

DESAJUSTES Y MEJORAS EN EL TRATAMIENTO DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESO

Constantino de la Fuente Martínez
Antonio Arroyo Miguel
Ezequiel Santamaría Pardo

1. INTRODUCCIÓN

La experiencia que se va acumulando en los departamentos didácticos de Matemáticas, en el proceso de implantación (en muchos casos anticipación) del nuevo currículo, está proporcionando datos sobre el grado de adecuación del mismo y sobre los problemas de todo tipo que van apareciendo. Esta experiencia, junto con la necesaria reflexión sobre la práctica y el análisis comparativo de los currículos de las Matemáticas en la ESO y el Bachillerato ayudan a delimitar algunos desajustes sobre los que deseamos profundizar, todos ellos conectados con el tratamiento de algunos contenidos.

La presente ponencia trata de hacer explícitos algunos de estos desajustes, proponiendo también algunas orientaciones o posibles salidas para mejorar la puesta en práctica del currículo.

Los factores y criterios que hemos tenido en cuenta a la hora de seleccionar aquellos contenidos que son más relevantes para el tema que nos ocupa han sido los siguientes:

- Su carácter instrumental y su necesidad de cara a estudios posteriores.
- El nivel de dificultad que presentan en el proceso de enseñanza aprendizaje, que puede ser elevado o al contrario. Esto puede aconsejar una modificación en la profundidad del tratamiento de los mismos.
- La diversidad del alumnado en el aula, pues en cada grupo hay unas grandes diferencias y un alto grado de heterogeneidad. Esto se acusa muchísimo en 3º y se contrarresta un poco en 4º según las optativas elegidas por cada estudiante.
- La situación actual de desvertebración entre los dos ciclos que componen la etapa, debido al hecho de

que en la mayoría de los lugares se imparten en diferentes centros.

Como resultado de la reflexión sobre la puesta en práctica del currículo de Matemáticas en la ESO y el Bachillerato Logse, vamos a señalar algunos de los contenidos o bloques de contenidos encuadrables en los criterios anteriores:

- Los Polinomios.
- La Trigonometría.
- La Geometría.
- La Estadística Descriptiva.

A continuación exponemos la problemática particular de cada uno de ellos.

2. POLINOMIOS

Los polinomios como tales no aparecen en el currículo de ESO, aunque el trabajo posterior en Bachillerato hace necesario su tratamiento, aunque no de cualquier manera, lo más pronto posible.

El tema de funciones de 1º de Bachillerato, tanto por los tipos de funciones como por el uso que se hace de ellas, requiere el conocimiento de algunos procedimientos y destrezas sobre el tema que, aunque no impliquen un dominio total, sí deben haberse iniciado con anterioridad.

En cualquier caso, si consideramos que el trabajo con las expresiones literales comprende también a los polinomios, nos encontramos con algunos problemas cuando se intenta trabajarlos en la ESO, algunos de ellos son los siguientes:

- ¿Cómo entrar en ellos de manera que puedan tener un significado para el alumnado?
- ¿Su tratamiento debe centrarse en las operaciones, con un enfoque algorítmico y procedimental? ¿Hasta qué punto?
- ¿Se deben introducir también las fracciones algebraicas?
- ¿El tratamiento debe ser diferenciado para el alumnado de la opción A o de la opción B de las matemáticas de 4º curso de ESO?

A modo de puentes que sirvan para la adecuada toma de decisiones dentro del marco que nos proporciona el currículo abierto, vamos a enumerar unas orientaciones que intentan equilibrar las distintas posturas posibles:

