería contemplarse la existencia de una asignatura optativa en cada uno de los bachilleratos que pudiera ser complementaria de los contenidos cursados por el alumno/a en su modalidad. Por ejemplo, un alumno/a del bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales (que podría estar interesado en hacer posteriormente Económicas) debería poder elegir una asignatura en la que se completasen sus conocimientos de Álgebra y Análisis. Análogamente, un alumno/a del bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud debería tener la posibilidad de poder completar sus conocimientos de Estadística y Probabilidad ■

Texto de **Luciano González Fernández**  
CEFOCOP. Pontevedra

### **LAS MATEMÁTICAS EN LOS NUEVOS BACHILLERATOS EN GALICIA: IMPRESIONES DESDE EL CEFOCOP**

La Comunidad Autónoma gallega, aun cuando cuenta con competencias en Educación desde el año 1980, no inicia la experimentación de la Reforma hasta el año 1989. Esta experimentación se inicia con la E.S.O. en tres centros: dos en la provincia de La Coruña, en el I.F.P. de Pontedeume y en el Hogar Santa Margarita (Colegio Concertado) de la capital de la provincia, y el tercero en la provincia de Pontevedra, concretamente en el C.P. de Chans en Vigo. Los alumnos y alumnas de este último centro, una vez que superan el primer ciclo de la E.S.O., pasan al I.B. "Meixueiro", que está próximo al colegio.

Estos tres centros de Secundaria fueron también los primeros en experimentar los Nuevos Bachilleratos. En este año 1995 tienen lugar las primeras pruebas de acceso a la Universidad para el alumnado de estos centros.

En el CEFOCOP de Pontevedra, en uno de los Cursos de perfeccionamiento para profesores de Matemáticas de Secundaria, intervinieron profesores y profesoras de Matemáticas de estos Centros pioneros en la experimentación del nuevo sistema educativo en Galicia. El debate que surgió en esta sesión puede dar respuesta a muchas de las preguntas que aquí nos planteamos.

Uno de los interrogantes que se plantea el profesorado de Matemáticas de Educación Secundaria de Galicia es ¿Por qué el D.C.B. de Matemáticas es único para todo el Bachillerato y no se separa por cursos como figura en el Real Decreto de Mínimos?

La Consellería de Educación justifica este hecho diciendo que así se evita la rotura con la E.S.O., en la que el D.C.B. de Matemáticas es único para toda la etapa. Considera también la Consellería que corresponde al profesorado hacer la secuenciación de los objetivos y contenidos para los dos cursos de Bachillerato. Por otra parte el propio Decreto de Mínimos sólo diferencia los contenidos y no los objetivos, que los determina para todo el Bachillerato. Las profesoras y profesores que tuvieron que hacer el desarrollo curricular, encontraron grandes dificultades para realizarlo, especialmente porque los intereses variaban según



procedimientos algebraicos, la mayor profundización en procedimientos de cálculo funcional y la presencia de un estudio analítico de curvas y superficies (no limitado al tradicional estudio de rectas y planos) y distintos tipos de sistemas de representación.

En la modalidad de **Humanidades y Ciencias Sociales** se denomina *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales* y su currículo esta profundamente influido por el carácter de aplicación a las Ciencias Sociales. En este sentido la Resolución de Problemas debe estructurar sus contenidos. La Estadística cobra una gran importancia (puesto que los métodos estadísticos están, hoy en día, en todos los procesos de investigación de las Ciencias Sociales).

El estudio de Matrices y sus operaciones, como elemento de interpretación de situaciones de la realidad económica y social, diferencia a estas materias de las de las modalidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología, en las que su estudio es más formal y su aplicación debe ser a situaciones de carácter científico y técnico. Por último, los contenidos relativos al Cálculo y Análisis se limitan, en cuanto a su profundización, a aquellas herramientas básicas para el desarrollo de los contenidos anteriormente citados.

En la modalidad de **Artes**, como materia optativa, están las *Matemáticas de la Forma*. El conocimiento de los elementos matemáticos presentes en las formas y proporciones geométricas va a permitir su comprensión y utilización en diversos aspectos del arte. Para desenvolverse en el medio artístico es conveniente y necesario conocer y saber manejar todos los elementos y propiedades matemáticas de las formas que han sido y son utilizadas en la creación artística. Éste es uno de los factores que estructuran la Matemáticas de la Forma en el contexto de la modalidad de Artes del Bachillerato. Los contenidos de esta materia se estructuran en torno a los elementos y movimientos en

el plano y en el espacio, curvas y superficies y proporciones y medidas.

### Relación con la Educación Secundaria Obligatoria

A lo largo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria los alumnos y alumnas han debido de seguir un proceso de construcción del conocimiento matemático basado en la aproximación de forma intuitiva y práctica a conceptos y procedimientos fundamentales, accediendo al mismo tiempo a niveles intermedios de abstracción, simbolismo y formalización.

En el Bachillerato se profundiza en el tratamiento de procedimientos de la etapa anterior, ajustándolos a su evolución intelectual y cognitiva, se introducen nuevos conceptos matemáticos, se utilizan algoritmos y técnicas de mayor complejidad, y se propicia el desarrollo de destrezas matemáticas más sofisticadas (ajustadas a su mayor margen de autonomía).

Esto no debe implicar un tratamiento de los contenidos ajeno a la realidad inmediata y cotidiana, sino que, como se hacía en la Educación Secundaria Obligatoria, se debe propiciar que los alumnos y alumnas, a partir del estudio de situaciones problemáticas abiertas del mundo físico y social de su entorno, sean capaces de formular conjeturas, plantear y contrastar hipótesis, construir modelos abstractos y dominar un lenguaje simbólico y formal como mecanismo para la introducción al razonamiento hipotético deductivo y a un nivel de formalización suficiente para abordar estudios o actividades productivas posteriores.

No hay que olvidar que las Matemáticas están en la base de cualquier contexto científico, tecnológico, artístico o de investigación social y económica, y es desde esta situación como deben ser tratadas en el Bachillerato ■

Texto de **Serapio García Cuesta**  
IB Andrés de Vandelvira. Albacete

### CONTESTACIONES AL CUESTIONARIO

1. Me parece que son demasiado amplios como para que puedan tener un desarrollo profundo en solo dos años. De todas formas, no conozco en detalle la experimentación que de los nuevos bachilleratos se está haciendo en algunos centros. Posiblemente esa experimentación nos pueda proporcionar mejores bases para opinar.

2. Creo que no, o por lo menos no lo está suficientemente. Básicamente no hay más que dos programas de matemáticas en los bachilleratos (si prescindimos de las matemáticas de la forma que se da en el bachillerato artístico) y además el sistema de elección tiene poca flexibilidad para permitir que se puedan elegir como optativas en algunas de las opciones. El profesorado está capacitado para afrontar esa diversificación, porque no es muy distinta a la que ahora existe entre matemáticas I y II de COU. Otra cosa es que a nivel metodológico y de enfoque de las matemáticas sí creo que necesitaría reciclarse.

opciones de tipo didáctico y pedagógico: han descargado la responsabilidad en las decisiones del profesorado mientras en la práctica se mantiene el desajuste entre los papeles formativo y seleccionador del final de la educación obligatoria y principio de la postobligatoria.

### 1. El D.C. de matemáticas: de la teoría a la práctica

Se opta por un diseño curricular abierto y flexible, que considera al profesor como agente que concreta ese currículum con la clase. Pero esto no es más que la declaración de principios, las contradicciones surgen cuando a este diseño abierto le añadimos dos elementos suplementarios: un decreto de mínimos —que para un alto porcentaje de estudiantes será un decreto de máximos—, y la mediación de unas editoriales que recogen la tradición del B.U.P.

Cuando uno mira los libros de texto *reformados*, da la sensación de que los mínimos establecidos parecen insuficientes a los ojos de los editores e intentan concentrarlos en los tres primeros cursos, lo que en muchos casos equivale a decir que se acumulan en el 3º curso debido a la proverbial desconfianza de la etapa anterior —en este caso ciclo. Con ello se consigue descargar de contenidos el 4º curso para establecer la separación entre las dos opciones: una A descafeinada y de repaso, y otra B mucho más dura en la que se incluyen no sólo los contenidos específicos de la opción, sino muchos otros que ahora corresponden a cursos posteriores: polinomios, cónicas, regresión, etc.

### 2. Consecuencias de la opcionalidad

La opcionalidad en el último curso de E.S.O. es un arma de doble filo: en principio es consecuente con el precepto "a cada uno según su capacidad" y permite que los estudiantes sigan un curso de matemáticas acorde con su rendimiento. Sin embargo, ciertos elementos externos al sistema como la presión social pueden desvirtuar las ventajas de esta elección. La situación actual guarda una cierta similitud con la experiencia inglesa en la década de los setenta y principios de los ochenta, donde un examen a los 16 años se encargaba de sancionar el nivel de matemáticas obtenido por cada estudiante. Esta prueba ofrecía dos opciones: el nivel O —Ordinario—, preparado para el 20% de la escala alta, y el CSE —Certificado—, diseñado para el 40%-45% de capacidad media, mientras el tercio restante no obtenía título o no llegaba a presentarse a los exámenes. Esto hacía que los centros ofrecieran cursos diferenciados con el fin de preparar a sus estudiantes al examen adecuado a sus capacidades. Sin embargo, la presión social hacia las matemáticas escolares originaba que padres y estudiantes presionaran a las escuelas para que organizaran cursos de preparación para el nivel O. Fruto de ello, muchos estudiantes seguían cursos de matemáticas de un nivel superior a su rendimiento,

en algunas zonas el 80% de los estudiantes seguían cursos de nivel O, que seguían con excesiva rapidez para su capacidad y con la falta de comprensión derivada.

No es difícil extrapolar al caso español, aunque no exista la presión del examen a los 16 años —aplazado aquí hasta los 18—, lo que sí tendremos es un Bachillerato con excesivos contenidos para su duración que intentará echar mano del último curso de E.S.O. para aliviar su excedente.

### 3. Los contenidos en el Bachillerato

En lo referente a la sobrecarga de programas en el nuevo Bachillerato, provoca cierta sorpresa la lectura del párrafo 577 del informe Cockcroft donde recoge las iniciativas de instituciones para que el núcleo central constituya únicamente el 40% del contenido total "considerando el riesgo de que cualquier incremento adicional impidiera la libertad de presentación y desarrollo que existe en la mejor enseñanza de este nivel".

Con los contenidos actuales no hay forma de que el estudiante resuelva problemas, realice investigaciones, participe en debates en los que comunicar sus ideas, estudie aplicaciones, indague los antecedentes históricos de un tema, utilice material didáctico o consulte documentación. Sin embargo, los profesores somos los menos propensos a reducir los contenidos, normalmente después de la queja anterior, siempre tenemos la tentación de afirmar que tal tema se le presta poca atención sin advertir la contradicción en la que caemos.

Pero los contenidos además de ser excesivos, no han sufrido revisiones substanciales desde las primeras propuestas a pesar del carácter experimental que se ha dado a la progresiva implantación del Bachillerato y llevamos ya 10 años. Se echa en falta, por poner un ejemplo, la inclusión de las matemáticas discretas para la presentación y tratamiento de la información. Para no caer en la incoherencia señalada en el párrafo anterior, este incremento en el currículum podría hacerse en detrimento del cálculo diferencial, la geometría analítica o el álgebra lineal según los Bachilleratos.

El Bachillerato se encuentra en un equilibrio inestable por la naturaleza de las presiones que le llegan de todas partes: una Universidad que desconfía de lo que se hace en la etapa anterior, una selectividad que intenta actuar como filtro de acceso pero se queda en distribuidora de estudiantes entre las distintas carreras, una presión social para que mayores porcentajes de estudiantes se incorporen al Bachillerato, vayan a pasar después a la Universidad o a los Módulos Profesionales. Como muestra, en el decenio 76-86, el porcentaje de estudiantes escolarizados de 15 a 19 años pasó del 39% al 55%, y esa tendencia no hacía más que iniciarse en esa época una vez se había producido en etapas anteriores con la L.G.E.

los Centros, y no fue fácil ponerse de acuerdo, para determinar qué dar en primero y qué dejar para segundo, sabiendo que las Matemáticas en segundo son optativas.

Para determinar el currículo de Matemáticas y el de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales para primero de Bachillerato hubo que tomar como referencia el Decreto de Mínimos. De esta forma se logró un acuerdo entre los tres centros que realizaban la experiencia, estableciendo un currículo común. Para segundo había que tener en cuenta las pruebas de acceso a la Universidad y esto resultó algo más complicado, ya que la Universidad Gallega tardó algún tiempo en nombrar los coordinadores para esta prueba y la "negociación" entre profesorado de Bachillerato y los coordinadores propuestos por la Universidad no tuvo lugar hasta bien avanzado el curso.

En el curso 94-95 continúan con los Bachilleratos los tres centros ya citados y se incorporan a la experimentación 37 centros.

Ante las reiteradas peticiones de que la Consellería dé unas directrices sobre el desarrollo curricular de los D.C.B.'s de Matemáticas, ésta publica unos cuadernos con unos modelos de desarrollo curricular, que llegan a los centros en el mes de marzo, si bien los institutos que están en la experiencia tenían desde casi el comienzo de curso un avance de esta publicación.

El modelo que presentan los profesores encargados por la Consellería nos parece muy interesante y de una gran ayuda para el profesorado. Echo de menos que en este desarrollo curricular no figure un compromiso expreso de la Universidad con respecto a las pruebas de acceso, pero de esto hablaremos más adelante.

En los nuevos Bachilleratos se habla de cinco Modalidades, si excluimos la *Modalidad de artes* en la que no tienen Matemáticas como asignatura propia de especialidad, nos quedan cuatro Modalidades en las que hay Matemáticas; esto nos puede llevar a pensar que existe una cierta diversidad. Sin embargo, viendo los currículos nos encontramos con sólo dos Bachilleratos: el de "ciencias" y el de "letras". Pensamos que debiera existir una mayor diversidad y no sólo en el aspecto legal creando Modalidades que no se reflejan en los currículos de Matemáticas.

La Consellería de Educación, creemos que para favorecer de algún modo la diversidad de la que hablamos antes, ofrece en los Bachilleratos tecnológico y científico una asignatura que me parece interesantísima. Se trata de "*Métodos estadísticos e numéricos*". Tanto los objetivos como los contenidos y metodología de esta asignatura, considero que están muy acertados y que completa muy bien la formación matemática del alumnado de estas Modalidades de Bachillerato.

Por último, voy a referirme al "paso" del Bachillerato a la Universidad. Quiero señalar en primer lugar que considero como única finalidad del Bachillerato el acceso a la Universidad. Es posible que el Bachillerato tecnológico, con un diseño totalmente distinto al actual, estaría encaminado a una Formación Profesional.

Los Bachilleratos son preuniversitarios, sin embargo existe un abismo entre la Universidad y el Bachillerato y pienso que este abismo se agranda.

Pude comprobar como al profesorado de Bachillerato le preocupa la prueba de acceso, y es totalmente lógico que le preocupe; esa prueba es la que determina, ante la sociedad, el éxito o el fracaso. De ahí que se negocie con los responsables de la prueba, tanto la forma como el contenido de la misma y se llegue a unos pactos, que incluso se escriben, sin tener en cuenta con lo que ese alumnado se va a encontrar en el centro universitario al que acceda. Algunos compañeros, tanto de Bachillerato como de Universidad, dicen, que en un momento experimental, es necesario e incluso conveniente hacer estos pactos. Pero la realidad es que esto se viene haciendo con el COU actual, que ya no es experimental.

Pienso que en el currículo de Bachillerato debió implicarse la Universidad; se evitaría de este modo lo que está ocurriendo con los planes de estudio que actualmente se están elaborando en las distintas Facultades y Escuelas, que parten de supuestos totalmente falsos, y así ocurre que a los exámenes de Cálculo en una Escuela Técnica se presente el 25% del alumnado matriculado.

Por tanto, mi respuesta a la pregunta de esta mesa es: **Hay un abismo entre el Bachillerato y la Universidad ■**

Texto de **José Antonio Mora Sánchez**  
I.F.P. Virgen del Remedío. Alicante

## DE LA SECUNDARIA OBLIGATORIA AL BACHILLERATO

Algunos de los problemas de las matemáticas del Bachillerato tienen su origen en situaciones no resueltas por la puesta en práctica de la etapa educativa anterior, la Educación Secundaria Obligatoria. Es el caso del tratamiento de los distintos niveles en la clase de matemáticas. Los documentos oficiales siempre han depositado la solución en

Texto de **Mariano Soler Dorda**

*E.T.S. de Ingenieros de Caminos*

Univ. Politécnica de Madrid

## ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA RELACION BACHILLERATO-UNIVERSIDAD

Por mi condición personal me centraré en dos de los puntos propuestos: **Requerimientos de la Universidad y Selectividad**.

### Requerimientos de la Universidad

La Universidad está condicionada en la confección de sus planes de estudio, entre otras cosas, por lo que la sociedad espera (o cree esperar) de los futuros licenciados universitarios. En principio se espera que el licenciado en una rama determinada sea capaz de desarrollar una labor profesional eficaz y se espera esta eficacia desde el primer momento. Los planes de estudios universitarios se plantean (al menos a un nivel de intenciones generales) para conseguir este propósito. El problema surge cuando llega el momento de tener en cuenta la formación con que llegan a la Universidad los alumnos que van a recibir dichas enseñanzas y se resuelve tomando como referencia para medir esta formación una medida absolutamente imaginaria: **Se considera que saben lo que el curriculum oficial dice que saben**. Basta un año de clases (o seguramente menos) en un centro universitario, sobre todo en un centro tecnológico, para comprobar que en muchos (demasiados) casos esto está totalmente alejado de la realidad. En casos como el de los alumnos que acceden a las Universidades Politécnicas el problema no está centrado en el desconocimiento **real** de los contenidos marcados por su curriculum, sino en que no están bregados en su uso o no son capaces de repentizarlos en el momento oportuno. De hecho una situación típica en primer curso de una escuela técnica es la del alumno que "se pierde" en un razonamiento (no necesariamente una demostración) debido a que tiene toda su atención puesta en los pasos puramente mecánicos de este, pasos de tipo operativo (más aritméticos que matemáticos) que deberían ser totalmente automáticos en él y no puede prestar atención a lo fundamental (los árboles no le dejan ver el bosque). La solución no reside en que deje de prestar atención a estos pasos sino que sean tan conocidos que no tenga que pensar en ellos. En esta dirección hay cuatro aspectos a destacar:

- **La "ortografía" de las matemáticas**, convenios sobre signos, paréntesis (deben ser carísimos por el poco uso que se hace de ellos), prelación de operaciones, automatismos operativos, etc.

- **La memoria**, con su decisiva influencia en la repentinización de los temas y conocimientos relacionados con el que se está tratando. Se ha extendido el uso del dicho: "Como las matemáticas son lógicas y deductivas, la memoria sobra". Jamás se ha dicho una barbaridad de mayor tamaño.

- **La casi totalmente olvidada geometría**, herramienta básica en toda ciencia que tenga algo que ver con la realidad.

- **El exceso de abstracción** al tratar ciertos temas unido a la falta de práctica en casos reales debidamente simplificados.

No se trata tanto de que el alumno aprenda más cantidad "de cosas", sino más bien de que las "aprenda bien" y conozca su significado práctico.

Con la implantación de la LOGSE y la introducción de la ESO y los nuevos Bachilleratos nos encontramos con una parte de enseñanza obligatoria (ESO) que se extiende hasta los 16 años y que, por su propia concepción de **obligatoria**, va a ver reducidos sus contenidos y su práctica, quizá no de forma oficial pero sí de forma real. Si, como parece, estos contenidos disminuyen de forma importante, se presenta en el Bachillerato el gran reto de conseguir que no aumente el abismo existente entre la enseñanza no universitaria y la universitaria. Es clara la gran dificultad de esta tarea, y se corre la tentación de optar por la salida "fácil": que la Universidad rebaje los conocimientos mínimos exigidos. Esta solución es irreal por conducir directamente a la obtención de licenciados "light", que precisen obligatoriamente de cursos tipo "master" para aprender lo que debían haber aprendido en su licenciatura en lugar de dedicar éstos a su verdadero cometido: la formación interdisciplinar y/o superespecialización.

### Selectividad

La primera y fundamental pregunta que surge sobre la Selectividad es la de su **necesidad**. ¿Es necesaria o no? La respuesta depende directamente de lo que se persiga con ella. En este momento la Selectividad se ha convertido en un mero instrumento de **ordenación de alumnos para su adscripción a los distintos centros universitarios**. Pero a mi juicio su misión debe ser otra más importante: asegurarse de que el alumno que la supere **puede seguir los estudios que se propone realizar con una razonable esperanza de concluirlos satisfactoriamente**. Esto implica un endurecimiento de los requisitos de acceso, endurecimiento aparente ya que bastantes de los alumnos que actualmente entran en la Universidad abandonan sus estudios sin terminarlos tras un largo peregrinaje por repeticiones de curso y cambios de centro, por lo que es lógico pensar que hubiera sido mejor

#### 4. Los destinatarios del bachillerato y el nivel

Si, como se prevé, el Bachillerato será cursado en un futuro próximo por el 80% de la población de estas edades, parece que será inevitable que sigamos hablando del descenso del nivel. Baudelot y Establert (1990) advierten que cuando los profesores hablamos del nivel, normalmente establecemos la confrontación con nuestra época de estudiantes, en la que podía haber un 20% de bachilleres —normalmente el porcentaje de nivel superior—. El 20% de los mejores estudiantes actuales tiene más y mejores conocimientos, mayores estímulos, utilizan herramientas más perfeccionadas, y están mejor preparados de lo que estábamos nosotros.

Si lo que se desea es una comparación menos sesgada por la implicación personal, podríamos ir hacia una especie de P.N.B.M. (producto nacional bruto matemático). También en I.C.M.I. (1986) se propone determinar el rendimiento matemático de un sistema educativo atribuyendo un "peso" a cada contenido incluido en él, después habría que multiplicar esos pesos por la proporción de estudiantes que realmente los sigan.

#### 5. Demandas económicas y sociales hacia el Bachillerato

En las condiciones actuales no sería admisible un bachillerato del siglo XXI diseñado exclusivamente para la cuarta parte, ni siquiera para la mitad de la población. Las sociedades actuales tienen necesidad de amplias capas de técnicos bien formados, con mayores conocimientos matemáticos. En N.C.T.M. (1992) se recoge una estadística recogida de The Wall Street Journal que analiza hasta seis niveles de matemáticas y lengua requeridos para los traba-

jos ya existentes y para los nuevos que están surgiendo. El estudio confirma que la cantidad de población que necesita los dos niveles más altos —5 y 6—, pasa del 6% al 13%, en cambio, el porcentaje de los que tendrán suficiente con los dos niveles más bajos se reduce del 40% al 27%, mientras que el incremento más grande se produce en el nivel 4 —el que correspondería aproximadamente a las matemáticas del Bachillerato—, que pasa del 18% al 28%.

La introducción de la tecnología en el proceso productivo recorta el periodo de ocupación de los ciudadanos, en especial mediante el retraso de su incorporación al mundo del trabajo, tiempo que ha de invertirse forzosamente en su preparación.

#### 6. Estudios posteriores

No podemos olvidar el carácter preparatorio del Bachillerato para el acceso a estudios posteriores. Es aquí donde podríamos invocar el carácter selectivo del Bachillerato, pero es necesario matizarlo por varios motivos: el Bachillerato ha de dar una formación básica para incorporarse al mundo del trabajo, preparar para muchos otros estudios no universitarios y para carreras distintas a las de ciencias o ingenierías que son en las que involuntariamente pensamos los profesores de matemáticas.

Por último, un Bachillerato selectivo tendría sentido como preparación para una Universidad elitista en la que sólo los mejores tienen cabida y donde se les va a formar como investigadores o dirigentes, el sistema productivo no puede permitirse el lujo de una Universidad orientada a unos pocos a los que encargaría de la investigación básica ■

### BIBLIOGRAFÍA

- Baudelot, Ch. y Establert, R. (1990). *El nivel educativo sube*. (Morata: Madrid).
- Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. (M.E.C.: Madrid)
- I.C.M.I. (1986). *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los noventa*. Kuwait 1986. (Mestral: Valencia).
- M.E.C. (1992). *El sistema educativo español 1991*. (M.E.C.: Madrid)
- N.C.T.M. (1992). *A core curriculum*. (N.C.T.M.: Reston. Virginia).

## 7. Tratamiento de la diversidad en el aula de Matemáticas

### LA DIVERSIDAD: ¿PROBLEMA IRRESOLUBLE?

**Amaia Basarrate**

IES "Las Rozas III". Madrid

#### INTRODUCCIÓN

Paso a paso, la Enseñanza Secundaria Obligatoria se va poniendo en marcha. Es un proceso lento que presenta numerosas dificultades. "Problemas coyunturales" los llaman. Bueno, en algunos casos es cierto, otros muchos se podrían haber evitado con una mejor planificación y desgraciadamente en otros, el tiempo confirmará que son la punta de icebergs bastante más grandes de lo que aparentan.

Desde que se generalizó la educación hasta los 14 años, se están detectando problemas que afectan fundamentalmente a los últimos cursos del ciclo superior. Llevamos ya mucho tiempo oyendo quejas de los profesores de Enseñanza Media, acerca de lo mal preparados que llegan los alumnos de E.G.B. y exactamente el mismo tiempo oyendo a los profesores de E.G.B. que ellos hacen sencillamente lo que pueden. Y es que tienen que tratar de atender y de hacer trabajar sobre los mismos temas, tanto a los alumnos que "desconectaron" con el sistema educativo algunos años antes y a otros que siguen a duras penas en conexión, junto con otros que incluso necesitan un cierto entrenamiento especial porque luego van a cursar B.U.P.

En lugar de pensar que los únicos problemas son la falta de preparación de los profesores y la inadecuación de los programas, se podía haber dedicado un esfuerzo a la generación de libros y material adecuado para que pudieran utilizar esos profesores y pudieran mitigar las deficiencias de los programas.

Bueno pues, con todo lo grave que es el asunto y con todos los años que esto lleva ocurriendo, los profesores de E.G.B. no han conseguido hacerse oír, o al menos, no parece que se les haya hecho mucho caso.

Ahora que la E.S.O. se prolonga hasta los 16 años, este problema se vuelve a poner de manifiesto y de momento no se ha tomado ninguna medida.

Es bien sabido que cada niño tiene un ritmo de desarrollo propio, no sólo en el plano físico y psíquico, sino también en el intelectual. Esto ya lo recogió, hace más de 10 años, el informe Cockcroft. En él se señalaba la extraordinaria dificultad de atender una clase con una amplia gama de diversidad. Señalaba también que la diferencia de ritmo de aprendizaje entre alumnos en la edad de la adolescencia, puede llegar a ser de 7 años. Es decir, que determinados conceptos matemáticos que algunos niños y niñas pueden adquirir a los 11 años, otros en cambio no llegan a adquirirlos a los 16 y otros no llegarán a adquirirlos nunca. Sin embargo este "detalle" que se menciona muchas veces, no se tiene en cuenta a la hora de agrupar a los alumnos para facilitar su aprendizaje. En aras de un igualitarismo y de una no discriminación mal entendidos, se están cometiendo, creo yo, errores considerables.

El hecho de que la educación se generalice hasta los 16 años, me parece un gran logro social. Siempre y cuando vaya acompañado de medidas que impidan que se convierta en un embudo. Y convertirla en un embudo es dar una única opción de aprendizaje a alumnos con capacidades e intereses bien distintos (ya a los 12 años de edad). Así se construye un sistema educativo rígido y encorsetado que margina a quienes no son capaces de someterse al corsé o no caben en él.

En primer lugar, hay un porcentaje nada desdeñable de alumnos que rechazan, ya a los 12 años, cualquier materia teórica o que ellos entiendan como tal. Han fracasado en ellas o las perciben extremadamente aburridas. Necesitan sentirse útiles, capaces de hacer algo y saben, porque lo han comprobado, que físicamente lo son.

Pues bien, no hay ninguna materia, aparte de la Tecnología, en la cual puedan desarrollar sus habilidades. Ni siquiera ésta tiene la orientación adecuada para atraer a estos alumnos puesto que en sus objetivos se habla de poner en práctica los conceptos adquiridos, cuando pudiera ser más

para ellos no haber entrado. Quiero marcar un símil sobre esta situación en un campo bastante alejado. Supongamos que la barrera impuesta en España para poder participar en la prueba de 100 metros lisos de las Olimpiadas es correr estos metros en 30 segundos. Presentaríamos muchos candidatos, pero la mayoría de forma artificial y sin ninguna posibilidad de ganar. Fracasarían en las primeras pruebas con el consiguiente desánimo y sensación de fracaso, pues se les había hecho creer que tenían opción al triunfo. Pero eso no es un fracaso. El fracaso aparece al estar preparado para hacer algo y no conseguirlo.

Por otra parte hay que tener en cuenta también ciertos hechos relacionados con la calificación final de la Selectividad.

En esta intervienen dos factores: el examen realizado y la nota media de expediente. Se produce en demasiados casos, como para que sean ignorados, una abrumadora diferencia entre una nota y la otra (muy superior la de expe-

diente) y se habla siempre de "nervios" en el examen. Por un lado es cierto y por otro no. Los alumnos no están acostumbrados en absoluto a examinarse "jugándose algo", a rendir cuentas en serio de lo que saben, y esto les afecta en su rendimiento en el momento del examen. ¿Deberíamos plantearnos la posibilidad de recuperar por el bien de los alumnos y de la enseñanza en general las pruebas intermedias (antes reválidas), por ejemplo entre la Secundaria y el Bachillerato, pruebas que preparan poco a poco a una situación con la que se van a encontrar: rendir cuentas serias de sus conocimientos no una única vez, sino muchas? Por otra parte se considera en este momento que el Bachillerato en su conjunto es una preparación para la prueba y en ciertos casos (demasiados) se califica con la idea en mente "ha aprobado y no debo perjudicarle de cara a la Selectividad" calificando como consecuencia con una nota superior a la que realmente le corresponde, falseando así otra de las expresiones típicas al referirse al fracaso universitario: "Cómo puede ir tan mal si tuvo una nota de Selectividad superior a..." ■



metodología y un material elaborado en la Comunidad Valenciana que, con ser valioso, no se adaptaba para nada a las necesidades de estos alumnos.

Otro grupo de 4 alumnos cuyo ritmo de aprendizaje era muy bueno, realizaba frecuentemente problemas complementarios, de un nivel superior, hasta que decidieron seguir el mismo ritmo de trabajo que sus compañeros y pedirme juegos. Por más que algunos problemas les parecieran interesantes, tenían la sensación de estar haciendo "el primo". Las veces que accedí, conseguí que el resto de sus compañeros estuvieran más pendientes del juego que de su tarea.

También tenía dos alumnos con dificultades, cuya timidez era tal, que no solamente les impedía preguntar cuando no entendían (muy frecuentemente), sino que además se bloqueaban cuando yo trataba de ayudarles. Ni los intentos de acercamiento a ellos, ni las entrevistas con sus padres surtieron el más mínimo efecto.

Así las cosas ¿a quiénes de ellos se hace adaptaciones curriculares? ¿En qué consisten? ¿En qué momentos se investiga para poder diagnosticar la causa de la dificultad? ¿Cómo y en qué momento se confecciona el material que le haga salir a cada cual del tropiezo que ha tenido?

Las adaptaciones curriculares deben estar basadas en un material de calidad que permitan un seguimiento individual por parte de los alumnos que las precisen. Estos requisitos deben traducirse en un lenguaje claro y directo y adaptado a la edad de los alumnos, con unas propuestas atractivas y de alto contenido didáctico, a la vez que sencillas en su práctica y de fácil corrección por parte del profesor. Estoy describiendo el material **necesario** en el aula. Quién, cómo y cuándo lo genere es una cuestión en la que me es imposible entrar.

Creo que no es posible hacer este tipo de adaptaciones ni siquiera en un grupo y ni siquiera cuando ese grupo tiene 23 alumnos. Algunas de las adaptaciones que necesitarían mis alumnos serían motivo de investigación en el más amplio sentido de la palabra y no creo que se pueda estar trabajando en una investigación al mismo tiempo que se atiende a otros 20 alumnos. Habida cuenta que trabajar con los otros 20 alumnos supone corregir periódicamente (dos veces por evaluación) 20 cuadernos, 20 trabajos de 4 o 5 folios, 20 exámenes, además de hacer otras adaptaciones de menor entidad. Este tipo de tareas es esencial para crear hábitos de trabajo en los alumnos y para poder llegar a conocerlos mínimamente. Dos horas y media semanales no son suficientes.

Y ahora multiplíquese por 5 todo lo que acabo de mencionar. Y téngase en cuenta que los grupos donde no hay alumnos de integración, están formados por 30 alumnos.

Al hablar de adaptaciones curriculares estamos utilizando un lenguaje cuyo significado muchas veces desconocemos. Como ocurre con otros muchos términos que utilizamos habitualmente. Si realmente pensamos en todo su significado, llegaremos a la conclusión de que no es posible llevarlas a la práctica, más que en unas condiciones tan especiales, que en pocas ocasiones se dan. Podremos contar maravillas en nuestras programaciones, proyectos curriculares, memorias y demás documentación. La realidad tiene muy poco que ver con toda esa palabrería hueca.

### LOS GRANDES PERJUDICADOS

Pero aún hay más. Los cuatro alumnos que siguieron su ritmo a pesar de las contrariedades, más algunos otros que consiguieron superar sus baches, están este año cursando 4º de Matemáticas modalidad B, junto con otras compañeras y compañeros que estuvieron en condiciones semejantes en otros grupos.

Como quiera que el nivel de contenidos tanto conceptuales como procedimentales alcanzado durante el curso pasado fue bastante bajo, en 4º modalidad B estoy tratando de imprimir un poco más de ritmo, ya que se supone que estos alumnos pasarán el curso próximo a hacer el bachillerato tecnológico. Sólo que no había contado con un hecho muy elemental: Si tenemos una pierna inmovilizada durante un mes, difícilmente podremos correr a continuación una maratón. Pues aplíquese el ejemplo al "sueño de los justos" que llevan durmiendo una buena parte de estos alumnos desde hace al menos tres años (7º, 8º de E.G.B. y 3º de E.S.O.). Pocos de ellos conseguirán superar un Bachillerato que ha sintetizado, al menos en papel, los tres años del B.U.P. más el C.O.U., en dos. Menos aún superarán unas pruebas de acceso a la Universidad que no serán muy diferentes, me temo, de las acostumbradas ahora. ¿C.Q.D.? ¿De eso se trataba? ¿De reducir el número de universitarios? Es posible que el número de universitarios en España sea demasiado elevado. Es posible que no interese social y económicamente que esto sea así. O que este país no pueda permitírselo sin arriesgar otros logros sociales, no lo sé. Pero si así fuera, supongo que debe haber una buena lista de medidas más racionales que las que se están consiguiendo al poner en práctica con la L.O.G.S.E. en la forma en que se está haciendo.

Por otra parte, es preciso introducir un poco de racionalidad en las aulas a la hora de tratar algunas materias, entre ellas, las matemáticas.

Si los cinco grupos que me correspondieron el curso pasado, presentaban parecida gama de diversidad, como he mencionado antes, ¿por qué no agruparlos según sus ritmos o dificultades de aprendizaje?

acertado, creo yo, construir el conocimiento a partir de la práctica. Las excepciones de algunas materias en determinados momentos, van siempre respaldadas por contenidos teóricos que restan el posible atractivo que puedan tener las actividades en sí mismas. De esta forma, los alumnos que no son capaces de enfrentarse a contenidos que no sean muy concretos, y son bastantes, se ven abocados al ostracismo y la marginación.

Evidentemente ellos no se resignan y reaccionan buscándose una vía que al menos les divierta dentro de la desesperación. ¿Alguno de nosotros sería capaz de estar sentado durante 6 horas diarias (deberes aparte) todos los días de tres o cuatro cursos escolares, haciendo tareas que no nos interesan lo más mínimo? Hace falta mucho aguante. Hay que buscarse una distracción que haga la vida más llevadera. Y con esto tenemos un primer grupo de conflicto dentro del aula.

En segundo lugar, hay alumnos cuyo ritmo de aprendizaje es superior a la media (no estoy hablando de superdotados) que se aburren de la repetición de nociones, que aunque ellos captaron en un primer momento, sus compañeros necesitan reafirmar una y otra vez. De forma que todo les comienza a parecer aburrido y falta de interés.

Su reacción puede ser muy variada. Puede que en un principio se dediquen a aplaudir con las orejas para pasar el rato, pero son bastantes los que descubren que los entrenamientos que se han buscado sus compañeros marginados tiempo atrás, son mucho más divertidos.

Todos estos alumnos reunidos en una misma aula constituyen una mezcla explosiva que nos va a impedir, de hecho, dedicarnos a ese porcentaje de alumnos que son capaces de seguir un ritmo mínimo de aprendizaje, a duras penas.

### ADAPTACIONES CURRICULARES

Palabras claves donde las haya, cuando se habla de la diversidad y de cómo atenderla. Pero ¿qué son realmente?, ¿cómo las debemos entender? Pueden parecer preguntas bobas pero, a base de preguntas bobas estoy coleccionando algunas respuestas un tanto curiosas. Como por ejemplo: como distribuyo a mis alumnos en grupos de trabajo y discusión porque pienso que tienen más ánimos para enfrentarse a la resolución de problemas que si lo hacen aisladamente, ya estoy haciendo adaptaciones curriculares. Como dentro de esos grupos hay alumnos a los que atiendo más, porque tienen mayores dificultades, ya estoy haciendo adaptaciones curriculares. ¿Y para este viaje tantas alforjas? ¿Acaso no venimos haciendo estas "adaptaciones curriculares" desde tiempos inmemoriales (algunos peinamos muchas canas ya) sin demasiado éxito, todo hay que decirlo? Personalmente creo que la cosa no va por ahí.

Pero, vamos a ver, vamos a bajar a los casos concretos que se nos presentan para saber de qué sirven algunas palabras.

Voy a poner como ejemplo uno de los cinco grupos de 3º de Secundaria que estuve impartiendo el curso pasado. Es sólo un ejemplo. Los demás grupos, aunque con algunas características diferentes, eran muy similares en cuanto a gama de diversidad. Sólo uno de los siete grupos de 3º, estaba un poco más equilibrado, en cuanto a composición.

El grupo en cuestión lo formaban 23 alumnos (uno de ellos acogido al programa de integración). Durante el primer mes observé que uno de los alumnos (no el de integración) estaba siempre con cara opaca, como dormido. Después de ver que no era capaz de seguir el ritmo de sus compañeros, repasando concepto de fracción y operaciones en aquel momento, comprobé que no era capaz de sumar dos números de tres cifras o tres números de dos cifras. Tenía 16 años. Seguro que le habían intentado enseñar muchas veces. ¿Cómo hacer una adaptación sin investigar previamente dónde estaban sus dificultades? Para hacerlo, tendría que dedicarme a él en exclusiva durante algún tiempo, olvidándome de los demás. Surgen inmediatamente una serie de preguntas más, pero sigamos de momento.

Poco después otra alumna me plantea que no sabe dividir (con 15 años). No logró aprender, a pesar de que dos de sus profesoras lo habían intentado denodadamente. Esta chica, que era muy abierta y participaba muy activamente en todas las discusiones que se planteaban en la clase, tenía una conciencia de fracaso tal que no quería ni tratar de aprender un oficio. Deseaba terminar la secundaria para ponerse a trabajar de empleada de hogar. No quería más libros ni en pintura. ¿Adaptación para ella?

Un grupo de 5 alumnos se reveló rápidamente como marginados de los que he hablado antes. No llegué a enterarme claramente de cuál era su nivel de competencia porque se negaron ostensiblemente a trabajar. Lo más que conseguí fue que mantuvieran las formas dentro del aula y no alteraran demasiado el ritmo de sus compañeros. A ellos se unió a medio curso, un alumno de comportamiento atípico, con momentos violentos, cuyo máximo logro fue permanecer sentado durante 10 minutos (reloj en mano) mientras manipulaba una calculadora que no sobrevivió a sus investigaciones.

Un grupo de 8 alumnos, con buena disposición para el trabajo, presentaba dificultades variopintas. Según ellos, las arrastraban de 6º de E.G.B., cuando se encontraron con las fracciones. Querían superarlas, pero es muy difícil tratar de erradicar rutinas mal entendidas. Hace falta mucho tiempo para asentar nuevas ideas y material adecuado para hacerlo. Disponíamos de tres períodos de 50 minutos a la semana, algunos libros de E.G.B., no muy afortunados en su

La experiencia recogida en los centros que han adelantado la implantación de la Secundaria debiera valer para algo.

Entiéndaseme bien: No estoy sacando faltas al nuevo sistema porque el antiguo me pareciera más riguroso, más serio o más apropiado que el actual. De ninguna manera. Siempre me pareció que el B.U.P. no preparaba a nuestros alumnos en algo tan esencial como el razonamiento lógico, la expresión oral y escrita de su razonamiento, su capacidad para enfrentarse a problemas,... Y la prueba más palpable se ha encontrado siempre en la escasa capacidad de los alumnos de C.O.U. para enfrentarse a problemas perfectamente simples, que no estuvieran directísimamente relacionados con las fórmulas recientemente aprendidas.

Creo que el cambio de orientación propuesto en la L.O.G.S.E. es bueno, merece la pena ponerlo en práctica y además es posible hacerlo. No me parece tan imprescindible haber cambiado todo el lenguaje: no hacía falta, ya que, en muchos casos es lo único que se ha cambiado, permaneciendo los errores de fondo en las formas de actuar. El currículum es bueno, pero no lo es la forma de ponerlo en práctica.

Escolarizar no debiera consistir en almacenar y educar no debiera consistir en hacer pasar por un aro o, en su defecto, entretener hasta la edad impuesta para no estropear las estadísticas de escolarización. No podemos descerebrar a todos nuestros adolescentes, marginándolos a unos, cortándoles las alas a otros. Tiene que ser posible que todos los niños que terminan la Primaria, puedan hacer algo útil. **Pero no tiene que ser obligatorio que hagan todos exactamente lo mismo.** Para los niños que no han superado los

objetivos de Primaria, resulta más que improbable que superen los de Secundaria. Entonces, ¿por qué hacerlos entrar por un carril que no los conduce a ninguna parte? ¿Sólo se trata de que pasen los años hasta que cumplan la edad de salir del sistema? ¿Y no le importa a nadie más que a ellos y a sus familias, cómo salen?

Al finalizar el curso pasado una serie de alumnas y alumnos con malos resultados académicos, abandonaron el Instituto y se buscaron la vida como les indicó la orientadora del propio centro, o como pudieron: talleres mecánicos, academias de joyería, trabajos varios,... A veces vienen a hacer visitas o a gestionar documentos y cuentan maravillas de lo satisfechos que están y de lo útiles que se sienten. Los mismos que unos meses antes sentían una infinita desesperación, porque por más que intentaban, a duras penas conseguían dominar dos de las diez materias que cursaban.

Pero claro, han tenido que esperar a tener 17 años, para poder eludir el rodillo educativo. Han perdido un tiempo, unos ánimos y una autoestima preciosos.

¿No se podría conseguir incorporar al sistema educativo los contenidos que éstos y otros alumnos logran adquirir fuera? Y encima, previo pago de llevar clavado el estigma de un fracaso, que no les corresponde a ellos. Quizá no es posible ajustar unos objetivos mínimos **iguales para todos**. O quizá hay que replantearse la unicidad de la titulación, si queremos que un máximo de alumnos tenga título de Secundaria Obligatoria.

El guión parecía bueno, pero la película nos está quedando un poco rara. Habrá que echarle más imaginación al montaje ■

Llevo muchos años organizando a mis alumnos en pequeños grupos de 3 o 4 (a veces hasta de 6) dentro del aula. Los necesito porque creo que dentro de la clase de matemáticas deben discutirse muchas cosas. Debe haber un contraste de opiniones sobre los problemas que se les sugiera. Para lo cual es necesario, claro está, que existan alumnos que opinen de distinta manera, que se sientan capaces de discutir y que se sientan en un plano de igualdad para poder hacerlo. Desde luego los alumnos tienen opiniones muy diferentes sobre bastantes temas de matemáticas y yo me debo ocupar de que todos se sientan capaces de discutir, proponiendo problemas lo suficientemente estimulantes y accesibles para que todos se sientan animados a participar. Pero tenemos que conseguir que la organización de los grupos permita que se sientan en un plano de igualdad para poder hacerlo. Hasta el año pasado no he tenido dificultades: La gama de diversidad que se presenta en 1º de B.U.P. es bastante buena para poder llevar a cabo una enseñanza con un alto grado de participación y discusión. Y no me refiero a cuál es el nivel de competencia que pueden presentar los alumnos de 1º de B.U.P, sino a que es relativamente parecido en un alto porcentaje de ellos. Por supuesto, también se puede llevar a cabo una buena discusión, cuando el nivel de competencia es mucho más bajo. No hay más que fijarse otros objetivos que impliquen una menor profundidad en el tratamiento del tema. El problema se presenta cuando en una misma clase, pretendemos que discutan alumnos que pueden profundizar mucho y percibir muchos matices, con otros que tienen extraordinarias dificultades para intuir las nociones más simples. Entonces, la discusión no se produce. Simplemente, unos alumnos arrastran a otros. Arrastran por número, no por ninguna otra razón. La minoría tiende a quedar relegada. Y si la minoría es justamente la de más recursos, no pensemos que se van a conformar con los ejercicios de profundización que les proporcionemos. Ellos también quieren ser recompensados por haber sacado su trabajo adelante con éxito y no quieren que se les "penalice" con tarea añadida. Es decir, están desarrollando sus capacidades muy por debajo de sus posibilidades y esto supone un grave perjuicio para la mayoría de ellos.

En cuanto esta circunstancia sea percibida claramente por las familias de estas chicas y chicos, si sus recursos económicos se lo permiten, buscarán un centro que les atienda correctamente. Lo cual significa que la enseñanza pública va a especializarse en los siguientes tipos de alumnos: aquellos con dificultades de aprendizaje o con desinterés manifiesto, procedan del medio económico que procedan y aquellos otros cuya competencia sea realmente buena, pero cuyos medios económicos no lo sean tanto como para poder buscar la alternativa adecuada. A estos últimos, los va a ignorar de tal forma, que va a poner en cuestión su futuro desarrollo como estudiante. Es decir, la disponibilidad de recursos económicos determinará, lo

está haciendo ya, el derecho de aprendizaje de un buen sector de los alumnos. La enseñanza Pública debe aprender a dar respuesta a todos los alumnos para poder ser integradora.

