

EL CÁLCULO MENTAL, UN DOMINIO PRIVILEGIADO PARA LA ENSEÑANZA DE LA ARTIMÉTICA

Bernardo Gómez Alfonso

El cálculo mental es un tema con interés educativo, ya que aunque aparece y desaparece pendularmente en los diversos currículum que se han propuesto desde el establecimiento de los currículum oficiales, lo cierto es que de nuevo vuelve a ser incluido en la nueva propuesta oficial escolar española (DCB, 1989 y DBR, 1990). No obstante, a pesar de su larga tradición en la enseñanza, no se puede decir que actualmente haya consenso en cuanto a la relativa importancia que debe concedérsele en el currículum y la forma de abordarlo. Esto lo sitúa en una posición controvertida que demanda luz y taquígrafos para hacer pública su realidad escolar, discutiendo sobre el uso efectivo que se hace de él en la enseñanza, la metodología que se aplica, los objetivos que se alcanzan, y aclarando en qué medida esto contribuye o no a los propios fines de la enseñanza de la aritmética y en general del sistema educativo que dimanen de la LOGSE.

SIGNIFICADO

Usamos la expresión cálculo mental para referirnos al cálculo de cabeza o de memoria (sin ayuda externa) con datos exactos. El cálculo mental no debe confundirse con el cálculo estimado y éste tampoco con el cálculo aproximado.

FINES DE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO MENTAL

En las propuestas curriculares precedentes la enseñanza del cálculo mental se sustentaba en criterios utilitarios relacionados con las necesidades de la vida diaria: rapidez y agilidad mental (MEC, 1982). En la actualidad los criterios predominantes que se utilizan para justificar su enseñanza son otros: la necesidad de disminuir el énfasis tradicional sobre el cálculo escrito rígido en favor del cálculo variado (mental, estimado, con calculadora o con algoritmos estándar según convenga) y la mejora de

la comprensión y adquisición de los conceptos relacionados con la operatoria, y la profundización de los conocimientos matemáticos intuitivos antes de su formalización (DCB, 1989 y DBR, 1990).

LA REALIDAD ESCOLAR DEL CÁLCULO MENTAL

La realidad de lo que ocurre dentro del aula no es fácil de conocer, ya que la puerta de la clase permanece cerrada en la mayoría de los casos, sin embargo podemos hacernos una idea a través de los libros de texto usados para la enseñanza. Estos, otorgan al cálculo mental un papel secundario, dedicando la mayor parte de las páginas al cálculo escrito y relegando el cálculo mental a una posición marginal al final de las lecciones, de un modo en el que aparece desvinculado de lo que allí se trata.

Los profesores, con este marco de referencia delineado por los libros de texto, han tendido a abandonar su enseñanza. Se explica así que la mayoría de los estudiantes que estudiaron con este currículum se muestren anclados en los métodos de lápiz y papel y que no utilicen con soltura otras alternativas de cálculo.

En el modelo de enseñanza actual se ha puesto tanta importancia en los algoritmos convencionales, que la finalidad de la enseñanza del cálculo se ha pervertido, ya que la palabra cálculo ha llegado a ser sinónimo de las "cuatro reglas", perdiéndose su significado histórico de herramienta o medio para expresar, componer y descomponer las cantidades.

¿EN QUÉ SENTIDO LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO MENTAL PUEDE CONTRIBUIR A LOS FINES PROPIOS DE LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA?