- Se pueden trabajar de un manera gradual y restringiendo el grado a 3 ó 4 como mucho.
- Se puede trabajar la descomposición polinómica utilizando las figuras geométricas dando así un significado al concepto de polinomio. Pueden consultarse las actividades del Anexo 1, que ilustran este enfoque.
- Se puede iniciar el estudio partiendo de las funciones polinómicas y buscando sus puntos singulares, estudiando los signos de la función y su correspondiente descomposición.
- El paso gradual de la función lineal a la afín y después a la cuadrática, facilita un posible tratamiento para otras funciones polinómicas de grado tres o cuatro.
- El tratamiento debe ser diferenciado para las dos opciones de 4º curso, siendo más clara la necesidad de tratar este tema en la opción B.
- El trabajo con la hipérbola puede propiciar la aparición de fracciones algebraicas sencillas. En este caso concreto se pueden usar los movimientos en el plano para pasar de unas hipérbolas a otras un poco más complejas, de manera análoga a como se hace con la parábola. También se pueden visualizar en el ordenador.
- Hay dos ideas claves en el enfoque que debe presidir el tratamiento de estos contenidos:

- Comenzar dando significado, después pasar a las operaciones; nunca entrar directamente en éstas.
- Utilizar situaciones reales para que aparezcan funciones y pasar después al polinomio correspondiente.

3. LA TRIGONOMETRÍA

La Trigonometría, que sí aparece en el currículo de ESO, también presenta algunos desajustes que son de más fácil solución si pensamos que el esfuerzo en su aprendizaje es pequeño en comparación con su utilidad posterior. Reseñamos a continuación algunos de ellos:

- El tratamiento para el alumnado dirigido a estudios de Bachillerato o de Ciclos Formativos es claramente insuficiente, por ejemplo en las siguientes cuestiones:
- No aparecen ángulos de cualquier cuadrante ni las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos de diferentes cuadrantes.
- No se tratan situaciones de resolución de triángulos cualesquiera ni de ángulos cualesquiera.
- No aparece el estudio de las funciones trigonométricas como ejemplos de funciones periódicas. Pueden consultarse las actividades del Anexo 2, que sirven de ejemplo para trabajar estos contenidos
- Se olvidan las continuas interconexiones entre la trigonometría y la geometría, tratándose con un enfoque excesivamente compartimentado.
- En el estudio de los movimientos en el plano se habla de giros de cualquier amplitud, en cambio en la trigonometría parecen no existir las razones trigonométricas de esos ángulos.

Entre las posibles orientaciones para mejorar el tratamiento de los contenidos de trigonometría, vamos a destacar las siguientes:

- La trigonometría no entraña las mismas dificultades conceptuales que otros contenidos matemáticos, lo que puede permitir la profundización en ellos sin generar problemas de comprensión de los conceptos en el aprendizaje.
- El teorema del seno y del coseno se pueden abordar, ya que son más asequibles que el resto, y permiten la resolución de triángulos cualesquiera. En el teorema del seno se puede comenzar haciendo comprobaciones experimentales, y el del coseno

utilizando la generalización del teorema de Pitágoras.

- Hay gran facilidad para encontrar ejemplos desde la realidad, de manera que las razones trigonométricas pueden introducirse desde la proporcionalidad y con ejemplos prácticos.
- Teniendo en cuenta que la calculadora nos dará la solución más pequeña, se pueden resolver situaciones del tipo: «si $\text{sen } a=0,57$, ¿cuánto vale $\cos a$?», averiguando posteriormente el posible valor de a en la circunferencia goniométrica y teniendo presente el signo. Hay que tener en cuenta que la calculadora resuelve la parte algorítmica, pero después hay que interpretar y razonar el resultado.
- Las funciones $y=\text{sen } x$, $y=\text{cos } x$ pueden trabajarse con el uso de tablas y recopilando los valores del seno para distintos ángulos. También con el uso del ordenador se pueden visualizar con facilidad, analizando la gráfica obtenida y sacando resultados sobre su periodicidad.
- Aprovechar las conexiones mutuas entre la trigonometría y la geometría, por ejemplo, usando la primera en el cálculo de áreas y volúmenes en geometría, o teniendo en cuenta la semejanza para introducir las razones trigonométricas.

4. LA GEOMETRÍA

La Geometría felizmente recuperada en el currículo de la ESO, al menos en lo que se refiere al 2º ciclo, también presenta varios problemas, la mayoría de ellos ligados a la actual situación de desvertebración de la etapa. La coordinación entre los dos ciclos, ahora prácticamente inexistente en los lugares en que se imparte en centros separados, puede paliarlos en la medida que seamos conscientes de ellos.