En Secundaria Obligatoria, la gama de diversidad resulta inabordable si no se homogeneizan mínimamente los grupos. Una organización diferente afecta tarde o temprano a la plantilla del centro y no parece que los presupuestos para educación vayan a contemplar ninguna alteración en cuanto a aumentos de plantilla se refieran.

### LA DIVERSIFICACIÓN CURRICULAR

Creo que nuestro sistema de enseñanza sólo está preparado para atender, como mucho, al 60% de la población escolar: el 60% central, lo que queda de quitar los alumnos de rápido aprendizaje por un lado y los de ritmo más lento, por otro. Al resto los tiene recogidos pero no atendidos. Es como un armario para ellos.

Para atender a los alumnos de ritmo más lento se están ideando diversas soluciones. Se habla de cursos de diversificación destinados a los alumnos que tienen dificultades para alcanzar los objetivos mínimos de la E.S.O. Pero ¿por qué no se ha pensado en hacer grupos de diversificación para aquellos que superan con creces los "objetivos máximos"?

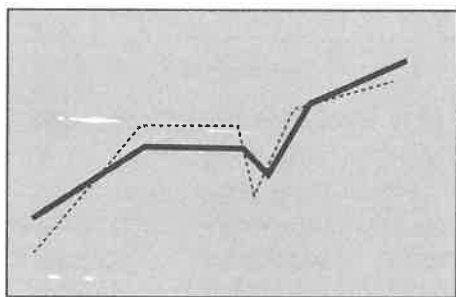
Los alumnos que estudian y no tienen buenos resultados dan mucha pena. Dan pena a los profesores que los atienden con mayor dedicación y dan pena al sistema que acaba inventando formas inadecuadas, para mi gusto, de impartir títulos acreditativos. Los alumnos con habilidades intelectuales pero que no rinden, rápidamente son calificados de vagos o de cualquier otro epíteto al uso y además no se les atiende demasiado. Creemos equivocadamente que tienen recursos suficientes y que nuestra labor es compensar la desventaja que sufren sus compañeros menos hábiles. No entendemos su forma de pensar, ni siquiera nos la planteamos. No dan ninguna lástima a nadie y el sistema los ignora. Solamente aceptará a aquellos que se sometan a las normas de la mayoría.

La existencia de alumnos encuadrables en grupos de diversificación, pone de manifiesto que el sistema tiene algunas goteras. Como lo pone de manifiesto la existencia de muchos alumnos con absoluta desmotivación para cualquier cosa, o como también lo pone de manifiesto la existencia de esos otros alumnos que están a punto de desmotivarse porque necesitan un mayor nivel de profundidad. Quizá haya que pensar en hacer grupos variopintos de diversificación. O quizá, en lugar de andar poniendo baldes a las goteras, merezca la pena dar un repaso a toda la construcción.

estilos de pensamiento matemático, hablan de bloqueos perceptuales, culturales, ambientales, emocionales, expresivos, cognitivos, etc.

Es posible observar en el aula, que estos bloqueos no se presentan aislada e independientemente los unos de los otros, antes al contrario, es frecuente que a un bloqueo cognitivo preceda un bloqueo emocional, ambiental o cultural, que pueden inhibir la aparición de determinadas aptitudes, con lo que el complejo aptitudinal que se presenta en esa situación, en ese estado emocional, en ese entorno cultural, difiere significativamente del que se hubiera presentado a la misma persona libre del bloqueo mencionado.

Una relación de los distintos tipos de bloqueos nos recordará con toda seguridad multitud de situaciones en el aula de matemáticas y también la diversidad con que se presenta cada situación:



Dos personas distintas progresan de forma diferente ante la misma situación. Lo que importa es que ambas salgan con balance positivo en el proceso de aprendizaje. No importa tanto que el producto sea el mismo sino que ambas progresen desde sus respectivos puntos de partida y desde sus respectivos bloqueos.

Los preconceptos prejuicios y predisposiciones que aparecen en las siguientes relaciones<sup>3</sup> sólo son considerados bloqueos cuando inhiben o inhabilitan para progresar en la construcción integral de la personalidad o para desarrollar conductas eficaces.

Seguramente podremos reconocer algunos bloqueos más frecuentes en las niñas y otros en los niños, no en vano se producen en el seno de una cultura de género.

#### **Bloqueos perceptivos**

1. Estereotipar, ver lo que se espera ver.
2. Dificultad para aislar el problema.

3. Tendencia a delimitar demasiado la zona.
4. Imposibilidad de ver el problema desde distintos puntos de vista.
5. Saturación.
6. No poder utilizar toda la información sensorial

#### **Bloqueos emocionales**

1. Miedo a cometer errores, a fracasar, a arriesgarse.
2. Inhabilidad para tolerar la ambigüedad, dominante deseo de seguridad y orden, "falta de apetito por el caos".
3. Preferencia para juzgar ideas en lugar de concebirlas.
4. Inhabilidad para relajarse, incubar una idea y "consultarla con la almohada".
5. Falta de estímulo. Los problemas no le interesan.
6. Entusiasmo excesivo, sobremotivación para lograr el éxito de inmediato.
7. Falta de acceso a las zonas de la imaginación.
8. Falta de control imaginativo.
9. Inhabilidad para distinguir la realidad de la fantasía.

#### **Bloqueos culturales**

1. La fantasía y la reflexión son una pérdida de tiempo, una haraganería, incluso una locura.
2. Los juegos son sólo para los niños.
3. Los problemas son algo serio y el humor está fuera de lugar.
4. La razón, la lógica, las cifras, la utilidad y la practicidad son buenas. Los sentimientos, la intuición, los juicios cualitativos, el placer, son malos.
5. Es preferible la tradición al cambio.
6. Cualquier problema se puede resolver con pensamientos científicos y mucho dinero.
7. Tabúes.

#### **Bloqueos ambientales**

1. Falta de cooperación y confianza entre colegas.
2. Un jefe autocrático que valora sólo sus propias ideas, no valora las de los demás.
3. Distracciones, el teléfono, entretenimientos fáciles.
4. Falta de apoyo para llevar a cabo ideas.
5. Falta de expectativa de logro por parte del profesorado, la familia, la sociedad.

#### **Bloqueos intelectuales y expresivos**

1. Resolver un problema utilizando un lenguaje incorrecto (verbal, matemático, visual).
2. Uso inadecuado e inflexible de las estrategias para resolver problemas. (Lista de 66).

3. Sacadas del libro de James L. Adams titulado *Guía y juegos para superar bloqueos mentales*.

## LA COEDUCACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS, COMO PROPUESTA DE TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD

**Rosario Nomdedeu Moreno**

*I.B. de Almanzora. Castellón*

### INTRODUCCIÓN

El tratamiento de la diversidad no es un problema nuevo, pero sí es un problema especialmente relevante en la actualidad. La enseñanza para toda la población, introduce la diversidad de grupos sociales en la escuela, desaparece la homogeneidad que existía, en cuanto al grupo social de pertenencia. Recordemos que desde la Real Cédula de 1771, pasando por los múltiples planes educativos del siglo siguiente y parte del actual, el objetivo de la enseñanza para todos era un eufemismo. Ya en la letra quedaban segregadas las mujeres, pero en la realidad, además, quedaban excluidos y excluidas las hijas y los hijos de las clases trabajadoras.

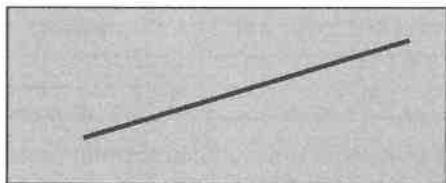
La generalización de la enseñanza para todos y para todas suma, a la conveniencia de una enseñanza individualizada en pos de un mejor rendimiento escolar, el deseo explicitado en la LOGSE de evitar a toda costa un tratamiento discriminatorio en la escuela.

Para evitar la discriminación son necesarios cambios de actitudes en todas las personas involucradas en el hecho educativo; cambios de contenidos en las programaciones y cambios de método en el aula, de modo que se creen situaciones que favorezcan un aprendizaje integral, sin limitaciones estereotipadas, minimizando la aparición y los efectos de bloqueos inhibidores de la capacidad de aprendizaje.

### BLOQUEOS

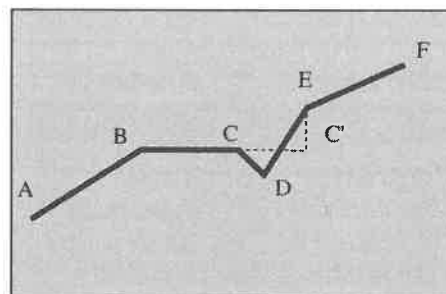
Decimos que una tarea es fácil, que no nos impone limitaciones, cuando no encontramos obstáculos para su ejecución.

Esta sería la gráfica de la progresión sin obstáculos.



Pero el progreso en la educación integral de una persona no se realiza permanentemente de este modo, distintos tipos de obstáculos lo impiden, por lo que conviene conocer el funcionamiento de los obstáculos en el proceso de aprendizaje y los obstáculos mismos, los bloqueos, las barreras que dificultan el progreso de la educación integral de las personas, para diseñar la forma de ayudar a salvarlos.

### Los bloqueos en el proceso de aprendizaje:



- AB:** progresa sin obstáculos
- BC:** paralización del progreso por atasco o bloqueo
- C:** ¡ATASCADA!
- CD:** crisis, conflicto, ruptura, duda, búsqueda
- D:** ¡EUREKA!
- DE:** progresión
- C'E:** progreso

Las emociones que acompañan a cada momento son características<sup>1</sup> y conviene tomar conciencia de ellas para reconocer el terreno con posterioridad. Los rótulos en C y D pueden ser sustituidos por otros o por otro tipo de ancla<sup>2</sup> que puede ser verbal, visual o cinestésica.

Tanto los programas de desarrollo de la inteligencia como la literatura sobre pensamiento creativo y también sobre

1. En el libro de John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey titulado *Pensar Matemáticamente* podeis encontrar ejemplos de ello.

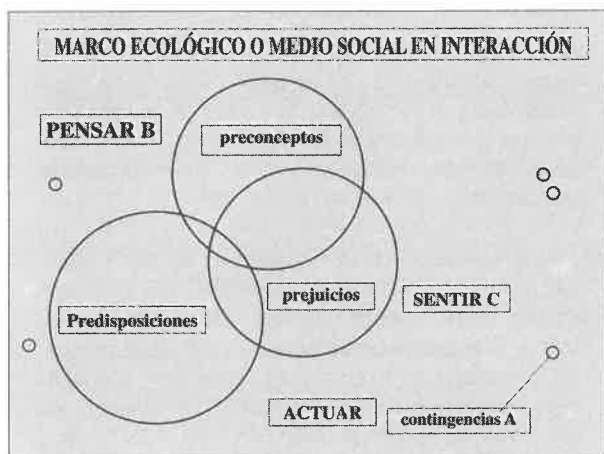
2. Ancla es sinónimo de rótulo, estribillo, mantra, oración. Se trata de asociar una palabra, una frase una imagen o cualquier otra sensación, al estado que deseamos rememorar, evocar o reproducir.

Los **preconceptos** son producto de nuestras posiciones de vida y nuestros hábitos interpretativos.

Los **prejuicios** son consecuencia de nuestro sistema de valores, cuya asunción se produce como consecuencia del acto de voluntad (porque los creemos necesarios) y del deseo (porque nos gustan, porque sentimos afección por ellos) y que comunicamos al medio (interior y exterior) imaginaria, verbal y emocionalmente.

Llamaremos **predisposiciones** a la disposición previa a actuar de un modo y no de otro. Son producto de los preconceptos y prejuicios y determinan las actitudes que habitualmente mostramos al interactuar con el medio interno y externo.

Vistas así las cosas, el siguiente esquema puede ser un recurso clarificador:



##### 5. Modificación del sistema de constructos.

Reconstrucción del mapa conceptual, del propio autoconcepto, de la estructura cognitiva, de la propia personalidad y de la estructura de relación con el grupo. (ECG), (EE) y (ECD)

## EJEMPLIFICACIÓN

### Material:

#### OTROS CIENT AÑOS DE SOLEDAD

"Para esa época, Melquíades había envejecido con una rapidez asombrosa. En sus primeros viajes parecía tener la misma edad de José Arcadio Buendía.

Pero mientras éste conservaba su fuerza descomunal, que le permitía derribar un caballo agarrándolo por las orejas, el gitano parecía estragado por una dolencia tenaz.

Era, en realidad, el resultado de múltiples y raras enfermedades contraídas en sus incontables viajes alrededor del mundo.

Sobrevivió a la Pelagra en Persia, al Escorbuto en el archipiélago de Malasia, a la Lepra en Alejandría, al Beri-Beri en Japón, a la Peste Bubónica en Madagascar, al Terremoto de Sicilia y a un Naufragio Multitudinario en el estrecho de Magallanes.

Aquel ser prodigioso era un hombre lúgubre, envuelto en un aura triste, con una mirada asiática que parecía conocer el otro lado de las cosas. Usaba un sombrero grande y negro, como las alas extendidas de un cuervo, y un chaleco de terciopelo patinado por el verdín de los siglos.

Pero a pesar de su inmensa sabiduría y de su ámbito misterioso, tenía un peso humano, una condición terrestre que lo mantenía enredado en los minúsculos problemas de la vida cotidiana.

Aureliano, que no tenía entonces más de cinco años, había de recordarlo por el resto de su vida como lo vio aquella tarde, sentado contra la claridad metálica y reverberante de la ventana, alumbrando con su profunda voz de órgano los territorios más oscuros de la imaginación y pulsando con su relato las cuerdas de las más bellas melodías cosmológicas.

José Arcadio Buendía recordaba todas las visitas de la tribu de Melquíades a Macondo: la primera vez llegaron vendiendo bolas de vidrio para el dolor de cabeza, todo el mundo se sorprendió de que hubieran podido encontrar aquella aldea perdida en el sopor de la ciénaga, y los gitanos confesaron que se habían orientado por el canto de los pájaros.

Todos los años, por el mes de marzo, los gitanos plantaban su carpa cerca de la aldea, y con grande alboroto de pitos y timbales daban a conocer los nuevos inventos.

Un gitano corpulento, de barba montaraz y manos de gorrión (no era otro que Melquíades) hizo las primeras demostraciones públicas de lo que él llamaba maravillas de los sabios de Macedonia.

Con grandes imanes hizo caer una vez los calderos, las pailas, las tenazas y los ánafes de su sitio, y las maderas crujían por la desesperación de los clavos y los tornillos tratando de desenclavarse. "Las cosas tienen vida propia —pregonaba el gitano con áspero acento— todo es cuestión de despertarles el ánima."

Mientras tanto una niña llenaba las paredes de la abigarrada carpa del circo, mojando sus manecitas en pinturas de colores y posándolas luego sobre la lona.



3. Falta de información o información incorrecta.
4. Técnicas de lenguaje inadecuadas para expresar y registrar ideas (verbal, musical, visualmente y otras).

### Facilitar el aprendizaje

#### Crear el clima del aula

El profesor o la profesora contribuyen a crear el "clima" del aula que puede ser hostil o afectivo, aburrido o divertido, pasivo o participativo, etc.

Una conducta asertiva, empática, congruente, coherente, firme, afectuosa, humorística, comprensiva,... favorecen actitudes positivas hacia el aprendizaje, evitan o disuelven los bloqueos por miedo, aburrimiento, o cualquier otra emoción negativa.

#### Modelizar

No podemos perder de vista que las actitudes de las personas educadoras son vías de contagio cultural y ambiental. Si queremos facilitar un aprendizaje integral, conviene que estemos siempre vigilantes para no transmitir estilos de percepción, pensamiento, valoraciones y sentimientos que induzcan a bloquear la aparición de los mejores complejos aptitudinales en el proceso de aprendizaje.

#### Diagnosticar

Una tarea fundamental del profesorado es la del diagnóstico. No sólo es importante el diagnóstico del error conceptual previsible en una situación dada sino también la percepción del estado emocional de cada una de las personas del aula, para diagnosticar el tipo de bloqueo en el que se encuentran atascadas. Conocer el grupo social de pertenencia facilita también el diagnóstico de los bloqueos culturales previsibles.

Distintas situaciones, (ambientes, estados emocionales, fisiológicos y físicos, entorno cultural etc.), inducen variaciones, estímulos y bloqueos en los aspectos cognitivos, afectivos y relacionales de las capacidades que se activan para abordar efectivamente una tarea. De ello se infiere la importancia de un buen diagnóstico de todos los aspectos mencionados, para crear situaciones favorecedoras del aprendizaje.

#### Diseñar una estrategia para facilitar el aprendizaje integral

1. Sumergir el diseño en el modelo coeducativo:

Propongo considerar el término

#### COEDUCACIÓN

como una opción educativa que:

- 1) incorpora valores ligados a la cooperación y al cuidado de las relaciones de la persona consigo misma y con las demás personas,
- 2) considera que esos valores, tradicionalmente considerados femeninos, son universalizables,
- 3) entiende la necesidad de elevar el rango de esos valores para hacerlos deseables, sacarlos de la devaluación a que los mantiene sometidos el sistema de género y
- 4) parte del interés y deseos de las alumnas y los alumnos y por ello eleva a igual rango los asuntos de la vida cotidiana y de la vida pública.

En orden a conseguir una buena vida humana, en orden a cubrir las necesidades humanas: físicas, de seguridad, sociales, psicológicas y axiológicas.

2. Atender a las emociones como marcadores de etapas en el proceso de adquisición de conocimientos y de resolución de problemas.

Rellenar en el orden C, A, B, D, E el siguiente esquema ejerce la reflexión para crear un "monitor interno" favorecedor del autoaprendizaje.

|                                                        |                                                                     |                                                                                  |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| <b>A= EXPERIENCIA<br/>ACTIVADORA DEL<br/>CONFLICTO</b> | <b>B= CREENCIAS<br/>ACERCA DE LA<br/>EXPERIENCIA<br/>ACTIVADORA</b> | <b>C= CONSECUENCIAS<br/>EMOCIONALES Y<br/>CONDUCTUALES DE<br/>ESAS CREENCIAS</b> |
|                                                        | <b>D= DEBATE SOBRE<br/>LAS CREENCIAS B</b>                          |                                                                                  |
| <b>ECG= EFECTOS<br/>COGNITIVOS</b>                     | <b>EE= EFECTOS<br/>EMOCIONALES</b>                                  | <b>ECD= EFECTOS<br/>CONDUCTUALES</b>                                             |

La tarea de la profesora o el profesor, en esta actividad puede resumirse del siguiente modo:

1. Usar materiales cuyo discurso sea incluyente, y que introduzcan contextualizadamente la posibilidad de afloración del conflicto cognitivo: **(A)**
2. Prestar gran atención a los estados emocionales para ir detectando los bloqueos previstos en el diagnóstico previo. "Escuchar empáticamente": **(C) y (B)**
3. Discusión, confrontación de resultados para que afloren los conflictos cognitivos, emotivos, culturales, relacionales: **(D)**
4. Diseñar actividades complementarias, enfoques desde distintos puntos de vista que ayuden a la deconstrucción de preconceptos, prejuicios y predisposiciones

(Como habréis descubierto fácilmente, esta historia es un collage en el que me he tomado la libertad de tomar prestados unos preciosos pedazos de "Cien años de soledad" de Gabriel García Márquez y mezclarlos atrevidamente con los párrafos propios.)

## Desarrollo de la actividad

### Inmersión

1. Lectura individual. Pensar un título. Descubrir las ideas principales.

Titulos aportados:

"La vida de Melquíades", "La evolución en gráficas".

Ideas principales:

La corpulencia de Melquíades, Los misterios de la vida, La amistad, pintar la carpa, dibujar del natural, las constelaciones, trayectorias, las gráficas.

2. Un *brainstorming* en pequeños grupos sobre las dificultades de comprensión, dudas y curiosidades que suscita el texto inicia la inmersión en el marco de trabajo. La negociación para encontrar analogías y diferencias entre las cuestiones suscitadas, permite consensuar un replanteamiento de cuestiones que nacen de cada una de las personas del grupo. La profesora recoge las propuestas escritas por las personas que han desempeñado el rol de secretarías y reagrupa y completa las cuestiones sin desestimar ninguna:

- Escribir la secuencia ordenada de menor a mayor abstracción en las representaciones gráficas realizadas por Miralta.
- Dibujar la trayectoria de una estrella en una noche.
- Dibujar la gráfica de la altura de una estrella respecto a la línea Polar-Dubhe (alfa de la Osa Menor y de la Osa Mayor respectivamente), a lo largo de la noche. ¿Es una trayectoria?

- Dibujar el perfil de una montaña rusa. Representa la trayectoria del auto que te conduce en la montaña rusa.
- Dibujar la gráfica velocidad tiempo en la montaña rusa. ¿Es una trayectoria?
- ¿Es la gráfica de la fiebre una trayectoria? ¿Por qué? Dibuja sobre ella una gráfica que permita distinguir fácilmente los días de fiebre de los días sin fiebre.
- Dibujar una gráfica de la edad de Melquíades incluyendo períodos de muertes.
- Dibujar una gráfica orientativa de los momentos de avance y retroceso que has sufrido en el aprendizaje sobre gráficas en esta actividad.
- ¿Cuáles de las gráficas que has representado son trayectorias? ¿Cuáles no?, ¿Qué representan estas últimas?, ¿Qué "rarezas" has encontrado? etc.

3. A partir de este material empieza una fase de trabajo individual que permite a la profesora observar los estados emocionales y facilitar la superación de los bloques realizando preguntas:

- que añadan interés al problema si se trata de un bloqueo por *indiferencia* o por la creencia en la propia *incapacidad* en los *primeros contactos con el problema*.<sup>4</sup>
- que reduzcan la euforia excesiva o el aburrimiento de cálculos interminables si ya se ha *entrado en materia*
- referentes a estrategias de pensamiento<sup>5</sup>, que permitan superar la *frustración* que puede aparecer *durante el periodo de incubación* y la *impotencia que impide seguir avanzando*
- que frenen la *excesiva euforia* que frecuentemente acompaña a las *intuiciones*, impidiendo una *postura razonablemente escéptica* para verificar la conjetura recién elaborada<sup>6</sup>

### 4. EN LA ETAPA DE PREPARACIÓN

Referentes a *lo que sé*: ¿has leído bien el problema?, ¿has particularizado lo suficiente hasta saber qué pasa?, ¿qué ideas, aspectos, hechos parecen relevantes? ¿conoces algún problema similar?

Referentes a *lo que quiero saber*: ¿has clasificado la información?, ¿has descubierto ambigüedades?, ¿has particularizado hasta descubrir el problema real?

Referentes a *lo que puedo usar*: ¿has representado imágenes, diagramas, símbolos que te ayuden a comprender el problema y a establecer relaciones?, ¿has utilizado notación lógica y cómoda?, ¿has organizado la tarea?

### 5. EN LA ETAPA DE INCUBACIÓN

Construir, eliminar, trabajar hacia adelante, exponer, organizar, listar, verificar, trabajar hacia atrás, asociar, clasificar, generalizar, comparar, relacionar, consignar, postergar, arriesgarse, abstenerse, concentrarse, liberarse, forzarse, relajarse, soñar, imaginar, purgar, incubar, diagramar, planear, verbalizar, visualizar, memorizar, recordar, registrar, recuperar, buscar, seleccionar, planificar, predecir, asumir, cuestionar, enunciar una hipótesis, adivinar, definir, simbolizar, copiar, ensayo y error, hacer una tabla, estimar y aproximar, casos sencillos, reconocer regularidades...

### 6. EN LA ETAPA DE ILUMINACIÓN

Referentes a la necesaria justificación: ¿por qué?, ¿has hecho la prueba? ¿has intentado refutar la conjetura?

También volvió a vivir la tibia tarde de marzo en que quedó fascinado con la mano en el aire y los ojos inmóviles, oyendo a la distancia los pifanos y tambores y sonajas de los gitanos que una vez más llegaban a la aldea, pregonando los últimos descubrimientos.

En un rincón de la carpa, junto al cofre que contenía el enorme bloque de hielo en cuyas agujas internas se despedazaba en estrellas de colores la claridad del crepúsculo, Miralta dibujaba al gitano corpulento como un gran bisonte.

Miralta creció y con ella su afición a dibujar y a contemplar el cielo estrellado.

Descubrió aquella estrella que, en las noches de los países del norte, permanece fija en su sitio toda la noche.

Observó cómo giraban en torno a ella todas las demás, como engarzadas en una enorme sombrilla.

Trazó líneas uniendo aquellos puntitos y creó bellos dibujos que le recordaban las hermosas leyendas con que Melquíades la entretenía junto al fuego en las gélidas noches de invierno.

La que más le gustaba era la historia de Andrómeda, prometida de Perseo e hija de la vanidosa Casiopea y de Cepheo. El orgullo de la madre, que se creía más bella que las nereidas, hizo que los dioses condenaran a la hija a ser devorada por una monstruosa ballena. Su prometido, Perseo, la salvó cabalgando a lomos del caballo alado Pegaso.

Porque era la historia que más le gustaba, Miralta dibujó a todos los personajes de la historia en la misma región del cielo.

Tras varios años de observación, aumentó el número de figuras hasta tal punto, que los dibujos ya no la orientaban con suficiente precisión y entonces inventó un modo de determinar y fijar las posiciones que iban ocupando a lo largo de la noche. *Trayectorias* llamaba a estos dibujos que ella imaginaba trazados por un luminoso rastro dejado por cada estrella sobre el encerado celeste.

José Arcadio Buendía siempre admiró a la gitana, sobrina de Melquíades, por su talento para dibujar. Primero copiando exactamente sus manecitas sobre la carpa, luego reduciendo el tamaño y dimensión de los objetos o imaginándolos, más tarde comprimiendo el tiempo para dibujar el movimiento de las estrellas y, más difícil todavía, de los planetas. Incluso acertó a dibujar la forma de los países del mundo que había recorrido, a pesar de que ella jamás voló en una nave espacial.

Una extraña idea se metió en la cabeza de José Arcadio Buendía que le produjo una molesta y contagiosa enferme-

dad: el insomnio. Todo Macondo la sufrió y durante casi un año nadie en la aldea pudo dormir ni de noche ni de día, mientras José Arcadio Buendía soñaba despierto con explorar otros mundos ayudado por los instrumentos de orientación y mapas que intuía que podían fabricarse a partir de los dibujos de Miralta.

Mientras Macondo comenzaba a dormir, José Arcadio Buendía y Melquíades le sacudieron el polvo a su vieja amistad. El gitano iba dispuesto a quedarse en el pueblo. Había estado en la muerte, en efecto, pero había regresado porque no pudo soportar la soledad. Repudiado por su tribu, desprovisto de toda facultad sobrenatural como castigo por su fidelidad a la vida, decidió refugiarse en aquel rincón del mundo todavía no descubierto por la muerte.

Durante ese último año, en el que habían ocurrido tantas cosas, la sobrina de Melquíades padeció unas fiebres intermitentes y cíclicas como la vida de Melquíades, como la de Macondo, como la de las estrellas, tal vez como la del universo.

Al despertar sorprendió a todos con un nuevo sistema de representación que le permitía dibujar incluso aquello que jamás tendrá forma: dibujó la evolución de su fiebre a lo largo del año que duró su extraña enfermedad. Con aquel dibujo incrementó sus artes adivinatorias, con él era capaz de acertar la fiebre que tuvo en cada momento.

José Arcadio Buendía, en su laboratorio de daguerrotipia, mientras reproducía bisontes mecánicamente, lloraba emocionado viendo cuán ajetreados andaban Melquíades y Miralta. Le estaban dando una prueba convincente de amistad. Melquíades de su puño y letra escribió un manual de exploración, de éste y otros mundos. Miralta lo ilustró e incluyó algunas explicaciones que serían muy útiles a José Arcadio para interpretar los dibujos.

Así pertrechado, José Arcadio Buendía se dio a explorar lo más alejado y más próximo en el tiempo, en el espacio y en la mente.

Mientras tanto Miralta siguió con sus investigaciones gráficas: Varios fueron los descubrimientos que le fascinaron. Aquellas gráficas suaves y periódicas le permitieron ver semejanzas en fenómenos tan lejanos como el paso de las estaciones, los nacimientos y las muertes de Melquíades o también las explosiones y colapsos del universo. Y aquellas otras quebradas hasta la tortura en todos y cada uno de sus rincones tan extrañas que le parecieron cuando las descubrió, ahora las veía en todas partes: en el bosque próximo a Macondo, en las nubes del trópico, en las montañas de la cara oculta de la Luna, en las costas de Madagascar, en las hojas de los helechos de la ciénaga grande e incluso en la locura de Teresa Buendía o en el enorme bloque de hielo del interior del cofre del rincón de la carpa.

## BIBLIOGRAFÍA

- Amabile, Teresa (1983). "The social psychology of creativity: A componential conceptualization". En *Journal of Personality and Social Psychology*.
- Adams, James L. (1986). *Guía y juegos para superar bloqueos mentales*. Ed. Gedisa. Barcelona.
- Astelarra, Judith. (1986). *Las mujeres podemos. Otra visión política*. Ed. Icaria. Barcelona.
- Bell, A. "Enseñanza por diagnóstico". En *Proyecto curricular*. Valencia. Grupo Cero.
- Bell, A. (1986). "Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros". En *Enseñanza de las Ciencias*. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham. Traducido por Francisco Hernán.
- Bell, A. *Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas*. Traducido por Genís Sánchez.
- Briggs, John y Peat, F. David. (1994). *Espejos y Reflejo. Del Caos al Orden*. Ed. Gedisa. Barcelona.
- Camps, Victoria. (1993). *Virtudes Públicas*. Ed. Espasa Calpe. Madrid.
- Candela Juan, J. "Límite de una función. Continuidad." En *Apéndice. Experimentación*. Grupo Aleph Cero. Valencia. Apéndice.
- CEP de Burjassot, Torrent i València. "Diagnóstico y enseñanza por diagnóstico". En *Programa de formació de professors de matemàtiques*. València.
- Colera, J. y Nomdedeu, R. "Propuesta A". En *Propuestas de Secuencia de Matemáticas*. Ed. Escuela Española. Madrid.
- Coll, Cesar. (1994). "El tractament de la diversitat en la LOGSE". En *Espais didàctics nº 7*. Revista de Pedagogía, Educació y Cultura. València.
- Deulofeu Piquet, Jordi. (1995) "Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre distintas gráficas de funciones". En *Lenguajes gráficos en Matemáticas*. Revista UNO, nº 4. Ed. GRAÓ. Barcelona.
- Goberna Torrent, M.A. Y Pastor Ciurana, J. "Estudio interdisciplinar de funciones en 2º de BUP". En *Experimentación*. Grupo Aleph Cero. Valencia.
- Grupo COM88. "Renacimiento". En *Una historia lúdica de las matemáticas*. Materiales para la clase.
- Kelly, George A. "Una teoría cognoscitiva de la personalidad: La teoría de los constructos personales de George A. Kelly". En *Teoría, diagnóstico e investigación*.
- Lakatos, Imre. (1976) *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Ed. Alianza Universidad. Madrid.
- LOGSE.
- Luelmo, María Jesús. (1995). "Lenguajes gráficos y matemáticas". En *En Lenguajes gráficos en Matemáticas*. Revista UNO, nº 4. Ed. GRAÓ. Barcelona.
- Marco, J.A. de. (1987). *Necesidades y valores en la construcción humana*. Ed. Gorfisa. Zaragoza.
- Marco, J.A. de. (1986). *Sentirse bien en sí*. Ed. Gorfisa. Zaragoza.
- Marco, J.A. de. (1988). *Recursos humanizantes. Padres y educadores*. Ed. Gorfisa. Zaragoza.
- Mason, John y Burton, Leone. (1988). *Pensar matemáticamente*. Ed. Labor. Madrid.
- Mxkay y Fanning. *Autoestima*. Ed. Martínez Roca.
- Millán, L. y García, J. *Introducción a la geometría analítica*. Materiales para la clase.
- Moreno, Monserrat. (1994). *El conocimiento del medio. La transversalidad desde la coeducación*. Mº de Educación y Ciencia y otras Adm. Madrid.
- Moreno, Monserrat. (1994). "Los temas transversales. Una enseñanza mirando hacia delante." En *Los temas transversales. Claves de la formación integral*. Ed. Santillana. Madrid.
- Nomdedeu Moreno, Rosario. (1994). "Deseando incidir. No dejes para mañana lo que puedas divulgar hoy." En *Jornadas sobre Matemáticas y Coeducación*. Ed. OECOM Ada Byron. Madrid.
- Nomdedeu Moreno, Rosario. (1995). "Matemáticas y Coeducación". En *Revista UNO, nº 6*. Ed. GRAÓ. Barcelona.
- O'Connor, J. y Seymour, J. (1992). *Introducción a la PNL*. Ed. Urano S.A.
- Roca, Ella (1994). *Psicoterapia*. Materiales de trabajo. Valencia.
- Ros, Ana. (1995). "La transversalitat com a element qüestionador de l'acció educativa." En *espais didàctics*. València.
- Russel, M. Grieger. "De un modelo lineal a uno contextual de los ABC de la RET". En *Manual de Terapia Racional Emotiva*. ELLIS, A. Ed. DDB.

- que ayuden a permanecer en cierto *estado contemplativo* tras la solución para evitar que la alegría del éxito impida la conveniente *comprobación, reflexión y posible extensión del problema*.<sup>7</sup>

### Discusión

1. Sobre hechos, conceptos, decisiones, estrategias...
2. Semántica
3. Método científico
4. Posiciones de vida, hábitos interpretativos

### Resumen

Realizado por la persona secretaria de cada grupo, tras la discusión interna en él, refleja, en líneas generales, el progreso de las personas que lo componen, tanto en la adquisición de conocimientos como en la resolución de problemas y otras tareas. Es grato observar la reconstrucción de la personalidad de cada componente del grupo como pequeñas revoluciones científicas, rupturas epistemológicas, crisis emocionales, y revoluciones culturales a escala individual.

### Consolidación

1. Colección de problemas sobre gráficas de Shell Centre, adaptadas a contextos coeducativos.
2. Problema del monje de Guía y Juegos para superar bloqueos mentales.

### Evaluación

A continuación realizo una transcripción del diálogo mantenido con la alumna I.J.C. de 2º de BUP en una clase del curso 1994-95:

- I- No lo entiendo, nunca lo entenderé.  
 P- Deja el papel y el lápiz. Ahora dibuja en tu cabeza un punto cuya y valga 1  
 I- Ya está.  
 P- Otro.  
 I- Ya está.  
 P- Otro, otro, otro.  
 I- Ya está.  
 P- Dibújalos todos.  
 I- Ya está.

- P- Ahora ven a la pizarra y muéstranos lo que has visto.  
 I sale y dibuja de un solo trazo, firmemente, la gráfica pedida.  
 P- ¿Dónde has buscado la solución, en tu interior o en el exterior?  
 I- En mi interior.  
 P- ¿En la memoria o en tu capacidad de comprender, razonar, generalizar, simbolizar, etc.?  
 I- En mi memoria no, lo he pensado, lo he sacado yo sola.  
 Había que ver el brillo de sus ojos y la sonrisa de satisfacción.  
 P- Ahora dibuja en tu imaginación un punto con su  $x$  igual a su  $y$ .  
 I- Ya está.  
 P- Otro, otro, otro.  
 I- Ya está.  
 P- Ahora dibújalos todos.  
 I- Ya está.  
 P- Sal y dibuja lo que estás viendo en tu imaginación.  
 Sale y dibuja la gráfica con igual firmeza que la anterior.  
 P- Ahora recupera en tu imaginación la gráfica de los puntos con  $y=1$ .  
 I- Ya está.  
 P- Borra todos los puntos que tienen la  $x$  negativa.  
 I- Ya está.  
 P- Recupera la gráfica de los puntos con  $y=x$ .  
 I- Ya está.  
 P- Borra los puntos con  $x$  positiva.  
 I- Ya está.  
 P- Sal a la pizarra y dibuja el trozo que te ha quedado sin borrar en cada caso.

I sale y dibuja con leves titubeos pero correctamente la gráfica pedida.

P- Pon nombre a cada tramo.

Sale y escribe la ecuación que cumple cada rama en la rama correcta.

P- Otra forma de expresarlo sería esta:

La profesora muestra a Isabel la formalización de una función definida a trozos, Isabel asiente. Su expresión de triunfo corrobora que lo ha entendido.

A partir de este día la actitud de Isabel fue mucho más participativa, se sumergió en las tareas de clase y tuvo una percepción de sus capacidades que la llevó a sentirse parte activa de su grupo de trabajo y capaz de aprobar la asignatura. ¡Lástima que esta revolución actitudinal se produjera a 2 meses de final de curso! ■

### 7. EN LA ETAPA DE VERIFICACIÓN

Referentes a la comprobación: ¿seguro que los cálculos son correctos?, ¿seguro que son los más adecuados?, ¿son lógicas y coherentes las consecuencias que se deducen de esa solución?, ¿corresponde esa solución al problema planteado?

Referentes a la reflexión: ¿has prestado atención a tus emociones en los momentos clave de la resolución?, ¿has reflexionado sobre las implicaciones de las conjeturas y razonamientos?, ¿puede hacerse más clara tu resolución?

Referentes a las posibles extensiones: ¿Puedes generalizar el problema a un contexto más amplio?, ¿podrías resolverlo de una forma nueva?, ¿te atreves a modificar algunas condiciones y resolver el nuevo problema?

## Mesa Redonda

### EL TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD EN MATEMÁTICAS

Coordina:

**Fidela Velázquez**

Participantes:

**Amaia Basarrate, Javier Brihuega, Marina Lovelace y Charo Nomdedeu**

#### CUESTIONARIO PARA PARTICIPANTES

Todos somos diferentes. La diversidad en el aula proviene de diferencias individuales basadas en múltiples aspectos: diferencias étnicas, de religión, lingüísticas, déficits culturales para el currículo común, diferencias ligadas al género, a las preferencias de los padres, a las propias expectativas en cuanto al destino social o profesional, a la diferenciación del conocimiento, diferencias referidas a la propia idiosincrasia (comportamiento, intereses, motivaciones...), distintas capacidades en aspectos relacionados con el área, diferenciación en los estilos cognitivos y de aprendizaje, ideas previas y referencias subjetivas, diferencias debidas a los ritmos diversos de trabajo o al llamado algoritmo de actividad (secuencia de tareas tendentes a la consecución de aprendizajes), o en los tiempos empleados en los aprendizajes etc. Centrándose en su propia experiencia:

- 1) Explique el tipo (o los tipos) de diferencias que conoce. ¿Afecta de alguna manera al resto de la tipificación que se ofrece? ¿Cómo?
- 2) ¿Qué tipo de creencias, expectativas y atribuciones existen socialmente sobre estas diferencias? ¿Afectan estas opiniones a la propia diferenciación? ¿Cómo?
- 3) La caracterización que ha desarrollado anteriormente, ¿Cómo abordarla desde un contexto social?
- 4) ¿Y desde un contexto pedagógico?, ¿mediante un currículo diferenciado, que contemple las diferencias existentes, o integrador, que aborde más las semejanzas que los elementos diferenciales? Ventajas e inconvenientes de ambos.
- 5) Entre todas las diferencias que se han expuesto, y dependiendo del entorno, habría que priorizar unas ante otras. Ello exige una detección previa de la situación de partida del alumnado, puesto que

algunas de las diferencias son obvias, mientras que otras no. ¿Cree Ud. que habitualmente este diagnóstico inicial se realiza? ¿En qué aspectos convendría centrarse? ¿Qué sugiere para realizarlo o mejorarlo?

- 6) En el tratamiento didáctico del área, y partiendo del supuesto de las diferencias debidas a la desigual distribución del conocimiento, ¿cómo plantear el aprendizaje?,  
 ¿Abordado a partir de metodologías específicas dentro de un grupo de alumnos diversos (proyectos, contratos didácticos...)? ¿Diferenciado por niveles de conocimiento?  
 ¿Diferenciado por especialidades?  
 ¿Ofreciendo alternativas desde espacios opcionales?  
 ¿Otro(s)?  
 Ventajas y dificultades de la(s) opciones elegidas.
- 7) ¿Cómo se abordaría el tratamiento didáctico del área partiendo del supuesto de las diferencias debidas a la desigual utilización del tiempo?  
 ¿Mediante clases de recuperación y refuerzo?  
 ¿Con profesorado de apoyo?  
 ¿Mediante técnicas de enseñanza tutorizada?  
 ¿Mediante programas compensatorios y de estimulación?  
 ¿Con actuaciones extraescolares de índole diversa (especifique cuáles)?  
 ¿Otro(s)?  
 Ventajas y dificultades de la(s) opciones elegidas.
- 8) ¿Cómo se abordaría el tratamiento didáctico del área partiendo del supuesto de las diferencias debidas a las necesidades distintas de recursos didácticos?  
 ¿Mediante la diversificación de los propios materiales curriculares y en los planes o secuencias de trabajo de los alumnos?

- Salas, Begoña. (1994). *Orientaciones para la elaboración del Proyecto Coeducativo de Centro. Desarrollo integral de la persona*. Ed. Maite Canal. Bilbao.
- Sampascual, G. (1995) *"Psicología cognitiva y educación"*. Ed UNED. Avila.
- Satvè Llàtzer Bria, Manuel. (1987). *¿Qué sabes de ética?*. Ed. Alhambra. Madrid
- Savater, Fernando. (1993). *Ética para amador*. Ed Ariel. Barcelona.
- Shell Centre. (1985). "El lenguaje de las funciones y las gráficas". University of Nottingham. Traducido por Adela Jaime y Angel Gutiérrez de la Universidad de Valencia.
- Shell Centre. (1988). "Joint Matriculation Board". University of Nottingham
- Skinner, B.F. (1977). *Más allá de la libertad y la dignidad*. Ed. Fontanella. Barcelona.
- Soler Llopis, Juan. (1991). "Las actitudes ante el aprendizaje de las Ciencias". En *III Jornadas Internacionales de Coeducación*. Valencia.
- Velázquez Manuel, Fidela. (1991). "La autoestima de las alumnas y su rendimiento en matemáticas: Cómo mejorarla". En *III Jornadas Internacionales de Coeducación*. Valencia.
- Velázquez Manuel, Fidela. (1994). "Y la escuela... ¿Qué hace? ¿Cómo podemos fomentar futuras profesionales de base matemática?". En *Jornadas sobre Matemáticas y Coeducación*. Ed. OECOM Ada Byron. Madrid.



especialidades; ofrecer alternativas desde espacios opcionales etc.

Por otro lado, y sobre el tratamiento didáctico del área partiendo del supuesto de las diferencias debidas a la desigual utilización del tiempo podría plantearse posibilidades diversas como: clases de recuperación y refuerzo; profesorado de apoyo; técnicas de enseñanza tutorizada; programas compensatorios y de estimulación; actuaciones extraescolares de índole diversa etc.

A su vez, y en cuanto al tratamiento didáctico del área partiendo del supuesto de las diferencias debidas a las necesidades distintas de recursos didácticos podría abordarse mediante sugerencias que contemplen la diversificación de los propios materiales curriculares y de los planes o secuencias de trabajo de los alumnos; mediante tareas indi-

vidualizadas para los casos necesarios; mediante fichas-guías; mediante planes de trabajo; usando materiales con diverso grado de dificultad; mediante material diseñado para el aprendizaje independiente; mediante enseñanza asistida por ordenador etc.

En cuanto al modelo de organización escolar las tendencias podrían decantarse por la distribución aleatoria del alumnado, sin ningún tipo de selección u organización previa, en grupos heterogéneos; mediante niveles distribuidos en forma de escuelas "abiertas"; mediante niveles de estructuración intermedia (ciclos en lugar de cursos) etc.

Por último, la consideración de la evaluación como una forma de tratamiento de la diversidad en el área, podría suponer el desarrollo de alternativas al modelo sumativo, clasificatorio o jerárquico actualmente al uso ■

Texto de **Rosario Nomdedeu Moreno**  
I.B. de Almazora. Castellón

El tratamiento de la diversidad no es un problema nuevo, pero sí es un problema especialmente relevante en la actualidad. La enseñanza para toda la población, introduce la diversidad de grupos sociales en la escuela, desaparece la homogeneidad que existía, en cuanto al grupo social de pertenencia. Recordemos que desde la Real Cédula de 1771, pasando por los múltiples planes educativos del siglo siguiente y parte del actual, el objetivo de la enseñanza para todos era un eufemismo. Ya en la letra quedaban segregadas las mujeres, pero en la realidad, además, quedaban excluidos y excluidas las hijas y los hijos de las clases trabajadoras.

La generalización de la enseñanza para todos y para todas suma, a la conveniencia de una enseñanza individualizada en pos de un mejor rendimiento escolar, el deseo explicitado en la LOGSE de evitar a toda costa un tratamiento discriminatorio en la escuela.

La coeducación como transversal de transversales y el método de enseñanza por diagnóstico como estrategia de intervención, pueden contribuir al tratamiento individualizado y no discriminatorio propuesto.

Pero los grupos humanos implicados en el hecho educativo hemos aprendido bien los valores de la cultura que avala al sistema social, los hemos interiorizado, han reestructurado nuestra personalidad y los manifestamos claramente en el conjunto de nuestras actitudes. Las personas jóvenes nos observan, nos miran, nos copian, nos erigen en modelos, copian la cultura que llevamos puesta a través de la imagen

que les ofrecemos, aunque más tarde se afirmen rechazándola. Es por tanto una falacia pretender una educación integral en el seno de una cultura segregadora, e inútil intentar un cambio de la cultura sin cambiar las actitudes aprendidas de ella.

