

LA CALCULADORA GRÁFICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Juan Manuel García Dozagaret

La informática en educación matemática es sin duda una tecnología cognitiva [Una tecnología cognitiva es cualquier medio que permite trascender las limitaciones de la mente humana]...

....una tecnología cognitiva puede actuar de amplificador, puede servir para abrir posibilidades de pensamiento en direcciones nuevas, puede cambiar radicalmente los contenidos y el enfoque curricular, puede transformar la motivación del alumno, puede transformar la sociología y la cultura del aula cambiando radicalmente el rol del docente.

Abraham Arcavi. "Educación matemática hacia el año 2000». Conferencia de clausura VII JAEM. Madrid.

Podría empezar haciendo un listado de las posibilidades que ofrece el uso de las calculadoras gráficas en nuestras clases, pero cualquier listado que se hiciera ahora, pasados aproximadamente 10 años desde que aparecieron las primeras, sería conocido por la mayoría de los asistentes pues se han dado muchas conferencias, ponencias y cursos en los Centros de Profesores y Recursos, en las diferentes sociedades de profesores españolas y extranjeras, en Jornadas y Congresos, en la mayoría de las revistas se han escrito artículos de opinión e ideas para llevarlas al aula y el propio Ministerio de Educación en las propuestas curriculares ha sugerido su uso.

Además, durante todo este tiempo, hemos vivido y estamos viviendo la Reforma Educativa y se puede y se debe reflexionar sobre el efecto que han tenido sobre la realidad de nuestras clases todas esas propuestas que se han hecho.

Por eso prefiero hablar desde mi experiencia como persona que ha vivido todos estos acontecimientos, que cree en las ventajas de la utilización de esta tecnología y que ha reflexionado sobre lo que se ha dicho y publicado acerca de sus posibilidades y, sobre todo, como profesor que ha intentado utilizarla de forma habitual en las clases de todos los niveles.

LA CALCULADORA ES NEUTRAL

Quiero señalar con este término que la calculadora es solo un instrumento que ofrece una cantidad enorme de

prestaciones para la actividad matemática, pero que el efecto que produce sobre su aprendizaje depende más de la concepción que tenga el profesor sobre la materia y sobre la forma de enseñarla que del hecho de que la utilice o no.

Esta característica tiene una consecuencia muy positiva para la enseñanza y es que su uso puede facilitar el trabajo del profesor desde modelos muy diferentes de actuación en clase. En un modelo de clase expositiva se puede utilizar una calculadora proyectable para explicar conceptos y poner fácil y rápidamente ejemplos pues no hay nada más sencillo que hacer una gráfica, rellenar una tabla de valores, multiplicar matrices, representar una nube de puntos, etc. Y en un modelo de clase en el que se pretenda que los alumnos tengan un papel más activo en su aprendizaje, la calculadora, en temas muy diferentes, permite a cada uno experimentar a su ritmo lo que facilita al profesor alcanzar el objetivo.

Pero esto, que es una indudable ventaja de las calculadoras y, en general, de las nuevas tecnologías puede convertirse en una trampa. El riesgo está en creer que por el simple hecho de utilizarlas ya se está produciendo una renovación en la enseñanza.

Introducir las calculadoras es un hecho positivo en si mismo, pero si nos quedamos solamente ahí y lo único que hacemos es superponer a los contenidos, ejercicios y métodos de enseñanza de las matemáticas de siem-

pre, unas instrucciones sobre el funcionamiento de las teclas y unas normas para utilizarlas y hacer determinados ejercicios, a veces incluso como curiosidad, estamos haciendo un uso insuficiente de ellas, porque, de hecho, hemos estado enseñando lo mismo y de la misma manera sin tenerlas y ante las dificultades para introducirlas en las clases, a medio plazo puede ocurrir que las dejemos abandonadas. No serían el primer ejemplo de material educativo con el que ha ocurrido eso.

Si se quieren usar de forma que influyan realmente en el aprendizaje, habrá que plantearse a fondo el papel que pueden desempeñar y será necesario programar y preparar con detalle lo que deben hacer con ella los alumnos y tener previstas las actuaciones del profesor.