Vamos a destacar los siguientes:

- El tratamiento de la Geometría en los libros de texto es excesivamente abundante. Por ejemplo, es inadecuado imposible el planteamiento de tantos contenidos, de tantas demostraciones y de tanta medida.
 - El enfoque de la geometría en el primer ciclo pasa muy pronto a la parte métrica, con muchos cálculos de medidas, de áreas y volúmenes.
 - Teniendo en cuenta el Modelo de Van Hiele, se sitúa al alumnado directamente en el nivel 3 del modelo, con lo que el profesor o profesora da por hecho aspectos que parecen elementales pero que no se han asimilado. Por ejemplo: ¿Qué es lo característico de un rombo?
 - Hay contenidos que se dan todos los años y no se ven avances de un curso para otro en su tratamiento; se repiten machaconamente sin conseguir los objetivos propuestos en cada momento. Por ejemplo: el teorema de Pitágoras, el teorema de Thales, o cuestiones más conceptuales como el significado de la altura de un triángulo o las características de las figuras geométricas.
 - Nos encontramos con frecuencia con que el alumnado ha ido consolidando procedimientos erróneos, como por ejemplo: «esa figura es parecida a esta otra, por tanto se cumple también...», «parece un ángulo recto, yo lo doy como si lo fuera...», «se ve en la figura, no hace falta justificarlo...», etc.
- Para intentar neutralizar algunas de estas dificultades, se proponen a continuación algunas sugerencias que pueden contribuir a ello:
- El tratamiento en el primer ciclo de ESO debe ser mucho más constructivo, manipulativo, descriptivo y visualizador.
 - En el segundo ciclo, debe haber un enfoque más métrico, con el uso de algoritmos y fórmulas en el cálculo de áreas y volúmenes, sin olvidar el significado de lo que se está haciendo o el de las figuras que se utilizan. La clave puede estar en que las fórmulas no tienen un verdadero significado si antes no lo tienen las figuras sobre las que actúan.
 - El indispensable e irrenunciable uso de figuras debe ir acompañado de un esfuerzo para que no se utilicen los dibujos como única fuente de argumentación, en base a «lo que parece la figura».
 - Los movimientos, desde el enfoque intuitivo con el que se trabajan, puede iniciarse en el primer ciclo, dejando para el segundo la composición de movimientos y el estudio de mosaicos.

5. LA ESTADÍSTICA

La Estadística descriptiva no presenta grandes dificultades conceptuales en su tratamiento, aunque sí apare-

cen algunos desajustes de otro tipo, como en los casos siguientes:

- El cálculo puramente algorítmico y repetitivo de parámetros se sigue haciendo a lo largo de toda la ESO, sin ningún tipo de revisión o replanteamiento.
- Esta cálculo suele estar acompañado de una gran falta de significado de los conceptos que se manejan.
- Hay graves deficiencias en la interpretación y análisis de resultados cuando se combinan varios parámetros, habitualmente media y desviación típica, para sacar conclusiones.

Para la mejora en estos aspectos pueden ser muy adecuadas las siguientes orientaciones:

- El cálculo de parámetros, debe iniciarse en el primer ciclo, lo que puede ayudar a la consolidación de las destrezas de cálculo numérico con decimales, dejando para el segundo una profundización en el significado y uso combinados de los mismos.
- Para profundizar en el significado de los conceptos no hace falta calcular mucho, sino realizar actividades específicas que ayuden a darle sentido, a construirlo.
- El uso de la calculadora para determinar parámetros puede ser muy adecuado, sobre todo si lo que se desea es reflexionar sobre los resultados, comprobar la conjetura que previamente se hubiera propuesto, etc.
- El trabajo sobre la desviación media, con anterioridad a la aparición de la desviación típica, puede ser muy útil para ayudar a dar sentido a ésta última.
- Conectar el tratamiento de las nubes de puntos con la idea de función, pudiendo comenzar en tercer curso, con un planteamiento intuitivo. En cuarto puede usarse la calculadora para determinar el coeficiente de correlación o la recta de regresión y poder comprobar la adecuación de los pronósticos efectuados de manera intuitiva.