Nuestra cultura transmite un sistema de valores llamado por Victoria Camps *La ética de la justicia* íntimamente ligada al derecho a la propiedad privada y que olvida y devalúa lo que la misma autora denomina *ética del cuidado*, reservada al ámbito privado y para el sector femenino de una sociedad fuertemente organizada bajo los criterios del sistema de género. El énfasis puesto desde la Revolución Francesa en el valor de la Justicia como defensa de los derechos a la Igualdad, Libertad y Fraternidad, ha degenerado, más bien nació ya viciado, en Justicia para la defensa de la propiedad en el sistema capitalista de las sociedades opulentas, y en sus necesarios subproductos: el consumismo, la competitividad y el individualismo. Parece que la igualdad y la fraternidad siguen siendo la revolución pendiente, no son demasiado compatibles con ese tipo de libertad que hemos cultivado. Incompatibilidad que explica porqué hemos llegado a una sociedad consumista y no a una sociedad cooperativa; porque promocionamos personas competitivas en lugar de personas competentes, o porque estamos sumidos en la soledad del individualismo en lugar de trabajar nuestra individuación.

El cambio de nuestras actitudes equivale a cambiar nuestras formas de percibir, pensar, valorar, sentir y actuar.

La frecuencia con que nos mostramos rigurosamente auto-críticas las personas, o la indecisión crónica que nos aqueja

- ¿Mediante tareas individualizadas para los casos necesarios? ¿Mediante fichas-guías?
- ¿Mediante planes de trabajo?
- ¿Usando materiales con diverso grado de dificultad?
- ¿Mediante material diseñado para el aprendizaje independiente? ¿Mediante enseñanza asistida por ordenador?
- ¿Otro(s)?
- Ventajas y dificultades de la(s) opciones elegidas.
- 9) ¿Qué modelo de organización escolar se sugiere como más idóneo?
- ¿Distribución aleatoria del alumnado, sin ningún tipo de selección u organización previa, en grupos heterogéneos? ¿Mediante niveles distribuidos en

forma de escuelas "abiertas"? ¿Mediante niveles de estructuración intermedia (ciclos en lugar de cursos)?

¿Otro(s)?

Ventajas y dificultades de la(s) opciones elegidas.

- 10) ¿Es la evaluación una forma de tratamiento de la diversidad en el área?

En la línea de las propuestas didácticas que Ud. ha ofrecido ¿podría describir brevemente la modalidad o modalidades de evaluación (instrumentos, elementos a evaluar etc.) que propone y sugerencias al respecto?

- 11) ¿Qué aspecto(s) sobre la diversidad no se ha(n) abordado desde el cuestionario anterior y a Ud. le gustaría resaltar o tratar? Desarróllelo(s) ■

Texto de **Fidela Velázquez**

*I.B. San Hermenegildo. La Cuesta, TENERIFE*

Los problemas relativos a cómo, a través del currículo, se puede o debe atenderse a la diversidad constituye uno de los núcleos de dilemas, conflictos y posibles soluciones más difíciles de resolver y de satisfacer en el sistema educativo, en los centros escolares, en el currículo y en la práctica de la enseñanza, particularmente en el campo de las Matemáticas.

Las ideas previas que como docentes tenemos suponen un obstáculo para que esta atención a la diversidad pueda ser llevada a cabo. En efecto, más que desde condicionantes intrínsecos de la materia, el punto de partida habría que establecerlo en el pensamiento de cada alumno o alumna, identificando sus procesos de aprendizaje y sus potencialidades cognitivas, sus necesidades y limitaciones, su formación e informaciones previas y considerando la heterogeneidad en términos positivos. La preocupación debe estar más en el proceso de aprendizaje de aquellos que en el proceso de enseñanza, con el fin de organizar las situaciones de aprendizaje en función de las necesidades educativas de los alumnos y de las alumnas.

El punto de partida ha de ser el hecho de que todos somos diferentes. La diversidad en el aula proviene de diferencias individuales basadas en múltiples aspectos: diferencias étnicas, de religión, lingüísticas, déficits culturales para el currículo común, diferencias ligadas al género, a las preferencias de los padres, a las propias expectativas en cuanto al destino social o profesional, a la diferenciación del conocimiento, diferencias referidas a la propia idiosincrasia (comportamiento, intereses, motivaciones...), distintas capacidades en aspectos relacionados con el área, diferen-

ciación en los estilos cognitivos y de aprendizaje, ideas previas y referencias subjetivas, diferencias debidas a los ritmos diversos de trabajo o al llamado algoritmo de actividad (secuencia de tareas tendentes a la consecución de aprendizajes), o en los tiempos empleados en los aprendizajes etc.

En general, los aspectos reseñados anteriormente no son independientes unos de otros. Es preciso delimitar cuáles se interrelacionan con el resto y cómo; qué tipo de creencias, expectativas y atribuciones existen socialmente sobre estas diferencias y cómo afectan estas opiniones a la propia diferenciación, si se pretende conocer el origen de las diferencias. Así, una vez situados en el contexto real de las mismas, y aún no teniendo acceso a abordarlas desde un contexto social, podríamos hacerlo desde un contexto pedagógico.

El debate se centrará, pues, en qué modelo de actuaciones pedagógicas es más idóneo para sujetos diferenciados por la multiplicidad de situaciones expuestas. Las posturas de los integrantes de la mesa podrían apuntar hacia el uso de currículos diferenciados, que contemplen, reproduzcan o estimulen las diferencias existentes, o integradores, tendentes a suprimir las diferencias discriminatorias, que aborden más las semejanzas que los elementos diferenciales, siendo estos últimos considerados como elementos curriculares enriquecedores.

En cada uno de los casos el tratamiento didáctico del área será distinto. En particular, y partiendo del supuesto de las diferencias debidas a la desigual distribución del conocimiento se puede plantear el aprendizaje abordado a partir de metodologías específicas dentro de un grupo de alumnos diversos (proyectos, contratos didácticos...); diferenciado por niveles de conocimiento, diferenciado por

## 9. Influencia de las Nuevas Tecnologías en el currículo y en la intervención educativa

### INCONVENIENTES DE LA UTILIZACIÓN DEL ORDENADOR EN EL AULA

**Antonio González Rebés**

*Dpto. Tecnologías Especiales Aplicadas a la Telecomunicación.  
Universidad Politécnica. Madrid*

**La introducción de las nuevas tecnologías de la información en el aula y en concreto del ordenador plantea serios problemas a los enseñantes. Hay importantes inconvenientes asociados a su uso, problemas fisiológicos, problemas psicológicos y problemas derivados de las limitaciones técnicas de los productos. Con todo el problema más grave es la dependencia que genera. En la ponencia se intenta poner de manifiesto cuál es el precio que se paga por el uso de tan poderosa herramienta.**

**L**a aparición de una nueva tecnología produce siempre inquietud en cualquier campo de actividad. Las personas, al menos las personas sensatas, del sector implicado, se sienten obligadas a conocer los avances que se proponen, a evaluarlos y a adoptarlos en su trabajo si la evaluación resulta positiva. Las nuevas tecnologías de la información en general y la llamada revolución informática en particular, están incidiendo en todos los sectores de actividad humana, desde la construcción o la industria a la economía y la organización social pasando por la ciencia y ¿cómo no? por la enseñanza. Y esto es solo el principio, todos lo sabemos.

Incluso, los aspectos informáticos de la enseñanza que vamos a comentar pueden estar ya anticuados, el ordenador no es hoy lo que era hace pocos años. Más que una máquina autónoma, el ordenador es ahora una conexión a la red, una puerta por la que uno se comunica con un mundo de información insospechado. Casi todos los conocimientos de la humanidad circulan hoy por la red y los

tenemos en nuestro terminal si sabemos acceder a ellos. No es una utopía, todos los centros universitarios están ya conectados en nuestro país y los de Enseñanzas Medias lo estarán en breve.

El ordenador es una herramienta de uso general, permite procesar grandes cantidades de información en poco tiempo, modelar y simular procesos, crear incluso "realidades virtuales" y, lo que es mucho más importante en la enseñanza, presentar la información de forma atractiva y transmitirla con gran eficacia. La primera consecuencia es inmediata: los enseñantes tenemos la obligación de conocer esta herramienta y sus posibilidades, revisar nuestros métodos de trabajo a la vista de las posibilidades que ofrece, estudiar sus ventajas y también sus inconvenientes.

Aquí es donde quiero proponeros un conjunto de reflexiones, más con el ánimo de ordenar y sistematizar los argumentos en los que todos hemos pensado alguna vez que de descubrir otros nuevos. Hay suficientes, en favor y en contra, como para justificar un rato de reflexión y para asegurar que no va a ser estéril.

El uso del ordenador en la enseñanza, como las medicinas, viene acompañado de unas instrucciones del fabricante. El folletito empieza diciendo en letras muy grandes: "Superpíridona. El remedio de todos los males". A continuación, con letras algo más pequeñas "Indicaciones: se aconseja para el tratamiento de enfermedades renales y para síndromes agudos..." (no era el ungüento amarillo). El siguiente tamaño de letra se emplea para otro epígrafe "Posología: administrar bajo supervisión médica dos comprimidos cada siete horas durante..." (¡no te pases!). La letra ha decrecido de forma alarmante. Con una lupa todavía podemos descifrar otros epígrafes: "Contraindicaciones; Efectos secundarios;

por el miedo exagerado a equivocarnos, el excesivo miedo a desagradar, el perfeccionismo, el sentimiento de la culpabilidad, la hostilidad siempre a flor de piel, o nuestra hipersensibilidad a la crítica, el "hoy estoy depre",... son claros indicadores de que el conjunto de actitudes que mostramos las personas de las sociedades opulentas hacia nosotras mismas y hacia las demás personas son poco saludables.

Al conjunto de actitudes que la persona muestra hacia sí misma le llamamos autoestima.

Es bastante coherente que mostremos actitudes negativas hacia las demás personas cuando nuestra autoestima es deficitaria pues la persona con autoestima positiva acepta el hecho evidente de la interdependencia humana, y se da cuenta de que ni puede, ni le interesa, vivir aislada e independiente de las demás, respeta, es solidaria y tolerante consigo misma y con las demás personas, persigue la armonía en las relaciones con las demás personas y consigo misma.

En cuanto a la intervención del profesorado en el tratamiento de las diferencias, a parte de modelizar con actitudes de autoestima positiva, una tarea fundamental es la del diagnóstico. No sólo es importante el diagnóstico del error conceptual previsible en una situación dada sino también la percepción del estado emocional de cada una de las personas del aula, para diagnosticar el tipo de bloqueo en el que se encuentran atascadas. Conocer el grupo social de pertenencia facilita también el diagnóstico de los bloqueos culturales previsibles.

La actividad en el aula puede diseñarse siguiendo los pasos siguientes:

1. Usar materiales cuyo discurso sea incluyente, y que introduzcan contextualizadamente la posibilidad de afloración del conflicto cognitivo.
2. Prestar gran atención a los estados emocionales para ir detectando los bloqueos previstos en el diagnóstico previo. "Escuchar empáticamente".
3. Discusión, confrontación de resultados para que afloren los conflictos cognitivos, emotivos, culturales, relacionales.
4. Diseñar actividades complementarias, enfoques desde distintos puntos de vista que ayuden a la deconstrucción de preconcepciones, prejuicios y predisposiciones.
5. Reconstrucción del mapa conceptual, del propio autoconcepto, de la estructura cognitiva, de la propia personalidad y de la estructura de relación con el grupo.

Todo ello sumergido en el marco del modelo coeducativo definido como una opción educativa que:

- 1) incorpora valores ligados a la cooperación y al cuidado de las relaciones de la persona consigo misma y con las demás personas,
- 2) considera que esos valores, tradicionalmente considerados femeninos, son universalizables,
- 3) entiende la necesidad de elevar el rango de esos valores para hacerlos deseables, sacarlos de la devaluación a que los mantiene sometidos el sistema de género y
- 4) parte del interés y deseos de las alumnas y los alumnos y por ello eleva a igual rango los asuntos de la vida cotidiana y de la vida pública.

En orden a conseguir una buena vida humana, en orden a cubrir las necesidades humanas: físicas, de seguridad, sociales, psicológicas y axiológicas ■

Como la falta de recursos, hay otro aspecto, tal vez coyuntural, que afecta a la calidad de la enseñanza que se imparte actualmente a través del ordenador y es la falta de imaginación, explicable y hasta disculpable por la novedad, con que los enseñantes hacemos uso de las nuevas herramientas. Usar un ordenador como calculadora o como libro de texto, que son las dos formas más frecuentes, es pagar la factura de los inconvenientes que antes mencionaba, sin obtener a cambio las ventajas que podrían obtenerse de una herramienta tan poderosa. La mayoría de los programas que se usan en la actualidad son o puramente operativos (ordenador como calculadora) o meramente informativos (como libro de texto) y generalmente sin planteamientos didácticos serios. Suele ser el profesor el encargado de sacarles partido y suele no saber hacerlo.

La calidad de los programas será sin duda un reparo importante durante mucho tiempo. Menester es darse cuenta que los fabricantes de programas de enseñanza son empresas cuyos objetivos son los beneficios económicos en un mercado competitivo. Hay que generar productos atractivos a mínimo coste y plazo, hay que invertir en los argumentos de venta, hay que hacerlos simpáticos para que los padres y las instituciones entren en el juego. Se cuidará más el atractivo de los colores y el "diseño gráfico" que el rigor científico de los contenidos. Conceptos como el aprendizaje significativo quedan claramente fuera de los objetivos del mercado.

También sucede que la tecnología informática que se utiliza en su creación, conceptos como multimedia, interactividad, programación orientada a objetos, etc. requieren un alto grado de especialización en los programadores. Resulta que el enseñante no se entiende con el informático, sus mundos están muy alejados y no hay comunicación entre ellos. Contrariamente a lo que sucede con los libros de texto, los programas los hacen los informáticos sin intervención de los docentes. Hemos dejado la generación de herramientas didácticas en manos de gente sin conocimientos del mundo de la enseñanza y eso se nota en muchos de los programas que hay en el mercado. La incomunicación entre los sectores generador y consumidor de aplicaciones didácticas es grave e imposibilita la realimentación necesaria para mejorar los productos.

Un problema muy grave que se presenta en las aplicaciones didácticas, producido sin duda por la desconexión entre el programador y el usuario, es la amplitud de la estructura que vertebra los contenidos. El alumno que recorre el programa, tras una fase de exploración suele encontrarse perdido en la estructura del programa, no sabe en qué punto está ni como se relacionan los mensajes que va recibiendo. Le faltan referencias globales para situar cada dosis de información en su contexto. Los sucesivos niveles de concreción y las detalladas ayudas que se incluyen lle-

gan a despistar al usuario y a distraer su atención del discurso principal. Cuanto más atractivas sean las imágenes más actuarán como distractor. Solamente una búsqueda guiada por un objetivo muy concreto podrá evitar este problema y aún así, al explorador le costará un esfuerzo de voluntad seguir el camino adecuado.

Mención aparte merece el lenguaje. Como consecuencia del factor de escala que se necesita para competir en el mercado de las aplicaciones de enseñanza por ordenador, los programas se hacen en inglés, sólo un mercado mundial permite rentabilizar las inversiones, y se traducen al español, frecuentemente por personas no expertas en Matemáticas ni en enseñanza. El resultado suele ser penoso, los textos originales suelen redactarse con un vocabulario muy pobre para facilitar las traducciones y estas se hacen sin demasiado cuidado. Si antaño se decía que el aprendizaje del idioma se hace a través de la lectura, hogaño hay que tener cuidado con lo que se lee, o entre el lenguaje periodístico y el informático terminaremos por destruirlo. ¿Cómo se enseña Matemáticas o cualquier otra materia a alumnos con serias dificultades de comprensión de su propia lengua? ¿Cómo se introducen los conceptos matemáticos mediante términos imprecisos o ambiguos?

La universalidad del mercado también reduce la eficacia de los mensajes. Sabido es que para motivar al alumno conviene mostrarle aplicaciones de la materia que se le enseña próximas a su vida cotidiana. En Matemáticas ese factor es muy importante, el alumno busca inconscientemente, entre la abundancia de conocimientos que se le transmiten, aquellos que siente que "valen para algo" y a ellos dedica más atención. Las diferencias de estructura y organización social entre países hacen que a un niño español le preocupen poco cosas como cuántos acres tiene el jardín de los vecinos o cuál es la duración del trayecto entre San Francisco y Los Ángeles. El colonialismo cultural está también en los ordenadores y tiene un doble efecto perverso.

Los programas que se usan actualmente en la enseñanza de las Matemáticas aprovechan relativamente bien una de las cualidades mejores de los ordenadores, su capacidad para hacer y presentar la información de modo gráfico. Es evidente que la representación gráfica de una función enseña mucho sobre ella, permite estudiar sus características y deducir propiedades. Las gráficas en la pizarra han sido siempre una herramienta muy usada por los profesores aunque su realización resultaba trabajosa y los efectos no siempre eran los deseados. El ordenador aporta rapidez y versatilidad en la representación gráfica, podemos cambiar las escalas de modo instantáneo, aproximarnos a los efectos locales, trazar tangentes etc., aunque no siempre vamos a conseguir lo que queremos si no sabemos sus limitaciones. Aún en este aspecto, el más fuerte en teoría del ordenador, hay limitaciones y conviene conocerlas.

Intoxicación y tratamiento...". Las cosas no son exactamente como parecían. Los intereses comerciales de los laboratorios (y de los fabricantes de informática) son muy poderosos, la información se transmite de modo que induzca a error al cliente incauto.

Siguiendo con el ejemplo, de vez cuando encontramos publicidad de una nueva versión de un medicamento: "Superpiridona II. No produce molestias gástricas". ¡Caramba!, en la versión anterior no se decía que las produjera. ¿Hay algo de esto en la publicidad de ordenadores equipados con monitores "de baja radiación"? ¿No era insignificante la radiación de los monitores antiguos? Aquí surge un primer dato para abonar el miedo a la informática: cuando la información sobre las ventajas e inconvenientes de un producto está controlada por el fabricante, el usuario pisa terreno poco firme. Frecuentemente descubriremos que el producto producía problemas cuando el fabricante nos informe que su última versión los resuelve.

Hay además, en la enseñanza, un ingrediente añadido: cualquier inconveniente se multiplicará por un elevado número de "víctimas inocentes", los alumnos.

Los efectos físicos de la utilización del ordenador son poco temidos. Todos hemos oído hablar de estudios sobre pérdida de agudeza visual, sobre problemas articulares provocados por los teclados, lesiones de columna, etc. Sin embargo, casi nadie considera esos argumentos como decisivos, ni siquiera importantes, a la hora de planificar una actividad docente informatizada. La inquietud, de momento, la dejamos para los sindicatos y la referimos a los profesionales de la informática. Consideramos que los problemas sólo afectan a quienes pasan muchas horas frente al ordenador, no a nuestros alumnos.

He aquí el segundo multiplicador: si de un debate serio se deduce que la enseñanza por ordenador es buena en Matemáticas, por las mismas lo será en CC. Naturales, en Lengua etc. y estaremos condenando a los alumnos a pasar muchas horas conectados a la máquina (como los profesionales de la informática). La preocupación de los sindicatos habrá de extenderse a las APA, habrá que estudiar reglamentos de seguridad e higiene en el aula y crear una Inspección específica.

Dejando de lado, de momento, los efectos físicos, hay más efectos indeseables que derivan de la enseñanza por ordenador en general, sin entrar todavía en el campo de las Matemáticas. Los efectos psicológicos merecen también algunos comentarios. El más temible, quizá, es la "Infodependencia" según el término acuñado por el profesor Balaguer. El efecto está bastante estudiado en el caso de las máquinas calculadoras, los alumnos se encuentran incapaces de resolver problemas sin máquina, tienden a auto-

limitarse, tienden a plantear la resolución de los problemas en función de las herramientas disponibles y se bloquean cuando lo único que tienen es su cabeza. Tienden a creer en la infalibilidad de las máquinas y a descargar su responsabilidad en ellas. El problema afecta a toda la sociedad pero, como siempre, los jóvenes están más desprotegidos. Podemos llegar a crear una generación de "terminales biológicos" de ordenador, en lugar de seres pensantes.

Tal vez sean exagerados estos planteamientos; a pesar de todo, la gente sabe andar cuando se les estropea el coche, pero lo que parece claro es que muchas de las facultades que hoy encuadramos bajo el concepto de inteligencia pueden sufrir un anquilosamiento por falta de uso si dejamos a cargo de las máquinas la "funesta manía de pensar". Es claro que el espíritu crítico, base universalmente admitida del progreso, se resentirá de la existencia de máquinas que nunca se equivocan.

Habrà que volver sobre los planteamientos globales de la enseñanza con ordenador, no obstante, vamos a cambiar de punto de vista y a aproximarnos más al día a día del aula de Matemáticas. Aquí las cosas se ven de otra manera, empezando por un problema aparentemente trivial: no podemos enseñar Matemáticas con ordenador en unos ordenadores inexistentes o inoperantes, con unos programas que tampoco tenemos y que no sabríamos manejar y todo esto sin una formación informática previa del profesor.

La experiencia demuestra que en el aula de ordenadores, el profesor dedica más tiempo a resolver problemas informáticos (averías, ordenadores "colgados", redes que "se caen", etc.) que a labores propiamente docentes.

Los profesores necesitan tiempo para aprender el funcionamiento y manejo de las máquinas, para estudiar y evaluar los programas, para diseñar estrategias de enseñanza-aprendizaje, mientras que en la práctica se dedican a buscar recursos para equipar las aulas, a tareas de mantenimiento de máquinas y a justificar el uso de unos medios que se les han dado a título experimental y de los que se les van a pedir cuenta de resultados. En estas condiciones, la metodología de trabajo puede no ser la más adecuada. Con toda probabilidad el profesor se dedicará a enseñar el uso de un programa que será el que buena-mente tenga a mano (no el bueno) y además no le podrá sacar el partido deseable.

No sabemos si la enseñanza con ordenador es o no la panacea, pero desde luego en las condiciones actuales de la mayoría de los centros de enseñanza, no deja de ser una utopía. Tal vez el tiempo se encargue de resolver este problema pero es claro que hoy el principal enemigo del ordenador es su ausencia.

## EL IMPACTO DE LAS CALCULADORAS GRÁFICAS EN LA ENSEÑANZA DE APLICACIONES MATRICIALES A NIVEL PREUNIVERSITARIO

**Antonio R. Quesada**

*Universidad Akron. Estados Unidos*

**E**n los últimos ocho años, las promesas de la década de los setenta sobre el posible impacto en la enseñanza de la tecnología en general y de los ordenadores personales en particular, han empezado a materializarse. En matemáticas, encontramos la segunda generación de las calculadoras gráficas y los sistemas algebraicos para ordenadores con capacidades para hacer gráficas de funciones y llevar a cabo complicados cálculos numéricos o simbólicos en un tiempo despreciable. Al mismo tiempo, el costo de estos equipos se ha ido abaratando y se prevee que los incrementos en ventas, que empiezan a ser masivos, producirán una reducción mucho mayor del precio actual. Las repercusiones del uso de estas tecnologías en el salón de clase tienen el potencial de afectar substancialmente no sólo el currículo, sino que también la metodología tradicionalmente usada en la enseñanza de matemáticas.

En lo que sigue, a menos que se especifique lo contrario, cuando usamos la expresión calculadora gráfica o simplemente calculadora, nos referiremos exclusivamente a las calculadoras que están actualmente en el mercado, tales como los modelos TI-81 y TI-82 de Texas Instruments, o cualquier otra marca como Casio, Sharp, etc., con capacidades comparables.

Sin tratar de ser exhaustivos, mencionaremos algunos de los factores que pueden contribuir a los cambios a que aludimos. En primer lugar, las nuevas tecnologías nos permiten usar distintos enfoques a la hora de presentar un concepto o de resolver un problema. Así por ejemplo, en adición al enfoque algebraico tradicional de cómo resolver una ecuación, con la calculadora también podemos presentar métodos numéricos y gráficos. Esto no sólo permite un tratamiento unificado del tema, sino que también amplía la visión del estudiante tanto al construir un concepto como al aplicarlo. En segundo lugar, el poder llevar a cabo verdaderas proezas numéricas y gráficas sin mayor esfuerzo, promueve el que problemas tradicionalmente reservados para universidad se hagan accesibles a nivel de bachillerato. Al mismo tiempo, estos nuevos enfoques o incluso las operaciones programadas que las calculadoras proveen,

nos ofrece la alternativa de facultar a personas que nunca han estudiado, digamos cálculo, para usar modelos matemáticos tradicionalmente reservados para los que estudian esta disciplina.

Consideremos como un primer ejemplo los problemas de optimización. Tradicionalmente, no era sino hasta que un estudiante aprendía a encontrar los extremos de una función usando cálculo diferencial, que se empezaba con estos problemas. Sin embargo, el uso de la calculadora gráfica permite obtener directamente los extremos de una función continua sin necesidad del cálculo diferencial. ¿Es razonable seguir presentando estos problemas como una aplicación del cálculo, o dada su relevancia deberíamos presentarlos en una etapa más temprana y permitir que el cálculo de extremos se haga con una calculadora? El argumento a favor de la necesidad de usar cálculo por ser el proceso que produce "soluciones exactas", ignora por completo que la industria usa resultados decimales con una precisión mucho menor que la que obtenemos con una calculadora.

En forma análoga, el análisis de la gráfica de una función y la solución de ecuaciones que contienen funciones algebraicas y trascendentes, o incluso ecuaciones algebraicas con soluciones irracionales no podían ser presentadas antes de estudiar cálculo. Aún entre aquellos que estudiaban cálculo, el número de estos ejemplos que resolvían y el grado de dificultad de los mismos, estaban limitados por la considerable inversión de tiempo que conlleva resolverlos con papel y lápiz, aún cuando se use una calculadora científica. La necesidad de alcanzar un nivel aceptable de eficiencia en el uso de algoritmos, sin los que no era posible resolver la mayor parte de los problemas, trajo como consecuencia un gran énfasis en el aprendizaje de los procesos algorítmicos. A menudo, este enfoque permitía dedicar muy poco tiempo a los conceptos matemáticos subyacentes y a su aplicación a la resolución de problemas del mundo que nos rodea. No es de extrañar que se haya encontrado [2] que un porcentaje alto de estudiantes que han estado estudiando cálculo diferencial e integral, no pueda contestar correctamente preguntas elementales sobre conceptos bási-



La limitación primera de los gráficos por ordenador es la resolución. Los monitores que se utilizan son *raster*, matrices de puntos coloreados. En una resolución estándar VGA el número de puntos que se representan es 640x480 y la representación de una función en estas condiciones puede no ser adecuada. La continuidad de la curva hay que imaginarla ya que en pantalla parece lo contrario. Además los escalones en la representación se notan más en unas direcciones que en otras. La visualización de una gráfica en una pantalla VGA es bastante burda, las intersecciones no siempre se ven bien y eso obliga frecuentemente a hacer un uso excesivo del zoom.

Aquí surge un problema adicional. El zoom es un salto, un proceso necesariamente discontinuo ya que la máquina necesita recalcular todos los puntos de la pantalla. Frecuentemente el alumno se pierde y se le escapa la relación entre la zona ampliada y la curva original. No solo a los alumnos les pasa eso, la experiencia de los usuarios de informática gráfica demuestra que las mayores inversiones se hacen en la pantalla, buscando monitores de gran tamaño y alta resolución, precisamente para usar el zoom lo menos posible. Utilizar adecuadamente el zoom en una pantalla gráfica de baja resolución es tarea que requiere entrenamiento y exige capacidad del usuario para mantener en la mente simultáneamente las dos vistas del gráfico.

El otro problema asociado al carácter *raster* de la representación en pantalla es la imposibilidad de establecer una correspondencia biunívoca entre la información que guarda el ordenador y su representación en pantalla. Resulta imposible seleccionar un punto del plano en una pantalla ya que el ratón nos permitirá solamente posicionar el cursor en el punto de la matriz más próximo al que buscamos. Esta limitación no resulta natural a un principiante y desvía los esfuerzos de aprendizaje en direcciones indeseadas.

Cabe pensar que los problemas derivados de la tecnología disponible serán resueltos, o al menos paliados en un futuro próximo. Los programas van a mejorar, incluirán

cada vez mayores cantidades de "inteligencia" y permitirán a los alumnos el aprendizaje de las Matemáticas sin tener que estar pendientes de los aspectos informáticos de la herramienta. Los dispositivos de visualización también van a evolucionar bastante y sobre todo, los diseñadores de aplicaciones aprenderán a utilizar mejor las máquinas, a no abusar de la densidad de información que se transmite en cada pantalla y a buscar formas de representación que minimicen los efectos extraños. El verdadero protagonista de la enseñanza volverá a ser el profesor.

Volvemos al origen. El ordenador llegará a ser un ayudante estupendo en los procesos de enseñanza-aprendizaje pero todavía hay que investigar, experimentar, evaluar. Parece que el uso más adecuado de las herramientas informáticas es el apoyo a los procesos de investigación. La máquina se utiliza como biblioteca, el alumno busca la información que necesita para resolver problemas planteados por el profesor y de paso aprende estrategias y contenidos. El verdadero valor de la herramienta se pondrá de manifiesto cuando los alumnos aprendan a "navegar" por ella buscando información o ayudas.

Todo esto, bonito en teoría, plantea dificultades en cuanto a organización de los recursos y en cuanto a control de las actividades. Cuanto más libertad se da a los alumnos para usar el ordenador a su manera, mas probabilidades hay de encontrarnos con un aula de videojuegos o con una fábrica de virus. Cualquier alumno tiene imaginación suficiente para encontrarle a la máquina cientos de aplicaciones diferentes a las que habíamos previsto. Esto nos lleva a otra paradoja aparente: el uso de los medios informáticos no descarga de trabajo al profesor sino que exige de él mayor esfuerzo y dedicación.

El fenómeno se produjo ya en otros campos, la máquina que debía simplificar tareas y evitar la dedicación de las personas a actividades tediosas o repetitivas, se erige en fuente de trabajos aún más latosos que los que debía sustituir. Nos queda la vaga esperanza de que la calidad final del producto haya mejorado ■

Ya que antes o después los estudiantes que usan calculadoras van a enfrentarse con errores de redondeo o resultados racionales en forma decimal, las siguientes sugerencias pueden ser de interés. Si como resultado de una operación algunos de los elementos de una matriz son de la forma 2.15E-12, podemos usar  $\text{Round}(A,0)$  para reducirlos a cero. Si se desea obtener  $A^{-1}$  con elementos enteros, podemos usar  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\det(A)A^{-1})$  en la TI-81. En la

TI-82, basta con usar  $\boxed{\triangleright \text{Frac}}$  para cambiar los elementos a fracciones.

Por último, debe señalarse que si  $A$  es inversible pero sus elementos son casi iguales a los de una matriz singular  $B$ , el error de redondeo puede hacer difícil el cálculo de  $A^{-1}$ . De hecho, si  $A$  es la matriz de los coeficientes de un sistema lineal cuadrado, el sistema será muy sensible a pequeños cambios en los valores de los coeficientes. Consideremos por ejemplo, los siguientes dos sistemas:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 11 \\ 4.9975x + 6y = 33 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 5x + 6y = 11 \\ 4.99 + 6y = 33 \end{cases}$$

cuyas soluciones son, respectivamente,  $(-8800, 7335.16)$  y  $(-2200, 1835.16)$ . Es sorprendente la diferencia entre las soluciones que un cambio tan pequeño como 0.0075 en el valor de un coeficiente, ha producido. Los estudiantes captan fácilmente la razón que justifica el comportamiento de estos sistemas con sólo pedirles que los comparen con el sistema incompatible:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 11 \\ 4x + 6y = 33 \end{cases}$$

Problemas como el anterior que estaban reservados tradicionalmente para los estudiantes universitarios de Análisis Numérico, pueden, con un esfuerzo mínimo, y en nuestra opinión deben, ser presentados a nivel preuniversitario.

Del mismo modo pueden incorporarse al estudio del álgebra de matrices contraejemplos a las propiedades clásicas de los números reales, los cuales constituyen la base primordial para la intuición numérica de los estudiantes de bachillerato. Así por ejemplo, una vez que las matrices

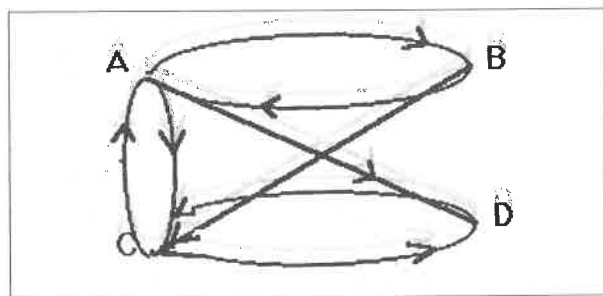
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se han entrado en la calculadora, toma tan sólo unos segundos calcular  $DE$ ,  $ED$  y  $D^3$ . Así, sin pérdida de tiempo, los estudiantes observan no sólo la falta de conmutatividad en el producto sino también la existencia de divisores de cero y de elementos nilpotentes, ausentes naturalmente del cuerpo de los números reales.

Está claro que el usar calculadoras para resolver sistemas de ecuaciones, o para llevar a cabo cálculos con matrices o determinantes, reduce el tiempo que tradicionalmente necesitamos para cubrir estos temas. Además, algunos temas como la regla de Cramer o el cálculo de determinantes pueden omitirse por completo. Por último, las destrezas algebraicas que los estudiantes deben adquirir al estudiar algunos de los algoritmos tradicionales del álgebra de matrices, no deben ser tan sofisticadas como lo han sido hasta ahora. El objetivo de mantener algunos de estos algoritmos será el de facilitar la comprensión de los conceptos involucrados, no el de depender manualmente de los mismos para obtener resultados confiables. El ahorro de tiempo que estos cambios reportan puede usarse para estudiar algunas de las aplicaciones matriciales que permiten resolver modelos matemáticos de variable discreta. Estos modelos, que se han hecho más relevantes al aumentar el uso que la industria hace de los mismos, suponen laboriosas operaciones con matrices que la calculadora gráfica simplifica. Veamos algunos ejemplos.

## II. Una Aplicación de Redes

Los puntos A, B, C y D en el diagrama dado representan cuatro equipos de rescate en una región montañosa. Las flechas indican las posibles transmisiones de radio. Así por ejemplo, el equipo de rescate D puede comunicarse directamente con C pero no con A. D sólo puede comunicarse con A de forma indirecta usando C como relevo. ¿Cuál es el mínimo número de relevos que garantiza que todos los equipos puedan comunicarse entre sí? ¿Qué equipos necesitan al menos dos relevos? ¿Más de dos relevos?



Enumeremos los equipos A, B, C y D con 1, 2, 3 y 4. Sea  $M$  la matriz de incidencia del grafo donde

$$(M)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el equipo } i \text{ puede comunicarse directamente con el } j, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$\text{esto es } M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}. \text{ Consideremos } M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cos de funciones de variable real. Es decir, la habilidad de poder llevar a cabo procesos algorítmicos no garantiza la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados. Por otro lado varios estudios han encontrado que, aún manteniendo el contenido tradicional, el uso de la calculadora gráfica puede ayudar a mejorar la ejecución y el nivel de comprensión de estudiantes de precálculo y cálculo ([7], [8]) sin detrimento aparente de sus habilidades algorítmicas.

Es evidente que en el futuro muchos de los algoritmos tradicionales sufrirán la suerte de la raíz cuadrada. Por otro lado no podemos deshacernos de un proceso matemático, por el hecho de que una máquina pueda llevarlo a cabo con mayor rapidez y precisión, sin considerar cuidadosamente los beneficios pedagógicos que la práctica de ese proceso pueda generar. Pasará algún tiempo antes de que, en las distintas áreas, se encuentre un balance entre lo que debemos mantener y lo que podemos eliminar. Pero cada vez parece más claro que, en la mayor parte de los casos, la meta será el entender la esencia de los algoritmos, en el contexto de la teoría a la que pertenecen, y el poder aplicarlos valiéndose de una máquina.

La cantidad de tiempo necesario para llevar a cabo operaciones con matrices, así como para evaluar determinantes con papel y lápiz, constituye la razón primordial por la que los modelos de variable discreta que comprenden el uso de matrices no figuran en el currículo de bachillerato. Sin embargo, si los criterios que usamos para seleccionar los modelos matemáticos que se enseñan a este nivel incluyen: a) la variedad e importancia de las aplicaciones que el modelo provee al mundo que nos rodea, y b) la accesibilidad del estudiante al nivel de sofisticación de los conceptos y operaciones que el modelo involucra, se hace difícil justificar cómo, con las facilidades matriciales de las modernas calculadoras, algunos de estos modelos de uso frecuente en la industria pueden ser excluidos del currículo de bachillerato.

A continuación presentamos lo que podría ser a) el mínimo a cubrirse con relación a sistemas de ecuaciones lineales, y b) algunos ejemplos de modelos matemáticos de variable discreta tradicionalmente reservados para cursos universitarios, no tanto por su complejidad sino por la dificultad de los cálculos matriciales que requieren. Estos y otros modelos han empezado a aparecer en libros de texto de matemáticas para estudiantes de bachillerato ([1], [3], [4], [5], [6]). Consideramos que al eliminar la dificultad de las operaciones con matrices vía el uso de calculadoras gráficas, los modelos pueden ser presentados a nivel preuniversitario.

## I. Sistemas de Ecuaciones Lineales

El uso de las calculadoras gráficas facilita el complementar desde un principio la presentación tradicional de los méto-

dos algebraicos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, con la interpretación geométrica de los resultados. El método de reducción puede extenderse a sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, a fin de introducir la idea de equivalencia de sistemas. Las tres operaciones básicas que producen sistemas equivalentes, es decir a) el cambiar de orden dos ecuaciones, b) el substituir una ecuación con un múltiplo escalar de la misma, o c) el substituir una ecuación con una combinación lineal de ella misma con otra ecuación, permiten presentar organizadamente el método de reducción de Gauss. Después de esto es fácil abstraer la matriz aumentada de los coeficientes del sistema y usar las operaciones de filas que la calculadora gráfica provee para llevar a cabo el método de reducción. El método de reducción de Gauss usando matrices y el método más rápido de ecuaciones matriciales es todo lo que un estudiante necesita para resolver rápida y eficientemente un sistema de ecuaciones lineales.

La mayor virtud del método de reducción de Gauss reside en que siempre nos da el conjunto solución, independientemente de que éste sea vacío, unitario o de cardinalidad infinita. En principio, parece haber un poco de resistencia a usar las operaciones de filas que la calculadora provee entre los estudiantes que han aprendido a hacer el método de reducción a mano. Sin embargo, esta resistencia disminuye a medida que el tamaño de los sistemas o de los coeficientes en los mismos aumentan.

Si denotamos un sistema lineal con su ecuación matricial  $AX = B$ , entonces cuando  $A^{-1}$  existe, la solución puede obtenerse fácilmente con la calculadora como  $X = A^{-1}B$ . El problema con este método reside en el hecho de que sólo puede usarse cuando es regular, pero éste es el caso también con el método Cramer. Por tanto el método no se aplica a los sistemas lineales con un número distinto de ecuaciones e incógnitas, o a los sistemas cuadrados donde una ecuación es dependiente de las otras, en cuyo caso debemos usar el método de reducción. Aún cuando los estudiantes no hayan estudiado determinantes formalmente, es fácil establecer que una matriz  $A$  es inversible si  $\det(A) \neq 0$ , donde  $\det$  es una función que asigna un valor numérico a una matriz cuadrada. Así pues el uso de la calculadora nos permite eliminar el método de Cramer del currículo, e incluso el estudio de la teoría de determinantes puede diferirse hasta que haya aplicaciones que lo justifiquen.

El procedimiento general que recomendamos para resolver sistemas de ecuaciones lineales  $A_{m \times n} X_{n \times 1} = B_{m \times 1}$  puede resumirse así:

Si  $m = n$  y si  $\det(A) \neq 0$ , entonces  $X = A^{-1}B$ ; en cualquier otro caso se usa el método de reducción de Gauss

1. ¿Cuál será la distribución final si inicialmente hubiera solo un 30% de propietarios? ¿Y si el porcentaje inicial de propietarios fuera de un 60%?
2. ¿Depende la distribución final  $d_n$  de la inicial  $d_0$ ?  
¿Qué ocurre con  $T^n$  a medida que  $n$  crece?  
¿Pasará lo mismo con cualquier matriz de transición?

Si los estudiantes estuvieran familiarizados con sucesos independientes en probabilidad, convendría subrayar el

hecho de que los sucesos en estos modelos dependen sólo del estado previo.

Hay otros ejemplos importantes de aplicaciones matriciales que podríamos haber mencionado tales como el modelo económico de Leontiev, las aplicaciones a la criptografía, etc. Si bien favorecemos los ejemplos que hemos presentado, cualquiera de ellos ayudaría a los estudiantes a reconocer la importancia de las matrices a la hora de modelar matemáticamente problemas relevantes de la vida real ■

### BIBLIOGRAFÍA

- [1]. *Advanced Mathematics: Precalculus with Discrete Mathematics and Data Analysis*, Richard G. Brown, Houghton Mifflin, Boston, MA, 1992.
- [2]. Steven F. Bauman & William O. Martin, Assessing the Quantitative Skills of College Juniors, *The College Mathematics Journal*, May 1995
- [3]. *Contemporary Precalculus Through Applications*, The North Carolina School of Science and Mathematics, Janson Publications, Inc., Dedham, MA, 1992.
- [4]. *Matrices*, Jean de Lange Jzn., Wings For Learning, Inc., Scotts Valley, CA, 1992.
- [5]. *Matrix Models* (Course 2, Unit 1), *Core-Plus Mathematics Project*, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, Unpublished.
- [6]. *Precalculus and Discrete Mathematics*, The University of Chicago School Mathematics Project, Scott, Foresman, Glenview, IL, 1992.
- [7]. A. Quesada, "On the effects of Using Graphing Calculators in Calculus", *Proc. of the Sixth Ann. Int. Conf. on Techn. in Colleg. Math.* pp 296-300, Parsippany, New Jersey, Nov 4-7, 1993.
- [8]. A. Quesada & M. Maxwell, "The Effects of Using Graphing Calculators to Enhance College Students' Performance in Precalculus", *Educ. Studies in Math*, Vol 27, pp 205-215, 1994.

ya que  $(M^2)_{1,1} = 2 = (0,1,1,0)(0,1,1,0)^t$ , vemos que hay dos caminos distintos de un relevo, o dos tramos, que comunican A con A:  $A \rightarrow B \rightarrow A$  y  $A \rightarrow C \rightarrow A$ . Análogamente  $(M^2)_{4,2} = 1 = (0,0,1,0)(1,1,1,1)^t$ , nos indica que hay un sólo camino de dos tramos desde D hasta B:  $D \rightarrow C \rightarrow B$ . Así pues  $M^2$  nos da el número de caminos de dos tramos entre dos equipos cualesquiera, y ya que  $M$  nos da el número de caminos de un tramo, entonces  $M + M^2$  nos da el número de caminos de uno o dos tramos.

$$M + M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El cero en la posición (2,4) de  $M + M^2$  nos dice que no existe un camino de uno o dos tramos que comunique B con D. Procediendo como antes obtenemos los caminos de tres tramos y de a lo sumo tres tramos

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad M + M^2 + M^3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos finalmente que dos equipos de rescate cualesquiera pueden comunicarse con, a lo sumo, dos relevos.

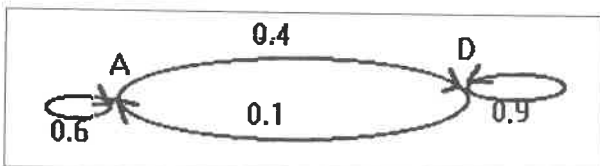
El problema que acabamos de resolver, aunque pequeño, puede extrapolarse fácilmente a redes mucho mayores de, por ejemplo, vuelos entre ciudades, o de comunicaciones telefónicas, cuya importancia en el mundo actual es clara.

### III. Una aplicación de cadenas de Markov

En un estudio reciente se ha encontrado que cada año en la ciudad de Metrópolis el 40% de las familias que alquilan la vivienda en que residen compran una vivienda, mientras que el 10% de los dueños de vivienda pasan a alquilar su alojamiento. Si en la actualidad un 45% de los habitantes de Metrópolis son propietarios, ¿cómo cambiará este porcentaje en el futuro?

Un grafo, una matriz, y un diagrama de árbol son excelentes representaciones para esta información. Usaremos las dos primeras.

El grafo que sigue representa la información dada. Así por ejemplo la flecha de D a A denota el 10% de los dueños que pasan a alquilar.



La información puede también fácilmente expresarse con una matriz cuyas filas y columnas representan los vértices (estados) del diagrama.

$$\begin{matrix} & D & A \\ D & \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} \\ A & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

El porcentaje de propietarios después de un año es

$$P(D,D) + P(A,D) = (0.45)(0.9) + (0.55)(0.4) = [0.45 \ 0.55][0.9 \ 0.4]^t = 0.625$$

mientras que el porcentaje de los habitantes que alquilan viene dado por

$$P(D,A) + P(A,A) = (0.45)(0.1) + (0.55)(0.6) = [0.45 \ 0.55][0.1 \ 0.6]^t = 0.375$$

Observamos que denotando la distribución inicial por  $d_0 = [0.45 \ 0.55]$  y la matriz del grafo, llamada matriz de transición, por  $T$ , podemos calcular la distribución después de un año usando

$$d_1 = d_0 T = [0.45 \ 0.55] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = [0.625 \ 0.375]$$

Claramente la distribución después de dos años está dada por  $d_2 = d_1 T = d_0 T^2$ , y la distribución después de  $n$  años será  $d_n = d_{n-1} T = d_0 T^n$ .

Podemos animar al estudiante a explorar el comportamiento a largo plazo de estas distribuciones preguntando: ¿obtendremos una distribución distinta cada año que pase?

Toma tan solo unos segundos el producir la siguiente sucesión con una calculadora gráfica.

$$\begin{aligned} d_4 &= d_0 T^4 = [0.778125 \ 0.221875] \\ d_8 &= d_0 T^8 = [0.798633 \ 0.201367] \\ d_{16} &= d_0 T^{16} = [0.799995 \ 0.200005] \\ d_{32} &= d_0 T^{32} = [0.799999 \ 0.200000] \end{aligned}$$

Vemos que para valores de  $n$  suficientemente grandes  $d_n$  converge a una distribución estable  $[0.8 \ 0.2]$ . Es decir, en aproximadamente ocho años el 80% de la población de Metrópolis serán dueños de la vivienda en que residan, mientras que el 20% restante vivirá en una vivienda de alquiler. Además, si las condiciones iniciales no cambian, estos porcentajes se mantendrán estables.