EN LA CALCULADORA HAY MUCHAS HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS

Otra característica de las calculadoras gráficas, es la cantidad enorme de utilidades que ofrecen, y me refiero no sólo a las operaciones con números y matrices y a las funciones del análisis o la estadística, muchas de las cuales ya las tenían las calculadoras científicas, sino a las que incorpora la calculadora gráfica y que podríamos llamar de carácter procedimental, como son los distintos tipos de gráficas, las herramientas relacionadas con la representación gráfica: el «trace», el «zoom» la «tabla» o el dibujo de tangentes o de funciones derivadas o integrales. Si además se añaden las posibilidades de las calculadoras simbólicas, con herramientas para hacer geometría, prácticamente se abarcan todos los temas que se trabajan en estos niveles de enseñanza.

Todo lo anterior, que en principio parece muy positivo, es tan impresionante que no es extraño que se vea con recelo por aquellos profesores que piensan que la calculadora usurpa gran parte de su trabajo y que llega a producir en los alumnos una especie de «maquinitis» que limita el aprendizaje de los contenidos a apretar determinadas teclas sin tener muy claro para qué se hace. Tantas prestaciones pueden incluso llegar a convertirse en un obstáculo para su uso si no se entiende bien el papel que desempeñan todas estas utilidades en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.

Frente a este reto, considero que la única salida razonable es aceptarlo, dando la vuelta a la situación y planteándonos a fondo en qué medida todo esto puede contribuir a mejorar nuestra enseñanza, porque la existencia de las calculadoras no es más que otro argumento a favor de la necesidad de hacer esta reflexión.

LA CALCULADORA PERMITE RESALTAR LA IMPORTANCIA DE LOS CONCEPTOS

Por ejemplo, si se cree que el álgebra sirve para resolver diferentes tipos de problemas en los que intervienen variables que se relacionan mediante una expresión algebraica o una ecuación la calculadora nos puede ayudar a ver el significado de las variables como conjuntos de números, a ampliar el concepto de ecuación y a entender lo que significa la solución, porque permite probar sin esfuerzo, con números, todas las veces que queramos. El «zoom» nos permite aproximar cuanto deseemos la solución, contribuyendo además a que los alumnos se acerquen a la idea de número real. Si por el contrario se considera que el álgebra consiste en manipular expresiones o resolver algunas ecuaciones y unos problemas determinados entonces la calculadora no nos sirve para nada e incluso puede convertirse en un estorbo.

O en el caso de las representaciones gráficas, si se consideran las dificultades que conlleva entender y utilizar el lenguaje gráfico y que el trabajo que debe hacer el alumno cuando comienza a realizar representaciones gráficas es el mismo (excepto dar los valores) que él debe hacer para que la calculadora haga la representación adecuada, es fácil comprender que el hecho de que el alumno use la calculadora para hacer gráficos no sustituye su verdadero trabajo, sino que al contrario, lo potencia si se utiliza también el lápiz y el papel.

Por eso si se quiere que nuestros alumnos entiendan y superen las dificultades que tienen los diferentes conceptos que se utilizan para hacer la representación: continuidad, crecimiento, concavidad, derivada, límite, seguramente podremos ver en la calculadora un aliado que permite explorar los valores de una función y entender con la opción «tabla de valores» o con el «trace» sobre la gráfica lo que significa el crecimiento o la continuidad.

Se puede, por ejemplo, escribir la función $y = x^2$ en el editor de funciones y hacer que la tabla dé a la «x» valores desde el 1.9 en adelante dando pequeños saltos, primero de centésima en centésima y luego de milésima en milésima etc, sin que llegue a sobrepasar el 2, para observar lo que le ocurre a la «y». Pero también se pueden introducir matices en el concepto de límite y buscar con la calculadora el valor que se debe dar a la «x» para que la «y» esté más cerca de 4 que una cantidad determinada elegida por el profesor.

Pero además se puede estudiar la función $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$

(que se obtiene multiplicando y dividiendo la función x^2 por $x - 2$) haciendo la gráfica con la calculadora y

pidiendo que expliquen por qué es casi idéntica a $y = x^2$ excepto en el hueco que deja en el valor que corresponde a $x = 2$, haciéndoles utilizar la opción «tabla» para explorar los valores alrededor de $x = 2$, y para explicar si la función tiene o no límite en $x = 2$.