6. CONCLUSIONES GENERALES

A lo largo de la ponencia se hace hincapié en varias cuestiones referentes a algunos contenidos de las Matemáticas de ESO: algunas dificultades o problemas que aparecen, junto con varias orientaciones y ejemplos para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Detrás de la reflexión efectuada hay un marco de conceptos y creencias sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el conocimiento matemático, que consideramos conveniente hacer explícito con el fin de explicar y justificar algunas de las argumentaciones presentadas.

Se presentan algunos de ellos, a modo de conclusiones globales:

- La construcción de significados está condicionada, no sólo por la dificultad intrínseca del contenido a enseñar-aprender sino también por las estrategias metodológicas que nos planteemos para su tratamiento en el aula (actividades de aprendizaje, materiales y recursos complementarios que se utilicen, papel del profesor y del estudiante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, etc).
- Las diferencias crecientes entre el alumnado, a medida que se avanza en los cursos de la etapa, junto con las condiciones de falta de vertebración en las que se está llevando a cabo la implantación, aumentan las dificultades didácticas propias de esta etapa nueva.
- Las necesidades posteriores, generadas por el currículo de Matemáticas, junto con el hecho natural de que casi todos el alumnado de ESO continúa estudios de Bachillerato, hacen necesarias reflexiones que ayuden a mejorar aquellos aspectos conflictivos de este proceso de cambio del sistema educativo.
- La enseñanza de las Matemáticas sigue teniendo pendiente una exhaustiva reflexión de tipo epistemológico sobre la estructura del conocimiento matemático concreto que se enseña. Esta reflexión es la que puede iluminar, de una manera más fundamentada, la toma de decisiones sobre lo que se enseña y cómo se enseña, teniendo en cuenta el contexto en el que se lleva a cabo.

ANEXO 1 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO

Actividades para el estudio de la factorización de polinomios. Adaptadas a partir de investigaciones del profesor D. Vicente Meavilla Seguí.

1. Soporte gráfico (para coeficientes números naturales).

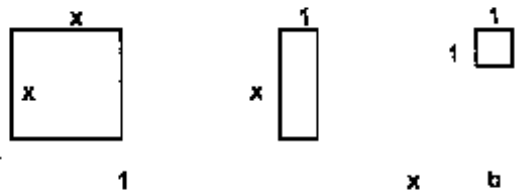


Fig. 1

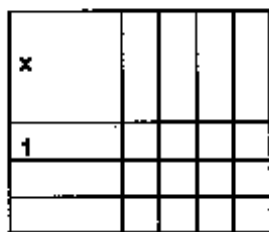


Fig. 2

Utiliza las áreas de las figuras superiores y razona por qué las áreas de las figuras 1 y 2 se pueden expresar de estas dos formas:

forma aditiva

f. multiplicativa

Fig. 1: $x^2 + 7x + 12$

$(x+3)(x+4)$

Fig. 2: $x^2 + ax + bx + a = x^2 + (a+b)x + ab$

$(x+a)(x+b)$

2. Tomando como modelo la figura 1, haz otra parecida, si es posible, para los siguientes polinomios:

- $x^2 + 5x + 4$
- $x^2 + 7x + 10$
- $x^2 + 6x + 7$

3. Escribe estos polinomios en la forma multiplicativa.

4. Repite ambas cosas con los polinomios:

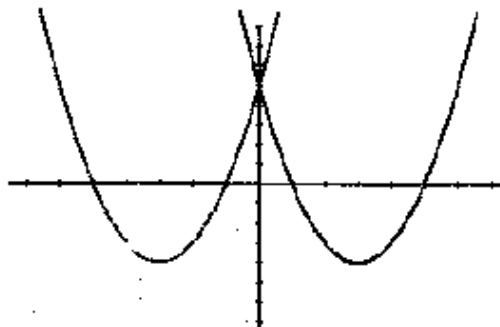
- $x^2 + 8x + 15$
- $x^2 + 6x + 9$
- $x^2 + 8x + 10$

5. Conclusiones de todo esto:

¿Qué números naturales se pueden colocar en los lugares de las interrogaciones para que sea cierta la igualdad: $x^2 + ?x + ? = (x+?)(x+?)$.