Las opiniones vertidas en la literatura (Menchinskaya y Moro, 1975; Plunkett, 1979; Cockcroft, 1985; Reys,

1985; Giménez y Gironde, 1990, Butlen y Pezard, 1991) responden a esta pregunta en varios sentidos:

- es un medio para incrementar la comprensión infantil de los números individualizándolos y relacionándolos con diversas formas de escribirlos y conociendo cómo está compuesto de sumandos y factores;
- es de utilidad en la comprensión y desarrollo de los equivalentes escritos y alteraciones invariantes de la operatoria, pudiendo llevar al descubrimiento de pautas, propiedades y estructuras de nuestro sistema numérico;
- y es un tipo de análisis de las situaciones numéricas que puede ser usado por los educadores para indagar las concepciones de los estudiantes (y su disponibilidad) ligadas a la numeración decimal y a las leyes y propiedades de las operaciones, y como medio para promover su reconceptualización y la evaluación y reorientación del trabajo del profesor. En otras palabras, para hacer emerger errores debidos al aprendizaje y posibilitar el hacerles frente.

LOS ERRORES Y SU IMPORTANCIA

Tradicionalmente, los profesores han creído que los errores de cálculo que cometían los estudiantes eran debidos a una falta de dominio de los métodos o a un despiste a lo largo del proceso de cálculo. En esta postura, se consideraba que los errores carecían de interés, eran algo que había que ignorar. En la actualidad, se tiene otra opinión, se considera que hay que diferenciar entre errores y fallos o descuidos, los segundos son erráticos e imprevisibles, y son debidos a pérdidas de atención o accidentes, mientras que los primeros son una parte del proceso de aprendizaje que se manifiesta de forma persistente y reproducible, cuya naturaleza, relacionada con malentendidos instalados y consolidados que la enseñanza usual no siempre tiene en cuenta, puede ser desenmascarada. Se considera así que los errores son una fuente de información para el profesor acerca de lo que han aprendido los estudiantes y cómo lo han aprendido (Borasi, 1994), y una ayuda para que éste diseñe una instrucción más eficaz.

MODELO TEÓRICO EXPLICATIVO DE LOS ERRORES DE CÁLCULO

Para explicar los errores en cálculo, algunas investigaciones (Menchinskaya y Moro, 1975; Matz, 1982; Gómez, 1994) sugieren que éstos son debidos a la forma en que se aprendió la operatoria, y que se basan en que hay reglas previamente aprendidas cuyo campo

de aplicación se extiende injustificadamente, mediante adaptaciones razonables pero que no siempre funcionan, o en las que se omiten determinados pasos necesarios. Al parecer los alumnos tienden así «puentes» para cubrir el vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares», que tienen su origen en la separación entre la interpretación de los símbolos (la semántica), que decae, y las reglas para su manipulación (la sintaxis), que predomina.

APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA

En un trabajo reciente (Gómez, 1994), en el que se indagaba acerca de este modelo explicativo en relación con los errores de procedimiento en cálculo mental, se encontraron evidencias de los mecanismos que utilizan los estudiantes para tender los “puentes” entre lo que ellos ya saben o recuerdan y la situación o problema que se les plantea.

Tras efectuar una enseñanza de métodos de cálculo mental con alumnos de magisterio, en la que se logró pasar de una situación en la que mayoría de los estudiantes, 63%, usaron exclusivamente métodos de columnas, a una situación en la que la mayoría, 95%, usaron preferentemente métodos alternativos mentalmente, emergió una amplia tipología de errores, debida a una multitud de procedimientos inapropiados empleados por los estudiantes.

Así por ejemplo, ante el ejercicio 265-199 algunos estudiantes, que optaron por redondear, contestaron: “265-199 = 64. Como 199+1 es 200 a 265 le quito 200 - 1 y da 64”. Estos restaron la cantidad que compensa el efecto de la alteración. Preguntados insistentemente manifestaron que como en lugar de 199 habían tomado 200, que es 1 unidad mayor, pues después de restar los 200 debían quitar la unidad de más que habían tomado. Cuando se les solicitó que comprobaran el resultado con lápiz y papel, usaron el método de columnas y corrigieron su respuesta, pero al preguntarles sobre lo que podía estar mal en el razonamiento que les condujo a la respuesta anteriormente dada, su respuesta fue que les seguía pareciendo correcto y que no entendían porqué no daba lo mismo.