Las siguientes preguntas pueden ayudar al estudiante a descubrir el comportamiento general de estos modelos:

ción gráfica están cada día mas presentes en el quehacer matemático. Nuevos campos de trabajo invaden la cotidianidad de los matemáticos: Reconocimiento de formas, caos y determinismo, geometría fractal, redes neuronales, experimentos virtuales, lógicas difusas y polivalentes, ...

Se dispone, en definitiva, de un instrumento con el que simular nuestros modelos matemáticos, experimentar y operar con ellos, familiarizarnos con sus interacciones.

La irrupción de estos medios en la sociedad introduce algunos elementos matemáticos en la cultura: algunos aspectos de la teoría y medida de la información, de la representación numérica, de la lógica de clases y predicados, del álgebra de Boole, etc. son manejados por usuarios informáticos sin la precisión que necesitan.

Con todo esto asistimos a una proliferación de software para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: aplicaciones más o menos cerradas, más o menos significativas y válidas, más o menos acordes con nuestros métodos pedagógicos, pueden favorecer una enseñanza más individualizada y diversificada, un tratamiento autodidacta

o a distancia, centrarse en aspectos conceptuales, adiestrar en técnicas específicas, ...

Así mismo las casas fabricantes de calculadoras están sumergidas en una carrera por introducir cada vez más y mejores aplicaciones a sus productos creando una especie de miniordenador de bolsillo, que lo hacen disponible en todo momento y situación, a la vez que complica de forma grande su uso y utilización.

Finalmente estamos viviendo en una sociedad con, cada vez, mayor capacidad de poseer estos medios (ordenadores y calculadoras) en los propios hogares, haciendo que sean familiares y cotidianos, pero al mismo tiempo sin ofertar un aprendizaje mínimo para su utilización adecuada y fructífera. ¡Cuántas inversiones infravaloradas y mal utilizadas!

Todo esto no puede ser en ningún modo ajeno y desconocido para las personas que nos dedicamos al apasionante campo de la enseñanza de las matemáticas. Muchas de estas consideraciones deben de ser tomadas en cuenta, reflexionar sobre ellas y sacar las conclusiones propias necesarias para la tarea diaria en la escuela ■

Texto de **Máximo Bolea**  
UNED. Huesca

### 1ª Pregunta

Conviene empezar recordando que el carácter abierto que hoy tienen los currículos unido a que los objetivos se plantean en términos de capacidades nos proporciona cierta libertad para seleccionar y organizar los contenidos curriculares. La insistencia en contenidos procedimentales y en vías constructivas para los aprendizajes favorecen un concepto de "hacer y trabajar matemáticas" que mejora el tradicional "saber matemáticas" y entronca de lleno con la experimentación y simulación de modelos que favorecen las nuevas tecnologías.

Se puede justificar la necesidad de revisar algunos aspectos de nuestro currículo en relación con las nuevas tecnologías desde las propias fuentes pedagógicas, epistemológicas, desde la psicología del aprendizaje y muy especialmente desde las del ámbito socio-cultural: Los desarrollos tecnológicos especialmente los vinculados a las tecnologías de la información impregnan la organización social y laboral, conviene por lo tanto una formación que integre al individuo en esta sociedad; para una socialización de la información es preciso dotar de algunos conocimientos básicos a los escolares, no podemos permitirnos una élite privilegiada y una ciu-

dadanía "analfabeta funcionalmente" en relación con el acceso a la información a través de los medios informáticos y telemáticos. Junto a ello es preciso asumir algunos valores de respeto y tolerancia y estimular la capacidad crítica a la hora de seleccionar, usar, compartir, producir o distribuir determinadas informaciones a través de procesos informáticos.

Los medios informáticos están cambiando la percepción y métodos de hacer matemáticas. No se trata de cuestionar la lógica interna de nuestra disciplina pero sí de ser conscientes que la evolución científica en nuestro campo tiene vínculos significativos con estas tecnologías que nos facilitan instrumentos con los que simular nuestros modelos matemáticos. La ligadura conceptual de nuestros contenidos, las perspectivas historicistas etc. siguen estando allí, pero a la hora de organizar nuestros contenidos hay que contemplar también los nuevos "modus operandi" que proporcionan estas tecnologías informáticas. En definitiva no es una cuestión de quitar y poner contenidos sino de conseguir un enfoque de los mismos que, acentuando los procesos, las tramas conductoras, las decisiones y las aplicaciones, conduzca a mejorar ciertas capacidades de reconocimiento, elección, uso y aplicación de modelos matemáticos sistematizando estrategias y procedimientos de trabajo. Este esfuerzo lleva un coste en tiempo discente y como mal menor parece natural que sea a cargo de la

## Mesa Redonda

### LAS MATEMÁTICAS Y LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

Coordina:

**Rafael Martínez**

Participantes:

**Máximo Bolea, Miguel Delgado Pineda, Antonio González Rebés, Antonio Quesada**

#### CUESTIONARIO PARA PARTICIPANTES

- 1) ¿Debe de replantearse el currículo de matemáticas a la luz de los métodos de trabajo provocados por las N.T. (principalmente calculadora y ordenador)?  
¿Hay que preparar matemáticamente a los escolares para convivir con una sociedad de la información y la tecnología?  
¿De qué aspectos conceptuales del currículo podríamos prescindir debido al uso de las N.T.?  
¿Merece la pena el esfuerzo (tanto de tiempo y espacio como económico) para lo que se consigue con los escolares?
- 2) Se insiste mucho en los aspectos procedimentales, ¿en qué medida las aplicaciones de las N.T. nos aportan vías procedimentales?

¿En qué nos ayudan y perjudican a la hora de ampliar un bagaje de recursos y procesos?

¿Existe algún peligro en este sentido al obtener resultados automáticamente sin realizar el escolar todos los cálculos necesarios (polémica sobre la calculadora)?

- 3) Hablando de metodologías, ¿son herramientas neutras el ordenador y/o la calculadora?  
¿Cómo podemos ser selectivos con la oferta de programas de E.A.O. y de aplicaciones con la calculadora y ser coherentes con nuestra forma de enseñar?  
¿Es un mito que la calculadora y el ordenador pueden favorecer una atención diversificada a nuestro alumnado? ■

Texto de **Rafael Martínez**

I.B. Cárdenal Cisneros. Alcalá de Henares, Madrid

Las Nuevas Tecnologías de la Información y muy particularmente los medios informáticos y las calculadoras están modificando no solo los "modus operandi" sino incluso la percepción en casi todos los ámbitos del trabajo científico y más significativamente en el campo matemático:

- Los ordenadores tratan eficazmente símbolos y números con algoritmos y estrategias que permiten resolver problemas hasta ahora inabordables, nos ofertan nuevos medios para describir y construir sistemas en los que poder simular, resolver o predecir la evolución de sistemas complejos.

- Ante la imposibilidad de comprobar y verificar a mano algunos resultados matemáticos obtenidos computacionalmente se insinúan algunas posturas:

- La muerte de la demostración (Jhon Horgan, 1993).
- La duda de la certeza acorde con la fiabilidad de los equipos y programas informáticos (Cristop Pöppe, 1994).

- En cualquier caso los tediosos y prolijos cálculos quedan en manos de los ordenadores y calculadoras; los virtuosismos manuales para encontrar transformaciones que hicieran resolubles algunos cálculos dejan paso a procesos más directos sin importarnos el coste del cómputo operacional.

Por otro lado las herramientas informáticas para el cálculo numérico y simbólico y, especialmente, para la representa-



más directos en la obtención de resultados, no nos importa el coste operacional a la hora de buscar soluciones. ¿Es esto un peligro, debemos de pagar un peaje ante tal liberación? Seguramente depende mucho de cómo se hagan las cosas, tener demasiadas "cajas negras" no es bueno en matemáticas pero así es el mundo en que vivimos.

Traeré un ejemplo ilustrativo a este respecto. Con la aparición de las calculadoras se rasgaron algunas vestiduras, se negaba la ventaja de pulsar una tecla y obtener el resultado de una raíz cuadrada argumentando que algunos escolares no aprendían el algoritmo manual; la realidad es que aunque se conozca el algoritmo se pulsará la tecla y lo substancial, conocer que significa la raíz cuadrada, no era cuestionado. Pero curiosamente no se planteaba otra reflexión análoga: ¿cuántos profesores pulsaban una tecla para obtener el logaritmo de 0,123456, quiénes podrían dar sin más ayuda que el lápiz y el papel su valor con una precisión apropiada? Como se recordará el desarrollo en serie de  $L(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots$  converge en  $(-1,1]$ , pero su velocidad de convergencia es desesperante aún con la ayuda de un ordenador. ¿Cómo se hace, cómo implementan los circuitos electrónicos esta función? La respuesta en los clásicos que calculaban a mano (Rey Pastor, Elementos de la teoría de funciones (Serie logarítmica)). Y qué sucede cuando la pulsación de una tecla no devuelve el resultado de una integral indefinida o nos proporciona resultados de cuestiones más complejas; imaginenselo, pero como siempre la cuestión es conocer lo que uno se trae entre en manos y saber interpretar los resultados aunque no estará de más una cierta curiosidad para saber cómo funcionan las cosas.

### 3ª Pregunta

Los equipos y programas informáticos son instrumentos y es sabido que no hay instrumentos neutros, sus diseños imponen y condicionan su aplicabilidad y especialmente es el que los utiliza el que los impregna y polariza en función de su cultura y también del conocimiento que tenga del propio medio. Con todo interesa ser cauto, el envoltorio tecnológico no debe de seducir ya a nadie, el hecho es que este es el

medio en que se desenvuelve en gran medida nuestra cultura, el valor añadido que proporciona el tratamiento informático no debe despitarnos del contenido real.

En el mundo occidental, donde todavía cada individuo es importante, la diversificación es la gran tarea pendiente en la enseñanza de este siglo que termina. Pongámonos de alumnos: algunos aprendizajes son individuales y querríamos que transcurrieran con nuestras particularidades, ritmos y necesidades, no todo es posible pero sin duda que el carácter interactivo de las nuevas tecnologías favorecerá aspectos autodidactas; otros aprendizajes requieren de la comunicación que no debe terminar en los compañeros de aula, es necesario ampliar las bases de estas comunicaciones y colaboraciones, hay muchos instrumentos y las tecnologías nos abren nuevas puertas.

En otro orden de cosas los enseñantes deberemos tomar conciencia de los recursos que las tecnologías nos brindan para atender a los alumnos con necesidades educativas especiales.

El propio Ministerio de Educación junto a algunas organizaciones y empresas están haciendo desarrollos en periféricos y software específico para favorecer la integración educativa de estos alumnos, estos esfuerzos merecen nuestra atención.

Así las cosas, y en grandes líneas, a la hora de elegir nuestros programas para apoyar la enseñanza deberemos analizar: en primer lugar, lo mismo que al seleccionar un libro de texto, la estrecha relación con los contenidos de nuestro currículo, la afinidad metodológica, etc.; pero también, lo mismo que al adquirir cualquier aplicación informática, su extensión de mercado y precio, sus requerimientos técnicos, la sencillez de uso y la versatilidad para implementar nuestras actividades de aula. Y es aquí donde las experiencias e intercambios se hacen necesarios para tomar decisiones apropiadas. Al venir a estas jornadas profesionalmente habéis demostrado vuestra inquietud al respecto, esperamos entre todos haber contribuido a clarificar este apasionante reto que nos plantean las T.I. en nuestro trabajo ■

Texto de **Antonio González Rebés**  
*Universidad Politécnica de Madrid*

### INCONVENIENTES DEL USO DEL ORDENADOR EN EL AULA

El debate sobre la utilización de las nuevas herramientas informáticas en la enseñanza de las Matemáticas es actualmente un tímido reflejo de otro de mayor envergadura que se

está produciendo en nuestra Sociedad. Cada vez más, la informatización de tareas en todos los niveles de la vida cotidiana nos hace dependientes de las máquinas. Es sorprendente, pero pasa, que de vez en cuando toda la actividad de un Ministerio o de un banco se paralice por que "se ha estropeado un ordenador" o "se ha caído una red". Si las nuevas tecnologías permiten mejorar los procesos y agilizar las tareas, el precio también es muy elevado: la dependencia. Es evidente que el debate tiene que producirse también

adquisición de determinadas destrezas operativas que no obstante requerirían su tiempo para ser aprendidas con el apoyo de las N.T.

Las destrezas operativas pierden significado cuando se dispone de programas que realizan cálculos simbólicos y toman más relevancia los aspectos conceptuales y relacionales (el saber que se trae uno entre manos). Sabemos que a los pocos años de pasar por un bachillerato, salvo para aquellos que continúan estudios de Ciencias, se olvida cómo resolver una integral o calcular una derivada determinada, esto no es grave, lo peor es que no recuerde qué es, para qué le sirve; si se desconoce esto difícilmente se podrá recurrir a buscar la información que nos actualice o al programa informático que nos resuelva el problema. Conclusión: Las destrezas y virtuosismos de cálculo pueden relegarse a segundo término y es conveniente priorizar y enfatizar los conceptos y sus aplicaciones a fin de que se puedan identificar y relacionar ante un problema real y se sepa acceder a los recursos con ellos relacionados (incluidos los informáticos).

Aunque existan algunas asignaturas de opción para integrar curricularmente esta cultura informática y aunque a través del software de E.A.O. nuestros alumnos se familiaricen indirectamente con estas tecnologías, es conveniente reforzar en cada nivel y área aspectos específicos relacionados con las T.I. Por ejemplo, desde las matemáticas y para un bachiller es razonable y tiene sentido el conocer las unidades de medida de la información y de la comunicación, la operativa booleana, la forma de representación numérica en un ordenador, una visión básica conjuntista de un sistema relacional de datos, los elementos básicos de un lenguaje o pseudolenguaje de programación estructurado etc. Para alcanzar algunas capacidades estos contenidos son tan operativos como otros.

En condiciones óptimas se podría ir más lejos y plantear en algún contexto experimental de investigación o innovación el análisis de algunos modelos matemáticos sencillos relacionados con campos actuales de trabajo, por ejemplo: la modelización infográfica, algunas estructuras de datos y algoritmos de sistemas de información gráfica, la codificación, encriptación, compresión, controles de redundancia, transformaciones filtro de ruido o resalte de la información, los problemas del reconocimiento de formas sencillas, sistemas con atractores (caos y determinismo), geometría fractal, redes neuronales, experimentos virtuales, lógicas difusas y polivalentes, etc.

## 2ª Pregunta

Desde la vertiente psicológica, aprender matemáticas implica "hacer matemáticas" y esto entraña una labor individualizada en la que se resalten los procesos. El uso de las

N.T.I. para apoyar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tienen ya un amplio historial de experiencias contrastadas. Los programas de E.A.O. para matemáticas de carácter cerrado, son preferidos por una buena parte del profesorado dado que proporcionan algunos rendimientos sin excesiva planificación, en general responden a la adquisición de destrezas de cálculo y a la asimilación de conceptos y suelen utilizarse como refuerzo; la elección de procedimientos queda generalmente fuera del alcance del alumno. Las herramientas más abiertas permiten el planteamiento y la simulación de muchos supuestos matemáticos dejando abiertos los procedimientos de trabajo, pero tienen algunos problemas: requieren el adiestramiento del alumno en la herramienta, el diseño pormenorizado de las actividades para escalonar las dificultades exige mucho trabajo de preparación al profesor y es difícil ponerlas en práctica en situación real de aula (muchos alumnos y pocos ordenadores).

Ante esta disyuntiva querría dejar dos reflexiones:

Hasta los materiales más tradicionales pueden usarse innovadoramente. Recuerdo un antiguo programa de EAO que se limitaba a dar los resultados de alcance y altura máxima en un tiro oblicuo partiendo del impulso, ángulo de elevación, y velocidad del viento; su uso habitual era la comprobación de los resultados de algunos ejercicios de composición de movimientos. Un compañero planteaba alternativamente la búsqueda y variación alternada de las variables relevantes, la obtención de datos significativos y el análisis de los resultados, la búsqueda de relaciones y el establecimiento de hipótesis y finalmente la predicción y verificación de algunos supuestos, siempre esforzándose en sistematizar la estrategia seguida y los procedimientos de trabajo (Claro que justo debería ser al revés, la fuente de datos debería provenir del mundo real y el trabajo de modelización apoyarse mediante herramientas informático-matemáticas).

Si hay que adiestrar al alumno en alguna herramienta abierta me inclino por elegir aquellas que tienen gran implantación en el mercado (algunos programas de cálculo simbólico requieren poco *hard* y son económicos) y acercan más al mundo real al tener el valor añadido de ser consideradas herramientas profesionales, aunque las utilicemos para planteamientos restringidos. El trabajo de preparar materiales de aula sistemáticos, integrados en el currículo del Centro, destinados a apoyar aprendizajes mediante estas herramientas, difícilmente podrá abordarse individualmente y requieren de una organización y trabajo de equipo, pero será más fácil encontrar publicaciones que nos ayuden.

Ciertamente, no sólo los cálculos tediosos, sino que muchas situaciones sistematizables son dejadas en manos de calculadoras programables o computadores, podemos ser

# 10. Matemáticas lúdicas en la escuela

## LOS PEQUEÑOS JUEGOS DE ESTRATEGIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. ¿POR QUÉ?, ¿PARA QUÉ?

**Jordi Deulofeu Piquet**

*Universidad Autónoma. Barcelona*

### 1. Introducción

Los juegos de estrategia y más en general las recreaciones matemáticas se utilizan, cuando esto sucede, de manera ocasional como un recurso metodológico para hacer más "agradable" el aprendizaje de las Matemáticas. Esta ponencia pretende mostrar que la utilización de recreaciones matemáticas y, muy en particular, de los llamados pequeños juegos de estrategia puede resultar un instrumento valioso para trabajar diversos contenidos de las matemáticas de la enseñanza obligatoria (especialmente de la educación secundaria), en concreto, ciertos procedimientos ligados a la resolución de problemas (como por ejemplo, particularizar, generalizar, empezar por el final, pensar en un problema similar, visualizar, traducir a un lenguaje más apropiado, establecer un código adecuado que permita el estudio del juego, etc.), al mismo tiempo que su estudio puede llevarnos, a menudo, a realizar interesantes reflexiones sobre aspectos conceptuales.

Para que esto suceda, es necesario, en primer lugar, que las propuestas de trabajo presentadas al alumnado se articulen de manera que las recreaciones y los juegos propuestos no sean considerados como meros entretenimientos, con carácter ocasional, sino formando parte de los que podríamos considerar "auténticos" problemas de matemáticas (sin que ello signifique perder el carácter lúdico propio de cualquier juego).

Por ello, las propuestas de trabajo deberán contemplar una actividad inicial, que consistirá, generalmente, en la comprensión de las reglas y finalidades del juego, en una posterior práctica del mismo, más o menos dilatada según el tipo de juego, y una fase final, de análisis, en la que los alumnos, desarrollando un trabajo de cooperación, tratarán de conocer mejor el juego que acaban de practicar, hasta llegar a la determinación de las estrategias que sirven para alcanzar la finalidad del juego.

Cabe señalar que en ciertos casos, especialmente cuando se trate de juegos "pequeños" en los que las estrategias se pue-

den establecer con suficiente precisión, será posible resolver totalmente el juego, en el mismo sentido que se resuelve un problema de matemáticas, con lo que aquello que inicialmente era un juego pasará a ser un problema resuelto.

### 2. Algunas consideraciones sobre la matemática recreativa

#### a) El papel de la matemática recreativa

Entre las características del aprendizaje de las Matemáticas cabe señalar por un lado la necesidad de un aprendizaje significativo y por otro el papel que debe jugar la acción y la reflexión por parte del alumnado. Este hecho, junto con el destacado papel que deben jugar los procedimientos, hace que cualquier planteamiento sobre la mejora del aprendizaje deba tener en cuenta el conjunto de actividades que se plantean a los alumnos en cada nivel, tanto desde la óptica de su significación como, especialmente, de los procedimientos que se utilizarán en su desarrollo. Entiendo que el papel del juego en la enseñanza de las Matemáticas se basa, fundamentalmente, en los dos aspectos señalados.

El carácter lúdico que puede (y seguramente debería) rodear cualquier aprendizaje significativo de las Matemáticas, no ha de quedar restringido a los primeros niveles de la educación. Se considera a menudo, que mientras el juego se encuentra en la base de gran parte de las actividades propuestas en la educación infantil (en este punto el acuerdo es total), a medida que el alumnado crece en edad, debe reducirse de manera drástica este tipo de actividad para dejar paso a un trabajo "más serio".

Sólo la incapacidad para hallar (y diseñar) juegos que interesen a los alumnos y al mismo tiempo les permitan avanzar en su conocimiento (tanto conceptual como procedimental) de las Matemáticas, puede justificar, a mi

en la enseñanza ya que cuanto más acostumbremos a los alumnos a apoyarse en las máquinas (no solo ordenador, también calculadoras), más dependientes de ellas los haremos y más vulnerable será la Sociedad en ese aspecto.

Máquinas de calcular las ha habido siempre. El ábaco, cuya utilización sigue estando muy extendida en el mundo, es una poderosa herramienta que permite hacer operaciones aritméticas más deprisa que con lápiz y papel, la regla de cálculo permitía hacer todas las operaciones que actualmente soporta la calculadora científica. ¿Qué hay en las nuevas herramientas que justifique la alarma? Cada cual responderá según sus temores pero, en una primera aproximación yo afirmaré que el problema es que con calculadoras o con ordenador, el control del cálculo ya no lo lleva el usuario sino la propia máquina. El ábaco o la regla de cálculo ayudaban a calcular, la calculadora y el ordenador calculan. Además no se equivocan, o al menos eso se admite. El usuario de una de estas máquinas descarga absolutamente su responsabilidad en ella y se autolimita en sus facultades hasta el punto de no hacer nada sin ella.

Si estos argumentos eran viejos y conocidos, ahora hay que añadir los derivados de otras tareas que están asumiendo las máquinas. Se trata de algo potencialmente más importante y es la gestión de la información. Desde el correo a las publicaciones, los movimientos económicos incluso los contratos, el ordenador está sustituyendo al papel y a los medios tradicionales de comunicación. Existen ya instituciones educativas en cuyos planes de estudio la presencia

física del alumno es innecesaria, mediante un *modem* y un ordenador se realiza la comunicación profesor-alumno y se transmite el material de trabajo. Hay también programas para evaluar automáticamente el rendimiento académico y para proponer tareas complementarias o correctoras en el proceso. Se llegará a cuestionar la utilidad del profesor.

Todo esto tiene un precio y el verdadero debate se debería establecer en términos de coste/beneficio. Las ventajas, que las hay y son evidentes, tienen contrapartidas, dependencia, problemas físicos y psicológicos, pérdida de valores sociales y del espíritu crítico. ¿Hasta qué punto compensa?

En un estrato inferior aparecen también problemas añadidos: introducción de intereses comerciales en el aula, dependencia cultural, empobrecimiento del idioma y hasta desmotivación (¿quién quiere saber cómo el ordenador ha resuelto la ecuación? Lo importante es que la ha resuelto). Y siguen surgiendo preguntas ¿tenemos derecho los profesores a descargar nuestra labor en las máquinas?, ¿hasta qué punto?, ¿no estaremos produciendo individuos con graves limitaciones intelectuales?

Espero que este debate nos permita a todos aproximarnos más a las respuestas o, como mínimo, a ser conscientes de las implicaciones éticas de un movimiento, la introducción de las nuevas tecnologías en la enseñanza, en el que todos estamos involucrados, en mayor o menor medida y que hoy por hoy parece imparable ■

enseñanza de las Matemáticas. Para ello deberán seleccionarse los juegos de forma que las dificultades con las que se encuentra el alumno no provengan principalmente de problemas conceptuales, de lenguaje o de la aplicación de técnicas; si logramos esto, los juegos propuestos podrán convertirse en un recurso didáctico, al margen de su interés intrínseco, dado que se plantean como una actividad descontextualizada (en el sentido de no estar necesariamente encuadrada dentro de una unidad temática concreta), lo cual propicia una auténtica utilización de determinados procedimientos.

En concreto, las recreaciones matemáticas pueden intervenir de manera significativa para trabajar determinados aspectos difícilmente abordables desde otro tipo de actividades. Son particularmente interesantes, entre otros, los siguientes aspectos:

#### a) Las autorrestricciones

Para mejorar la capacidad de los alumnos en la resolución de problemas muchas veces hay que ser capaz de abandonar estrategias previamente establecidas y tratar de hallar métodos que vayan más lejos superando algunas autorrestricciones impuestas por el propio resolutor, al interpretar abusivamente ciertos implícitos inducidos por la apariencia de la recreación propuesta.

Ejemplos:

- Unir 9 puntos con 4 segmentos sin levantar el lápiz. (Podemos "salir" fuera del marco dado por la figura).
- Construir todos los cuadriláteros en una trama 3 x 3. (Los cóncavos también son cuadriláteros).
- Con seis palillos formar 4 triángulos equiláteros. (Nadie dice que tenga que hacerse en el plano).
- Con 4 cuatros y cualquier operación obtener un cierto resultado. (No siempre hay que intercalar una operación).

#### b) Las falsas intuiciones

Desarrollar la intuición es fundamental, pero a veces esta puede jugarlos una mala pasada. Cuando ello es así deberemos tratar de verificar o refutar nuestras intuiciones a partir de la aplicación de conceptos y/o técnicas conocidas

Ejemplos:

- Transformar un cuadrado 8 x 8 en un rectángulo 13 x 5 ; ( $64 = 65$ ).
- El problema de la cuerda que rodea a la Tierra.
- El problema del cazador de osos.
- ¿En qué extensión caben todos los habitantes del mundo?

#### c) Los cambios de enunciado y/o de lenguaje y/o de contexto

Muchas pequeñas recreaciones, las que podemos llamar de enunciado engañoso, permiten la discusión sobre el significado de un enunciado, sobre lo que dice y lo que no dice el mismo, adentrándonos con ello en cuestiones lógicas que no suelen presentarse en las matemáticas escolares.

Ejemplos:

- Dos monedas suman 75 pesetas y una de ellas no es de 25 pesetas.
- Una corbata cuesta 1000 pesetas más la mitad de su precio.

En algunas ocasiones bastará una reorganización de las frases del enunciado para aclarar su significado.

El contexto del problema puede tener también un papel relevante en la capacidad del alumno para su resolución; cambiar el lenguaje o traducir el problema a otro contexto, puede permitir el establecimiento de analogías.

#### d) Las generalizaciones

La realización de hipótesis, el descubrimiento de leyes, el paso de lo particular a lo general, puede trabajarse a partir de problemas cuya formulación los sitúa en el terreno de las recreaciones.

Ejemplos:

- Números formados por sumas de consecutivos.
- Cubos necesarios para formar escaleras.
- El hotel de las 1000 puertas.

### 4. Los juegos de estrategia

Voy a referirme principalmente a los juegos de estrategia y más concretamente a los juegos bipersonales de información completa sin intervención del azar. Pertenecen a este tipo de juegos tanto algunos de los más tradicionales juegos de tablero, como el tres en raya y sus múltiples variantes, como otros más recientes y de mayor complejidad, por ejemplo, los juegos tipo Nim, que también admiten múltiples variantes u otros juegos de tablero como el Hex, el Othello o Reversi etc. Todos estos juegos tienen unas características comunes: las partidas se desarrollan entre dos personas y es posible, por lo menos teóricamente, determinar una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores.

Plantear este tipo de juegos a los alumnos, en particular aquellos que son fácilmente analizables, constituye una actividad interesante para que se introduzcan en el estudio de los mismos. Tomemos como ejemplo uno de los más conocidos pequeños juegos de estrategia, cuyo nombre difiere según los autores (Nim simplificado, Veneno, Llegar

entender, esta posición, ya que el carácter lúdico es un valor que por su significación, incidirá siempre de manera positiva en el aprendizaje y su desaparición no entraña elementos positivos de ningún tipo.

### **b) Qué entendemos por juego y qué tipos de juegos matemáticos existen**

Sin entrar en una discusión sobre la definición de la palabra juego, señalaremos que en un sentido amplio del término podemos considerar como juego cualquier actividad de carácter lúdico planteada al alumno (según el diccionario, "actividad física o mental que tiene como fin principal la diversión o el entretenimiento del que la ejecuta"). No obstante, los términos "fin principal" y "diversión" son ambiguos ya que dependen del sujeto: la finalidad del que propone una actividad puede no coincidir con la del que la ejecuta, aquello que es divertido para unos puede no serlo para otros, y finalmente, el contexto en el que se plantea una situación puede influir de manera decisiva en su carácter.

En un sentido mucho más restringido, podemos considerar que para que una actividad sea realmente un juego es necesario que existan unos objetivos y unas reglas bien definidas, que participe más de una persona y que la finalidad de cada jugador sea lograr el objetivo antes que los demás jugadores; éstas son las principales características que podemos encontrar en la mayoría de juegos tradicionales.

Si nos planteamos el interés del juego en relación con el aprendizaje de las matemáticas, en general, será conveniente tomar como punto de partida la definición más amplia del término y analizar las finalidades del juego, al margen de su carácter lúdico, desde la óptica de aquella disciplina.

Las consideraciones anteriores nos llevan a una primera clasificación de los juegos en dos grandes grupos, sin entrar en consideraciones relativas a los contenidos matemáticos implicados en los mismos:

### **1. Juegos individuales**

Son los que habitualmente llamamos recreaciones o pasatiempos matemáticos; en muchos casos son asimilables a problemas matemáticos ya que la finalidad del juego, y a menudo la forma de plantearlo, tiene unas características similares a la resolución de un problema, y se diferencia de este únicamente por su carácter lúdico. Pensemos en la resolución de un laberinto, un cuadrado mágico, un tangram, o cualquier recreación numérica o geométrica, pero también en un problema que por su contexto o por su formulación se convierte en

una curiosidad, logrando así aumentar el interés por su resolución, a veces únicamente por que el mero hecho que el reto que se plantea es suficientemente atractivo.

### **2. Juegos colectivos**

Son los que llamamos propiamente juegos; como característica común tienen la participación de varias personas, habitualmente dos, unas reglas y unos objetivos bien definidos, y de manera que aquél que alcanza el objetivo en primer lugar logra la victoria.

Si nos centramos en estos últimos, podemos separarlos en dos grandes grupos: los llamados juegos de estrategia y los juegos de azar. Los primeros, conocidos también por "juegos de información completa", incluyen desde los grandes juegos clásicos de tablero como las damas, el ajedrez o el go, hasta otros más modernos como el Reversi o el Hex, pasando por un gran número de "pequeños" juegos, tanto tradicionales como el tres en raya o el gobang, como de más reciente creación como el Sim o el Nim; la mayoría de estos juegos pueden ser analizados total o parcialmente, aunque con distintos niveles de complejidad y son los que abordaremos posteriormente con mayor detalle.

Por lo que respecta a los juegos de azar, cabría distinguir entre aquellos en los que la intervención del azar es muy elevada (algunos juegos de dados o de cartas) y aquellos en los que la aplicación de estrategias es tanto o más relevante que la propia existencia del azar y que por lo tanto admiten análisis parecidos a los anteriores, aunque, en general, de mayor complejidad por la falta de información debida a la intervención del azar.

### **3. Juegos para jugar, para divertirse y para investigar**

La primera y principal función de un juego es jugar. Algunas veces esto será suficiente, en particular en aquellos casos en los que los alumnos al mismo tiempo que juegan, practican alguna técnica (por ejemplo, cuando utilizan el cálculo mental) o bien cuando se familiarizan con algún concepto (por ejemplo, cuando utilizan las descomposiciones de un hexágono regular en dos, tres o seis figuras iguales). Podemos decir que a este nivel el juego es un recurso didáctico que permite sustituir una parte del trabajo de práctica de rutinas y colaborar en la formación de conceptos más o menos nuevos.

En otros casos daremos un paso más para propiciar el desarrollo de procedimientos fundamentales para el aprendizaje de las Matemáticas. Es en este punto donde los juegos y en general las recreaciones sobrepasan el mero carácter lúdico adquiriendo una nueva dimensión en la

## METODOLOGÍA PARA EL USO DEL JUEGO EN LA ESCUELA

**Manuel García Déniz**

*C.P. Tena Artigas. Santa Cruz de Tenerife*

**E**n el mes de mayo se celebró en Gerona un Encuentro de profesores de distintos niveles educativos bajo los auspicios de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organización del Grupo Perímetro y María Antonia Canals. El tema a analizar era el de los JUEGOS y su uso en el aula. Las conclusiones del encuentro comenzaban con estas frases:

"Parece muy difícil llegar a un acuerdo sobre la definición de juego. Tampoco parece imprescindible el disponer de esa definición para discutir el papel del juego en el terreno de la Educación Matemática. La cuestión relevante no consiste en establecer los términos específicos de lo que es un juego sino en llegar a saber por qué, cuándo y cómo se utiliza."

El juego presenta tres aspectos que justifican su uso en las aulas: su carácter lúdico, el fomento de relaciones y actitudes sociales y el desarrollo de técnicas intelectuales.

El juego resulta ameno al alumno y lo motiva para acercarse a los aspectos matemáticos que contiene.

La práctica de algunos juegos permite el estudio, la aproximación o el repaso de conceptos geométricos, aspectos de tipo numérico, nociones topológicas o desarrollan capacidades de tipo lógico.

Los juegos, al igual que las matemáticas, enseñan a los escolares a dar los primeros pasos en el desarrollo de técnicas intelectuales, potencian el pensamiento lógico, desarrollan hábitos de razonamiento y enseñan a pensar con espíritu crítico. Enriquecen sus estructuras mentales y les preparan para explorar y actuar en la realidad.

El alumno desarrolla estrategias mentales propias de forma natural y un pseudolenguaje para la transcripción de las jugadas en determinados juegos, lo que supone un avance en el proceso de abstracción.

Un alumno que juega inteligentemente, además de divertirse, juega para ganar. Para ello ha de conocer las reglas, recordarlas y utilizarlas recombiniéndolas una y otra vez con

un propósito definido. Tiene que planificar su juego, adelantar mentalmente las posibles jugadas, tomar decisiones eligiendo una de ellas de acuerdo con el objetivo. Debe enfrentarse con otra persona que tienen su mismo objetivo, ha de comunicarse con él y competir contra su inteligencia. Se pone en marcha todo un conjunto de elementos: fantasía, imaginación y creatividad, combinadas con experiencia, planificación y estrategia.

También es importante decidir en qué momento se deben utilizar en la clase. Como motivación, como investigación, como refuerzo, como aplicación,...

Hay mucha más afinidad entre matemáticas y juegos que con otras áreas. Algunas de las dificultades que encuentran la mayoría de los alumnos para superar las matemáticas, suelen provenir de un rechazo hacia la asignatura, a sus aspectos formales, a cómo se presentan los contenidos, a sus facetas abstractas. A partir de un juego es posible hacer una introducción a uno o varios conceptos matemáticos o efectuar actividades de reforzamiento.

Múltiples procesos transcurren sometidos a reglas. Por ejemplo, para la resolución de problemas se aplican ciertas reglas que constituyen las estrategias y heurísticos específicos.

El planteamiento de estrategias, el análisis de situaciones, la comparación con disposiciones anteriores y el obrar en consecuencia, el conocimiento y la práctica de la inducción, de la lógica, son elementos que se dan en casi todos los juegos de tablero.

Los juegos y las matemáticas tienen muchos rasgos en común en lo que se refiere a su finalidad educativa. Las matemáticas dotan a los individuos de un conjunto de instrumentos que potencian y enriquecen sus estructuras mentales y posibilitan para explorar y actuar en la realidad. Los juegos enseñan a los escolares a dar los primeros pasos en el desarrollo de técnicas intelectuales, potencian el pensamiento lógico, desarrollan hábitos de razonamiento, enseñan a pensar con espíritu crítico.



a 20, etc.) y que, como la mayoría, admite numerosas variantes. Su enunciado es el siguiente:

1. Tenemos 20 fichas sobre la mesa. Cada jugador, a su turno, debe retirar 1 o 2 fichas. Gana (o pierde) la partida, el que toma la última ficha.

Una vez practicado y analizado el juego es posible introducir otros juegos que en realidad son variantes del anterior, aunque en algún caso su relación no es fácil de descubrir. Podemos modificar ligeramente las condiciones del juego y ver que una pequeña variación puede cambiarlo totalmente (juego 2); podemos modificar la acción (en lugar de quitar añadir), en este caso el juego no varía (juego 3); podemos cambiar totalmente la presentación del juego, lo que constituye una dificultad importante para relacionarlo con el juego inicial, a pesar de que el juego es esencialmente el mismo y por lo tanto la estrategia para resolverlo es totalmente exportable siempre que sepamos relacionar a nivel de lenguaje los dos juegos (juego 4); podemos modificar ligeramente las condiciones (aquello que está permitido hacer) de manera que la estrategia se complique bastante (juego 5), o podemos, finalmente, plantear un juego aparentemente muy parecido, cuyas modificaciones afecten profundamente el juego de manera que la estrategia necesaria para resolverlo sea completamente distinta a la del juego inicial.

Enunciado de las distintas variantes:

2. Tenemos 20 fichas sobre la mesa. Cada jugador, a su turno, debe retirar 1 o 3 fichas. Gana (o pierde) la partida, el que toma la última ficha.
3. Escribimos un número (del 1 al 10) en la pantalla de

una calculadora. Cada jugador suma al número de la pantalla un número del 1 al 10. Gana la partida el que logra poner 100 en la pantalla (o pierde el que hace aparecer un número de tres cifras).

4. En un tablero formado por tres filas de hexágonos (9, 10, 9 hexágonos en cada fila respectivamente) se coloca una ficha en la primera casilla de la fila central. Cada jugador a su turno avanza la ficha una casilla, horizontalmente o en diagonal. Gana (o pierde) la partida el jugador que coloca la ficha en la última casilla de la fila central.
5. El primer jugador coloca un dado sobre la mesa dejando en la cara superior el número que corresponde a su primera jugada. A su turno cada jugador gira el dado situando en la cara superior uno de los números que ocupaban las caras laterales (no puede aparecer la cara inferior); se van sumando los números que aparecen en la cara superior y el jugador que consigue sumar 31 gana la partida.
6. Dibujamos una margarita con 9 pétalos. Cada jugador, a su turno, elimina uno o dos pétalos. El jugador que consigue quitar el último pétalo gana (o pierde) la partida.

Una parte importante del trabajo con todos estos juegos consiste en establecer analogías con el juego inicial, atendiendo a sus semejanzas y diferencias, con la finalidad de hallar la estrategia particular de cada juego, y al mismo tiempo de relacionar las distintas estrategias halladas ■

## BIBLIOGRAFÍA

- Bell- Cornelius, (1990) *Juegos con tablero y fichas*. Barcelona: Labor.
- Berloquin, P. (1976) *100 Jeux de table*. Paris: Flammarion
- Bolt, B. (1988-91) *Divertimentos matemáticos / Actividades matemáticas / Más actividades matemáticas / Aún más act. matemáticas/ 101 Proyectos matemáticos*. Barcelona: Labor
- Corbalán, F. (1994) *Juegos Matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.
- Deulofeu, J. (1991-95) "Para pensar de un minuto a una hora", artículos en *Ciencia y Tecnología / Ciencia y Vida*. (Suplementos). Barcelona: La Vanguardia.
- Deulofeu, J. (1994) *El paper de la matemàtica recreativa en l'ensenyament de les Matemàtiques*. Reus: APMCM (no publicado)
- Ferrero, L. (1991) *El juego y la Matemática*. Madrid: La Muralla.
- Fisher- Vince (1990) *Investigando las Matemáticas*. (4 vols). Madrid: Akal.
- Grunfeld, F. V. (1978) *Juegos de todo el mundo*. UNESCO. Madrid: Edilan.
- Guzmán, M. de (1991) *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor
- Hernán-Carrillo, (1988) *Recursos en el aula de Matemáticas*. Madrid: Síntesis.

qué lo vamos a utilizar y, sobre todo, cómo vamos a desarrollarlo. También será importante saber cómo vamos a evaluar lo conseguido a través del juego. Sólo procediendo así, podemos utilizar los juegos como parte fundamental de nuestro proyecto curricular y de nuestra programación de aula. La experiencia, el estudio, la

investigación, la formación de grupos de trabajo con compañeros que nos acompañen en esta tarea hará que poco a poco podamos disponer de abundante material, suficientemente conocido y probado, con el que afrontar este elemento, el juego, tan atractivo y tan poco conocido aún ■

Su utilización en la escuela no ha de servir de simple distracción. No servirá de nada usar juegos en la clase si ello no implica un cambio metodológico.

El profesor que desea utilizar juegos en su clase de matemáticas deberá, primero, tener un buen conocimiento de los juegos que piensa utilizar y, posteriormente, realizar un ejercicio de reflexión para diseñar los objetivos que quiere conseguir, los medios que va a utilizar y la metodología que usará para ello.

El estudio de las estrategias ganadoras, el conocimiento de las matemáticas puestas en acción mediante su uso, la misma utilización didáctica de ellos, supone elaborar una propuesta metodológica para su uso con ideas prácticas y creativas para ser incorporados a una programación de aula.

Esquemáticamente, la metodología a usar la podemos resumir así:

- 1º) Presentación del juego. Reglas.
- 2º) Jugar. Familiarización.
- 3º) Análisis:
  - Inventar un sistema de notación.
  - Jugar varias partidas.
  - Variar la salida.
  - Anotar las jugadas. ¿Quién ha ganado?
- 4º) Empezar a buscar una estrategia ganadora:
  - Minimizar el problema.
  - Buscar configuraciones especiales.
  - Volver atrás.
  - Minimizar la solución.
  - Buscar una ley...

Este proceso es casi idéntico al seguido en la resolución de problemas. Usándolo ya estamos enseñando matemáticas al alumno. Estamos preparando su mente para un proceso muy difícil de asimilar por otra vía.

El uso en el aula de cualquier juego debe empezar necesariamente por su presentación. La manera de hacerlo puede variar, pero esencialmente debe consistir en mostrar el tablero y las fichas, las reglas del juego y el objetivo del mismo. La primera vez puede utilizarse el retroproyector por su vistosidad. Pero simultáneamente debe estar presente un mural con un esquema-resumen de las reglas, que pueda ser consultado continuamente por los jugadores. Los tableros y las fichas deben estar preparados sobre las mesas. Se hace una partida de demostración o algunas jugadas; se contesta a las preguntas que planteen los alumnos, a las dudas que se presenten. Se invita a jugar y se les deja solos, entregados al juego.

Cuando ya están familiarizados con él se comienza a hacer preguntas sobre los diversos momentos del juego. ¿Quién

ha salido? ¿Quién ha ganado? ¿Cuántos movimientos has necesitado para hacerlo? ¿Cómo has hecho para ganar? Repite las jugadas una por una.

Este es el momento clave. El alumno ve que necesita algo más que mover las fichas. Debe reflexionar sobre lo hecho. Y para reflexionar necesita recordar los pasos y expresar sus pensamientos. Ve necesario poder representar las jugadas. Un dibujo, un esquema, una notación simbólica,...; cada alumno deberá dar su solución personal. La puesta en común posterior hará ver la variedad de soluciones, la creatividad de cada uno; la discusión y el contraste de ideas hará también mejorar a cada uno su propia solución o adoptar la que se ve como mejor.

Ahora se vuelve a jugar, pero de forma más crítica. Se pensará cada jugada, se tratará de explicar por qué se hace ésa y no otra, se representará cada una. Al terminar es posible repetir íntegramente la partida, o empezar a partir de cierto punto, ver las variantes desechadas, analizar, en suma, los aciertos y los errores.

Se pueden realizar tablas que contabilicen el número de jugadas o movimientos. Eliminar los movimientos dilatorios, que alargan el camino, tratando de encontrar el camino más corto. Cambiar el número de fichas, cambiar la forma o el tamaño del tablero. Empezar desde un tablero más pequeño o con menos fichas. Volver a tabular. Comparar resultados. Sacar conclusiones. Definir las mejores estrategias parciales, averiguar si existe una estrategia ganadora, cuáles son las condiciones de partida para poder ponerla en marcha. Generalizar las soluciones a todas las posibilidades. Tratar de expresar esa solución general mediante una expresión matemática, una ley de recurrencia o una fórmula general.

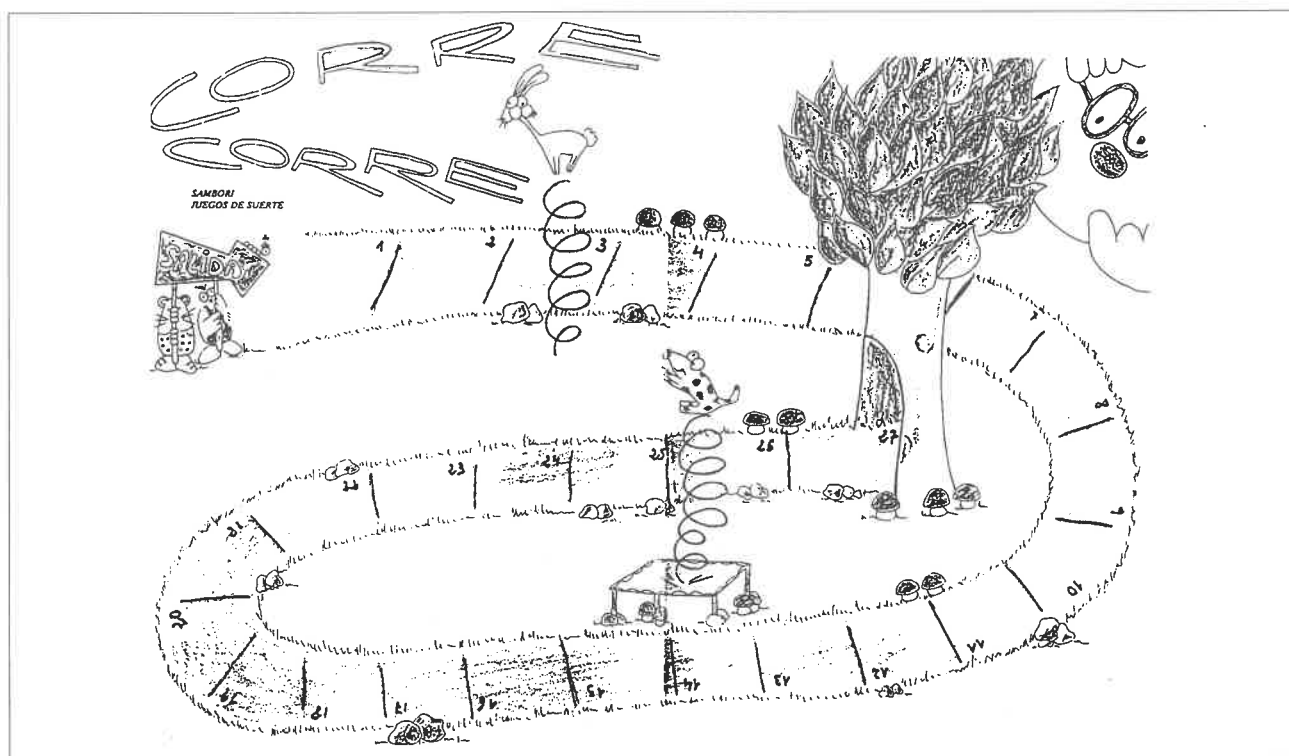
Pero puede haber más matemática contenida en el juego. Ayudar a explorarla, investigar, dejar libre la imaginación...