Dado el polinomio de segundo grado $x^2 + px + q$. Para que se pueda escribir como $(x+a)(x+b)$, ¿qué relaciones deben cumplir los números naturales p, q, a y b?

Soporte gráfico (para valores enteros de los coeficientes).



A la función $f(x) = x^2 + 6x + 5$ asociamos la parábola de la izquierda, y a $g(x) = x^2 - 6x + 5$ asociamos la parábola de la derecha (recuerda que $f(x)$ y $g(x)$ son simétricas respecto al eje OY).

6. Con los gráficos delante completa las igualdades:

a) $x^2 + 6x + 5 = (\quad) \cdot (\quad)$

b) $x^2 + 6x + 5 = (\quad) \cdot (\quad)$

7. Aplica lo mismo a las siguientes parejas de expresiones:

a) $x^2 + 6x + 9$ $x^2 - 6x + 9$

b) $x^2 + 8x + 15$ $x^2 - 8x + 15$

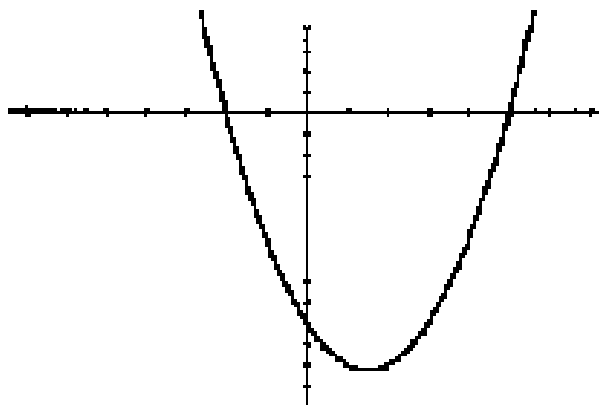
c) $x^2 + 7x + 6$ $x^2 - 7x + 6$

8. Observamos una vez más las parábolas del soporte gráfico para fijarnos en que:

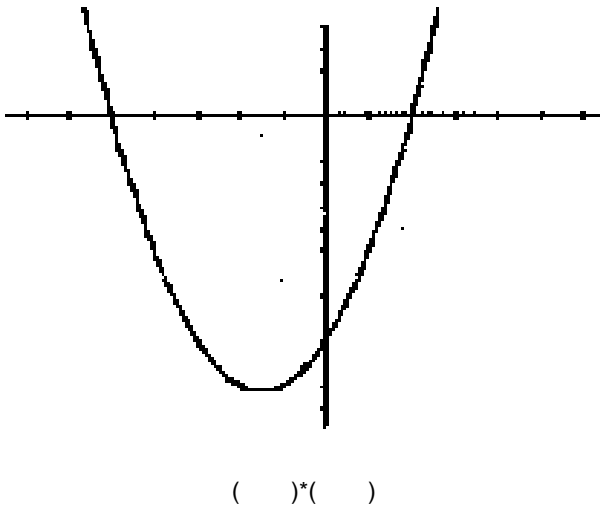
$x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$, para la parábola de la izquierda.

$x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$, para la parábola de la derecha.

Escribe el polinomio factorizado correspondiente a las figuras:



() · ()



9. Asocia a cada polinomio su factorización:

$$x^2 - 3x - 10 \quad (x - 2)(x + 7)$$

$$x^2 - 3x - 10 \quad (x + 5)(x - 2)$$

$$x^2 - 5x - 14 \quad (x - 5)(x + 2)$$

$$x^2 - 5x - 14 \quad (x + 2)(x - 7)$$

10. Factoriza los polinomios:

a) $x^2 + 6x - 16$

b) $x^2 + 7x - 18$

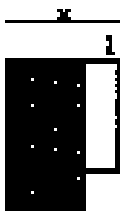
c) $x^2 + x - 30$

11. Teniendo en cuenta las dos formas de expresar el polinomio

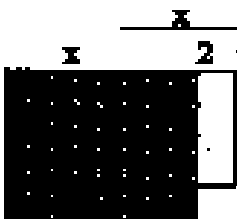
$$P(x) = x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4),$$

cuál de las dos formas es más adecuada para resolver la ecuación $P(x) = 0$

12. ¿Es cierto que la superficie sombreada de las figuras tiene el valor que aparece desarrollado?