Respuestas similares se obtuvieron en otros tipos de errores observados. Así, por ejemplo, ante el ejercicio 3'4x0'15 algunos estudiantes contestaron en los siguientes términos: “He multiplicado 34 por 1'5 y me da 6'0+4'5 = 10'5”. Estos pensaron que debían quitar la coma decimal del primer factor y que para esto debían correr la coma un espacio a la derecha. En el ejercicio 26x35, hubo quien respondió así: “35x20 = 70; 70x6 = 420”.

Muchos otros ejemplos como estos se podrían mostrar para hacer ver cómo los métodos de cálculo mental hacen emerger formas incorrectas de razonamiento aritmético de los estudiantes que permanecen ocultas mientras sólo se hace uso de los métodos de columnas. Todos ellos corrigieron su respuesta cuando se les solicitó que comprobaran el resultado con lápiz y papel, y también recurrieron al método usual de columnas, y de nuevo al preguntarles sobre lo que podía estar mal en el razonamiento que les condujo a la respuesta anteriormente dada, su respuesta fue que les seguía pareciendo correcto y que no entendían porqué no daba lo mismo.

Un análisis detallado de la problemática que revela las respuestas de los estudiantes, con ayuda de entrevistas, evidencia que la clave de estos comportamientos está en determinadas generalizaciones, extrapolaciones y centramientos debidos a la influencia de los conocimientos previos sobre los sobrevenidos.

El alumno que respondió $265 - 199 = 64$. Como $199 + 1$ es 200 a 265 le quito 200 - 1 y da 64", podría estar generalizando un procedimiento para sumar redondeando, basado en el principio de compensación, que consiste en quitar al resultado lo añadido a un sumando: $265 + 199$ si que es igual a $265 + 200 - 1$ pero $265 - 199$ no es $265 - 200 - 1$.

Análogamente, el alumno que al ejercicio $3'4 \times 0'15$ respondió "He multiplicado 34 por $1'5$ y me da $6'0 + 4'5 = 10'5$ ", podría estar generalizando un procedimiento para dividir decimales que consiste en eliminar la coma decimal del divisor corriéndola simultáneamente del dividendo y del divisor.

El alumno que al ejercicio 35×26 respondió " $35 \times 26 = 70$; $70 \times 6 = 420$ ", podría estar generalizando el procedimiento que se sigue en la suma $35 + 26 = 35 + 20, 55, + 6 = 61$, o el procedimiento que se sigue frente a una factorización algebraica, $35 \times ab$ si es $35 \times a$ y lo que resulte por b .

Todos estos alumnos, reflejan un comportamiento que consiste en generalizar un procedimiento que es válido para una operación a otro donde no es válido.

El hecho de que si se suma 1 al 199 luego se debe restar, es una idea válida en la suma, pero esto no significa que lo sea en la resta, pero el alumno que así lo cree generaliza el procedimiento sin más, sin pararse a pensar en el efecto de la alteración realizada sobre el resultado, en otras palabras que al sumar 1 al sustraendo aumenta la cantidad que se resta, la diferencia obtenida es menor que aquella por la que se pregunta y por lo tanto hay que compensar sumando y no restando.

En el segundo ejemplo, el hecho de que en la división se pueda correr la coma decimal, es porque esto es una alteración invariante del resultado, formalmente como consecuencia de multiplicar por la unidad seguida de ceros tanto al dividendo como al divisor, pero esta alteración no es invariante en la multiplicación.

En cuánto a la multiplicación encadenando los resultados, ésta no es posible porque a diferencia de la suma el producto es distributivo, si es el caso de que están generalizando, o porque el significado de 26 no es el de 2×6 sino $20 + 6$.

IMPLICACIONES EDUCATIVAS

Una consecuencia que se desprende de estos hechos es que muchos estudiantes construyen mal sus concepciones relacionadas con el cálculo aritmético, de una manera que no se debe tanto a conceptos mal desarrollados como puedan ser el concepto de suma, resta, multiplicación, división, o de número decimal, como a fallos en el dominio, significación, y comprensión de las reglas que rigen la operatoria, una comprensión pobre del efecto que las alteraciones en los datos produce en los resultados, y una falta de valoración de la razonabilidad de los resultados.