### Conclusiones

Un juego puede darnos todo eso y mucho más. Pero no seamos excesivamente ambiciosos. No todo se puede enseñar a través del juego, ni es bueno que ello pudiese ser así. Estaríamos dando al péndulo el impulso contrario. Seamos prudentes. Seleccionemos bien; juegos sí, pero ¿cuáles?, ¿cuándo?, ¿por qué?, ¿cómo?

Somos nosotros, los profesores, los que debemos conocer bien los juegos que queremos utilizar, saber su potencial, qué matemáticas podemos extraer de ellos, qué hábitos ayudan a ejercitar, cómo potencian el pensamiento lógico-matemático,...

A partir de ese conocimiento, podemos decidir en qué momento de la actividad escolar puede ser incluido, para



## CORRE, CORRE (I)

**Nº DE JUGADORES: 2**

### Material necesario:

- el tablero del CORRE, CORRE
- un dado cúbico
- dos fichas

### Reglas del juego:

1. Este juego representa una persecución entre un perro y un conejo. ¿Conseguirá salvarse el conejo?
2. El conejo comienza primero a correr, ¡ha visto al perro! Se lanza un dado. Si sale 1, 2, 3 o 4 el conejo se mueve tantos lugares como indica el dado, si sale 5 o 6 se mueve el perro tantos lugares como indica el lanzamiento.
3. Para darle un poco de ventaja al conejo los 3 primeros lanzamientos sólo moverá el conejo. Si sale 5 o 6 se repite el lanzamiento.

## CORRE, CORRE (II)

**Nº DE JUGADORES: 2**

### Material necesario:

- el tablero del CORRE, CORRE
- dos fichas de colores
- un dado cúbico y uno tetraédrico

### Reglas del juego:

1. El perro quiere cazar al conejo. ¿Lo conseguirá?
2. El jugador que hace de perro lanza para moverse el dado cúbico. El jugador que hace de conejo lanza el dado tetraédrico.
3. El conejo ve de lejos al perro por lo que empieza primero a correr lanzando seguido tres veces su dado antes de que empiece el perro.

## JUEGOS PROBABILÍSTICOS EN PRIMARIA

**Pascual Pérez Cuenca**

CEP d'Alacant

**L**os contenidos relacionados con la probabilidad que reflejan los decretos de enseñanza para la educación primaria hacen referencia fundamentalmente a:

- Poder diferenciar experiencias aleatorias de las que no lo son.
- Conocer y usar un vocabulario propio de las experiencias aleatorias: sucesos posibles, imposibles, seguros, más probables que.
- Usar métodos sistemáticos de anotación, tabulación, para poder analizar el comportamiento de diversos instrumentos de azar, incluyendo algunos claramente faltos de simetría.
- Usar métodos sistemáticos de anotación, tabulación, para poder comenzar a discernir que no todos los sucesos de un experimento son equiprobables y que esto está relacionado con la cantidad de sucesos simples que contienen.
- Comprender que las frecuencias relativas se estabilizan para un número grande de observaciones.
- Empezar a contrastar que estas frecuencias relativas coinciden con lo esperado (probabilidad a priori) en experiencias de sucesos simples equiprobables.

Todos estos contenidos pueden trabajarse por medio de juegos probabilísticos de características sencillas, que son empleados usualmente por los niños en contexto familiar o de sus grupos de amigos, y utilizan muy diversos instrumentos de azar en su desarrollo, dados, cartas, ruletas, loterías, etc.

Además, alguna pequeña transformación en las reglas del juego usuales puede darle características totalmente distintas y permitir un aprovechamiento didáctico mayor. Veamos un par de ejemplos:

### Parchís

En vez de utilizar las reglas ordinarias, se puede cambiar de forma que los participantes pueden en cada turno elegir entre lanzar el dado cúbico ordinario o uno dodecaédrico. El juego permitirá comprender que con el dado dodecaé-

drico se va más rápido porque pueden salir números mayores y obligará a tomar decisiones fundamentalmente cuando haya posibilidades de "matar" alguna ficha. Así si una ficha contraria está a 5 posiciones, ¿con qué dado lanzamos? ¿Y si está a 8 posiciones?

### La oca

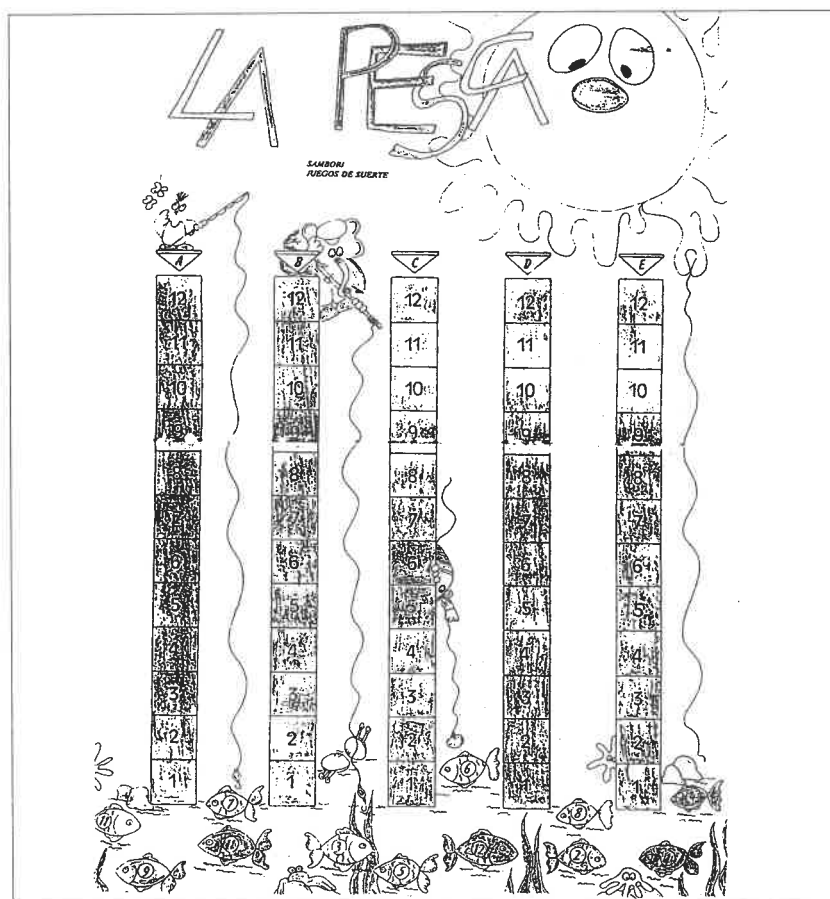
En vez de utilizar el dado cúbico ordinario se puede cambiar por un dado de quinielas de forma que un jugador mueve 1, 2 o 3 lugares según que salga un 1, una X o un 2. De esta forma más pronto que tarde se apreciará que salen más veces 1, que X y que 2 y que esto tendrá algo que ver con el número de caras que contiene a cada número.

Este aprovechamiento de los juegos ya conocidos por los niños y otros muy sencillos basados en muy pocas reglas es una de las características de los juegos analizados en el taller. Estos juegos han sido tomados de la unidad de JUEGOS DE SUERTE del proyecto Sambori de materiales curriculares para primaria editado por la Consellería de Educación y Ciencia de la Generalitat Valenciana.

En el taller, después de jugar un poco para comprender las reglas y los objetivos, se analizan:

- Estrategias más usadas por los niños en las diferentes fases del juego.
- Grado de comprensión de las reglas, modificaciones más usuales, clarificaciones y ayudas que han sido necesarias.
- Algunas modificaciones posibles de las reglas que puedan hacer el juego más sencillo, más complejo o más claro.
- Contenidos implícitos y formas de tratarlos durante el juego (en pequeño grupo) y con posterioridad (en el grupo clase).
- Cómo cambiar el juego cambiando el instrumento de azar.

Se presentan a continuación los tableros de juegos y las reglas (2 por tablero) de los juegos usados en el taller.



### LA PESCA (I)

**Nº DE JUGADORES: 2 o MÁS**

**Material necesario:**

- el tablero LA PESCA
- 12 fichas de colores por jugador
- 2 dados cúbicos

**Reglas del juego:**

1. El objetivo es pescar 12 peces numerados del 1 al 12. Cuando un pez ha picado se coloca una ficha en la tira del pescador.
2. Se lanzan uno o dos dados en cada turno a elección del pescador. El número resultante indica el pez que ha picado el anzuelo.
3. El primer pescador en tener los 12 peces será el ganador.

### LA PESCA (II)

**Nº DE JUGADORES: 2 o MÁS**

**Material necesario:**

- el tablero LA PESCA
- 12 fichas por jugador
- un dado cúbico y uno dodecaédrico

**Reglas del juego:**

1. El objetivo es pescar 12 peces numerados del 1 al 12. Para mostrar que el pez ha sido pescado hay que colocar una ficha en la tira del pescador.
2. Cada pescador elige lanzar el dado cúbico o el dado dodecaédrico. El número resultante será el pez que ha picado.
3. El pescador que consiga los 12 peces primero es el ganador.



## COGE EL TESORO (I)

**Nº DE JUGADORES: 2 a 4**

### Material necesario:

- el tablero de COGE EL TESORO
- un taco de 5 cartas numeradas del 1 al 5 por cada jugador
- una ficha por cada participante

### Reglas del juego:

1. Cada jugador sitúa la ficha en el sitio marcado por la flecha del mismo color y avanza hacia su cofre.
2. En su turno cada jugador toma una carta de su montón y decide mover tantos lugares como indica la carta o arriesgarse pidiendo otra diciendo MAYOR o MENOR; si acierta suma los dos resultados y mueve esa cantidad, si falla no mueve en ese turno.
3. Si se cae en el pantano se vuelve al punto de partida.
4. El jugador que alcance antes su cofre gana.

## COGE EL TESORO (II)

**Nº DE JUGADORES: 2 a 4**

### Material necesario:

- el tablero de COGE EL TESORO
- un taco de 5 cartas numeradas
- una ficha por cada jugador

### Reglas del juego:

1. Cada jugador sitúa la ficha en el sitio marcado por la flecha del mismo color y avanza hacia su cofre.
2. En su turno el jugador debe decir un número del 1 al 5 y después coger una carta del montón. Si el número que ha dicho es menor que la carta moverá esa cantidad de lugares. Si el número es mayor no se mueve nada en ese turno. Si son iguales el número que ha dicho y la carta se repite.
3. Si se cae en el pantano se vuelve al punto de partida.
4. El jugador que alcance antes su cofre gana.



- 1) El posible uso de nuevos materiales o recursos instructivos directos: materiales curriculares, recursos diversos,...
- 2) Nuevos enfoques de enseñanza que supongan revisión del contenido, organización y secuencia del mismo, nuevas formas de actividad/experiencia educativa del alumno, papel del profesor, ...
- 3) La alteración de creencias o de supuestos pedagógicos y teóricos que apelan al conocimiento y comprensión que poseen los realizadores de la innovación sobre los valores, presupuestos y objetivos que conlleva su implementación.

Como señalan González & Escudero (1987), en la práctica se dan casos de cambios "en superficie", usando ciertos materiales, enfoques metodológicos, ... sin comprender claramente los principios o bases racionales del cambio; por otra parte, puede haber una comprensión de los principios, sin una práctica acorde con el sentido de una supuesta innovación. Como señalan los mismos autores, "... la multidimensionalidad del cambio cobra su auténtico significado en la práctica. Dicho de otro modo, pueden usarse nuevos materiales y con ello lograr ciertos objetivos educativos, pero posiblemente puede hablarse de un cambio más profundo cuando los usuarios, al tiempo, desarrollan nuevas destrezas y enfoques de enseñanza y comprenden, conceptualmente, qué y por qué han de hacerse las cosas". (ob. cit. pag. 20).

Romberg, T.A. (1991) señala que la dificultad de implantar una determinada innovación depende de muchos factores, que varían desde las características mismas del proyecto innovador hasta la estructura cultural afectada por el cambio. El grado más simple de una innovación sería la sustitución de un componente aislado de un sistema —como el cambio de un libro de texto, la utilización de recursos distintos, ...— hasta llegar al más complejo de todos los cambios que tiene que ver con los valores, con las concepciones de fondo de las metas de la educación matemática y las prácticas consecuentes.

Esta manera de caracterizar las innovaciones, se centra en el grado de reestructuración de las prácticas escolares que comportan; en los extremos estarían la *innovación mejoradora* y la *innovación radical*. Para este autor las innovaciones mejoradoras están destinadas (o se perciben así) a hacer mejores y más eficientes algunas prácticas escolares actuales, pero no cuestionan las tradiciones asociadas a la cultura escolar. En el otro extremo, las innovaciones radicales se perciben como desafíos a las tradiciones culturales escolares y están destinadas a cuestionarlas. Como señala el mismo autor, lo que parece claro en la comunidad

matemática es que se está pidiendo un cambio radical que se perfila sobre cuatro "desafíos" a las matemáticas escolares:

- a) Todos los alumnos/as deberán estudiar matemáticas y además matemáticas algo distintas a las que se estudian actualmente en la enseñanza obligatoria y Secundaria no obligatoria.
- b) Todos los alumnos y alumnas deberán aprender a "hacer matemáticas" y comprobar por tanto que las matemáticas tienen sentido (no basta con saber cosas "sobre las matemáticas").
- c) Es necesario desarrollar un discurso comunitario distinto para hacer que los profesores/as y los alumnos/as se comprometan en un proceso de enseñanza/aprendizaje orientado a la realización de aprendizajes significativos y funcionales (desarrollo de capacidad de auto y heteroaprendizaje).
- d) Las Matemáticas han de trabajarse en entornos tecnológicos.

Si las prácticas tradicionales han puesto el acento en el desarrollo de *destrezas, conceptos y aplicaciones*, la educación matemática, hoy, ha de poner énfasis en *disposiciones/capacidades, actitudes y convicciones* más amplias y profundas sobre la naturaleza del conocimiento matemático, sobre su valor cultural y sobre la capacidad de pensamiento matemático de cada persona.

Lo dicho hasta ahora nos obliga a pensar la Innovación como un proceso "mucho más sofisticado" que el de hacerse con unos materiales o enviar ingenuamente nuevas propuestas curriculares a un centro, introducir nuevos recursos en un centro, etc.

La naturaleza política de los fenómenos innovadores constituye una parte importante no siempre tenida en cuenta a la hora de comprender y articular el cambio. Todo proceso de innovación inserto en una organización y en el seno de una "cultura" supone negociación, poder, conflicto de intereses, .... La escuela como espacio organizativo con rasgos propios, constituye un contexto cultural que ejercerá influencia sobre los procesos de innovación, ya que la elección de metas y la adopción de valores, es claramente una decisión que afecta a la colectividad social, una decisión sin duda política.

Actuar tomando como punto de partida "lo que debería ser el cambio" sin considerar la realidad de las personas que han de implementarlo, supone una visión "hiperracionalizadora" del mismo. (González, M.T. Ob. cit.). Protagonista por

# 11. Innovación, formación e investigación en didáctica de las Matemáticas

## INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**M<sup>a</sup> Victoria García Armendáriz**

*Asesora de la Unidad Técnica de Formación del Profesorado. Navarra*

**"T**an cerca y tan lejos", éste podría ser un buen título para acercarnos al tema Innovación en Educación Matemática. Para algunas personas la innovación es algo casi cotidiano, algo propio del hacer profesional, vinculado a su preocupación por la educación y por el aprendizaje de sus alumnos.

Por esta razón cuando tratamos de clarificar el significado de esta noción nos encontramos con experiencias que se extienden desde posiciones individuales, actitudes profesionales, formas de hacer vinculadas al modelo de investigación-acción, hasta proyectos de innovación con mayor o menor envergadura, investigación sobre la innovación, etc.

Sin embargo, ¿hasta qué punto las innovaciones que conocemos o que hemos puesto en marcha son identificables como acciones prácticas al servicio de cambios exigidos por la modificación de las condiciones en las que se educan nuestros alumnos?: adaptación a la sociedad actual, emancipación del individuo en una cultura tecnológicamente avanzada, enseñanza para todos, ...

Desde este ángulo de visión contemplamos la **Innovación** como *una serie de procesos deliberados y sistemáticos por medio de los cuales se intenta introducir y promocionar ciertos cambios en las prácticas educativas*. (Sancho, J.M. y otros 1992). La Innovación está, pues, al servicio de cambios que se desea ocurran y prende sobre posiciones "transgresoras" del orden establecido, sobre la insatisfacción profesional y como compromiso "consecuente" con las aspiraciones de mejora de la calidad de la educación. (González, M.T. y Escudero, J.M. 1987).

Vivimos una coyuntura de cambios sociales y científicos importantes y los sistemas educativos, y el nuestro en particular, han necesitado y necesitan someter a reflexión crítica

su razón de ser, sus funciones y el modo de cumplirlas. Como podemos apreciar, las nociones de Cambio, Innovación y Reforma aparecen profundamente relacionadas; nosotros vamos a considerar los procesos de cambio como el "referente universal" en el que se sitúan Reformas e Innovaciones Educativas. Ambas remiten a un determinado tipo de práctica en el seno del Sistema Educativo y se desarrollan a través de complejos mecanismos y procesos personales, tecnológicos e institucionales, tributarios de plataformas de pensamiento que suponen opciones ideológicas y socio-políticas determinadas. Sin embargo, mientras la Innovación podemos considerarla una acción para el cambio a un nivel más concreto y delimitado, las Reformas Educativas suponen políticas y programas que tienen como objetivo introducir un cambio educativo en todo un país —en parte o en todo el sistema educativo— y afectando, generalmente, a los aspectos curriculares y/o estructurales como es nuestro caso.

Pero además, para que una Reforma educativa promueva el cambio deseado es necesario implantar programas que respondan a esos ideales de cambio, lo cual supone algo más que la mera realización de experiencias o proyectos pedagógicos aislados. Siendo valiosas dichas **experiencias innovadoras** entendemos la Innovación como un fenómeno complejo dirigido a reconsiderar los contenidos y orientación de los procesos educativos en un momento histórico dado, a la luz de las coordenadas ideológicas, sociales, económicas y culturales.

### Dimensión y procesos de la Innovación Educativa

Según Fullán (1982) "el cambio", para que pueda considerarse como tal, habría de ocurrir en la práctica a lo largo y ancho de tres dimensiones que evolucionan con y en la práctica. Estas tres dimensiones son:

## ¿ES IMPORTANTE MEJORAR LA GESTIÓN DE LA CLASE?

**Marta Berini**

*I.B. Joanot Martorell. Esplugas, Barcelona*

**D**e acuerdo con la nueva estructura del Sistema Educativo se ha establecido el primer nivel de concreción para cada área de conocimiento, y en él aparecen los objetivos generales, la relación de contenidos, las orientaciones para el aprendizaje y la evaluación, y deja a los Centros (Profesorado, Departamentos, Claustros,...) la decisión sobre la temporalización de los contenidos, su distribución a lo largo de los distintos ciclos y se promueve también la elaboración del material curricular concreto para trabajar en el aula.

Esta posibilidad nos ha de hacer reflexionar sobre en qué ha de consistir la formación del profesorado (además de intentar ver su relación con la investigación y la innovación educativa).

A mi modo de ver y después de haber tenido la necesidad de elaborar material curricular en forma de Unidades Didácticas, y también de escribir unas orientaciones didácticas para ayudar al profesorado a utilizar dicho material, así como de secuenciar los contenidos del área de Matemáticas a lo largo de los 4 cursos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, pensar en los criterios de evaluación y llevarlos a la práctica, creo que estoy en condiciones de opinar sobre cuál habría de ser el enfoque de la formación para un profesorado que en cursos posteriores habrá de incorporarse a una nueva estructura educativa.

Creo que esta formación habría de verse bajo dos puntos de vista:

- a) ha de presentar situaciones que favorezcan unas discusiones de grupo destinadas a reflexionar sobre la potencialidad del nuevo modelo educativo, adecuarla a las distintas fases de la enseñanza y ver cómo puede influir en mejorar la práctica docente.
- b) ha de ayudar a tomar decisiones en relación a:
  - presentar criterios y modelos para la organización y coordinación del área correspondiente.

- dar las pautas para determinar los objetivos y contenidos de las distintas unidades didácticas y para su elaboración
- ayudar a tomar decisiones en relación a:

### **lo que pretendemos que aprendan**

- qué objetivos didácticos y contenidos distribuimos en cada ciclo de la Etapa
- qué objetivos didácticos seleccionamos en cada Unidad
- qué contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) incluimos en cada Unidad Didáctica

### **lo que hacemos en el aula**

- organización del área
- temporalización
- estrategias metodológicas
- actividades a realizar
- distintos tipos de agrupamientos

### **cómo sabemos si lo que conseguimos responde a lo que pretendíamos**

- qué evaluamos
- cómo evaluamos
- cuándo evaluamos

Ahora bien, es de todos conocido que, en general, el profesorado no tiene experiencia en elaborar su propio material de clase y que en muchos casos prefiere utilizar un libro de texto. Hay que ser conscientes de esta situación y pensar qué dirección ha de tomar la formación del profesorado. Según mi opinión, cada vez es más evidente que el éxito de una propuesta de enseñanza de las matemáticas no recae solamente en el material que se trabaja en el aula, sino en la manera de gestionar la clase. Hay que profundizar más en este aspecto y creo que es aquí donde es de suma importancia el papel de la persona que investiga y de la persona que elabora estrategias innovadoras.

excelencia de esa realidad es el profesor que *interpreta* y *redefine* el cambio a la luz de su modo de pensar y concebir la enseñanza. La práctica real de la enseñanza y los significados que el profesor atribuye a la misma, constituyen el último contexto donde se concreta y hace la innovación; es el profesor el que interpreta el cambio propuesto, lo clarifica personalmente y toma decisiones sobre el mismo convirtiéndolo en enseñanza. En una innovación, por tanto, las interpretaciones son una constante que marcan su sentido y su evolución.

Podemos concluir este punto señalando que es más correcto hablar de *procesos de innovación* que de innovación a secas, ya que la innovación no puede considerarse un producto acabado y replicable. Supone más bien un conjunto articulado de acontecimientos, actividades diversas, estrategias complejas, ... entre las que existen relaciones dinámicas y transformadoras.

Desde distintos trabajos (Romberg, T. ob. cit.; Sancho, J.M. et al. (1992); Escudero Muñoz, J.M. (1988)) se advierte que el flujo de acontecimientos que comporta toda dinámica de cambio puede ser descrito formalmente identificando una serie de etapas a través de las que se construye, desarrolla y evalúa dicho cambio. La delimitación e importancia atribuida a cada fase, aparecerá bastante determinada por la perspectiva teórica desde la que se aborda.

Desde el enfoque *tecnológico* se prestó una especial atención a los procesos de planificación y evaluación, planificación por expertos y evaluación para la comprobación del logro o no de los resultados.

La introducción de nuevas plataformas teóricas para el análisis e interpretación del hecho educativo abren paso a un reconocimiento más explícito de los procesos de cambio, mucho más complejos y variados de lo que se podía suponer desde una posición científico-tecnológica. Desde estas nuevas posiciones —*paradigmas cultural y crítico*— se prima el ámbito de la práctica como espacio en el que la innovación adquiere o pierde su significado, se redefine e interpreta y alcanza unos resultados.

### Mirando al presente y un poco más lejos

Como ya hemos apuntado la Innovación se nos presenta como compromiso consecuente con las aspiraciones de mejora de la calidad de la educación y concretamente, como señala Romberg (ob. cit.), *la educación matemática para todos* exige cambios profundos —por no llamarlos radicales— en las prácticas de enseñanza aprendizaje.

Sólo desde experiencias innovadoras que promuevan los cambios desde dentro de las instituciones, con apoyo externo, muy atento a los problemas y necesidades surgidas en el seno de la propia organización escolar, se alcanzará la "internalización" del cambio, en tanto que valoración de la experiencia y compromiso con la práctica de la innovación por parte de sus actores.

Por otra parte, dilucidar las condiciones, los factores que propician y confluyen en un proceso de innovación debe ser labor que ocupe a los investigadores y en este momento constituye una tarea urgente que interesa a los que la consideran como una práctica para el cambio y a quienes pretenden introducirlo y guiarlo ■

## BIBLIOGRAFÍA

- Coll, C. (1994): "Posibilidades críticas en el desarrollo de la Reforma Curricular" Congreso Internacional sobre nuevas perspectivas críticas en Educación. Barcelona, 6-8 junio.
- Escudero Muñoz, J.M. (1988): "La gestión educativa ante la innovación y el cambio" en PASCUAL, R. (coord.) Ed. Narcea.
- Fullán, M. (1982): *The meaning of educational change*. OISE Press. Ontario.
- González González, M.T. & Escudero Muñoz, J.M. (1987): *Innovación educativa: Teorías y procesos de desarrollo*. Ed. Humanitas. Barcelona.
- Romberg, T.A. (1991): "Características problemáticas del currículo escolar de Matemáticas" en *Revista de Educación* nº 294, pg. 323-406.
- Sancho, J.M. et al. (1992): "Para aprender de las Innovaciones en los Centros" en *Revista de Educación* nº 299, pg. 249-291.

## FORMACIÓN, INNOVACIÓN E INVESTIGACIÓN

**Juan Emilio García Jiménez**

CEP de Villarrobledo. Albacete

La experiencia llevada a cabo durante varios años desde la asesoría de Matemáticas de un Centro de Profesores, permite afirmar que en la esencia de esta labor se encuentran relacionados los términos de formación, innovación e investigación. La actividad que se realiza en torno a la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas tiene por objeto la formación de profesores en activo, teniendo como referente constante el de la innovación. En todo caso si en la formación permanente de profesores se quiere innovar, es preciso realizar investigaciones o simplemente probar en las aulas investigaciones realizadas por otros.



Vamos a tratar de analizar las relaciones establecidas en el triángulo de dos en dos.

### FORMACIÓN E INNOVACIÓN

La enseñanza de las Matemáticas está experimentando cambios extraordinariamente importantes que conciernen a alumnos y profesores. Algunos de estos cambios aparecen en revistas muy especializadas, la mayor parte de ellos en publicaciones foráneas o en libros de muy restringida tirada. Un asesor de matemáticas tiene en primer lugar que dar a conocer a cada colectivo lo más interesante para él y luego realizar una labor paciente dirigida a aquellos profesores que necesitan confianza para alterar hábitos de enseñanza y aprendizaje que tienen muy arraigados.

¿La formación permanente de profesores de Matemáticas tiene que serlo sobre cuestiones que supongan innovación? La respuesta parece obvia: a profesores en activo no se les puede ofertar formación sobre metodologías, recursos o materiales que ya vienen utilizando desde hace años. Cuando alguien se implica en una tarea de formación que le va a suponer más trabajo y más tiempo, es porque desde la reflexión que ha hecho de su práctica, reconoce que sus planteamientos didácticos y sus recursos no están produciendo resultados satisfactorios ni para él como profesor, ni para sus alumnos. En consecuencia, quiere ver propuestas innovadoras que le permitan mejorar como profesional.

Los cursos y otras actividades que se realizan en el CEP aspiran a que los profesores que participan incorporen a su práctica docente los aspectos más destacados y que en las aulas continúe una labor de innovación que vaya produciendo cambios lentos, pero firmes en torno a una renovación de la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas. Después de una actividad en la que se plantean propuestas innovadoras, la preocupación de un asesor es la de ver en qué medida dichas propuestas afectan a lo que se hace y cómo se hace dentro del aula.

Con demasiada frecuencia los Centros actúan sobre los profesores más como un obstáculo que como facilitadores de innovaciones. El profesor que innova en clase genera un montón de reacciones negativas entre sus compañeros. ¿Qué puede hacer un asesor de Matemáticas en estos casos? Para empezar, apoyar a ese profesor para que se mantenga firme en sus loables propósitos de renovación y ayudarle con toda clase de medios a su alcance para que obtenga resultados satisfactorios. Por otro lado, reuniendo a las personas que intentan vías de innovación con otros compañeros de su Centro para mostrar, lejos de prejuicios, la consistencia y virtudes de las propuestas. Por último, abrir posibilidades para compartir la innovación con otros compañeros de otros centros, de modo que no se haga una labor en solitario y se pueda contar con el respaldo de otros. De este modo las personas que intentan vías de cambio no

En este sentido, los posibles caminos a seguir para mejorar la gestión en el aula tanto por la formación como por la innovación y la investigación estarían:

- cómo realizar la revisión de la producción escrita de forma individual por el alumnado y extraer conclusiones
- qué tipo de preguntas se han de hacer de manera que ayuden al alumnado a interiorizar sus razonamientos y que permitan una intervención del profesorado, con la finalidad de dar lugar a que poco a poco vaya siendo cada vez más autónomo en su trabajo
- cómo ser conscientes de que la verbalización de los razonamientos cumple con su finalidad, es decir de qué manera es posible verificar si a lo largo del tiempo cada alumno o cada alumna ha mejorado su capacidad de reflexión sobre su trabajo
- de qué manera es posible aumentar la capacidad argumentativa del alumnado
- qué respuestas de las elaboradas por el alumnado seleccionamos, de forma que permitan organizar posteriores actividades de confrontación, discusión,... en la clase
- qué tipo de discusión es la más adecuada para cada caso
- qué actividad realizar después de una discusión: p.e. una puesta en común, volver a pedir que verbalicen sus razonamientos, ...

- cómo utilizar las verbalizaciones producidas
- qué tipo de problemas plantear para potenciar la capacidad de generación de hipótesis y cómo hacen la comprobación de su veracidad o no
- cuál sería la manera más conveniente de relacionar las Ciencias y las Matemáticas en aras a resolver situaciones en las que sea necesario introducir el concepto de modelo, tanto en el nivel de los hechos, del fenómeno y de las experiencias, como en el nivel de las ideas, de los principios y de la teoría.

La investigación y la innovación tienen un papel fundamental en los aspectos dedicados a la elaboración de material didáctico y a la búsqueda de nuevas estrategias metodológicas, así como los dedicados a la evaluación de los resultados obtenidos.

¿Ahora bien, quién ha de llevar a cabo la investigación y la innovación?

Por un lado el profesorado del Centro escolar ha de realizar una investigación en el aula que ha de ser práctica y directa y que tenga relevancia, pero creo que todo el trabajo no puede recaer sobre él y que ha de existir la figura del investigador/a que ayude a mejorar los aspectos teóricos de la investigación, que haga la valoración sistemática de los resultados obtenidos y compruebe su validez, es decir, sea capaz de verificar si son generalizables a otras circunstancias, y que a través de su presencia en la clase como observador esté atento a la actitud del alumnado, su interés, su participación, el nivel de atención y otras reacciones respecto a la nueva metodología utilizada ■

| MATEMÁTICAS                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | CLASES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | MATERIALES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Análisis sobre la formación e interconexión de conceptos.</li> <li>• Procesos relacionados con la resolución de problemas o con las investigaciones.</li> <li>• Matemáticas que están reclamando más atención en la enseñanza y Matemáticas que la están perdiendo.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Capacidades intelectuales de los alumnos que pueden potenciarse con las Matemáticas.</li> <li>• Actitudes y saberes.</li> <li>• Qué se aprende y cómo se aprende a partir de ciertos temas.</li> <li>• Dificultades en el aprendizaje. Cómo diagnosticarlas y qué caminos tomar.</li> <li>• Preparación de clases, motivaciones, métodos de trabajo, cuando y cómo debe intervenir el profesor, ...</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cómo obtener las mejores posibilidades de los recursos tecnológicos al servicio del aprendizaje de las Matemáticas.</li> <li>• Posibilidades de un cierto material y qué cambia al cambiar de material.</li> <li>• Procesos y capacidades a partir de determinados materiales.</li> <li>• Diseño de materiales didácticos adecuados a necesidades concretas.</li> </ul> |

### INVESTIGACIÓN PARA LA INNOVACIÓN COMO DESARROLLO PROFESIONAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

¿La investigación debe estar al servicio de la innovación? No exactamente, la investigación debe estar al servicio de la mejora en la educación matemática. No va a ser mejor todo lo que suponga innovación, pero desde luego si no nos sentimos satisfechos con la situación actual (y no lo estamos), hemos de investigar sobre cómo aprenden los alumnos, qué metodologías producen hoy mejores resultados, qué materiales podemos diseñar o adquirir para que sean mejores vehículos de conceptualización, etc.

La investigación y la innovación deben ponerse al servicio de los profesores para que mejore la calidad de la educa-

ción matemática de sus alumnos. Un asesor de Matemáticas por su proximidad con los profesores, por las características de su formación específica y por su contacto obligado con las fuentes de investigación e innovación, debe constituirse en el vehículo necesario que comunique a unos con otros, de manera que las distancias se acorten y sea posible entre todos mejorar la calidad de la educación matemática en este fin de siglo. Oportunidades como estas JAEM, a las que todos los asesores de Matemáticas deberían sentirse obligados a asistir de oficio, son una magnífica ocasión para traer y llevar lo que en la actualidad está pasando respecto a la educación matemática. Afortunadamente en nuestra materia las asociaciones de profesores desempeñan un papel del que las autoridades educativas han hecho dejación hace tiempo ■



se verán vencidas por las reacciones negativas de tipo inmovilista.

### LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA Y LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Una asesoría de Matemáticas de un CEP tiene entre sus objetivos más destacados el que grupos de profesores formen seminarios o grupos de trabajo en donde se plantee la investigación y la innovación. Se empieza por conocer lo que otros compañeros hacen en diferentes puntos de España o del extranjero y se da a conocer lo mejor de lo que se publica en las revistas especializadas y libros que van saliendo al mercado. En este sentido un asesor con experiencia se constituye en el vehículo necesario para trasladar a los profesores de su demarcación lo mejor de lo que otros compañeros del mismo nivel o los investigadores de los departamentos universitarios están produciendo sobre didáctica de las Matemáticas.

¿Cómo se puede realizar investigación desde una asesoría de Matemáticas?

En primer lugar conectando la investigación que sobre la enseñanza de las Matemáticas se realiza en centros especialmente dedicados a ello, (lamentablemente casi todos fuera de España: los IREM de Francia, el IDM de Alemania, los Shell Centers de Inglaterra, algunos de USA,...) con la enseñanza de las aulas. En este sentido, es especialmente meritorio los esfuerzos de investigadores como Freudenthal, Fielker, Jan de Lange, Schoenfeld y otros por hacer que los resultados de sus investigaciones se "materialicen" en algo tangible (métodos, recursos, materiales,...) que puedan ser aplicados por los profesores en sus clases.

De otra parte, se puede investigar la eficacia de métodos, materiales y formas de intervención didáctica en las aulas, mediante la modalidad de "*Dar, observar y analizar clases*". Una de las formas más aceptadas por los profesores para conferir credibilidad a las teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas, la eficacia de ciertos métodos o las virtudes de determinados materiales es viendo al asesor en su clase con sus alumnos, en condiciones reales, esto es, una investigación sobre el terreno. Como acertadamente señala Fielker "*Los profesores pueden observar, y esto provoca un montón de discusiones sobre la forma en que enseñamos, y la idea no es de que todos deban enseñar como nosotros, sino que cualquier contraste nos hace considerar nuestros propios métodos más profundamente*".

Los profesores suelen actuar de acuerdo a modelos de buenos profesores que ellos tuvieron, pero la enseñanza de

las Matemáticas y los tipos de alumnos han cambiado mucho desde que estos profesores estudiaban Primaria o Secundaria. En consecuencia la reflexión sobre problemas y soluciones de otros compañeros se hace necesaria para mejorar profesionalmente.

Por otra parte, si un asesor de Matemáticas no quiere quedarse para hablar sólo de teorías, de lo que se publica, es preciso que pise frecuentemente las aulas de diferentes niveles para realizar *in situ* investigaciones sobre el aprendizaje, los materiales, etc. Además puede adquirir así conocimiento sobre el aprendizaje de las Matemáticas a diferentes niveles y posteriormente ejercer acciones de coordinación entre niveles, cuestión esta tan necesaria hoy cuando se está produciendo una nueva reordenación del sistema educativo.

Gran parte de los cambios en la enseñanza de las Matemáticas que se están produciendo en la actualidad surgen de las investigaciones relativas a cómo los alumnos aprenden. En este sentido, un asesor de Matemáticas ha de tratar de responderse (y ayudar a las respuestas de los profesores) a preguntas como las siguientes:

- ¿Cómo se puede conseguir desarrollar las mejores capacidades de los alumnos?
- ¿Qué métodos, recursos y comportamientos contribuyen a aumentar el gusto por las Matemáticas?

Si la formación permanente de profesores pretende que éstos incorporen a sus clases nuevas técnicas, nuevos materiales curriculares, nuevas formas de favorecer la creatividad y el aprendizaje, no deben diseñarse las actividades simplemente para **transmitir** los resultados de las investigaciones educativas sobre el aprendizaje, sino que debe permitirse que los profesores y profesoras participen en la reconstrucción en las aulas de los nuevos conocimientos.

Se realizan asimismo investigaciones para conocer las influencias sobre el aprendizaje matemático derivadas de la diferente situación social y cultural de los alumnos. Por ejemplo, tomando un mismo curso de alumnos en diferentes centros de la demarcación y desarrollando en ellos unas mismas clases. O bien sobre ideas previas, expectativas de educación matemática, etc.

La asesoría de Matemáticas de un Centro de Profesores relaciona la investigación y la formación permanente de profesores desde las Matemáticas, las clases y los materiales.

Desde estos supuestos y consideraciones el desarrollo de un Área de Conocimiento pasa, necesariamente, por el mantenimiento continuado de un Programa de Tercer Ciclo mediante el que se realicen y logren los anteriores objetivos. En este contexto, la Universidad de Granada aprobó durante el curso 87-88 el Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática, que ha continuado a lo largo de estos años.

## CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL PROGRAMA

El alumno inscrito en los estudios de doctorado deberá cursar y aprobar en el plazo de dos años, prorrogables a tres, un total de 32 créditos (320 horas) mediante los cursos y seminarios incluidos en el programa, así como con créditos obtenidos por la realización de un trabajo de investigación obligatorio, hasta un máximo de 9 créditos. Se exige un mínimo de 16 créditos en materias del área de conocimiento o fundamentales; el resto puede cursarse con asignaturas afines.

Los alumnos han de presentar en el Departamento, antes de terminar el Programa, un proyecto de tesis doctoral avalado por el que vaya a ser su director o directores. La tesis deberá terminarse en el plazo de cinco años desde la fecha de inicio de los estudios, ampliables en otros dos años a juicio de la Comisión de Doctorado.

El compromiso para la dirección de la Tesis se realiza, usualmente, cuando ha transcurrido parte del Programa y se formaliza con la aprobación por el Consejo del Departamento del proyecto de Tesis Doctoral. Este compromiso formal se articula en función de las líneas de investigación existentes en el Departamento y de los intereses científicos de los doctorandos; las líneas de investigación permiten aprovechar mejor los recursos limitados de personal, tiempo y materiales y facilita el trabajo en equipo, imprescindible para este tipo de investigaciones.

Concluidos los cursos y presentado el trabajo de investigación, cubriendo un total de al menos 32 créditos, el alumno recibe una certificación de suficiencia investigadora, dando por finalizados los estudios preparatorios y siendo condición previa para la presentación de la Tesis.

## ORGANIZACIÓN DEL PROGRAMA

Siguiendo las directrices generales, el Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada presenta la siguiente estructura:

### a) Cursos metodológicos

La experiencia ha mostrado la importancia del marco metodológico para la realización de una Tesis; un diseño adecuado, junto con los instrumentos pertinentes para el análisis de datos y discusión de hallazgos y resultados, contribuyen a la calidad del producto final. En la actualidad hay tres cursos metodológicos en el programa: *Metodología de Investigación en Educación Matemática*, *Diseño de Investigaciones Educativas* y *Análisis de Datos*.

El curso Metodología de Investigación en Educación Matemática aborda tres núcleos de problemas:

- i) los estadios lógicos de investigación en educación Matemática, con la delimitación del problema de investigación, la revisión de la literatura y la naturaleza de los datos empíricos;
- ii) los métodos diferenciales de investigación en educación matemática, considerando: métodos centrados en la materia, métodos centrados en la enseñanza, métodos centrados en el aprendizaje, métodos centrados en el colectivo educativo y métodos integrados;
- iii) la evaluación de la investigación en educación matemática.

### b) Contenidos fundamentales

Constituyen la parte central del Programa y se exige, al menos, haber cursado 16 créditos de esta materia. Mientras que los cursos metodológicos, o afines, se pueden compartir con los Programas de doctorado de otras disciplinas, el contenido fundamental es el que marca la especificidad del Programa. En este tipo de cursos podemos diferenciar dos grupos: las materias troncales y las líneas de investigación específicas.

En las materias troncales se encuentran: el curso *Teoría de la Educación Matemática* y el curso del *Diseño, Desarrollo y Evaluación del Currículo de Matemáticas*, que aborda los fundamentos de la teoría curricular y los problemas que se derivan para la Didáctica de la Matemática del hecho de considerar la complejidad de los planes de formación que tienen lugar en las instituciones educativas. Estos cursos son complementados por el *Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática*, durante los dos años del programa; el Seminario de Investigación es el espacio natural en el que el alumno del Programa entra en contacto con investigaciones en curso y se enfrenta a los problemas prácticos que supone su puesta en marcha y desarrollo. El carácter obligatorio de los cursos de este bloque destaca la importancia que tienen en el Programa.

## FORMACIÓN DE INVESTIGADORES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**Luis Rico Romero**

*Departamento Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*

### ÁREA DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Uno de los objetivos básicos de la Ley de Reforma Universitaria (L.R.U. 1984) consistió en potenciar los Departamentos como unidades organizativas básicas de las Universidades, cada uno de ellos especializado en un Área de Conocimiento determinada (o en varias afines), y capaces de satisfacer de modo eficaz y competente las necesidades docentes e investigadoras.

La ley establecía las Áreas de conocimiento **como aquellos campos del saber caracterizados por la homogeneidad de su objeto de conocimiento, una común tradición histórica y la existencia de comunidades investigadoras nacionales o internacionales.**

En este marco surge el Área de Conocimiento *Didáctica de la Matemática* como uno de los campos de conocimiento en la Universidad, reconociendo el esfuerzo realizado por la comunidad de educadores matemáticos de nuestro país en los últimos treinta años. La constitución de Departamentos universitarios en los que está integrada el Área de Didáctica de la Matemática ha supuesto un paso importante para la Educación Matemática en España, disponiéndose de nuevos medios personales y materiales y potenciándose la docencia e investigación en el Área.

### PROGRAMAS DE DOCTORADO

Uno de los logros derivados de esta situación ha sido la organización y desarrollo de Programas de Doctorado específicos de Didáctica de la Matemática, como ha ocurrido en la Universidades Autónoma de Barcelona, Literaria de Valencia y de Granada.

La importancia de los Programas de Doctorado se resalta en el Real Decreto que regula el Tercer Ciclo de Estudios Universitarios:

"El Tercer Ciclo, como demuestra la experiencia comparada, constituye condición esencial para el progreso científico y, por ello, para el progreso social y económico de una comunidad por cuanto de la profundidad de sus contenidos y la seriedad en su planteamiento depende la formación de los investigadores.

Por lo demás, el Doctorado tiene una consecuencia adicional de extrema importancia: en él se inicia la formación del Profesorado Universitario. Si se toma en consideración que en la Universidad, docencia e investigación son dimensiones inescindibles, se comprende la importancia que el aprendizaje de ciencias y técnicas especializadas presenta para el Profesorado y, por tanto, para el futuro de los estudiantes universitarios y de la Universidad misma.

Por ello, la Ley de Reforma Universitaria considera el Tercer Ciclo decisivo para promover la calidad de la enseñanza y para potenciar la investigación. Cualquier reforma universitaria debe considerarlo no como el apéndice burocrático de los dos primeros, sino como un periodo clave en el que tiene lugar la articulación entre docencia e investigación, y se forman tanto los investigadores como los futuros docentes universitarios. No en vano su superación permite acceder al título de mayor relieve académico.

A estos efectos, la Ley de Reforma Universitaria se plantea cuatro grandes objetivos en el campo de los estudios de postgrado:

- Disponer de un marco adecuado para la consecución y transmisión de los avances científicos;
- Formar a los nuevos investigadores y preparar equipos de investigación que puedan afrontar con éxito el reto que suponen las nuevas ciencias, técnicas y metodologías;
- Impulsar la formación de nuevo profesorado;
- Perfeccionar el desarrollo Profesional, científico y artístico de los titulados superiores."

## OBJETIVOS, CAMBIOS Y CONFLICTOS DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**Modesto Sierra Vázquez**

*Departamento Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca*

En esta ponencia se presentan, en primer lugar, los objetivos que persigue la investigación en educación matemática; aunque éstos pueden ser dispares según la concepción que el investigador adopte, existe sin embargo una cierta unanimidad en aceptar que la investigación en nuestro campo de trabajo debe servir para mejorar el proceso de enseñanza — aprendizaje de las Matemáticas. En segundo lugar se exponen los cambios que ha experimentado la investigación en educación matemática, tanto los referidos a los contenidos como los referidos a métodos. Además se presenta, brevemente, el conflicto que puede surgir entre la investigación tradicional y la investigación-acción. Por otra parte, en casi todas las exposiciones acerca de los procedimientos utilizados en Didáctica aparece una cierta confusión entre investigación cualitativa y cuantitativa; por ello, finalmente, se trata esta cuestión, con ánimo de hacerla clara y, no por supuesto con el objetivo, pretencioso, de resolverla.