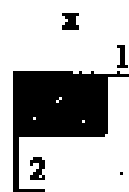
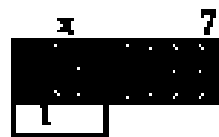
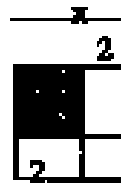


$$(x - 1)(x + 2) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$$



$$(2x - 2)(x + 3) = 2x^2 + 6x - 2x - 6 = 2x^2 + 4x - 6$$

13. Calcular, de dos formas diferentes las áreas de las siguientes figuras sombreadas



14. Dibuja una figura cuya superficie represente a los siguientes polinomios:

$$*(x+2)(x-1) \quad *x^2 + x - 12$$

$$*(x-1)(x-1) \quad *x^2 - 6x - 12$$

$$*x^2 + x - 2 \quad *2x^2 + x - 1$$

ANEXO 2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Actividades para el estudio de la función seno.

1. Completar la siguiente tabla:

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	225°	270°	360°
Radicales		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0

Algunos de los valores del seno tendrás que buscarlos en la calculadora, pero la mayoría de ellos deben conocerlos sin necesidad de utilizarla. Es preferible que, siempre que puedas, utilices tus conocimientos, así evitarás errores de precisión con los decimales. Por ejemplo: $\sin 0 = 0$, pero si tecleas en la calculadora $\sin 3,14$ aparecerá 0,0015.

2. Veamos ahora la gráfica de la función seno (Utilizaremos el programa Función para Windos).

- Comprueba en la gráfica algunos de los valores obtenidos en la tabla anterior (En algunos casos, puede haber pequeñas diferencias por la razón apuntada anteriormente, la precisión de los decimales. Debes reconocer fácilmente esas situaciones).
- Varía los extremos del eje de abscisas. Puedes comprobar que se trata de una función periódica. ¿Sabrías decir cuál es el período de la función?
- ¿Es una función continua? ¿Por qué? ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad?
- ¿En qué puntos corta el eje de abscisas?
- ¿Cuál es el valor máximo alcanzado? ¿y el mínimo?
- ¿En qué puntos alcanza el máximo? ¿y el mínimo?
- Describe los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.

3. ¿Qué le ocurre a la función $y = \text{sen}(x)$ si la sumamos una cantidad constante? Observa las gráficas de:
 $y = \text{sen}(x) + 2$ $y = \text{sen}(x) + 5$ $y = \text{sen}(x) - 3$
 Describe con detalle como son las gráficas de las funciones de la forma **$y = \text{sen}(x) + k$** .

Para ello contesta a las preguntas anteriores y compara los resultados obtenidos con la función $y = \text{sen}(x)$.

4. Recuerda lo que le ocurre a una función cuando cambiamos la variable x por la variable $x-a$.

Observa las gráficas de:

$$y = \text{sen}(x-2) \quad y = \text{sen}(x+5) \quad y = \text{sen}(x-P).$$

Describe con detalle, cómo son las gráficas de las funciones de la forma **$y = \text{sen}(x + c)$** .

¿Cómo serán las funciones del tipo: **$y = \text{sen}(x + c) = k$** ?

5. A la vista la función anterior, ¿podrías hacer un esbozo de como serán las funciones?:

$$y = 2\text{sen}(x) \quad y = 5\text{sen}(x) \quad y = 0,5\text{sen}(x).$$

En general, describe lo más fielmente posible como son las funciones del tipo **$y = a.\text{sen}(x)$** .

Repite el proceso anterior para las funciones del tipo:

$$\mathbf{y = \text{sen} (b.x).}$$

Describe, por último, cómo serán las gráficas de las funciones del tipo: **$y = a.\text{sen}(b.x)$** .