Probablemente, todo esto sea una consecuencia de una enseñanza excesivamente volcada al automatismo, centrada en el cálculo de columnas y que no tiene en cuenta el papel que podría desempeñar el cálculo mental en el desarrollo del pensamiento aritmético.

UNA PROPUESTA QUE PUEDA SER ADMITIDA POR LA COMUNIDAD DE EDUCADORES

El análisis de los errores al resolver ejercicios de cálculo mental ha permitido hacer explícitos algunos malentendidos acerca de los procedimientos de cálculo, que de otra manera, cuando sólo se aplicaban los métodos estándar, no pudieron emerger. De esta forma, se evidencia que la enseñanza de los métodos de cálculo mental son un dominio privilegiado para hacer emerger una problemática ligada al aprendizaje de la aritmética, que ayuda a conocer las creencias de los estudiantes, la forma en que están aprendiendo o han aprendido, las dificultades que enfrentan.

Este conocimiento es provechoso para los profesores, para que puedan desarrollar una instrucción más efectiva, anticipando las respuestas de los alumnos y diseñando estrategias para la corrección de las mismas cuando se requiera.

Pero plantear a los estudiantes que su comprensión conceptual es incorrecta y darles entonces una explicación, es, a menudo, insuficiente. Mi experiencia, me dice que el camino que debemos emprender pasa necesariamente por enfrentar a los alumnos con sus propios errores, provocar el conflicto en su mente haciéndoles ver la inconsistencia de sus respuestas al pedirles comprobaciones y pruebas, hacerles ver las leyes y principios que están aplicando, y hacerles

reflexionar sobre el efecto de las alteraciones de los datos sobre los resultados.

En este sentido es en el que deberían utilizarse los métodos de cálculo mental que recogen las nuevas orientaciones curriculares oficiales, de tal modo que al poner el énfasis en las propiedades, el lenguaje y las relaciones numéricas que sustentan los métodos se evite caer en los viejos hábitos, que ya hicieron que una vez el cálculo mental cayera en desuso.

REFERENCIAS

- Borasi, R., 1994. Capitalizing on errors as «springboards for inquiry» a teaching experiment, *Journal for Research in Mathematics Education.*, 25, 2. pp. 167-202.
- Butlen, D. y Pezard M., 1991. Calcul mental, calcul rapide, *Grand N.*, 47, pp. 35-59.
- Cokckoft, W. H., 1985. *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid. MEC. (Edición original: *Mathematics Counts*. London. HMSO, 1982).
- D. B. R., 1990. *Documento Base para la reforma de la EGB*. Valencia. Consellería de Cultura. E. y C. de la C. Valenciana.
- D. C. B., 1989. *Documento Diseño curricular base*. Madrid. MEC.
- Giménez, J. y Gironde, L., 1990. *Cálcul a l'escola*. Barcelona. Ed. Graó.
- Gómez, B., 1994. El cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores. (Memoria de Tesis Doctoral. Universitat de València-España). *Dissertation Abstracts International*. (En trámite).
- Matz, M., 1982. "Towards a process model for high school algebra errors", en *Intelligent Tutoring Systems*. D. Sleeman & J. S. Brown, (eds.), pp. 25-49. London, Academic Press.
- MEC (1982). *Programas Renovados de la EGB. Ciclo Medio y Superior*. Madrid: Escuela Española.
- Menchinskaya, N. A., y Moro, M. J., 1975. Instruction in mental and written calculation, en J. Kilpatrick, J. Wirszup, E. Begle, y J. Wilson (eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*. 14, pp. 73-88. Stanford, California: School Mathematics Study Group.
- Plunkett, S., 1979. Decomposition and All That Rot, *Mathematics in School*, 8, 3, pp. 2-5.