### Introducción

Todo campo de saber, si no desea quedar obsoleto, necesita acrecentar de modo progresivo y acumulativo los conocimientos acerca de su objeto de estudio, o al menos tener una cierta voluntad de ello. Este es precisamente el objetivo fundamental de la investigación en ciencia factual y, en particular, de la investigación en nuestra disciplina. Además es un valor convencional en ciencia realizarlo de modo reglado o con un cierto método. Comenzaré exponiendo los objetivos y los cambios recientes en la investigación en educación matemática. Aunque todas las ciencias factuales comparten estratégicamente el mismo método, es obvio que tácticamente utilizan procedimientos particulares, que constituyen los tipos (o estrategias) concretos de investigación utilizados en nuestra disciplina; dado que hay una cierta confusión entre investigación cualitativa y cuantitativa, trataré esta cuestión con el propósito de iniciar un debate sobre la misma.

### Objetivos generales de la investigación en educación matemática

La fijación de objetivos generales en investigación (y, consiguientemente la metodología a utilizar) depende de la propia concepción de la Didáctica de la Matemática, considerada bien como ciencia básica (tal vez con un corpus de doctrina independiente), bien como ciencia aplicada, bien como pura tecnología (conjunto de técnicas óptimas y efectivas para transmitir y facilitar la adquisición de conocimiento y habilidades), o bien como una mezcla de estas tres concepciones. Esas concepciones existen actualmente en el campo de la Didáctica de la Matemática y marcan efectivamente los objetivos de la investigación. Así Begle et al. (1980), con una concepción entre ciencia pura y aplicada, consideran que la investigación debe estar inspirada a la vez en la realidad escolar y en los aspectos teóricos. Lesh (1979) se mueve en una líneas de pensamiento parecido. Kilpatrick (1994) la definirá como "una interrogación disciplinada acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" (p.16)

Existe, sin embargo, una cierta unanimidad en aceptar que los objetivos de la investigación en educación matemática, no se reducen a conocer las circunstancias en la que ésta ocurre, sino a determinar los conocimientos, medios y técnicas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas (Kilpatrick, 1988 ; Eisenhart, 1988). El deseo de los investigadores de cumplir el objetivo, aparentemente compartido por todos, de investigar para mejorar efectivamente la enseñanza de las Matemáticas, ha hecho que se produzcan cambios en los contenidos de investigación y en los procedimientos utilizados para estudiarlos, algunos de los cuales se exponen a continuación.

### Cambios recientes en la investigación en Educación Matemática

Entre los investigadores en educación matemática existe la sensación de que se están produciendo cambios en las características de esa comunidad y un desplazamiento del interés hacia un nuevo tipo de problemas. En particular, Kilpatrick (1988) apunta que se está produciendo un despla-

Las líneas de investigación específicas son cursos más cortos, opcionales, en los que se trata de presentar al doctorando el estado de la cuestión en campos específicos de la Didáctica de la Matemática. Se presentan problemas concretos y prioridades de investigación en líneas tales como *Pensamiento Numérico*, *Epistemología y Didáctica de la Combinatoria y Probabilidad*, *Problemas Aritméticos o Estrategias para la Resolución de Problemas*. Los profesores visitantes intervienen en este tipo de cursos, que sirven para intercambiar información entre nuestro Departamento y otros centros de investigación en Educación Matemática.

### c) Materias afines

Dentro de este grupo se incluyen aquellas materias que se consideran convenientes para completar la formación del doctorando, de cara a su labor de investigación en el campo de la Educación Matemática.

## INVESTIGACIÓN

### Trabajo de Investigación

El Programa exige a los alumnos la realización de un trabajo de investigación, dirigido por un Profesor del Programa. El trabajo de investigación consiste en una primera aproximación a la Tesis, en el que se realiza un primer ataque al problema de investigación, pudiendo hacer correcciones o reorientaciones sobre el mismo. El Departamento ha entendido que la mejor forma de aprender a investigar consiste en realizar un trabajo de investigación y, por ello, se estimula a los alumnos a que presenten una Memoria de Tercer Ciclo con los resultados obtenidos.

### Tesis Doctoral

Para lograr el título de Doctor en Matemáticas, en el programa de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, además de los cursos y trabajos mencionados, se requiere realizar una Tesis Doctoral. El plazo máximo establecido es de 5 años, prorrogables por otros 2.

### Balance actual

En el momento actual se han concluido doce tesis doctorales, cinco de ellas en la línea de investigación Pensamiento Numérico.

## PENSAMIENTO NUMÉRICO

La línea de investigación Pensamiento Numérico se encuentra dentro de las líneas de investigación establecidas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Con carácter general, denominamos Pensamiento Numérico a la línea de estudio e investigación en Didáctica de la Matemática que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el Sistema Educativo y en el medio social. El Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas.

Más en particular, el Pensamiento Numérico ha trabajado en el estudio de:

- la elaboración, codificación y comunicación de sistemas simbólicos con los que expresar los conceptos y relaciones de una estructura numérica;
- la organización, sistematización y desarrollo de diferentes actividades cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura numérica;
- los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos, cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica.

El modelo que propone tiene en cuenta:

- a) unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados;
- b) unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas;
- c) un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas ■

- i) El nexo entre paradigma y método
- ii) La elección forzada entre paradigma cuantitativo y cualitativo.

En un agudo análisis exponen la falacia de ambas suposiciones, redefinen las cuestiones suscitadas acerca de los tipos de métodos y resaltan algunos de los beneficios potenciales del empleo conjunto de métodos cualitativos y cuantitativos. En particular concluyen que los atributos de los paradigmas no están inherentemente ligados a métodos cuantitativos o cualitativos, y, recíprocamente ambos tipos de procedimientos son consistentes tanto con los atributos del paradigma cuantitativo como cualitativo. En cuanto a la elección entre paradigmas, ponen de manifiesto que, puesto que todos los atributos que constituyen un paradigma son lógicamente independientes (según su argumentación), no existe ninguna razón que impida al investigador mezclar y acomodar los atributos de los dos paradigmas para lograr la combinación que resulte más adecuada al problema de investigación.

Hay que redefinir el debate, de modo que, en vez de ser rivales incompatibles, los métodos puedan emplearse conjuntamente según lo exija la investigación, aunque siendo consciente de que la aplicación conjunta de métodos y paradigmas no es trivial. Cook y Reichardt (1986) señalan un conjunto de ventajas, pero también de inconvenientes.

Shulman (1981) reconoce la aparente incompatibilidad de ambos tipos de investigación y se dedica a señalar las posibilidades de su aplicación conjunta, considerándola como partes de un mosaico metodológico.

Por su parte Fenstermacher (1989), al plantearse la cuestión de si es realmente posible reunir lo mejor de ambos estilos, contesta que es posible, pero no mediante la fusión, la reducción o la síntesis, sino mediante "una clara distinción entre la producción o generación de conocimiento y el uso o aplicación de ese conocimiento" (p.163). Quizá una de las posturas más claras a favor de la conciliación de ambos métodos en la investigación en educación matemática, es la de Kilpatrick (1981), que, sensatamente y para finalizar, escribe:

"Sería desafortunado que una fuerte reacción contra los métodos tradicionales llevara consigo tirar al niño (cuantitativo) con el agua de la bañera (pruebas estadísticas). Mejor que abandonar los métodos cuantitativos en favor de los cualitativos, deberíamos dirigir nuestros esfuerzos a enriquecer ambos. En particular, los investigadores en educación matemática deberían estudiar nuevas técnicas de análisis exploratorio de datos y presentación, y deberían también considerar el uso de técnicas para el re-análisis de datos y el meta-análisis de investigaciones." (p. 374) ■

## BIBLIOGRAFÍA

- Begle, E. y Glenadine, E. (1980). Why do Research?. En R.J. Shumway (ed.), *Research in Mathematics Education*. Reston: NCTM, 3-19
- Bouvier, A. (1981). *Didactique des Mathématiques. Le dire et le faire*. París: Cedic- Nathan
- Cook, T.D. y Reichardt, Ch.S. (1986). Hacia una superación de los enfrentamientos entre los métodos cualitativos y los cuantitativos. En, T.D. Cook y Ch. S. Reichardt (eds.). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Madrid: Morata
- Eisenhart, M.A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 19, n.2, 99-114
- Fenstermacher, G.D. (1989). Tres aspectos de la filosofía de la investigación sobre la enseñanza. En, M.C. Wittrock, *La investigación de la enseñanza, I. Enfoques, teorías y métodos*. Barcelona: Paidós - MEC, 150-180
- Kilpatrick, J. (1981). Research on mathematical learning and thinking in the United States. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol.2, n.3, 363-369
- Kilpatrick, J. (1988). Change and stability in research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n.5, 202-204
- Kilpatrick, J. (1994). Historia de la investigación en educación matemática. En, J.Kilpatrick, L.Rico y M.Sierra, *Educación matemática e investigación*. Madrid: Síntesis
- Lesh, R.A. (1979). Supporting research in mathematics education. En, R. Lesh y W. Secada, *Some theoretical issues in mathematics education: papers from a research presession*. Columbus:ERIC, 1-11
- Seeger, F. y Steinbring, H (19991). The theory-practice problem in mathematics education: introduction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n.4, 109-111
- Shulman, L.S. (1981). Disciplines of inquiry in education: an overview. *Educational Researcher*, vol.10, n.6, 5-12

zamiento en el contenido y cambios en el estilo de investigación. Por lo que se refiere al contenido, Kilpatrick enumera cuatro tipos diferentes de cambios:

- i) Aparición de temas que no estaban presentes en la investigación hace diez años, como las diferencias en el aprendizaje por sexo, clase social o inmigración, estudio de las ideas o creencias de los profesores, y el estudio de las matemáticas utilizadas fuera del contexto escolar.
- ii) Incremento en importancia de temas que ya estaban presentes en pasado, tan variados como análisis de errores, análisis de la instrucción, problemas relacionados con el uso de ordenadores y nuevas tecnologías, aprendizaje del álgebra y aprendizaje de los números racionales.
- iii) Mantenimiento de temas, como estudios acerca de la resolución de problemas y razonamiento espacial.
- iv) Desaparición de temas de gran impacto en el pasado, como los estudios de carácter piagetianos.

En cuanto al estilo de plantear la investigación, Kilpatrick (1988) señala tres tipos de cambios. El primero se refiere a la tendencia a tratar aspectos "fronterizos" (como evaluación, afectividad, uso de tecnologías, lenguaje, metacognición, creencias de los profesores, formación de profesores) frente a aspectos propios (como temas del currículum). El segundo, a la concepción sobre el aprendizaje (como construcción activa más que pasiva) y sobre el currículum (conjunto de experiencias más que conjunto de conocimientos). El tercer cambio se refiere a aspectos epistemológicos, y consiste en un nuevo punto de vista sobre la propia investigación y en particular respecto a los métodos de llevarla a cabo. Este último cambio ha consistido en el desplazamiento de la investigación empírica-analítica hacia la cualitativa-interpretativa.

Finalmente, un problema de vital importancia en toda disciplina que tenga como último fin transformar (y no sólo conocer) alguna parcela de la realidad, son las relaciones, no siempre obvias ni claras, entre teoría y práctica. Ese problema se plantea en educación matemática en lo que es la relación entre la investigación matemática y la práctica cotidiana en el aula, y como tal debe ser objeto de investigación. Muestra de su trascendencia es la creación del grupo internacional *Systematic Cooperation Between Theory and Practice* (SCTP), compuesto por aproximadamente treinta investigadores de diez países diferentes, entre cuyos objetivos figura aportar soluciones a las "relaciones entre investigación y práctica diaria del profesor desde diferentes perspectivas teóricas y prácticas" (Seeger y Steinbring, 1991). La revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, ha dedicado los vols. 4 y 5 de 1991 al estudio de esta importante cuestión.

### **Dos conflictos: Investigación tradicional versus Investigación-acción. Investigación cuantitativa versus Investigación cualitativa**

Una idea generalizada (y tal vez justificada en algunos casos) acerca de la investigación experimental es que se ocupa de problemas muy alejados de los llamados "problemas reales", y que sus aplicaciones prácticas y su potencial para generar tecnología son muy escasos. Se tiene el sentimiento de que las cuestiones abordadas con la metodología experimental son demasiado "teóricas", identificando, no se sabe bien por qué, teoría e inutilidad. Este sentimiento de inutilidad práctica ha llevado a "reclamar investigación que pueda guiar e informar la práctica" (Kilpatrick, 1988), y de ese reclamo han surgido un conjunto de técnicas (predominantemente cualitativas) que constituyen la corriente metodológica denominada de investigación acción, que pretende resolver problemas reales y concretos, sin ánimo de realizar ninguna generalización con pretensiones teóricas. Su objetivo consiste en mejorar la práctica educativa real en una situación, espacial y temporal, determinada. Es en la década de los setenta cuando recibe un pleno impulso, siendo sus principales representantes L. Stenhouse y J. Elliot en el Reino Unido, con sus experiencias de investigación-acción cuyo objetivo era ayudar a los profesores a desarrollar en clase un aprendizaje heurístico. Metodológicamente tiende a utilizar métodos cualitativos y, en general, sigue el método inductivo próximo a la orientación etnográfica.

En educación matemática un grupo muy significado en utilizar este tipo de investigación es el formado por profesores franceses dirigidos por Alain Bouvier. La obra colectiva titulada *Didactique des Mathématiques: le dire et le faire* (Paris, 1986) es una defensa de la investigación-acción frente a la investigación tradicional. Sin embargo, Bouvier y cols. afirman en su obra que la didáctica-acción no se opone a una investigación experimental en didáctica sino que ambas deben enriquecerse al igual que lo hacen, por ejemplo, la psicología experimental y la clínica.

En el pensamiento epistemológico actual ha surgido la polémica sobre los métodos y técnicas de investigación, planteada, a veces, en términos dicotómicos y autoexcluyentes. La polémica se centra entre los partidarios de la investigación cuantitativa y los de la investigación cualitativa. A esta polémica no es ajena la investigación en Educación Matemática (Kilpatrick, 1981, 1988; Eisenhart, 1988). En su ya clásica obra, Cook y Reichardt (1986) aseguran que el debate actualmente establecido no debe entenderse como una simple cuestión de procedimientos, sino que muchos participantes lo plantean como un choque entre dos paradigmas metodológicos. Consideran, igualmente, que en los planteamientos de esta polémica subyacen dos cuestiones:



tico y social en amplias capas de la población, incluidos por supuesto los innovadores. Esta colaboración se veía, a nivel institucional: equipos directivos de los centros,... y en especial, a través de los Centros de Profesores. Aquéllos que se habían dedicado a renovar los temas y métodos de enseñanza de las matemáticas, se veían "abrumados" por tareas "burocráticas", la innovación, empezaba a quedar aparcada, como organismo vivo, para ser "succionada" por la Administración. Multitud de actividades "oficiales" cursos en los C.E.P.'s, encuentros, Jornadas, llenaron estos años, en detrimento de actividades propias de los grupos de innovación. La innovación no avanza más que en el terreno de los papeles. Los cambios son más lentos de lo esperado.

Por otro lado, se lleva a cabo la Reforma Libro Verde, Experimental, que asumida con entusiasmo por algunos de los más innovadores, terminó por quemarlos.

Otros habían conseguido, en estos años, trabajar en plazas de profesorado universitario, dedicadas a la Didáctica. Parecía que se cumplía un objetivo: coordinar las actividades innovadoras del aula, con investigaciones a nivel universitario. Las "antiguas" Escuelas de Magisterio se movían, también algunos Departamentos de las Facultades de Matemáticas.

1989. Parece que nos sentimos "encorsetados" por las instituciones, empiezan a aparecer los nuevos currículos: primaria y secundaria que parecen recoger el espíritu innovador, minoritario, de los últimos años, pero en opinión de algunos, enmascarado en un conjunto globalizador de lenguaje "psicopedagógico" lejano a las propuestas de los innovadores de la didáctica de la matemática, y más lejano todavía para la mayoría del profesorado. Desde el punto de vista de la innovación, dejan de aparecer propuestas nuevas, como he dicho, algunos innovadores están "legislado", otros "quemados", otros "huidos".

Pero además, por el lado político, "desencantados". Un cambio en el sistema educativo hacia más solidario, más igualitario, debe de ir acompañado de un cambio social en el mismo sentido, si no las direcciones de marcha de la escuela y de la sociedad serán opuestas, y las disfunciones del sistema educativo y las contradicciones diarias del mismo se van agravando día a día: Es muy difícil, por ejemplo, compatibilizar "libertad" con "obligatoriedad", "solidaridad" con "competitividad", ...

No obstante, por parte de las Sociedades, y con apoyo de los grupos, se crea la Federación, y en colaboración-subvención con el MEC, se organizan de nuevo actividades, relacionadas con las matemáticas y su enseñanza, de las que simplemente señalamos la primera de ellas, en mayo de 1991, un debate sobre los DCB's de Matemáticas de Pri-

maria y Secundaria, que tiene lugar en Pamplona, y después, hasta hoy, algunas más cada año.

Por otra parte, en este periodo se consolida, en algunas Universidades, una disciplina llamada Educación Matemática, en unas, y en otras, Didáctica de las Matemáticas, que, desde luego, y como hemos indicado antes, conlleva aspectos positivos, posibilidad de investigar, de colaborar profesores de distintos niveles y distintos ámbitos del saber, desgraciadamente no llevados a cabo, pero también, el germen del academicismo, en el sentido de "alejarse de la realidad escolar" para ir a "investigar" temas puntuales, locales, lejos de la práctica y preocupaciones diarias del profesor de "a pie", que sufre una nueva contradicción:

Si quiero seguir innovando ¿lo tendré que hacer desde mi aula?, (o sea como siempre)? o ¿debo esperar a que los "investigadores universitarios" me "resuelvan los problemas didácticos que se renuevan cada día"?

Hace unos meses, se celebró un Seminario en el C.I.D.E., dependiente del M.E.C., sobre "Investigación y Didáctica de las Matemáticas", se reunió a ambos bandos: "investigadores universitarios" y "profesores innovadores". Lo de bandos es por que, si bien con diferencias evidentes, efectivamente, los de la universidad parecían tener puntos comunes, diferentes de los profesores. Participé allí y más o menos señalé lo que, desde el punto de vista del profesor debería de ser investigado, pero con resultados aplicables:

Por ejemplo: ¿qué matemáticas enseñar?, ¿a todos? Parece que los últimos años, y aunque muchos no lo crean, con la reforma de las Matemáticas Modernas, se pretendía dar una educación matemática democrática, es decir, igual para todos. Este ideal, parece que las reformas sucesivas lo han mantenido, pero vemos cada día, en las aulas, que es cada día más difícil. ¿No habrá que cambiar de "objetivo": a cada cual según sus necesidades (matemáticas)?

¿No son tan fuertes las diferencias socio-culturales de unos países a otros, de unos barrios a otros, de unos alumnos a otros, como para hacer imposible un "mínimo común matemático"? ¿Por qué casi todas las actividades de innovación se muestran siempre como con éxito, y cuando otro profesor las aplica en su clase fracasa?, ...

Sí, ya se que son temas globales y que la moda en la investigación es "parcelar", "delimitar bien un problema preciso y estudiarlo" pero, ¿para qué? ¿Para hacer una tesis doctoral? ¿Para crear una disciplina científica nueva? ¿Para obtener resultados aplicables, útiles, reproducibles? ¿Es esto imposible? ...

El debate debe estar siempre abierto.  
¿Dónde queda la innovación? ■

## 12. Análisis crítico de los últimos 15 años de innovación didáctica en España

### ANÁLISIS DE LA INNOVACIÓN DIDÁCTICA EN MATEMÁTICAS

**Florencio Villarroya**

*I.F.P. Miguel Catalán. Zaragoza*

**D**e los tres "bloques" en que hemos dividido el tema, me corresponde abordar el primero, llamémosle político, o social o institucional.

Para el análisis de la innovación didáctica en matemáticas en nuestro país, en estos últimos años, es bueno poner un punto de partida, y unos hitos intermedios, temporales, más como puntos de referencia que como fechas determinantes, y por supuesto, sin ánimo de hacer numerología.

Hemos elegido como punto de partida, 1975, año que contiene dos acontecimientos importantes: primero, la muerte del General Franco, y por tanto el comienzo de la "transición" (entre reforma y ruptura, triunfaron los reformistas), desde el punto de vista político; segundo, el comienzo del B.U.P., desde el punto de vista educativo; tercero, la aparición de los primeros grupos de innovación en la enseñanza de las matemáticas.

**1982** es el hito siguiente, marcado por la victoria del P.S.O.E. en las urnas (202 diputados), desde el punto de vista político; el consiguiente inicio de la Reforma Educativa (ya planteada por los gobiernos de la transición), la consolidación de las J.A.E.M., con la celebración de las II en Sevilla, y la aparición de las primeras Sociedades de Profesores de Matemáticas (Canarias, Andalucía, Aragón, ...), desde el punto de vista de la innovación; empieza el periodo de la consolidación institucional.

**1989**, nuevo hito temporal, al que asociamos los siguientes hechos políticos: tercera victoria socialista en España, (con mayoría absoluta, pero "escaños dudosos": Murcia), caída del Muro de Berlín, comienzo del "destape" de las corruptelas políticas en los partidos gobernantes de "izquierdas" en Europa; educativos: la "inminente" entrada en vigor de la "LOGSE", y desde el punto de vista de la innovación educativa matemática, la creación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

**1996**, el futuro.

#### INNOVACIÓN DIDÁCTICA EN MATEMÁTICAS: PUNTO DE VISTA SOCIAL

En el primer periodo, 1975-82, hemos señalado la aparición de grupos: Grupo Cero de Valencia, Grup Zero de Barcelona, Grupo Azarquel de Madrid, Periódica Pura, Puig Adam, Aresta, ... incluso de personas aisladas, que, desde posiciones políticas, mayoritariamente "de izquierdas", (las innovaciones, la revolución, siempre vienen de la izquierda) y didácticamente innovadoras, defendían "ya" un cambio radical en la enseñanza de las matemáticas, frente al academismo mantenido de los nuevos programas de B.U.P., combatidos por las autoridades a veces, otras consentidos. Al principio, sus actividades eran más habladas que escritas, presencias en Escuelas de Verano, seminarios, charlas, y algunas publicaciones de escasa difusión: material ciclostilado, publicado en algunos I.C.E.'s, ... Su influencia en un sector del profesorado, siempre minoritario, cristalizaba, a finales de este periodo, en una especie de institucionalización, más bien actos de solidaridad voluntaristas, reuniones periódicas de representantes de estos grupos y de las incipientes Sociedades, en las que fundamentalmente se trataban y discutían trabajos de innovación matemática, y costeadas con fondos personales muchas de ellas.

Con el año 82, la presencia "institucional" de las Sociedades se hace más fuerte, en detrimento de los grupos, y va cambiando el cariz de esas reuniones, se va dejando de hablar de innovación en la enseñanza, para pasar a tratar temas más organizativos: las próximas J.A.E.M., la posibilidad de "organizarse a nivel estatal", de preparar actividades conjuntas, ... pero, precisamente, en ese periodo 82-89, las J.A.E.M. entraron en "hibernación", 82 Sevilla, 83 Zaragoza, 84 Santa Cruz de Tenerife, parón hasta, casualmente, el 89, en Castellón. ¿Qué pasaba?

Las personas más innovadoras, más o menos ligadas a los grupos y Sociedades, iban, poco a poco, colaborando más de manera institucional, la izquierda entonces (P.S.O.E.) había ganado las elecciones, se vivía un entusiasmo polí-

*entrenado en ellos se considera que ha alcanzado el nivel de madurez requerido. Para que el análisis parezca relevante al alumno, se le ofrecen ejemplos acabados, es decir, ejemplos diseñados simplemente para ilustrar las habilidades particulares que el alumno se esfuerza en adquirir".*

Se está a la búsqueda de una alternativa y poco a poco se empieza a oír un slogan, "Volver a lo básico" (Back to Basic).

Aquí, en nuestro país, han surgido los grupos Cero en Valencia y Zero en Barcelona. En Canarias, noviembre de 1977, se funda la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas (SCPM). Uno de los objetivos y el principal motivo que hizo que surgiera la SCPM fue el mejorar la enseñanza de las matemáticas. Lo cual es bastante obvio. Sin embargo nos motivó una idea que empezaba ya ha ser moneda corriente entre los círculos de profesores de matemáticas, y que era la creencia firme de que nosotros, los profesores de a pie, deberíamos realizar el cambio. La confianza en las instancias oficiales era poco menos que nula. Todavía no nos habíamos instalado en esas instancias. Pero no pasará mucho tiempo antes de conseguir ese objetivo.

Creo que los grupos, en particular el Cero de Valencia, había empezado su andadura en 1974, el grupo Zero de Barcelona comenzaría la suya al siguiente año. Un estilo inglés, D. Fielker y la ATM, es el que impregna al grupo Cero de Valencia. Los Zero de Barcelona se mueven más hacia una matemática utilitaria, sus primeros libros me recuerdan el SMP de esa época.

En Canarias nos proponemos reformar el BUP desde la base. ¿Cómo? De la única forma que nos pareció podríamos hacerlo, escribiendo unas lecciones de matemáticas más acordes con lo que entendíamos que debería ser básico, sin concretarlo y asumiendo que estaba muy claro para todos, y con el objetivo de que las leyera nuestros alumnos y al mismo tiempo sirvieran para modificar la metodología del profesor. Hicimos algunos cambios en los programas oficiales, por ejemplo, pasamos las progresiones a 2º de BUP y las colocamos dentro del tema general de sucesiones. Suprimimos la Probabilidad en tercero, pues no entendíamos que se debiera enseñar variables aleatorias y distribuciones de probabilidad antes que la probabilidad condicionada y el teorema de Bayes, que estaba y sigue estando en COU, entre otras cosas. Y entendíamos que un libro, sea de texto o unas simples lecciones, es la forma más rápida de llegar a un gran número de alumnos y de profesores. Pronto fueron adoptadas como libro de texto en muchos institutos de toda la región. Incluso llegamos a realizar una reedición de las lecciones de primero. Sin índice, sin numeración en las páginas correlativas entre lección y lección. Con el paso del tiempo, me parece mentira que pudiésemos haber tenido tanto éxito. A mí, personalmente, nunca me llegaron a satisfacer del todo. La ilusión con la

que confeccionamos las lecciones de primero, decayó bastante al empezar las de segundo y desapareció casi por completo con las de tercero.

Desde entonces hemos abandonado la edición de documentos curriculares o lecciones de matemáticas y hemos dedicado los esfuerzos de la SCPM a servir de convocante de Jornadas, encuentros y cursos, además de publicar y mantener a duras penas la revista *Números*. Esta función como transmisora de la cultura didáctica internacional y nacional que la SCPM ha desarrollado casi desde su fundación en 1977, creo que ha sido una de las más valiosas contribuciones realizadas en el campo educativo. Durante casi dos décadas por nuestras islas han pasado Claude Gaulin, Emma Castelnuovo, Alan Bell, David Tall, Alan Schoenfeld, David Fielker, Martin Kindt, Malcolm Swan, Leone Burton y representantes de casi todos los grupos del estado español, Cero de Valencia, Zero de Barcelona, Azarquiel, etc. Espero no haberme olvidado de alguien o de algún grupo.

La función de divulgar el conocimiento didáctico sea a través de cursos, jornadas o mediante la publicación de documentos como es el caso de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática (SAEM) es una de las mejores contribuciones que el conjunto de las sociedades y la federación pueden realizar; es además, un espacio que no estaba ocupado por ninguna otra institución oficial. En este sentido la traducción y publicación por la SAEM de las *Estándares Curriculares*[2] y los documentos que los desarrollan, conocidos como "*addenda series*", es de un valor todavía no medible, pero sin lugar a dudas muy valioso.

A finales de los setenta empezó a cuestionarse el slogan "Vuelta a lo básico". ¿Qué es lo básico? Ya que no parecía posible enseñar matemáticas modernas, ¿habría que enseñar matemáticas básicas? Esta última pregunta nos lleva a otra de forma natural, ¿qué son matemáticas básicas? ¿la geometría?, ¿la aritmética?

Había demasiadas opiniones sobre qué es "lo básico". Esta pregunta impregnó el III ICME de Berkeley celebrado en el verano de 1980. ¿Podría ser la resolución de problemas el foco de atención y respuesta a esa pregunta? Casi como una bienvenida a todos los profesores que asisten al ICME el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) edita su famosa *Agenda in Action* para toda la década de los ochenta. Así la resolución de problemas, *the problem solving approach*, se pretende que sea algo más que otro slogan y se convierta en toda una tarea a desarrollar, a interpretar y a llevar a cabo.

George Polya[3] estaba invitado como conferenciante de una de las plenarias, no pudo asistir por motivos de salud, pero envió una nota de agradecimiento que fue recogida en

## DE ENSEÑAR MATEMÁTICAS A APRENDER...

**Juan Antonio García Cruz**

*Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas*

1975 fue, para muchos, un año importante política y educativamente hablando. El 1 de Octubre, además de ser el último aniversario que Franco pasaría vivo, fue el comienzo del Bachillerato Unificado y Polivalente. Personalmente yo me estrené como profesor aquel curso. De ahí que para mí tenga una importancia especial. Con la llegada del BUP, las matemáticas modernas alcanzan por el fin el nivel más alto de la enseñanza secundaria en este país. Curiosamente cuando después de década y media de ensayo en USA, Francia, Bélgica y otros países occidentales está comenzando su declive a nivel internacional. Cuestionada casi desde el comienzo entre otros por H. Freudenthal y R. Thom, su principal caracterización podría ser el gran énfasis puesto en los contenidos a enseñar.

El programa de primero de BUP constituía todo un paradigma, veamos algunos ejemplos:

- La combinatoria. Variaciones, ¿métodos intuitivos?, ¿esquemas para poder contar? No. Contar sí, pero hay que contar de forma moderna: contaremos aplicaciones inyectivas entre dos conjuntos. A continuación, detrás de la combinatoria y como si de una continuidad natural se tratara va la Probabilidad. Eso sí, con toda la parafernalia de la teoría de conjuntos como apoyo para los razonamientos lógicos y su fundamentación formal. Las técnicas de combinatoria son para resolver los problemas.
- Números reales y complejos. Las estructuras algebraicas contextualizadas. El aprendizaje en espiral, una de las ideas metodológicas de la década anterior se pone en marcha con el tema de los polinomios: el anillo  $\mathbb{Z}[x]$  como otra materialización de la estructura algebraica de anillo, o quizás generalización del anillo  $\mathbb{Z}$ .
- ¿La estadística y la matemática financiera?... Pues la pondremos al final. Antes hay que explicar matemáticas a nuestros alumnos y alumnas. ¡Verdaderas matemáticas! Muchas veces me he preguntado si esos temas no serían una concesión al adjetivo de Polivalente que acompañaba al sustantivo Bachillerato.

Lo de unificado en lo que respecta a la matemática estaba bastante claro: ¡Hay que unificar la matemática bajo el paradigma Bourbakista!

¿Cómo se enseñaban esas matemáticas? ¿Teníamos un estilo propio de enseñar matemáticas? ¿Lo tuvimos alguna vez? ¿Lo tenemos ahora?

Yo era muy pequeño cuando murió Puig Adam. Cuando empecé como profesor, no me queda más remedio que confesarlo, nunca había oído hablar de los trabajos de didáctica de Puig Adam. También he de confesar que no he hecho mucho por enterarme de su trabajo en este campo, amén de las dificultades que he encontrado cuando los he buscado. Al igual que yo no me había enterado o no quise enterarme, en este país, a nivel oficial, nadie parecía darse por enterado de a dónde nos podía llevar el experimento renovador de la Nueva Matemática. Así, nos encontramos con la paradoja, de que cuando en casi todo el mundo se cuestiona la matemática moderna, en este país tomó carácter oficial en el tramo superior de la enseñanza no universitaria.

¿Qué nos pasó a los profesores?

Al final nos empezamos a dar cuenta de que enseñábamos lo que podíamos y cada vez nos fuimos acercando más y más a las recetas, los trucos para salir del paso y así, la matemática que aprendieron nuestros alumnos fue una matemática ramplona llena de algoritmos y carente en la mayoría de los casos de significado, incluso de significado matemático al haber abandonado el estructuralismo, y caer en brazos de su hermano bastardo: el mecanicismo.

En 1976, en el III ICME, celebrado en Karlsruhe (RFA), surge la polémica sobre el abandono de la geometría y de su papel en la enseñanza (M. Atiyah). También se levanta acta y se confirma la defunción del Estructuralismo y se certifica el nacimiento del Mecanicismo cuando P. Hilton[1] en su conferencia plenaria dirigida a los asistentes afirma: "El análisis se construye de forma que parezca un conjunto de trucos, los cuales aprende el estudiante y una vez que está

respuesta a lo que es "básico" para una enseñanza obligatoria.

Muchos nos sentimos como si hubiésemos tomado el poder... desde la base hacia arriba... construiremos un nuevo programa, curriculum suena a jerga pedagógica. Sólo se necesita un programa para hacer la "revolución"... y mucho voluntarismo... todas las horas y esfuerzos que hagan falta... por fin vamos a poder realizar algo grande y además nuestro.

Los borradores de los múltiples encuentros entre profesores de los centros experimentales y el equipo coordinador del Ministerio da a luz un documento oficial que se publica en 1985[5]. En la introducción de dicho documento se establecen los presupuestos didácticos de la Reforma:

*"...las EE.MM actuales están estructuradas en torno a un cuerpo de conocimientos a veces muy alejados de la realidad, excesivamente teóricos y distribuidos en compartimientos estancos, sin que existan apenas intentos de coordinación o globalización. Es cierto que esta situación se ve superada muchas veces por el trabajo del profesorado y las experiencias de grupos que han iniciado hace ya tiempo la renovación; precisamente, esta reforma pretende generalizar los avances e incidir sustancialmente, entre otros, en los siguientes aspectos:*

1. Atención preferente a la consecución de objetivos educativos que trasciendan el campo de las asignaturas.
2. Definición de una metodología activa.
3. Replanteamiento del sentido y el alcance de los contenidos.
4. Aproximación interdisciplinar entre las materias.
5. Revisión del sentido de la evaluación como instrumento de aprendizaje".

A destacar los puntos primero y quinto. En el primero la llamada de atención a la consecución de unos objetivos educativos que trasciendan el campo de las asignaturas se concretará más tarde en la LOGSE en las capacidades que encierran los Objetivos Generales de Etapa y Área. En el quinto punto se hace una llamada a revisar la evaluación, el problema central para muchos, y se enfatiza su utilidad como instrumento de diagnóstico y regulación del aprendizaje.

A finales de Mayo de 1984 se celebra en Madrid el Simposio "La enseñanza de la matemática a debate" convocado por la Subdirección Gral. de Perfeccionamiento del Profesorado. En la presentación de las actas se hace referencia a cierto agotamiento y a la sensación que algunos tenían de haber tocado techo, después de múltiples encuentros locales y de celebradas tres JAEM, en las posi-

bilidades de intercambio y enriquecimiento mutuos, para afirmar a continuación que el Simposio constituyó una forma de buscar otras alternativas a esta situación. Yo más bien creo que al Simposio se fue a presentar las alternativas y algunas otras cuestiones que quedaron entre bambalinas. No debemos olvidarnos que en ese año, todavía no se había decidido cómo iban a quedar configurados los ciclos educativos en la Reforma, no está de más recordar que por aquel tiempo la experimentación se llevaba a cabo separadamente en EGB y en Medias.

Pues bien, el grupo Cero de Valencia da un golpe de mano y presenta un proyecto que define todo un ciclo educativo[6].

En primer lugar toda una declaración de intenciones: *"el centro de gravedad de la enseñanza de las matemáticas ha de estar más en el alumno que en la materia"*.

Para continuar con toda una definición de lo que significa para el grupo la enseñanza y el aprendizaje.

**Aprender y enseñar:** *aprender tiene que ver con construir, es decir dotar de significado; enseñar tiene que ver con activar funcionamientos, activar capacidades.*

La metodología por la que optan es la del *conflicto cognitivo*, ampliamente difundida y promocionada por los trabajos del Shell Centre de la Universidad de Nottingham en Inglaterra, a la que ellos denominan *"Diagnostic Teaching"*.

Esta toma de postura les lleva de forma coherente a plantear los objetivos generales de la educación matemática no sólo a corto sino a largo plazo, con el énfasis puesto en el desarrollo de actitudes personales:

**A largo plazo:** *"El hecho de desplazar de la materia al alumno el centro de gravedad en la enseñanza de las matemáticas significa activar de manera expresa el desarrollo de actitudes personales ..."*

Una vez que han establecido el marco general pasan a abordar la parte más espinosa de todo curriculum.

**Los contenidos:** cuatro categorías: Hechos, Algoritmos y técnicas, Estructuras conceptuales y Estrategias Generales.

Esta última categorización tomada del *informe sobre la investigación*[7], que Bell y otros prepararon como requerimiento de la comisión que daría posteriormente origen al famoso informe Cockcroft[8].

Como se ve no se presenta una lista de conceptos matemáticos como cabría esperar. Esa categorización se trae sobre la mesa para apoyar la metodología, anteriormente

las actas y cuyo título era *"Mathematics promotes (improves) the mind"*, pero con una condición enigmática, *"la matemáticas ayudan a desarrollar la mente, siempre y cuando se enseñen y se aprendan de forma apropiada"*, para seguir con una pregunta: *"¿Qué puede hacer el maestro de matemáticas para que su enseñanza mejore la mente de sus alumnos?"* y terminar con una lamentación, *"... éste debería ser un tema que merece la pena discutir en este congreso. Pero ya es demasiado tarde, debería haberse propuesto meses antes. Por lo tanto lo propongo para el próximo. Espero que entre la audiencia haya alguien que piense sobre ello, lo recuerde y lo proponga para el próximo congreso. Tengo algunas ideas y, si alguien está interesado, podríamos discutirlos privadamente"*.

La lectura de esta nota en las actas del congreso de Berkeley me recordó, no sé muy bien por qué, la nota que Fermat dejó sobre su famoso teorema en el margen estrecho, malditamente estrecho, de un ejemplar de la aritmética de Diofanto de Alejandría.

No sólo se trata de enseñar bien, también deben aprenderse bien. No sólo cuenta la calidad del producto y las aptitudes del maestro, sino algo mucho más difícil y sutil, el buen aprendizaje. Sin embargo en la llamada de Polya hay algo que puede pasar desapercibido en una primera lectura, *mejorar la mente de los alumnos*. La mente en sentido amplio, no sólo las capacidades matemáticas. Polya además lanza un reto, qué puede hacer un profesor de matemáticas para conseguir ese objetivo. Hay un desplazamiento, respecto de qué es importante en la educación matemática, desde la propia matemática a algo no muy definido como es la mejora de la capacidad mental de los alumnos a través de la enseñanza de la matemática.

El segundo invitado de honor a una conferencia plenaria es H. Freudenthal[4]. El título *"Major Problems of Mathematics Education"*. Así comenzó H. Freudenthal su intervención: *"Perdonadme, no fui yo quién eligió este tema, aunque cuando se me propuso, experimenté un gran reto. Un reto, de verdad, pero para ser sinceros no como para emular a D. Hilbert, quién anunció sus famosos 23 problemas de matemáticas en el congreso internacional de matemáticas celebrado en París en 1900, que tanto influyeron el desarrollo y curso de las investigaciones matemáticas a lo largo de este siglo..."*

Para a continuación rechazar el camino seguido por Hilbert y considerar como su centro de interés los problemas que surgen en la educación matemática como una actividad social y no sólo como campo de investigación educativa. Creo que es importante y clarificadora esta toma de postura de Freudenthal, pues a continuación entra de lleno en el problema que considera, no más importante, pero sí más urgente: *Lo que es un problema es cómo formularlo correc-*

*tamente y sin errores... Why can Johnny not do arithmetic?*, parodiando el título de un famoso libro de M. Kline que aquí fue traducido como *El Fracaso de la Matemática Moderna*, para preguntarse si suena sexista tal cuestión y si no sonará más sexista aún si la formula como *Why can Mary not do arithmetic?*, pues esta última formulación sugeriría que las niñas son mucho peores que los niños en aritmética. Por último Freudenthal reformula la pregunta de forma más concreta *Why can Jennifer not do arithmetic?*, Jennifer no es un ser abstracto, es una alumna que a los ocho años tenía graves fallos en aritmética y que habían desaparecido a la edad de once años, después de una atención particularizada.

En contra del planteamiento general que encierra la pregunta *Why can Johnny not do arithmetic?* Freudenthal opta por un enfoque particular, así, la pregunta *Why can Jennifer not do arithmetic?* tiende a plantear un problema particular, individual, que permita abordar el problema personal que Jennifer tiene con la aritmética y sobre todo a profundizar en qué aspectos del aprendizaje de Jennifer la han conducido al fracaso.

Tanto Polya como Freudenthal sitúan el centro de atención sobre el aprendizaje, el primero solicitando de los profesores un compromiso con el aprendizaje de sus alumnos hacia la adquisición y mejora de las capacidades intelectuales en el sentido más amplio; el segundo en concretar, particularizar los problemas derivados de la enseñanza y en investigar los aprendizajes individuales para dar posibles soluciones a los aparentes fracasos, y obtener ejemplos paradigmáticos de diagnóstico y prescripción de los mismos. Freudenthal hace una llamada a la conciencia de todos los profesores e investigadores para que estos ejemplos se registren y se transmitan, de tal forma que unos puedan aprender de los otros y se gestione de forma efectiva el conocimiento en educación matemática.

Por lo que respecta a las habilidades básicas ya había en marcha varios proyectos y equipos de investigadores trabajando en este ámbito en la enseñanza primaria o básica. Durante la década de los ochenta y lo que va de los noventa se han publicado informes y artículos al respecto, sin embargo, los profesores de medias seguimos año tras año lamentándonos de lo mal que llegan nuestros alumnos al instituto.

Y llega el año triunfal de 1982... "EL CAMBIO"... tan esperado...

En Octubre de 1983 comienza la mal llamada "experimentación" de la Reforma con la puesta en marcha del Bachillerato Experimental. En un principio, la idea es bien acogida por numerosos grupos de profesores. Construir un currículum desde la base, desde la práctica diaria del aula, dando

## EVOLUCIÓN DE LAS/OS ALUMNAS/OS Y SU RELACIÓN TANTO CON EL SABER MATEMÁTICO COMO CON LOS PROFES

**Luis Pérez Bernal**

*I.B. Emilio Prados. Málaga*

Con seguridad, el apartado que se me ha encargado es el más difícil de los tres, ya que en él el papel del profesor es el de observador, más o menos atento. Por tanto, lo que sigue es mi opinión, subjetiva por supuesto, indesligable de mi propia evolución a lo largo de estos años y del alumnado con el que he compartido las aulas en diversos Institutos de Enseñanza Media y Bachillerato. A lo sumo, podrá gozar de mayor consenso en la medida en que sea capaz de reflejar opiniones de algunos de esos alumnos y de mis compañeras y compañeros con los que he conversado larga y asiduamente, no sé si profundamente, sobre nuestros alumnos.

El único consuelo es que cualquiera que lo intentase tendría parecidos condicionamientos. Soy plenamente consciente de la injusticia que supone cualquier generalización y de que mi «ambiente» es bastante minoritario, con lo que el sesgo ideológico aflorará por todos lados. Hay dos circunstancias agravantes en la generalización:

- Salvo por la intensidad con que se manifiestan, los comportamientos individuales se mantienen a lo largo de esos años (aunque la memoria traicione, siempre ha habido pasotas, interesados, ...) y la evolución se referirá a los comportamientos colectivos;
- No son homologables las actitudes a edades menores (más fáciles de influenciar) que a los 16-18 años (prácticamente inamovibles).

En el tema propuesto hay demasiadas personas implicadas, con sus «circunstancias» y sus sentimientos, con sus caracteres y sus ilusiones. Siempre habrá:

- profesores que comuniquen mejor con los alumnos
- alumnos entusiasmados con las matemáticas, o con sus profesores, o con ambos.
- alumnos marginados por cualquier metodología
- problemas de convivencia en las aulas
- ambientes más o menos favorables para el aprendizaje

Y dudo mucho que llegue a concretar algunos aspectos en las matemáticas y sus profesores. A mi entender, es preciso contemplar una serie de variables sociológicas (número,

nivel sociocultural, expectativas socio-laborales, valores sociales y educativos, ...) y otras que determinan la «política de aula» (solidaridad, interés, trabajo, aceptación de normas, ...).

En pocas etapas, aunque sea pecando de esquematismo, puede resumirse esta evolución:

0. Un alumnado, todavía minoritario, procedente de las clases menos desfavorecidas, consciente en cierta medida del privilegio de acceder a la enseñanza, relativamente homogéneo (más en las actitudes que en las capacidades), con valores sociales asumidos desde la familia (orden, puntualidad, respeto, autoridad, ...).

Las relaciones en el aula son un trasunto de las relaciones familiares y en ellas se asume obedientemente lo que dicta la autoridad. En matemáticas, mucho más que en otras materias, la «verdad» está dictada y asumir y repetir el esquema propuesto es la tarea fundamental. Hay una identificación casi absoluta entre el «se me dan» y el «me gustan», generalmente muy influenciada por la capacidad operativa de los alumnos. El «alumno bueno» es el que mejor imita al profesor que a su vez siente una paternidad intelectual hacia él.

1. A este alumno, entre asombrado y fascinado, (algunos profesores) le ofrecen dos novedades importantes: un acercamiento personal (no necesariamente coincidente con el tuteo) y una participación activa en su aprendizaje de las matemáticas. La opinión del alumno empieza a ser importante y en la medida en que esto es así, los lazos afectivos se estrechan. Sería absurdo decir que se acabaron los traumas con las matemáticas, pero sí es cierto que se humanizaron más las clases, que se recababa y se encontraba una colaboración siempre necesaria.