Es difícil realizar todo este trabajo si no se cuenta con la calculadoras. La forma de hacerlo sin ellas consiste en dar explicaciones apoyadas en gráficas hechas a mano dando tan sólo algunos valores concretos; el tipo de comprensión que se produce de esta forma es menor y completamente distinto. La calculadora facilita que los alumnos profundicen en los conceptos permitiendo que se traten más a fondo sus dificultades de aprendizaje.

LA CALCULADORA PERMITE ABORDAR DE OTRA FORMA LOS CONCEPTOS

La calculadora permite abordar los conceptos de otra manera, por ejemplo en el caso del concepto de límite que está estrechamente ligado al concepto de infinitamente pequeño o al de infinitamente grande la calculadora proporciona experiencias sobre el infinito y lo infinitamente pequeño y contribuye a hacer entender el significado de que « x » tiende a infinito o que algo es infinitamente pequeño.

Una actividad puede ser encontrar los puntos de corte de las funciones: $y = 2^x$ e $y = x^{10}$ pidiendo a los alumnos que representen las gráficas y que encuentren con el «zoom» o con la «tabla» aproximadamente las soluciones. Enseguida aparecen dos soluciones en el intervalo $(-2, 2)$, pero la función potencial queda por encima de la exponencial y explorando ambas funciones con la tabla surge la pregunta de si se volverán a cruzar al aumentar el valor de la « x ». El proceso de búsqueda con la «tabla» y en la gráfica conduce a encontrar a otra solución en el intervalo $(58,59)$ ¡la « y » está en $(4'308 \times 10^{17}, 5'112 \times 10^{17})$!

La exploración con la «tabla» resulta una actividad especialmente interesante en la clase. Se estudian las funciones exponencial y potencial, se estudia el crecimiento y la notación científica, y hay un contacto directo

con los números reales «grandes». ¿Y qué pasa si hacemos la base de la exponencial más pequeña y el exponente de la potencia más grande?

En la revista SUMA, nº 22 [2] aparece una actividad relacionada: ¿Qué crece más deprisa la función $f(x) = 2^{x/2.5}$ o la parábola $100x^2$?

CONCLUSIONES

La calculadora, como dice Abraham Arcavi [1], permite «abrir posibilidades de pensamiento en direcciones nuevas ... cambiar radicalmente los contenidos y el enfoque curricular ... transformar la motivación del alumno ... cambiar drásticamente el rol del docente». Por eso puede ser un aliado de los profesores y abrir un campo enorme en la investigación didáctica, tanto a los que se cuestionan su trabajo y quieren cambiarlo, como a los investigadores.

La calculadora puede ayudarnos en las clases para exponer los temas, realizar las tareas concretas, motivar a los alumnos, favorecer el autoaprendizaje haciendo que los alumnos participen en el proceso de descubrimiento y enseñándoles a pensar. También puede fomentar estrategias personales frente a los problemas.

Pero es necesario que se haga un esfuerzo para ofrecer a los profesores las ideas y los materiales didácticos y el apoyo necesarios para favorecer su uso, si no se hace esto se corre el peligro de que ante las dificultades que en la práctica tiene el emplearlas dejemos de hacerlo. Porque el simple hecho de tenerlas a nuestra disposición en número suficiente y transportarlas al aula ya puede suponer un problema, pero además hay que disponer de un retroproyector y de un aula para utilizarlo, aprender su funcionamiento y enseñar su manejo, buscar colaboración con algunos compañeros para diseñar actividades e incluir su uso en los exámenes, convencer a otros para que las usen o al menos que no las prohíban,..... Y por si fuera poco en un examen tan importante como el de la Selectividad todavía no se permite utilizar las calculadoras gráficas.

BIBLIOGRAFÍA

- Arcavi, A: *Educación matemática hacia el año 2000*. Conferencia de clausura VII JAEM. Madrid 1995.
 Salinas B., E: *La calculadora gráfica en análisis*. Revista Suma, nº 22. Junio 1996. Zaragoza.
 Edwards and Penney: *Calculus with analytic geometry*. Prentice Hall International. 1994.