El sueño de una tarea común hace mucho más transitable el trabajo en el aula y se asume en general un generoso esfuerzo por aprender. Se tiene fe en el proyecto y la pasión y la ilusión se apoderan del ámbito escolar (nos queremos). No hay apenas presión con las calificaciones ya que en su



señalada, y se utiliza como argumento principal para apoyar una enseñanza basada en la resolución de problemas y en el planteamiento de investigaciones. Señalándose que *"lo esencial de una investigación es que el alumno ha de hacerse preguntas que determinarán el camino que va a seguir en su trabajo y ha de tomar decisiones que configuren las posibilidades que estas preguntas abran"*.

El marco para el curriculum de la Enseñanza Secundaria Obligatoria está empezado. A destacar la importante influencia de la literatura inglesa en educación sobre este diseño.

Una publicación posterior del grupo[9] recogió de forma más amplia esta filosofía y se completaba con multitud de actividades para llevarla a cabo. Sinceramente pienso que la influencia posterior de este documento, aún sin evaluar, ha sido bastante grande. Incluso me atrevería a decir que se adelantaron al Ministerio, por lo menos en publicación por escrito, de la definición de la etapa que hoy conocemos como Secundaria Obligatoria tanto en la filosofía de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como en la definición del segmento de edad que comprendería.

Para finalizar, pienso que desde la claridad del objetivo de enseñar matemáticas, modernas o de las de siempre, se ha llegado a plantear como prioritario el desarrollo de capaci-

dades y el atender más el aprendizaje de los alumnos, quedando la matemática relegada a un segundo plano. Quizás esta conclusión sea la que llena de desasosiego a muchos profesores de medias. Muchas de las propuestas actuales de la LOGSE derivan de la investigación en didáctica llevada a cabo a nivel internacional y fundamentalmente desde el ámbito anglosajón. También creo que los hallazgos de la investigación no pueden llegar directamente al aula, su aplicación no es inmediata y ni siquiera se puede pensar en tal aplicación a corto plazo. Quedan muchos hallazgos de la investigación por articular de forma coherente en un curriculum, sobre todo en el segmento educativo terminal de la enseñanza media. No sólo con un documento y con recomendaciones se puede llevar a cabo una reforma. Hay todo un espacio vacío entre los investigadores puros y los profesores, ¿ocupará alguien ese espacio?

El balance sobre la contribución de los grupos y sociedades a la innovación en didáctica de las matemáticas después de estas dos décadas transcurridas desde el ya lejano 1975 está por hacer. Repito, que a mi modo de ver, la mayor contribución realizada ha sido el transmitir la información que a nivel internacional se ha desarrollado sobre el campo de la didáctica de las matemáticas. En este sentido, los grupos y sociedades ocuparon un lugar y asumieron una función que ninguna instancia oficial, Universidad o Ministerio de Educación, cumplían ■

## BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Hilton, P. (1976). Education in Mathematics and Science Today: The Spread of False Dichotomies. En: *Proceedings of ICME 3*. Karlsruhe.
- [2]. S.A.E.M. (1991). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Traducción de "*Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics*" NCTM, 1989.
- [3]. Polya, G. (1983). Mathematics Improves the Mind. En Zweng, M et al (editores). *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*. Birkhäuser.
- [4]. Freudenthal, H. (1983). Major Problems of Mathematics Education. En Zweng, M et al (editores). *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*. Birkhäuser.
- [5]. Hacia la Reforma. I. Documentos. Dirección Gral de EEMM. Servicio de publicaciones. M.E.C. 1985.
- [6]. Carrillo, María Elisa (1984). "Ensayos para un aprendizaje con objetivos a largo plazo" En *La enseñanza de la matemática a debate*. MEC.
- [7]. Bell, A.W., Costello, J. & Küchermann, D.E. (1983). A Review of Research in Mathematical Education: Part A, Research on Learning and Teaching. NFER-NELSON.
- [8]. Informe Cockcroft (1985). Las Matemáticas sí cuenta. Servicio de Publicaciones del M.E.C.
- [9]. Grupo Cero (1984). De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas. Valencia. Edición de los autores.

## Mesa Redonda

DE 7 EN 7

Coordina:

**Florencio Villarroya**

Participantes:

**Marta Berini, Inmaculada Fuentes,  
Juan Antonio García Cruz y Luis Pérez Bernal**

### CUESTIONARIO PARA PARTICIPANTES

#### **1975. SI ESTIREM TOTS ELLA CAURÁ... (L. Llach)**

1. Militancia e ideología políticas. Una sociedad en "transición".
2. Matemáticas para todos:
  - a. Matemáticas útiles, divertidas. No a las estructuras.
  - b. No a la evaluación coercitiva/clasificadora.
  - c. Falta de un "aparato" teórico.
3. Alumnado solidario con el profesorado innovador.

#### **1982. NO ÉS AIXÒ, COMPANYYS, NO ES AIXÒ... (L. Llach)**

1. Pérdida de la ideología (todos de izquierdas, no hay enemigo en el poder).
2. Absorción por las instituciones (CEP's, Innovación Educativa,...) de muchos innovadores, y de sus innovaciones,...
3. El alumnado es ignorado.

#### **1989. LA CIENCIA ES UNA ESTRATEGIA... ES UNA FORMA DE ATAR LA VERDAD... (L.E. Aute)**

1. Desencanto político
  - a. Internacional (Caída de los países socialistas, ...)
  - b. Europeo (Afloración de la corrupción en los países de gobierno social-demócrata)
  - c. Nacional
  - d. Empieza a instalarse la Didáctica de las Matemáticas en las instituciones asépticas: Universidad.
  - e. Se buscan modelos de evaluación.
  - f. Se determina un currículo "inspirado" en la innovación.
  - g. La innovación "desaparece".
2. El alumnado es diferente.
  - a. ¿Es obligatoria la enseñanza? "A ver "profe", dime lo que hay que aprender, rápido, que tengo otras cosas más importantes que hacer, dime ya el resultado, no perdamos el tiempo construyendo" ....
  - b. ¿Es posible motivar y maravillar las 30 horas lectivas semanales?

#### **1996. EL PENSAMIENTO NO PUEDE TOMAR ASIENTO... (L.E. Aute) ■**

mayor parte son positivas; la valoración del trabajo diario y los planteamientos a largo plazo compensan en gran medida la mejor o peor asimilación de contenidos (en los cursos superiores es distinto).

Aunque las actividades sean individuales o en pequeño grupo, la concepción del aula es global y los valores colectivos se imponen.

En cualquier caso, existe una razonable alternativa laboral para aquellas personas que se marginan o son marginadas por el sistema educativo; la opción de «dejar de estudiar» se contempla como viable.

En este ambiente favorable las diversas opciones metodológicas potencian nuevas actitudes; el centro de interés está en «cómo aprender mejor». En la clase se habla, se discute, se pregunta, ... en definitiva se participa.

2. Un alumnado, progresivamente mayoritario, de extracción social menos homogénea, sin valores colectivos definidos, que es consumidor de la enseñanza. Hay en él una diversidad absoluta de intereses y actitudes, y está marcado por un exceso de «determinismos»: «¿para qué me sirve?», «yo voy a estudiar ...», «yo no quiero estar aquí», ...

La falta de valores colectivos provoca conflictos entre los alumnos; la insolidaridad aflora y la convivencia es menos fácil. Tampoco son ajenas a esta situación las nuevas relaciones establecidas en la familia, más dialogantes pero menos definidas en lo que a transmisión de valores se refiere. Por ejemplo, se asume con naturalidad el fracaso escolar y ante la ausencia de otras expectativas, aumenta considerablemente el número de repetidores en el aula, lo que distorsiona bastante al colectivo.

La actitud general es menos activa, la participación se mediatiza al no existir un clima de confianza y se reclama mayor protagonismo del profesor, tanto para imponer una disciplina como para explicar «qué es lo que hay que hacer».

Al menos dos grupos bien diferenciados en el aula; los marginados del sistema: (sobre todo incapaces de esfuerzo, concentración, atención, ...) que niegan la palabra más allá del «yo no me entero de nada» y los dispuestos a esforzarse por intentarlo. Estos grupos han existido siempre, pero el peso de los primeros va aumentando año tras año; quizás por eso unos pocos necesariamente intransigentes con la situación —ya que se sienten agredidos por ella— plantean problemas de convivencia que distraen la atención general de los problemas de aprendizaje. Por tanto, hay un factor de

tensión nuevo que condiciona todo lo demás. Aún así, las conductas no son abiertamente beligerantes.

En esta situación, la importancia de lograr un buen ambiente centra la mayor parte de los esfuerzos del profesor. Ha de echar mano de todos sus recursos, más de los personales que de los metodológicos, para estimular el trabajo y la actividad en el aula.

Hay que pactar, y no siempre es fácil, con los disconformes para que respeten el trabajo de los demás. El aprovechamiento del tiempo en el aula es cada vez más reducido y ello exige a los alumnos (sobre todo a los menos capaces) un notable esfuerzo suplementario fuera del horario escolar.

Las actividades y propuestas de aula son aceptadas por un número cada vez menor de alumnos; hay bastante gente descolgada del proceso. Se respira un cierto aire de impotencia; las relaciones son más distantes con el profesor, faltan intereses comunes y la incompreensión aflora. Solamente una minoría encuentra satisfacción.

3. Un alumnado, que engloba a toda la ciudadanía de la misma edad, obligado a utilizar un servicio público, acostumbrado a oír hablar de derechos y poco o casi nada de deberes. Un reduccionismo ambiental que impide entrar en matices y una obsesión generalizada por los resultados y la velocidad con que se adquieren.

La disfunción entre lo pretendido por el sistema y los muy diversos intereses de los alumnos es muy grande; ello hace mucho más difícil las relaciones en el aula. Algunos alumnos, marginados en grado superlativo, adoptan actitudes violentas; otros esperan resignadamente a cumplir los 16 años; y otros mantienen algunas expectativas dentro del ámbito escolar. La comunicación es difícil entre los propios alumnos y tampoco es precisamente fluida con el profesor.

Ya es absolutamente imposible concebir el aula de forma global y el profesor recurre a la organización de múltiples tareas en el aula como única respuesta viable a la situación. Buscando esa individualización de los aprendizajes se difuminan los aspectos colectivos y los alumnos cada vez son menos compañeros.

La etapas no son necesariamente cronológicas y se solapan e incluso cohabitan en distintos grupos de alumnos o con distintos profesores, en ámbitos rurales o urbanos; algunas no pertenecen a mi experiencia (la última, en concreto) y la cuento por referencias también subjetivas.

Probablemente lo más sensato hubiese sido no decir nada, pero ya está dicho ■

el profesorado que además ve como esta innovación viene precedida de un vocabulario complicado, necesitará de un gran esfuerzo por parte del profesorado para adecuar los materiales didácticos a la diversidad del alumnado, habrá de modificar sus métodos de evaluación y además elaborar un Proyecto Curricular en el que la secuenciación y la distribución de los contenidos a lo largo de los ciclos recaerán sobre él.

Se empieza a experimentar el nuevo modelo educativo y aparecen opiniones críticas por su precipitación e improvisación, por la falta de materiales didácticos adecuados, por la insuficiente formación del profesorado, y porque se cree que no se realiza el suficiente esfuerzo presupuestario, lo que produce un desencanto entre parte del profesorado.

### 1996. EL PENSAMIENTO NO PUEDE TOMAR ASIENTO... (L.E AUTE)

A propósito del desencanto y de la aparición de algunas críticas a las decisiones tomadas por los demás (Instituciones, colectivos, individuos,...) en materia educativa acabaré con

unas palabras de Rosa Montero extraídas de su artículo *BANDERAS ROTAS* aparecido en el dominical de *El País* del domingo 4 de junio de 1995.

"Pero las miserias de los demás no borran ni compensan las miserias propias. Quiero decir que sin duda hay algo terrible en la autocomplacencia de los triunfadores, en esa paralizante embriaguez que les deja turulatos ante su propia gloria e inútiles para cualquier aprendizaje y evolución. Pero también me espanta la autocomplacencia de los perdedores: ese sentirse a salvo de la responsabilidad de lo que uno fue. La vida está llena de pequeños compromisos y de decisiones; cada día escogemos decenas de opciones y nos vamos tallando, por así decirlo, en lo que somos. No se puede alcanzar la edad adulta si haber sido artífices de nuestra propia historia (...).

¿A qué viene esa sensación de fin de la historia? La existencia es fluir, aprender, mudar. Reconocer las propias responsabilidades y los propios errores no implica que estés vencido ni acabado, sino, por el contrario, que eres humano y más sabio. Y que estás vivo" ■

Texto de **Luis Pérez Bernal**  
I.B. Emilio Prados. Málaga

### LA EVOLUCIÓN DEL LENGUAJE Y DEL CONTENIDO DE LA «INNOVACIÓN». ¿RESPONDE A LOS INTERESES DE LOS PROFESORES?

Cuando se crearon las Sociedades de Profesores pretendían acabar con una situación existente, la de la Real Sociedad Matemática Española, que claramente había marginado a la mayoría del profesorado de Matemáticas, dedicándose de forma casi exclusiva a los matemáticos profesionales.

Recogían una inquietud latente en el profesorado de reflexión e intercambio de ideas sobre su trabajo; además existían unos pocos grupos con materiales que contenían propuestas alternativas a la enseñanza tradicional. El esfuerzo organizativo, la creación de cauces (Jornadas y Revistas) que permitiesen la comunicación entre los profesores, ha sido intenso a lo largo de estos años.

En los inicios, ante cualquier experiencia presentada, el aula era la referencia inmediata para emitir un juicio, con un componente de ideología inevitable: «qué interesante, voy a probarlo», «podría modificarse con...», «qué barbaridad, cómo es posible que haya gente así, ...», «qué estupendo, si yo

podiera hacerlo,...»,... Casi todo lo que se decía hablaba de alumnos de carne y hueso y sugería ideas para la clase.

La difusión todavía era minoritaria, entre gente especialmente interesada; empezábamos a matizar entre diversas alternativas, a seleccionar de acuerdo con nuestros gustos y a elaborar pequeñas aportaciones que iban aumentando nuestros «recursos y materiales» para el aula.

Sabíamos que no era sólo eso (que había un soporte ideológico) ni podía reducirse solamente a eso, a un intercambio de experiencias, el diseño de actividades, la organización del aula, a la modificación de las actitudes los alumnos,... Éramos conscientes de que nuestra situación no era homologable a la del profesorado de otros países; faltaban, por ejemplo, las aportaciones de la psicología, las teorías del conocimiento, los modelos de aprendizaje,...

En estos años, como en otros aspectos sociales, se ha alcanzado la homologación "formal" con los países de nuestro entorno en lo que a Didáctica se refiere.

Últimamente, ignoro lo que pasará en estas Jornadas, resulta difícil ver "alumnos como los de uno" debajo de tanta erudición: «de qué coño está hablando», «qué tiene ésto que ver con mis alumnos...», «la entrevista, cómo entrevistó yo a 160 alumnos...», «quizás me he equivo-

Texto de **Marta Berini**

*IB. Joanot Martorell*

Esplugues de Llobregat, Barcelona

### **1975. SI ESTIREM TOTS ELLA CAURÁ... (LLUIS LLACH)**

Una vez acabado el período de la dictadura y a lo largo de los años transcurridos entre 1975 y 1982, salieron a la luz profesores y profesoras implicados en procesos innovadores en Didáctica (siempre han existido personas implicadas en procesos de innovación educativa pero quizás eran casos aislados) que generaron grupos estables de profesorado dedicados a aspectos específicos de Didáctica. En particular, respecto a la asignatura de Matemáticas las discusiones y reflexiones giraban en torno a qué Matemáticas hay que enseñar y de qué manera: Creo que había un consenso entre todos ellos en el sentido de que las Matemáticas habían de ser útiles, aplicadas a situaciones concretas y apoyadas posteriormente en un marco teórico. Esta situación obligaba en la mayoría de los casos a elaborar el material didáctico para trabajar en el aula, lo que dio lugar a la aparición de distintos materiales que tuvieron una difusión restringida en un primer momento. En las Escuelas de Verano, en las Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, en los Simposiums, etc. se difundieron estos materiales y se lograron intercambios de opiniones, de materiales y de proyectos que permitieron que una amplia capa de profesorado adquiriera un nuevo bagaje metodológico.

Respecto a la manera de trabajar en clase y a la evaluación las posturas no eran siempre coincidentes entre el profesorado: desde profesores y profesoras que pensaban que el alumnado sólo tenía que trabajar si tenía ganas o si veía la utilidad o la necesidad de lo que se trataba, a personas que creían que se había de forzar un poco al alumnado y no dejar que la inercia llevara a una relajación,... hasta los que continuaban pensando en las clases de Matemáticas habían de seguir siendo magistrales sin participación del alumnado pues continuaban viendo la asignatura como una ciencia teórica y abstracta sin tener en cuenta las dificultades que conlleva su estudio.

El momento político potenció la participación del alumnado en Claustros, discusiones, reflexiones, etc. en las que participaba parte del alumnado a pesar de que muchos de ellos no eran solidarios con esta posición y "pasaban olímpicamente" de todo el proceso. Creo que quizás hemos idealizado la época y su realidad y pensamos que en aquel momento todo era perfecto.

### **1982. NO ÉS AIXÓ, COMPANYS NO ÉS AIXÓ. (LLUIS LLACH)**

Mucha gente pensó que con la llegada de los socialistas al poder se iban a solucionar (y que lo harían según los ideales particulares de cada uno de nosotros) todos los problemas del país y en particular los de la Enseñanza y sufrieron un desencanto al comprobar que no era así. En este aspecto, como en tantos otros, también es válida la frase "contra Franco vivíamos mejor".

Creo que las instituciones hicieron un gran esfuerzo para potenciar la innovación didáctica pero no siempre en la línea que cada uno de nosotros pensaba. Se crearon los CEP's, y en ellos se impartieron cursos, se gestaron muchos proyectos educativos y se potenció la innovación en educación, a pesar de que no todo el profesorado veía clara su función ya fuera por su estructura o debido al hecho de que algunos de los cursos no les resolvían sus problemas en clase, quizás por ser demasiado teóricos y poco experimentados.

Respecto al alumnado, que ya no había vivido en la época de la Dictadura, nos trataba a veces de "abuelitos explicando batallitas" cuando comentábamos la situación anterior, cómo pensábamos y cuánto nos había costado a nosotros por aquel entonces el llevar a cabo un cambio en la didáctica de las Matemáticas en nuestras clases. Creo que la institución escolar, en general, seguía teniendo el mismo significado para el alumnado que anteriormente, pues no creo que supiéramos explicar suficientemente el cambio realizado por algunos de nosotros.

### **1989. LA CIENCIA ES UNA ESTRATEGIA,... ES UNA FORMA DE ATAR LA VERDAD,... (L.E. AUTE)**

El desencanto general aparecido en la sociedad a partir de los 90 también asoma en el colectivo de enseñantes, pero quizás no tanto por el momento político sino por unas causas específicas: el saber y el conocimiento no son valorados por la sociedad, hay un gran fracaso escolar y gran parte del profesorado cree que ha de haber una reforma de la enseñanza; algunas personas muy sobresalientes en la Jet Set se enriquecen (aún más) de forma vertiginosa y sin esfuerzo y existe una crisis económica que hace que nuestro alumnado vea un porvenir bastante negro en lo que respecta a su futuro profesional, y además, se empieza a gestar una Reforma Educativa que muchos y muchas enseñantes no la ven como aquella que esperaban sino la que ofrece una forma de "bajar el nivel" de aquellos alumnos y alumnas que habrían de estudiar el BUP y COU y que a partir de un cierto momento no todos tendrán que estudiar "aquellos contenidos tan importantes como el concepto de límite, las derivadas, la descomposición de polinomios, la combinatoria,...". Esto provoca un cierto desasosiego entre

## Sesiones Especiales

### TÉCNICAS MODERNAS PARA EL ANÁLISIS DE DATOS ESTADÍSTICOS

**José Ramón Vizmanos**  
*Editorial SM*

#### A modo de presentación

**L** El análisis de datos ha cambiado muchísimo en estos últimos años con la inclusión de ciertas técnicas que, en general, son muy sencillas y poco conocidas, por ejemplo los diagramas de tallos y hojas, o los diagramas de cajas y bigotes, estos últimos ya incorporados en algunas calculadoras gráficas. La recta de Tukey que figura en el currículo de la E.S.O. para Andalucía, permite ajustar una recta a una nube de puntos en algunos casos en los que el ajuste mínimo-cuadrático produce resultados no muy buenos.

Por ello, me ha parecido que podría tener cierto interés el conocer algunas de estas técnicas desarrolladas por el matemático americano John Wilder Tukey.

#### ¿Quién es Tukey?

John Wilder Tukey nació el 16 de junio de 1915 en New Bedford, Massachusetts. Después de licenciarse y hacer un master en Química por la Universidad de Brown en 1937, participó en el programa de matemáticas de la Universidad de Princeton donde recibió el master en 1938 y el doctorado en 1939.

Después de su graduación, fue nombrado instructor de Matemáticas de Princeton; 10 años más tarde llegó a ser catedrático. En 1965 la Universidad de Princeton creó el departamento de estadística, y Tukey fue su primer director. Además de su posición en Princeton fue miembro de la Dirección Técnica de los Laboratorios de ATT & Bell desde

1945 hasta su jubilación en 1985 como Director Ejecutivo de Investigación en la División de Información Científica.

Tukey está considerado una de las personas que más ha influido en el análisis exploratorio de datos, habiendo sido el creador de diversas técnicas, tales como los diagramas de tallos y hojas, los diagramas de cajas y bigotes, etc. También ha hecho importantes aportaciones a la teoría de la estimación y al análisis de las series cronológicas. Tukey es autor de numerosos libros y de más de 350 artículos importantes en matemáticas y estadística. A él también se debe el término bit, contracción de las palabras **b**inary **d**igit.

La participación de Tukey tanto en educación como en servicios de asesoramiento técnico al gobierno ha sido imponente. Fue nombrado miembro del Comité Asesor Científico del Presidente Eisenhower en 1965; ayudó al desarrollo del Programa Nacional para el Progreso de la Educación; y fue un miembro destacado de la Oficina del Censo en 1990.

A lo largo de su vida de trabajo ha conseguido todo tipo de honores, tan sólo mencionaré las más importantes, recibió la Medalla Nacional de la Ciencia, la Medalla de Honor de IEEE, la Medalla James Madison de la Universidad de Princeton y miembro extranjero en la Royal Society de Londres, etc.

Tukey hasta hace muy poco ha seguido desempeñando el cargo de Profesor Emérito de Estadística, Profesor Emérito de Ciencia, y Alto Investigador Estadístico en la Universidad de Princeton ■

cado de congreso o de revista,...», son comentarios habituales.

Hay un exceso de componentes teóricos y responde a patrones excesivamente asépticos: descripción conceptualizada de la investigación, precisión de los términos utilizados, resultados estadísticos.

No seré yo quien diga que no es necesario, pero sí me parece que es un aspecto complementario de las inquietudes y necesidades de la mayoría del profesorado.

Los cambios en el sistema educativo han forzado a todo el profesorado a enfrentarse a situaciones nuevas; pienso que su necesidad de «recursos y materiales» para el aula, es mucho mayor que hace unos años.

Cuando el lenguaje se normaliza, puede actuar como elemento marginador. Si el lenguaje de la innovación se llena

de tecnicismos, el profesorado se retraerá de notificar sus experiencias que le parecerán insignificantes.

Si ese lenguaje es inevitable, hagan quienes lo utilizan un importante esfuerzo de popularización hacia los demás. Si sus aportaciones a la innovación no influyen en las decisiones que se toman en las aulas, habrá que concluir que se trata de materias distintas y para públicos distintos.

Promocionemos y animemos al profesorado a inundar con sus experiencias de aula los foros de comunicación que las Sociedades y otras instituciones proporcionan. Evitemos que pueda producirse una nueva marginación del profesorado.

Esta intervención no pretende polemizar sobre las causas, aunque no me importaría hacerlo, sino suscitar opiniones que procuren remedios ■



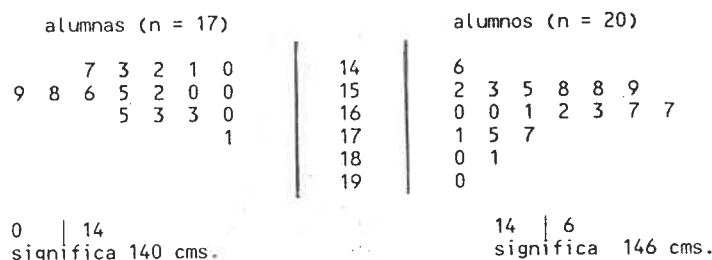
## ALGO MÁS SOBRE DIAGRAMAS DE TALLOS Y HOJAS

Si se desea comparar dos series de datos que tengan los tallos comunes se pueden situar enfrentados del siguiente modo:

*Las tallas, en centímetros, de un grupo de 20 alumnos de un curso son las siguientes: 146, 152, 160, 172, 180, 175, 181, 160, 167, 190, 163, 153, 158, 162, 159, 155, 177, 167, 161, 158.*

*Las tallas, en centímetros de un grupo de 17 alumnas de un curso son las siguientes: 147, 140, 155, 150, 142, 165, 159, 152, 156, 163, 171, 160, 163, 150, 158, 141, 143.*

*Representar el correspondiente diagrama de tallos y hojas de ambas distribuciones.*



La simple visión del gráfico nos da una idea de como se comportan ambas distribuciones, además es posible comparar algunos parámetros, como las medianas, los cuartiles, etc. sin necesidad de realizar pesados cálculos, aprovechando el hecho de que los datos se encuentran ordenados.

HT6-0 L 1945  
J W TUKEY



Esta foto de Tukey a sus 30 años apareció en el *Bell Labs News* en 1985, con el siguiente pie: "¿Puede Vd. identificar a este hombre?"



En esta foto aparece Tukey junto a su amigo y colaborador de toda la vida Frederick Mosteller (1916- ) y la esposa de este, Virginia Girloy Mosteller.

## TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS

**Una técnica de recogida de datos: los diagramas de tallos y hojas****EL PROBLEMA**

Las puntuaciones obtenidas por 40 alumnos en un test han sido las siguientes:

41, 53, 72, 62, 81, 93, 81, 74, 56, 62, 45, 47, 62, 58, 88, 76, 77, 63, 43, 56,  
76, 63, 78, 73, 65, 66, 91, 82, 61, 72, 36, 50, 91, 32, 60, 80, 51, 68, 61, 71

Hacer el recuento ordenado de los datos.

**RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA**

Una nueva técnica de recuento de datos es mediante un **diagrama de tallos y hojas**, que se construye del siguiente modo:

**Paso 1.º**

Se observa entre qué valores están las cifras de las decenas de todos los datos y se tiene que van de 3 a 9:

| Tallo |
|-------|
| 3     |
| 4     |
| 5     |
| 6     |
| 7     |
| 8     |
| 9     |

**Paso 2.º**

Se va leyendo uno a uno cada dato, anotando la cifra de las unidades de cada uno en la fila correspondiente:

Primer dato 41

Segundo dato 53

| Tallo | Hojas | Tallo | Hojas |
|-------|-------|-------|-------|
| 3     |       | 3     |       |
| 4     | 1     | 4     | 1     |
| 5     |       | 5     | 3     |
| 6     |       | 6     |       |
| 7     |       | 7     |       |
| 8     |       | 8     |       |
| 9     |       | 9     |       |

Y así se continúa con los restantes datos.

**Paso 3.º**

Cuando todos los datos han sido anotados se obtiene una tabla como ésta:

| Tallo | Hojas                 |
|-------|-----------------------|
| 3     | 6 2                   |
| 4     | 1 5 7 3               |
| 5     | 3 6 8 6 0 1           |
| 6     | 2 2 2 3 3 5 6 1 0 8 1 |
| 7     | 2 4 6 7 6 8 3 2 1     |
| 8     | 1 1 8 2 0             |
| 9     | 3 1 1                 |

**Paso 4.º**

Se vuelve a escribir la tabla ordenando de menor a mayor las unidades dentro de cada fila:

| Tallo | Hojas                 |
|-------|-----------------------|
| 3     | 2 6                   |
| 4     | 1 3 5 7               |
| 5     | 0 1 3 6 6 8           |
| 6     | 0 1 1 2 2 2 3 3 5 6 8 |
| 7     | 1 2 2 3 4 6 6 7 8     |
| 8     | 0 1 1 2 8             |
| 9     | 1 1 3                 |

Esto es un diagrama de tallos y hojas.

Los diagramas de tallos y hojas son, en sí mismos, diagramas de frecuencias, pues si unimos los últimos números de cada fila obtenemos el polígono de frecuencias.

Podemos ver que hay 2 alumnos con puntuaciones entre 30 y 39, 4 alumnos con puntuaciones entre 40 y 49, y así sucesivamente. Hay más alumnos con puntuaciones entre 70 y 79 que entre 50 y 59.

La clase con mayor frecuencia es la que tiene extremos 60-69.

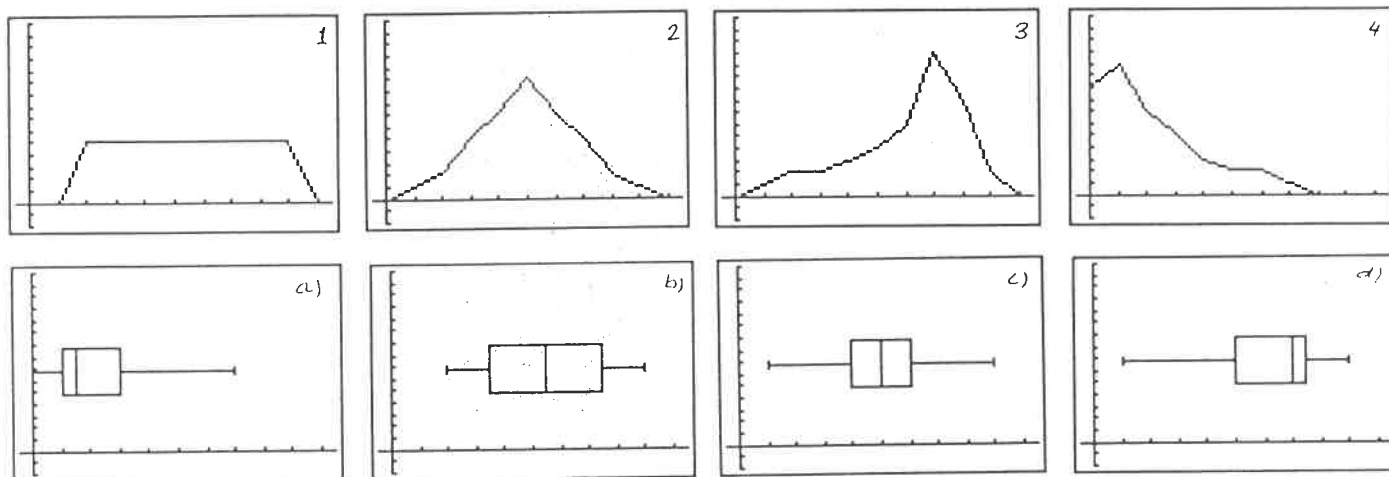
<sup>1</sup> Esta es una reproducción de la página 255 del libro MATEMATICAS 3º de E.S.O. de Ediciones SM. Autores: J.R.Vizmanos y M.Anzola.

## ALGO MAS SOBRE LOS DIAGRAMAS DE CAJAS Y BIGOTES

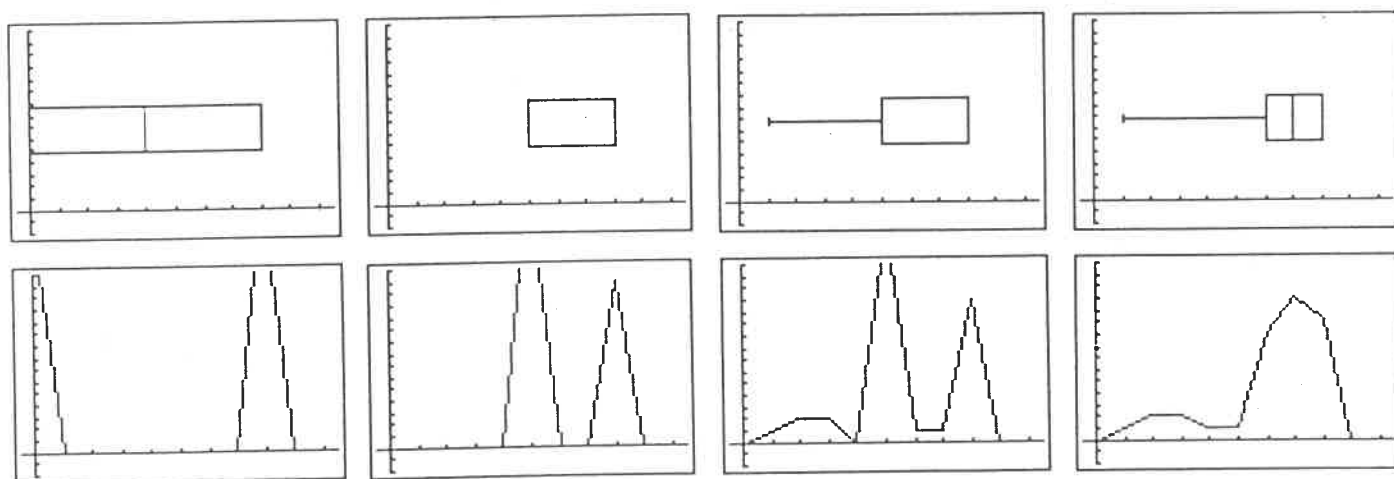
Las calificaciones dadas por 4 profesores a un grupo de 40 han sido las siguientes:

| Calificaciones  | 0 | 1  | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 |
|-----------------|---|----|---|---|---|----|---|----|---|---|----|
| Nº alum. Prof.A | - | -  | 5 | 5 | 5 | 5  | 5 | 5  | 5 | 5 | -  |
| Nº alum. Prof.B | - | 1  | 2 | 5 | 7 | 10 | 7 | 5  | 2 | 1 | -  |
| Nº alum. Prof.C | - | 1  | 2 | 2 | 3 | 4  | 6 | 12 | 8 | 2 | -  |
| Nº alum. Prof.D | 9 | 11 | 7 | 5 | 3 | 2  | 2 | 1  | - | - | -  |

A continuación se han representado los polígonos de frecuencias y los diagramas de cajas y bigotes de estas distribuciones. Indíquese la correspondencia entre unos y otros.



Por último representamos algunos diagramas de cajas y bigotes con alguna *patología* y debajo los polígonos de frecuencia asociados.



LOS DIAGRAMAS DE CAJAS Y BIGOTES<sup>2</sup>

Los **diagramas de cajas y bigotes** —también se llaman *boxplots* o *box and whiskers*— son representaciones gráficas de una distribución estadística unidimensional en las que se reflejan cinco parámetros: límite inferior, primer cuartil, mediana, tercer cuartil y límite superior. A partir de estos cinco parámetros se pueden obtener fácilmente otros dos parámetros: el rango y el rango intercuartílico. Además, también dan una medida de la simetría o asimetría de la distribución, del sesgo y de la dispersión.

Veamos un ejemplo.

Las calificaciones finales de una clase han sido las siguientes:

| Calificaciones | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|
| N.º de alumnos | 1 | 4 | 7 | 3 | 3 | 0 | 2 |

El límite inferior es:  $L_1 = 3$

El límite superior es:  $L_3 = 9$

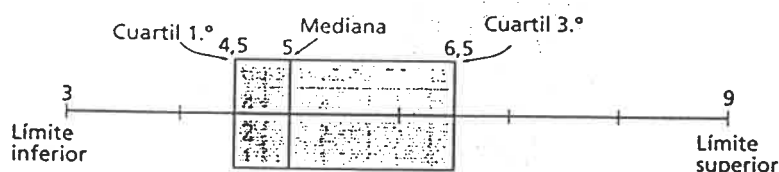
Si efectuásemos los cálculos obtendríamos que:

El cuartil primero es:  $Q_1 = 4,5$

La mediana es:  $M = 5$

El cuartil tercero es:  $Q_3 = 6,5$

Por tanto, el *diagrama de cajas y bigotes* será:



A la vista del diagrama de cajas y bigotes, se observa que:

1. El bigote de la izquierda es algo más corto que el bigote de la derecha, lo que indica que las calificaciones de la cuarta parte más baja de la clase están algo más concentradas que las calificaciones de la cuarta parte con calificaciones más altas.
2. También se observa que la parte izquierda de la caja, que corresponde a los alumnos que han obtenido calificaciones entre el 25 % y el 50 %, es menor que la de la derecha, lo que indica que las calificaciones de estos últimos alumnos están más dispersas.
3. Es fácil ver que el rango es:  $L_3 - L_1 = 9 - 3 = 6$   
Y que el rango intercuartílico es:  $Q_3 - Q_1 = 6,5 - 4,5 = 2$   
También se observa que la distribución es asimétrica y ligeramente sesgada hacia la derecha.

## ■ UTILIZA LA TECNOLOGÍA ACTUAL

- Hoy en día existen calculadoras gráficas de bolsillo que representan los diagramas de cajas y bigotes sólo con introducir los datos de la distribución.

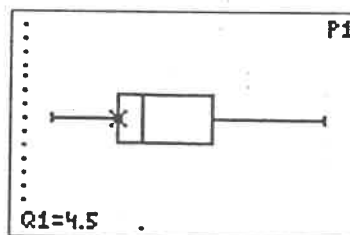


## CON LA CALCULADORA GRÁFICA

Introducimos los datos de la variable y la frecuencia absoluta en las listas  $L_1$  y  $L_2$ .

| L1      | L2 | L3 |
|---------|----|----|
| 3       | 1  |    |
| 4       | 4  |    |
| 5       | 7  |    |
| 6       | 3  |    |
| 7       | 3  |    |
| 8       | 0  |    |
| 9       | 2  |    |
| L1(1)=3 |    |    |

Algunas calculadoras gráficas permiten representar el diagrama de cajas y bigotes (*box and whiskers*) sólo con pulsar la opción deseada, y se obtiene:



Si recorremos con el cursor el diagrama obtenemos sucesivamente el límite inferior, el primer cuartil, la mediana, el tercer cuartil y el límite superior.

<sup>2</sup> Esta es una reproducción de la página 355 del nuevo libro ALGORITMO MATEMÁTICAS II DE COU de Ediciones SM. Autores: J.R. Vizmanos y M. Anzola.

## Sesiones Especiales

### ¿CÓMO IMPLICAR AL ALUMNADO EN SU PROCESO DE APRENDIZAJE?

**Marta Berini**

*I.B. Joanot Martorell. Esplugues de Llobregat. Barcelona*

**U**no de los objetivos fundamentales que ha de conseguir la Enseñanza Obligatoria es enseñar a cada estudiante a "aprender a aprender". Ahora bien, ¿cómo valorar la adquisición de este objetivo?, ¿qué estrategias se pueden seguir para poder reconocer los cambios realizados en esta línea?

Es bien sabido que, en general, la evaluación es la práctica pedagógica que motiva menos al profesorado y por otro lado, el alumnado la ve como la actividad más temida y la menos gratificante.

Por consiguiente, es importante considerar todos aquellos dispositivos pedagógicos que permiten adecuar los procesos de evaluación utilizados por el profesorado para comprobar cómo ha sido la evolución de cada alumno y alumna en su tarea de construir un sistema personal de aprendizaje (lo que le permitirá diseñar nuevas acciones didácticas) y cómo el alumnado ha ido adquiriendo la autonomía necesaria en su trabajo de forma que sea protagonista de su propio aprendizaje y no sólo un receptor pasivo de un saber elaborado por otras personas (C. LLadó, 1994) (lo que le permitirá al profesorado sentirse más "relajado" en el momento de realizar la evaluación).

Es necesario que el alumnado sea capaz de ser consciente de la evolución en su proceso de aprendizaje y para ello es necesario ver cómo mejoramos la gestión de nuestras clases para que el alumnado se implique más en su propio proceso de aprendizaje. Por lo tanto, conviene que analicemos el tipo de relación que se establece en clase entre nosotros y nuestro alumnado y procurar mejorarla en caso de que creamos que no es la más conveniente.

#### **Reflexionemos sobre las siguientes preguntas:**

##### **¿Qué es una actividad de evaluación?, ¿qué esperamos de ella?**

Es un proceso que consta de tres etapas:

- recogida de información, que puede ser instrumentada o no
- análisis de esta información y juicio sobre el resultado final
- toma de decisiones de acuerdo con el juicio emitido

##### **¿Cómo conseguir una evaluación que sea útil al profesorado, que gratifique al alumnado en su aprendizaje y que además oriente a ambos en el proceso (López 1991)?**

Hemos de plantearnos preguntas del tipo:

- ¿Por qué evaluar?
- ¿Para quién evaluar?
- ¿Evaluar para después hacer qué?

Sabemos que la evaluación de los aprendizajes presenta básicamente dos funciones:

- a) **una de carácter social** de selección y clasificación, pero también de orientación y promoción del alumnado y que pretende:
  - informar de la progresión de sus aprendizajes al propio estudiante y a sus familiares
  - determinar qué alumnos y alumnas han adquirido los conocimientos necesarios para que se les acredite la certificación correspondiente
- b) **otra de carácter pedagógico**, de regulación del proceso de enseñanza/aprendizaje, es decir, de reconocimiento de los cambios que se deben ir introduciendo en

LA RECTA DE TUKEY<sup>3</sup>

Consideremos la distribución bidimensional dada por la tabla del margen. Con una calculadora con tratamiento bidimensional obtenemos la ecuación de la recta en regresión de Y sobre X, que es la siguiente:

$$y = -0,161 x + 13,569$$

En el margen hemos representado la nube de puntos y la recta de regresión. Es obvio que debido a dos puntos patológicos la recta obtenida se ajusta muy mal a la nube.

La regresión que hemos estudiado está basada en las medias, y éstas son muy sensibles a los valores muy extremos. En cambio, la mediana es un parámetro mucho más inerte a estos valores extremos.

El estadístico americano **John Wilder Tukey** ha desarrollado un procedimiento que se basa en esta idea eliminando en gran medida la influencia de los valores muy extremos.

Se divide el eje X en tres partes de modo que cada una de las partes corresponde aproximadamente a la tercera parte de los datos. Con ello dividimos la nube de puntos en tres nubes. Calculamos la mediana de la X y la mediana de la Y de la nube de la izquierda; a ese punto lo denotamos ( $M_{x1}$ ,  $M_{y1}$ ).

Análogamente calculamos la mediana de la X y la mediana de la Y de la nube de la derecha; a ese punto lo denotamos por ( $M_{x3}$ ,  $M_{y3}$ ).

♦ **Gráficamente**, la recta de Tukey se obtiene trazando la recta que pasa por los puntos ( $M_{x1}$ ,  $M_{y1}$ ) y ( $M_{x3}$ ,  $M_{y3}$ ), y a continuación trasladando paralelamente dicha recta hasta conseguir que deje la mitad de los puntos por encima de la recta y la otra mitad por debajo.

♦ **Analíticamente**, la recta de Tukey viene dada por la ecuación  $y = ax + b$ , donde

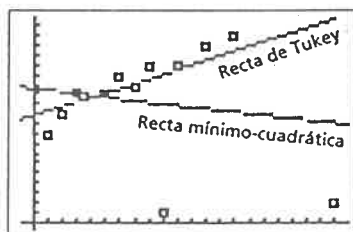
$$a = \frac{M_{y3} - M_{y1}}{M_{x3} - M_{x1}}, \quad b = \text{mediana de los valores } (y_i - ax_i).$$

Hoy en día existen calculadoras gráficas que ya tienen incorporado un procedimiento para obtener la ecuación de la recta de Tukey, que también se llama *recta mediana-mediana* o *recta resistente*.

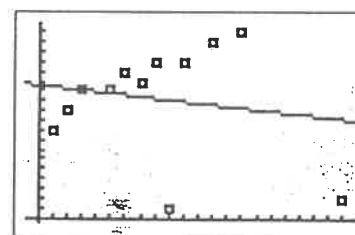
La recta así obtenida tiene la siguiente ecuación:

$$y = 0,476 x + 10,849$$

A continuación representamos ambas rectas: la mínimo-cuadrática y la de Tukey, que evidentemente se ajusta mucho mejor a la mayor parte de los puntos de la nube.



| x  | y  |
|----|----|
| 1  | 9  |
| 2  | 11 |
| 3  | 13 |
| 5  | 13 |
| 6  | 15 |
| 7  | 14 |
| 8  | 16 |
| 9  | 1  |
| 10 | 16 |
| 12 | 18 |
| 14 | 19 |
| 21 | 2  |



Recta mínimo-cuadrática.



John Wilder Tukey (1915).

Estadístico americano que ha trabajado en la Universidad de Princeton y en el Departamento de Investigación de ATT BELL. Sus trabajos más destacados están en el análisis de datos, habiendo desarrollado técnicas tales como los diagramas de tallos y hojas, junto a contribuciones importantes en la teoría de la estimación y series cronológicas.

<sup>3</sup> Esta es una reproducción de la página 383 del nuevo libro ALGORITMO MATEMÁTICAS II DE COU de Ediciones SM. Autores: J.R. Vizmanos y M. Anzola.

### RESULTADOS DE LA PRUEBA INICIAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA "MEDIR PARA CONOCER"

| EVALUACIÓN<br>APELLIDO | ELECCIONES UNIDADES DE LONGITUD |              | APROXIMACIÓN DE LONGITUDES |              | ESCALAS      |              |
|------------------------|---------------------------------|--------------|----------------------------|--------------|--------------|--------------|
|                        | Inicial                         | Formativa    | Inicial                    | Formativa    | Inicial      | Formativa    |
| ALAMINOS               | REG                             | SI           | NO                         | NO           | NO           | SI           |
| AMENOS                 | SI                              | SI           | SI                         | SI           | SI           | SI           |
| ASCUE                  | NO                              | NO           | NO                         | SI           | NO           | SI           |
| BARREDO                | NO                              | NO           | NO                         | SI           | NO           | REG          |
| CALDERON               | SI                              | SI           | REG                        | SI           | NO           | SI           |
| CANTURRI               | NO                              | NO           | NO                         | SI           | NO           | NO           |
| CASAS                  | SI                              | SI           | SI                         | SI           | SI           | SI           |
| CATALAN                | REG                             | REG          | NO                         | NO           | NO           | NO           |
| DE ARGILA              | NO                              | SI           | SI                         | SI           | NO           | SI           |
| GARCES                 | REG                             | SI           | SI                         | SI           | NO           | SI           |
| GARCIA                 | NO                              | SI           | SI                         | SI           | SI           | SI           |
| GUTIERREZ              | -                               | SI           | SI                         | SI           | SI           | SI           |
| JIMENEZ                | NO                              | NO           | NO                         | SI           | NO           | NO           |
| LLAVADOR               | SI                              | SI           | SI                         | SI           | SI           | SI           |
| MARQUEZ                | SI                              | SI           | SI                         | SI           | SI           | SI           |
| MARTOS                 | -                               | SI           | SI                         | SI           | NO           | REG          |
| MENDEZ                 | SI                              | SI           | SI                         | SI           | SI           | SI           |
| MORENO                 | NO                              | SI           | NO                         | SI           | NO           | NO           |
| MUÑOZ                  | NO                              | SI           | NO                         | SI           | NO           | SI           |
| MURES                  | -                               | SI           | SI                         | SI           | REG          | SI           |
| MUSTAROS               | NO                              | NO           | SI                         | SI           | NO           | NO           |
| NAVARRO                | NO                              | NO           | SI                         | SI           | NO           | REG          |
| ORTEGA                 | REG                             | SI           | SI                         | SI           | REG          | SI           |
| PETIT                  | SI                              | SI           | SI                         | SI           | SI           | SI           |
| RODRIGUEZ              | NO                              | SI           | NO                         | NO           | NO           | NO           |
| SANZ                   | SI                              | SI           | SI                         | SI           | REG          | SI           |
| TORRENT                | SI                              | SI           | SI                         | SI           | SI           | SI           |
| TRIGO                  | REG                             | SI           | SI                         | SI           | NO           | REG          |
| VIDAL                  | REG                             | SI           | SI                         | SI           | NO           | SI           |
| VIZUETE                | SI                              | SI           | SI                         | SI           | SI           | SI           |
| ZAMORA                 | NO                              | NO           | NO                         | SI           | NO           | NO           |
| <b>TOTALES</b>         | <b>SI 10</b>                    | <b>SI 23</b> | <b>SI 20</b>               | <b>SI 28</b> | <b>SI 10</b> | <b>SI 20</b> |
|                        | <b>REG 6</b>                    | <b>REG 1</b> | <b>REG 1</b>               | <b>REG 0</b> | <b>REG 3</b> | <b>REG 4</b> |
|                        | <b>NO 12</b>                    | <b>NO 7</b>  | <b>NO 10</b>               | <b>NO 3</b>  | <b>NO 14</b> | <b>NO 7</b>  |
|                        | <b>N C 3</b>                    |              |                            |              | <b>N C 4</b> |              |

respuestas escritas a lo largo del trabajo si el alumnado los ha hecho suyos.

- verbalización escrita (en algunos casos también puede ser de forma oral) de razonamientos sobre cuestiones que se consideran básicas a lo largo de la Unidad, Ciclo, Etapa,... y posterior trabajo individual respecto a las respuestas del grupo.
- resolución de ejercicios con el diseño previo del itinerario que se seguirá.
- respuesta escrita a las preguntas: ¿cuál crees que ha sido la intención de esta ficha de trabajo? ¿cómo crees que continuaría el trabajo en esta Unidad?
- enumeración de: ¿qué es lo que he aprendido? / ¿qué es lo que aún no sé?
- redacción esquemática sobre: ¿cómo veo el funcionamiento de la clase?

- elaboración de una base de orientación sobre un tema propuesto por el profesorado.
- elaboración de una prueba escrita previa al examen y su resolución.
- explicitación de los contenidos que no ha superado después de haber realizado el examen.
- apropiación por parte del alumnado de los criterios de evaluación.

A continuación incluimos un cuestionario intermedio que se pasó al mismo grupo que respondió al cuestionario inicial y del que se muestran los resultados en la misma tabla de datos que el cuestionario inicial. Permite ver la evolución individual y del grupo respecto a aquellos objetivos que nos habíamos marcado como fundamentales.



este proceso para que cada estudiante aprenda de forma significativa y que:

- **pretende adecuar** las actividades de Enseñanza/Aprendizaje a las necesidades del alumnado
- **se puede realizar** al principio, durante o al final de la evaluación
- **permite tomar decisiones** que son de carácter pedagógico

Se considera que en la actualidad es conveniente realizar tres tipos de evaluación a lo largo de un cierto proceso de aprendizaje: la evaluación inicial, la evaluación formativa y la evaluación sumativa.

Hablaremos sobre todo de la evaluación formativa, pero explicaremos brevemente algún aspecto de la evaluación inicial.

### La evaluación inicial

Tiene como finalidad que el profesorado conozca cuáles son los preconceptos o procedimientos adquiridos sobre ciertos contenidos que el alumnado tiene en el momento de iniciar un proceso de aprendizaje, es decir saber cuál es la situación de partida de cada alumno y cada alumna (diagnóstico) respecto a unos contenidos que cree fundamentales dentro de la Unidad y también para conocer la realidad del grupo clase (pronóstico) para de esta manera poder adaptar el material didáctico a las necesidades específicas del grupo clase y a veces de cada estudiante.

Esta evaluación ha de hacerse al iniciar la Unidad Didáctica y generalmente se realiza a partir de un cuestionario inicial que el alumnado ha de contestar por escrito.

A continuación hemos incluido un ejemplo de cuestionario inicial realizado a un grupo de 1º de Secundaria Obligatoria y su valoración inicial (aparece también la valoración posterior de un cuestionario intermedio que permite ver la evolución de cada estudiante, así como del grupo clase y comprobar si el trabajo a lo largo de la Unidad ha sido útil.

Es importante elaborar una base de datos en la que se valoren (basta valorarlas con SI, REG, NO o NO CONTESTA aunque también puede hacerse una parrilla de corrección anotando diversos aspectos que se quiere tener en cuenta) las respuestas a las preguntas 1, 2 y 5 de este cuestionario, pues en el cuestionario intermedio vuelven a aparecer (aunque puede ser que no vengán expresadas de la misma forma), y de esta manera el profesorado puede darse cuenta de la evolución de los conocimientos del alumnado en estos 3 aspectos que hemos considerado fundamentales en la Unidad Didáctica inicial de la Etapa 12-16.

### La evaluación formativa

- **se refiere** a los *procedimientos* que utiliza el *profesorado* para adaptar su proceso didáctico a los progresos y problemas de aprendizaje observados en sus alumnos y alumnas.
- **tiende a** identificar cuáles son las *dificultades de aprendizaje*, más que a considerar los resultados alcanzados.
- **busca** la información referida a las **representaciones mentales** del alumnado y a las **estrategias** que utiliza para llegar a un resultado.
- **está integrada** en la situación de aprendizaje.
- **hará adaptar** las actividades de aprendizaje a las *necesidades* de cada alumno y alumna.

### ¿Cómo llevar a cabo la evaluación formativa y conseguir implicar al alumnado en su propio proceso de aprendizaje?

A continuación enumeramos una serie de técnicas que pueden permitir al profesorado conseguir este propósito. Es evidente que es una lista incompleta y que además no es necesario realizarlas todas en cada Unidad Didáctica. Es tarea del profesorado el seleccionar cuáles de ellas realizará en cada caso.

- explicitación por parte del profesorado de los objetivos de la unidad y comprobación mediante

### PRUEBA INICIAL

1. ¿Crees que sería cómodo que cada país hubiera tomado como unidad de longitud, la medida de la longitud del paso de su presidente? ¿Por qué?
2. ¿Por qué crees que para medir longitudes son necesarias unidades mayores y menores que el metro?
3. ¿Qué instrumento utilizarías para medir la longitud del campo de fútbol del patio del Instituto? ¿Por qué?
4. ¿Cómo te las arreglarías para medir la línea curva que delimita el área de castigo del campo de fútbol del patio del Instituto? Explícalo con todos los detalles.
5. Enrique dice que con su regla milimetrada ha medido la longitud de su libreta y ha encontrado que mide 24'628 cm. ¿Tienes algo que decir sobre este resultado?

**Otros aspectos de carácter positivo pero con sólo una respuesta:**

- para resolver un problema lo hacemos de diferentes maneras y después contrastamos los resultados.
- nos hace recordar cosas anteriores para entrar en el tema y entenderlo mejor.
- para aprender un tema lo hacemos de diferentes maneras: razonar, estudiar, resolver ejercicios, comparar opiniones,...

**Otros aspectos de carácter negativo pero con sólo una respuesta:**

- habríamos de hacer más clases fuera del aula.
- hay gente que no entiende alguna cosa pero se ha de continuar.
- hay que preocuparse más por las personas que no entienden.

**RESPUESTAS A LA PREGUNTA:****“¿Cuál es la diferencia entre comprobar y demostrar una fórmula?”**

COMPROBAR es tener una propiedad o fórmula y a base de medir y hacer operaciones en un caso concreto y ver que se cumple.

DEMOSTRAR es hacerte la pregunta de porqué pasa siempre esto (una propiedad o una fórmula) y a partir de razonamientos ver que se cumple para todos, es decir de forma generalizada.

COMPROBAR que  $A+B+C = 180$  es medir los ángulos de un triángulo concreto, sumarlos y ver si te da 180. Esto te serviría sólo para este triángulo.

DEMOSTRAR que  $A+B+C = 180$  es hacer alguna teoría que sin decir el valor de A, B y C se afirma que siempre su suma es 180.

COMPROBAR significa que cuando te explican una propiedad la pones en práctica (en un caso particular) y miras si te sale.

DEMOSTRAR significa que de alguna cosa que te explican has de ver que siempre te saldrá lo mismo y que no es sólo en según qué casos.

COMPROBAR es poner en práctica los nuevos conocimientos que hemos adquirido y ver que son ciertos en un caso concreto.

DEMOSTRAR es discernir el porqué de estos nuevos conocimientos poniendo en práctica cosas que ya sabemos.

COMPROBAR es confirmar una teoría en un caso particular con datos.

DEMOSTRAR es probar una teoría de manera que no sea un caso particular sino que incluya todos los casos.

COMPROBAR sería que una regla se cumple en uno de sus ejemplos.

DEMOSTRAR sería verificar que una regla se cumple en todos sus ejemplos, es decir que la regla es cierta.

COMPROBAR es hacer un ejemplo de una teoría o fórmula para probar que es verdadera y da bien.

DEMOSTRAR es decir el porqué da bien una fórmula o una teoría explicándolo de forma razonable.

COMPROBAR es hacer con un ejemplo numéricamente a partir de una fórmula.

DEMOSTRAR es hacerlo con letras y encontrar la fórmula a partir de los razonamientos.

COMPROBAR es confirmar una teoría en un caso o ejemplo concreto.

DEMOSTRAR es confirmar esta misma teoría de una manera general.

**RESPUESTAS A LA PREGUNTA:****“¿Cuál es la diferencia entre resolver un problema de forma gráfica y resolverlo de forma numérica?”**

LA RESOLUCIÓN GRÁFICA es el desarrollo en una hoja de papel milimetrado donde se representa un problema con los mismos datos pero a escala y después se mide la incógnita.

En cambio, la RESOLUCIÓN NUMÉRICA es el desarrollo a partir de una fórmula y unas operaciones matemáticas.

LA RESOLUCIÓN GRÁFICA es la manera más sencilla pero más larga de hacer. Consiste en hacer un dibujo a escala, medir con la regla la distancia que no sabíamos y pasarla a medida real.

LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA consiste en tomar una fórmula y hacer una ecuación.

LA RESOLUCIÓN GRÁFICA es resolver el problema haciendo un dibujo a escala, después medimos con la regla lo que nos piden y después pasarlo a medida real.

LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA es hacer un croquis con las medidas que te dan y mediante una ecuación encontrar lo que te piden.

En LA RESOLUCIÓN GRÁFICA la principal diferencia respecto a la numérica es que en la primera se hace

**PRUEBA INTERMEDIA**

1. Carlos dice que su coche mide 7 pasos suyos y Toni dice que su coche mide 9 pasos suyos. ¿Podemos saber cuál es el coche más largo? ¿Por qué?
2. Maite dice que ha medido con su regla la longitud de una libreta y que ha obtenido una medida de 27'2945 cm. ¿Qué puedes decir sobre su medida?
3. ¿Crees que este plano puede estar dibujado a escala 1:5? Razona tu respuesta. (El plano que se les entrega está dibujado a escala 1:50)
4. Di a qué escala entre las que se te presentan te parece que puede estar dibujada la representación del coche de la figura.  
1:40, 1:100, 1:1000
5. María dice que todas las escalas han de ser 1:2, 1:10, ... y Pepi dice que también hay escalas 2:1, 10:1, ... ¿Quién crees que tiene razón? Explica claramente tu razonamiento.
6. Juan dice que basta con tener una única medida de longitud (el metro) para dar la medida de todas las longitudes. ¿Tú que crees?

Mostramos ahora las respuestas del grupo a la pregunta 3 del cuestionario intermedio que previamente el profesorado ha debido de revisar y clasificar.

**¿Crees que este plano podría estar dibujado a escala 1:5? ¿Por qué?** (La escala correcta del plano es 1:50)

Aquí tienes las respuestas de tus compañeros/as a la pregunta anterior. Haz una crítica individual a cada una de ellas, diciendo cuáles te parecen incorrectas, explicando el por qué, cuáles correctas y cuál es la que crees que explica su razonamiento con mayor claridad.

1. No creo que pueda estar a escala 1:5 porque sería muy pequeño en el plano y tendría que ser a otra escala.
2. No, en el plano no serían a escala 1:5 porque si no en la realidad serían medidas muy pequeñas (escala 1:5 quiere decir que para cada cm del plano son 5 cm en la realidad).
3. No porque a escala 1:5 sería muy pequeña en la realidad.  
Anchura nave 1:  $6 \times 5 = 30$  cm:  $100 = 30$  m
4. Yo creo que no, porque en realidad si multiplicáramos cualquier medida de este plano por 5 saldrían cosas muy pequeñas.
5. No, porque sería una casa muy pequeña, porque si 1 cm del plano equivale a 5 cm en la realidad, sería demasiado pequeña para una casa y las medidas no son reales. Por ejemplo: si la puerta mide 4 cm en el plano, como 1 cm equivale a 5 cm en la realidad, se ha de multiplicar 4 por 5 = 20 cm en la realidad,

entonces la puerta mide 20 cm; a ver quien es el guapo que puede entrar por aquella puerta.

6. A 1: 5 sí es posible porque sería muy grande.
7. Yo creo que sí se podría hacer este local a escala 1:5, pero sería muy grande, 10 veces mayor que a escala 1:50.

También incluimos las respuestas dadas por dos grupos de 2º de BUP a la pregunta: **¿cómo ves el funcionamiento de las clases de matemáticas?** y también las respuestas correctas que han dado estos mismos alumnos y alumnas a las preguntas: **¿cuál crees que es la diferencia entre comprobar y demostrar una propiedad o una fórmula?** y **¿cuál es la diferencia entre resolución gráfica y numérica de un problema?**

Estas dos últimas hojas de respuestas son el resultado de haber tratado ambos temas en clase, habiendo hecho primero comprobaciones y después demostraciones de algunas fórmulas, así como de haber resuelto problemas de forma gráfica y numérica; después comentar en clase de forma verbal las preguntas anteriores, discutiendo el por qué de las respuestas incorrectas y perfeccionando las casi correctas, para finalmente hacer entregar por escrito sus opiniones sobre las preguntas. Una vez recogidas las respuestas, estas hojas recogen las respuestas más claras y correctas que se han escrito por el grupo. Se les entrega a todos los alumnos y alumnas para que las estudien y vean cuál de ellas entiende mejor.

A veces también es conveniente incluir alguna respuesta incorrecta para que se corrija y se indique donde está el error.

**RESPUESTAS DEL ALUMNADO DE DOS CURSOS DE 2º DE BUP A LA PREGUNTA:**

**“¿Qué aspectos positivos y negativos le encuentras al funcionamiento de la clase de Matemáticas?”**

| ASPECTOS POSITIVOS                                    | nº respuestas |
|-------------------------------------------------------|---------------|
| las explicaciones en clase se entienden bien          | 20            |
| salir al patio a hacer trabajos                       | 16            |
| construir y utilizar aparatos de medida               | 9             |
| hacernos preparar y resolver exámenes previamente     | 9             |
| escribir la relación de lo que hemos aprendido        | 6             |
| hay buena relación entre la profesora y el alumnado   | 6             |
| las hojas ciclostiladas que nos da                    | 5             |
| nos hace explicitar los razonamientos                 | 14            |
| la corrección en la pizarra del examen una vez hecho  | 3             |
| se resuelven cosas relacionadas con la vida cotidiana | 4             |
| ASPECTOS NEGATIVOS                                    |               |
| los exámenes son demasiado largos                     | 13            |
| no hacemos nada con el ordenador                      | 2             |
| salimos poco a corregir problemas en la pizarra       | 3             |

## UTILIZACIÓN DE UN PROGRAMA INFORMÁTICO PARA ENSEÑAR GEOMETRÍA. (EJEMPLO DE CABRI-GÉOMÈTRE EN FRANCIA)<sup>1</sup>

**Bernard Capponi**

*Université Joseph Fourier. Grenoble, Francia*

Traducción:

**Ana García Azcárate**

### I. INTRODUCCIÓN

La imagen que se tiene de los programas informáticos para la enseñanza, corresponde a menudo al recuerdo que tenemos de los primeros programas que aparecieron hace ahora casi 15 años. Estos programas estaban pensados para guiar al alumno, muchas veces encerrándolo en una progresión o en un ejercicio sin posibilidad de salirse. Estos programas completamente cerrados, pueden aportar todavía, hoy en día una ayuda puntual en la enseñanza, pero sólo sobre algunos aspectos de entrenamiento (para el cálculo por ejemplo). No proporcionan al enseñante un entorno susceptible de adaptarse fácilmente a sus preocupaciones en la organización de su enseñanza.

Los programas **abiertos** no son específicos para la enseñanza. Ahí está el ejemplo de los tratamientos de texto o de los programas de dibujo o también en lo concerniente a Matemáticas, los programas trazadores de curvas o de tablas. Para la Geometría, el programa CABRI-GÉOMÈTRE entra en esta categoría.

### II. ¿QUÉ UTILIZACIONES TIENE EL CABRI-GÉOMÈTRE EN CLASE?

Una particularidad de un programa como **CABRI-GÉOMÈTRE** es que no tiene el propio programa, ejercicios o situaciones ya preparadas para la clase. Por supuesto se puede preparar ficheros, figuras, libros que describan las posibles utilizaciones del **CABRI-GÉOMÈTRE**, de hecho este artículo va a presentar algunas. Pero hay que entender el **CABRI-GÉOMÈTRE** como un entorno donde se puede trabajar la geometría, con la ayuda, para las construcciones y la investigación, de funciones específicas del programa. De esta forma, se podrá construir fácilmente una perpendicular, una bisectriz, o una transformación como una sime-

tría central. La investigación se ve facilitada por la calidad del dibujo obtenido y, sobre todo, por la conservación de las propiedades en el desplazamiento de la figura. Además, toda construcción compleja podrá ser almacenada en forma de una macro-construcción y utilizada después de la misma forma que las herramientas ya presentes en los menús del programa. En lo que viene a continuación, describo algunas situaciones típicas, donde el programa es particularmente interesante para el aprendizaje de la Geometría.

#### 1. ALGUNAS CONSTRUCCIONES CLÁSICAS VISTAS DE NUEVO

Las construcciones constituyen claramente un dominio donde **CABRI-GÉOMÈTRE** es particularmente adecuado. Hay que resaltar, sin embargo, que las construcciones que se realizan con este programa, adquieren todo su significado cuando las propiedades que definen una figura se conservan al desplazar los objetos de base. De hecho, es de esta forma como se hace trabajar a los alumnos: para ser dada por válida, una construcción debe primero conservar las propiedades que la caracterizan. Este aspecto particular de **CABRI-GÉOMÈTRE** cambia la naturaleza del trabajo propuesto a los alumnos. Ya no se trata de un simple dibujo que deben realizar, sino que éstos deben dar una descripción de la construcción para que se pueda hacer la figura y que ésta conserve sus propiedades. De esta forma, trabajos clásicos realizados en los colegios adquieren un sentido diferente cuando se abordan con un programa como el **CABRI-GÉOMÈTRE**. Presentamos aquí tres ejemplos para ilustrar esto.

##### A. CIRCUNCENTRO

La construcción (Fig. 11-a) necesita que se tenga al menos dos de las mediatrices para obtener el circuncentro. El alumno debe explicitar los objetos que permiten la cons-

1. CABRI-GÉOMÈTRE es una marca depositada de la Universidad *Joseph Fourier*. Contactos: LSD2-IMAG BP 53. 38041 Grenoble Cédex 9. 76 514560; email: cabrie@imag.fr.

un dibujo del problema a escala, utilizando la regla y el transportador y se mide lo que el problema te pide. En cambio, en LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA se utiliza una fórmula y a partir de ella se calcula la solución del problema.

LA RESOLUCIÓN GRÁFICA de un problema se hace pasando a escala los datos que te dan y midiendo directamente los datos que hemos de averiguar.

En cambio, LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA se hace averiguando el dato que te piden en el problema con una fórmula utilizando los datos que ya sabemos.

La diferencia entre las dos resoluciones es que en LA RESOLUCIÓN GRÁFICA se resuelve el problema mediante un gráfico a escala y después midiendo lo que te piden.

En cambio, LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA es la forma de resolver el problema mediante fórmulas y operaciones.

***Después se han de comparar los dos resultados obtenidos de una y otra manera y ha de dar la misma solución.***

La diferencia entre las dos resoluciones es que en LA RESOLUCIÓN GRÁFICA de un problema encontramos las soluciones a partir de un dibujo hecho a escala y sólo hemos de medir con la regla lo que nos piden.

En cambio, en LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA encontramos las soluciones a partir de una serie de operaciones numéricas y no hemos de medir en ningún dibujo.

LA RESOLUCIÓN GRÁFICA es descubrir el resultado de un problema midiendo la incógnita en un gráfico a escala, mientras que en LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA el resultado se sabe utilizando fórmulas o propiedades que se resuelven con números ■

## BIBLIOGRAFÍA

La parte teórica de esta ponencia se basa en el artículo de J. Jorba y N. Sanmartí titulado "La función pedagógica de la evaluación" y publicado en la revista Aula nº 20, pp 20 a 30 en el año 1993.

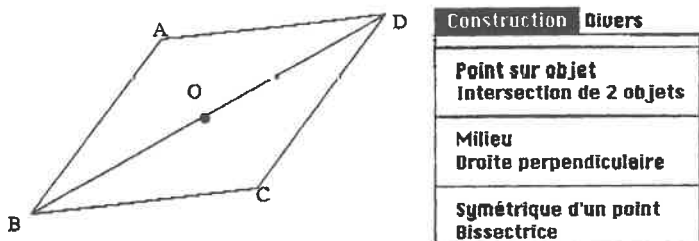
- Azcárate, C. El contracte didàctic. Revista Crònica d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. Novembre, 1994.
- Berini, M. Aprenentatge constructivista en la etapa 12-16. Revista Crònica d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. Novembre, 1994.
- Lladó, C. Discutint s'aprén. Revista Crònica d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. Novembre, 1994.

## 2. SELECCIÓN EN LOS MENÚS

Otro tipo de utilización consiste en pedir también construcciones pero cambiando los diferentes comandos disponibles para los alumnos en los menús.

### A. Construcción de un paralelogramo sin utilizar el comando "recta paralela"

El primer ejemplo es sencillo y clásico pero ilustra muy bien el interés de eliminar algunas de las herramientas de los menús. En un estudio sobre el paralelogramo en clase de 5º (alumnos de 12 años), si se suprime del menú de **CONSTRUCCIÓN** el comando **RECTA PARALELA**, se obliga al alumno a utilizar otras propiedades características del paralelogramo para su construcción. Por ejemplo, se puede construir el paralelogramo con el punto **MEDIO** y el simétrico con respecto a él (fig. 14). De esta forma, la caracterización del paralelogramo por la simetría central que tiene, es la utilizada.

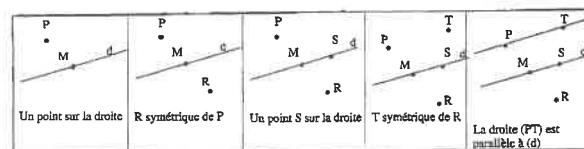


(Fig. 14)

### B. Paralela con menús reducidos

Otro ejemplo nos lo da un estudio que he podido llevar a cabo sobre la construcción de una paralela a una recta dada, que pasa por un punto dado, sin disponer de los comandos **RECTA PARALELA**, ni **CIRCUNFERENCIA DEFINIDA POR DOS PUNTOS** (Capponi 93). Esta tarea realizada por alumnos de 4º ha mostrado que los alumnos desarrollan dos grandes tipos de estrategias:

- la primera utiliza las propiedades de la simetría ortogonal (la recta que une un punto y su simétrico es perpendicular al eje de simetría), y las propiedades de las paralelas y de las perpendiculares (dos rectas perpendiculares a una misma tercera son paralelas). Los alumnos explicitan bien en general las propiedades que entran en juego en su construcción.
- la segunda utiliza las propiedades de los puntos medios, que se ilustra en la siguiente construcción:



(Fig. 15)

Los ejemplos de este tipo son numerosos. En este tipo de utilización, las propiedades geométricas se convierten en herramientas. Éstas se utilizan entonces en un campo menos complejo que el de la demostración.

## III. ESTUDIOS DE TRANSFORMACIONES

### A. Polígonos y rotación

La idea de la **caja negra**, desarrollada con el **CABRI-GÉOMÈTRE**, consiste en dar a los alumnos una macro-construcción que produzca una cierta construcción a partir de objetos iniciales dados; su tarea es entonces analizar el comportamiento de la figura producida para realizar una construcción idéntica. Un trabajo de este tipo ha sido estudiado en detalle en el marco del equipo **Didatech** (Boury V. 1993). Se puede aprovechar esta idea para el estudio de las transformaciones geométricas, como la traslación o la rotación, en los colegios.

Se puede, con la idea de los menús reducidos, proponer a los alumnos unas construcciones donde sólo se deja como herramienta disponible de construcción, la rotación. De esta forma, se puede proponer la siguiente tarea: construir un cuadrado de lado (AB) dado, disponiendo sólo de los menús de la fig. 16:

| Construction Divers                         |  |  |
|---------------------------------------------|--|--|
| Point sur objet<br>Intersection de 2 objets |  |  |
| Droite parallèle                            |  |  |
| rotation                                    |  |  |

| Création                    | Construction | Divers |
|-----------------------------|--------------|--------|
| Point de base               | ☞E           |        |
| Segment                     |              |        |
| Droite passant par 2 points |              |        |

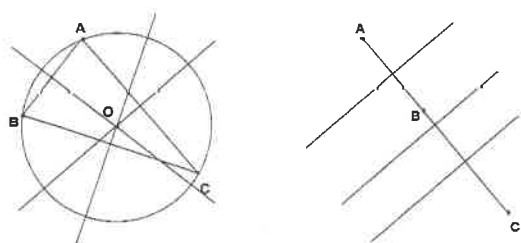
(Fig. 16)

Esta construcción hace operativa la rotación en una construcción. Este tipo de tarea no se puede concebir sin un programa como el **CABRI-GÉOMÈTRE**.

### B. Traslación y vector

Se puede hacer un trabajo del mismo tipo con las traslaciones y los vectores. Es bueno para eso, el disponer de

trucción del centro. Pero el interés está, además de en la propia construcción, en la posibilidad de un **desplazamiento continuo**. En este caso, se puede estudiar las particularidades de la figura, por ejemplo, qué le pasa al triángulo si el centro está **en el interior** o **en el exterior**. ¿Qué pasa si el centro está sobre unos de los lados del triángulo? Se puede "ver" crecer el radio del círculo hasta su desaparición (Fig. 11-b), hasta un radio infinito con mediatrices paralelas. Una única figura permite visualizar todos los casos sin construcciones nuevas ni datos suplementarios: basta coger el punto con el ratón y desplazarlo.

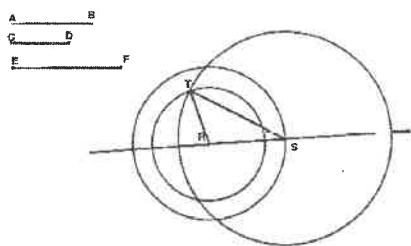


(Fig. 11-a y 11-b)

### B. UN TRIÁNGULO DE LADOS DADOS

Se le da al alumno, o se le hace construir, tres segmentos cualesquiera, siendo el trabajo propuesto el construir un triángulo que tenga como lados estos tres segmentos. Para realizar este trabajo, es bueno añadir al menú **construcción** una macro-construcción que permite construir un círculo de centro dado y que tenga como radio la longitud de un cierto segmento.

La figura 12 ilustra este ejemplo con los tres segmentos AB, CD, y EF y el triángulo construido RST.

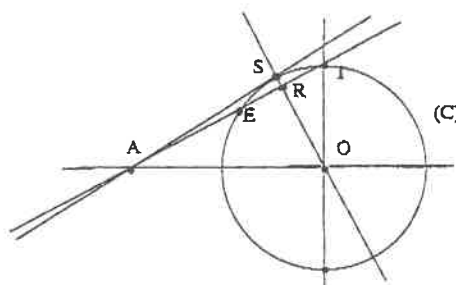


(Fig. 12)

La construcción es la misma que la que se haría con compás, pero se gana aquí la posibilidad de cambiar las longitudes de los segmentos iniciales y se puede, sobre la misma figura, estudiar las condiciones de existencia del triángulo y tratar así las desigualdades triangulares. El programa nos hace ganar un tiempo precioso y permite comprender mejor el significado que tiene la existencia o no de un triángulo en función de las longitudes de los lados.

### C. TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

El último ejemplo que daré de construcción es la de la tangente a una circunferencia dada, que pasa por un punto. Sin la ayuda de **CABRI-GÉOMÈTRE**, el interés de este tipo de construcciones es difícil de ser percibido por los alumnos, porque se obtiene una muy buena aproximación haciendo la construcción "a ojo" sobre el papel. No ven por consiguiente el interés de hacer una **buena construcción**. Con **CABRI-GÉOMÈTRE**, una construcción "a ojo" no puede convenir porque no se conserva por desplazamiento. **CABRI-GÉOMÈTRE** vuelve a dar sentido a esta construcción. Pero esta construcción permite también el plantearse la cuestión de la validez de una construcción hecha por un alumno y permite así dar sentido a la búsqueda de una prueba que valide esta construcción. Veamos aquí el ejemplo de la construcción hecha por un alumno de tercero, que dio lugar a un debate sobre la validez.



(Fig. 13)

La tangente debe ser trazada desde el punto A a la circunferencia (C) (fig. 13). Este alumno construye la recta (AO), a continuación hace la perpendicular (OI). La construcción de (AI) no da lugar a una tangente. Construye entonces la mediatriz (EI) que corta a la circunferencia en S. La recta (AS) es para el alumno la tangente buscada. Esta construcción fue dada al conjunto de la clase y dio lugar a un rico debate para reconocer si esta construcción da realmente una tangente. **CABRI-GÉOMÈTRE** puede dar una primera respuesta al colocar A muy cerca de la circunferencia. Pero una validación también viene dada por un razonamiento sobre la unicidad de la perpendicular llevada desde A a la recta (OS). En este contexto, el razonamiento nos da una respuesta que tiene sentido para los alumnos, en la medida que corresponde a una pregunta que ellos se habían hecho sobre esta construcción.

Estos tres ejemplos ilustran el papel que puede jugar **el CABRI-GÉOMÈTRE** en el dominio de las construcciones en la enseñanza de los colegios.

Para concluir este párrafo, se puede decir que el interés de las construcciones con el **CABRI-GÉOMÈTRE** está en que éstas necesitan la explicitación de las propiedades y que con respecto al método del lápiz y papel se gana la posibilidad de recorrer las distintas clases de figuras.



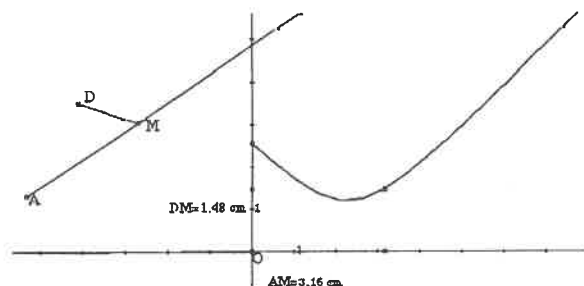
Las construcciones correspondientes son interesantes de estudiar con los alumnos y proporcionan aplicaciones del teorema de Thales o de Pitágoras.

En el entorno de **CABRI-GÉOMÈTRE II**, que se está actualmente poniendo a punto en el laboratorio LSD2-IMAG, es posible, de forma sencilla, transferir números o medidas de elementos de una figura (longitud de un segmento, área de un polígono,...) sobre un sistema de ejes. Al considerar el lugar geométrico de un punto que tiene como coordenadas estos números, se obtiene la curva que representa las funciones que modelizan las situaciones geométricas. Es posible, modificando ciertos elementos de la figura, darse cuenta de las posiciones particulares que corresponden a cada uno de los valores intermedios.

Presentamos aquí tres ejemplos:

### Ejemplo 1

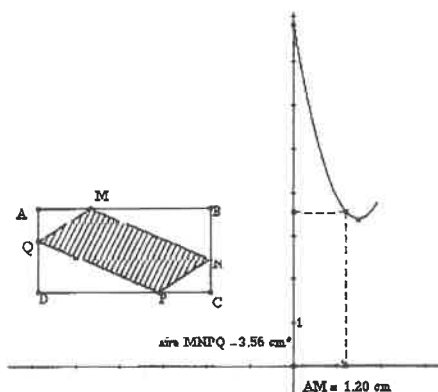
Sea un punto D, una semi-recta de origen A y un punto M sobre esta semi-recta. Se trata de estudiar la distancia DM en función de la longitud AMN.



(Fig. 20)

### Ejemplo 2

Retomamos una situación propuesta en las representaciones del CNAM, (Conservatorio Nacional de Artes y Oficios):



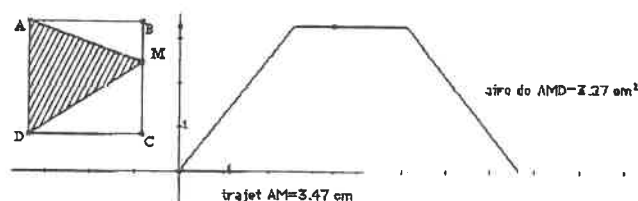
(Fig. 21)

ABCD es un rectángulo. El punto M pertenece al segmento [AB]. Se construye N, P y Q tales que:  $AM=BN=CP=DQ$ . Se debe estudiar ahora las variaciones del área del polígono MNPQ en función de la longitud AM.

Es posible hacer variar la posición del punto M. El programa actualiza los valores de AM y del área así como la posición relativa correspondiente sobre la curva.

### Ejemplo 3

ABCD es un cuadrado; M, un punto situado sobre él. Se estudia el área del triángulo AMD en función de la posición del punto M. De manera general, las simulaciones permiten tratar de forma dinámica situaciones complejas. La versión II de **CABRI-GÉOMÈTRE** permite ir más allá gracias a un acceso rápido a las funciones numéricas y utilizando una nueva filosofía para el tratamiento de los lugares geométricos.



(Fig. 22)

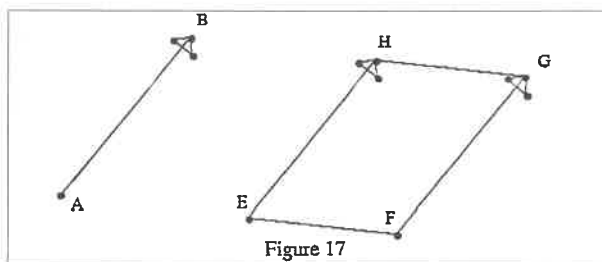
## 5. TRATAMIENTO DINÁMICO DE LA FIGURA

Se trata aquí de situaciones donde el desplazamiento de un punto sobre un segmento, una circunferencia o una recta conduce a estudiar problemas de extremos o de invariantes de la figura, e incluso algunas veces de lugares geométricos. Este tipo de problema es prácticamente imposible de estudiar con alumnos de los colegios si no se dispone de una representación dinámica de la figura donde el punto que varía se desplaza efectivamente. La figura construida con **CABRI-GÉOMÈTRE** es utilizada para explorar el fenómeno que debe observarse y conduce en general a una demostración. Presento a continuación tres ejemplos.

### A. La tabla de madera

En esta situación, la construcción de la figura es ya un problema interesante para los alumnos de 3º. Se trata de representar una tabla de madera cuyas extremidades se apoyan en una pared vertical y en el suelo. Al desplazar el punto A,

macro-construcciones de traslaciones, así como representaciones de vectores como las de la fig. 17.



(Fig. 17)

A partir del vector  $\vec{AB}$  y del segmento EF, se pide la construcción del paralelogramo EFGH.

Para concluir, CABRI-GÉOMÈTRE permite estudiar las transformaciones, primero, a partir de los efectos que producen. Se convierten después en herramientas de construcción.

#### 4. SIMULACIONES

Otro ejemplo de utilización particularmente rico es el de las simulaciones. Se trata, de hecho, de modelizar, con la ayuda de CABRI-GÉOMÈTRE, una situación que no trata a priori directamente de geometría. Damos aquí un ejemplo de situación física y un ejemplo de tratamiento numérico.

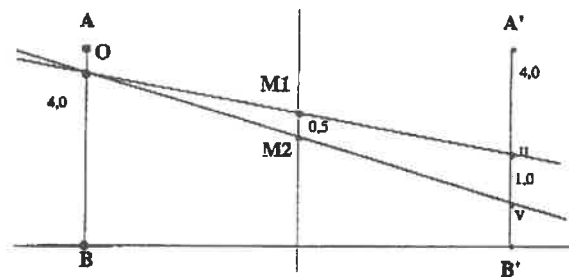
##### A. El ejemplo del espejo

El problema del espejo es clásico y se encuentra en numerosos materiales para la clase de 4<sup>º</sup>, en el capítulo de la propiedad de los puntos medios de un triángulo. Al haberlo utilizado en estas clases, he podido observar la dificultad que tienen los alumnos para representarse el fenómeno físico. Aquí, CABRI-GÉOMÈTRE va a permitir construir una simulación del fenómeno que va a dar sentido al tratamiento matemático que de él se hace.

En clase se puede empezar organizando un debate sobre el espejo, empezando por preguntas de este tipo:

**“Tengo un espejo pequeño de 10 cm de alto. ¿Me puedo ver de cuerpo entero en él?”**

La concepción más frecuente del fenómeno hace intervenir la distancia al espejo: cuanto más lejos se está, más se verá en el espejo. Las limitaciones explicitadas provienen del riesgo de verse “demasiado pequeño” si se está muy lejos. Estas concepciones son estudiadas por los alumnos en un trabajo para casa donde deben intentar determinar si es posible verse entero en el espejo. El problema puede entonces ser tratado con la ayuda de una simulación representada por la fig. 18:



(Fig. 18)

Sobre esta figura, AB representa un personaje que se mira en el espejo  $M_1M_2$  y  $A'B'$  es su imagen en una simetría de eje ( $M_1M_2$ ). O es el ojo del personaje (lo hemos añadido para que los alumnos lo introduzcan como una variable de la situación). En esta simulación se puede avanzar o alejar el personaje con respecto al espejo y observar que lo que se ve en el espejo, es decir  $uv$ , no varía (su longitud permanece igual a 1). Al actuar sobre  $M_1$ , se ajusta la posición del espejo (sin cambiar el tamaño) y al actuar sobre  $M_2$  se aumenta o disminuye el tamaño del espejo. Esta simulación permite visualizar las diferentes variables de esta situación y observar antes de demostrarlo que la condición para que el personaje se vea entero en el espejo es que éste tenga un tamaño al menos igual a la mitad de AB.

En esta situación, la simulación es indispensable para modelizar el fenómeno físico y para poder estudiarlo en buenas condiciones, utilizando por ejemplo una pantalla de cristal líquido para retroproyectar en clase.

##### B. Tratamientos numéricos

Otra modelización posible es la que se puede realizar con un eje, representando una variable numérica y su cuadrado, su inverso o su opuesto. Se puede construir así el producto, la suma o el cociente de dos números cualesquiera. Este tipo de representación puede llevar, por ejemplo, a la comparación de la suma y del producto de dos números o a la de la variación del producto de dos números cuando su suma es constante.

Por otra parte, este tipo de herramientas hace posible el estudio de las variaciones de las áreas de triángulos o cuadriláteros o las representaciones gráficas de funciones numéricas utilizando lugares geométricos de puntos.



(Fig. 19)

**BIBLIOGRAFÍA**

- **Arsac, G., Germain, G., Mante, M.** (1988) Problème ouvert et situation problème. IREM de Lyon.
- **Bellemain, F., Capponi, B.** (1992) Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. In *Educational Studies* 23 (1992), n° 1, pp. 59-97
- **Capponi, B.** (1993) Modification des menus dans Cabri-géomètre, des symétries comme outils de construction. *Petit x* n° 33, pp. 37-68, 1992 1993
- **DLC (Direction pédagogique et Technologies Nouvelles)** et CREEM (Conservatoire National des Arts et Métiers): Imagiciels en première et terminale, fonctions numériques
- **Laborde, C. et Capponi, B.** (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 14 n° 1.2, pp. 165-210, 1994
- **Laborde, C.** (1992) Solving Problems in computer based geomtry environments: the influence of the features of the software. *Zentralblatt für Didaktik des Mathematik*. 92/4, pp. 128-35
- **Terracher, P. H. et Ferachoflour, R.** (1994) Mathématiques, Manuel pour la classe de seconde. Hachette Paris.

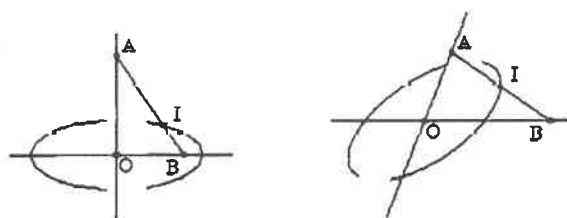
se hace resbalar la tabla y nos interesamos por la trayectoria del punto medio.



(Fig. 23)

Esta situación parece a menudo insólita a los alumnos pero se puede tratar con conocimientos que son del curso de 4º.

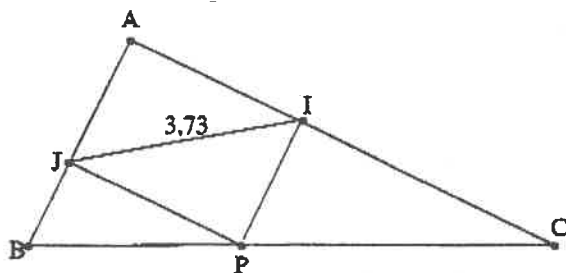
Se puede transponer fácilmente en el nivel de las clases de liceo (15 años) considerando otras posiciones del punto I sobre el segmento [AB], distintas del punto medio, o sea, otros valores para el ángulo  $\widehat{AOB}$ . Se obtiene así una elipse (fig. 24).



(Fig. 24)

### B. Mínimos

En este ejemplo, derivado del trabajo sobre el problema abierto del IREM de Lyon (ARSAC 88), los alumnos construyen un triángulo ABC rectángulo en A. P es un punto de la hipotenusa que se proyecta ortogonalmente en I y J sobre los dos lados del ángulo recto. El problema consiste en estudiar para qué posición de P, la longitud IJ es mínima.



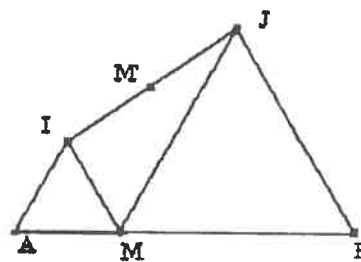
(Fig. 25)

Es la conservación del rectángulo PIAJ en el problema del mínimo lo que conduce a la solución y, en el problema de la tabla, es la invariancia de la longitud OI. De una manera

general, el tratamiento dinámico de la figura pone en evidencia los invariantes y permite una exploración que conduce a la explicación del fenómeno observado y a una demostración.

### C. Juntando los vértices de dos triángulos equiláteros

Este último punto se comprueba particularmente con el ejemplo siguiente, propuesto en el libro de 2º de la colección TERRACHER: sea un punto M perteneciente al segmento [AB]; se construye de un mismo lado de AB, dos triángulos equiláteros AIM y MJB (Fig. 26); se trata de estudiar el lugar geométrico del punto medio del segmento [IJ]. El tratamiento dinámico en el entorno **CABRI-GÉOMÈTRE** hace aparecer como invariantes las direcciones (AI) y (BJ) y permite orientar las investigaciones de los alumnos de forma útil.



(Fig. 26)

## IV. CONCLUSIÓN

Estos ejemplos de utilización del **CABRI-GÉOMÈTRE** en clase, muestran el interés que se puede encontrar al utilizar este tipo de programa con los alumnos. La utilización puede ser de varios tipos: o bien el alumno manipula él mismo el programa en el taller, o bien el profesor o el alumno lo utilizan como una representación interactiva delante de toda la clase con la ayuda de una pantalla de cristal líquido. El epígrafe anterior nos da algunas informaciones sobre las condiciones de utilización en clase.

La utilización de CABRI-GÉOMÈTRE en clase nos parece una herramienta potente para hacer acceder a los alumnos a la noción de propiedad geométrica y esto desde el inicio de la clase de 6º (11 años). El programa ayuda a explorar las figuras, a sacar los invariantes y sirve de punto de apoyo para el razonamiento deductivo. La validez de una construcción por desplazamiento puede dar poco a poco sentido a la demostración. Notaremos, para acabar, que la ergonomía del programa y la calidad de la modelización geométrica son lo que ha permitido el éxito de las situaciones que se ponen a punto con los alumnos. Deseamos simplemente que todos los profesores puedan disponer rápidamente de los medios materiales que permitan el aprovechamiento pleno de las cualidades de este programa ■