

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y NIVELES OPERATORIOS

Manuel Alcalá

Quisiera aprovechar la ocasión que me ha brindado la Organización de estas octavas JAEM al invitarme, cosa que agradezco, para exponeros y someter a vuestra consideración crítica algunas de las ideas centrales de la propuesta didáctica que, año tras año, trato de concretar en el aula y de difundir por medio de cursos de formación y grupos de trabajo.

La enseñanza de las matemáticas, en los niveles que yo conozco, que son los de Primaria y parte de la actual ESO, no ha mejorado gran cosa en los últimos 30. Y ello a pesar de las aportaciones de la investigación (Psicología, Didáctica,...); a pesar de haberse superado aquel gran bache que supuso la época del estructuralismo y los contenidos conjuntistas; a pesar de la abundancia de cursos de educación matemática que se imparte al profesorado, del cúmulo de material didáctico comercializado, etc.

A pesar de todo ello, hoy siguen teniendo validez las palabras que escribiera Z.P. Dienes hace 30 años:

Actualmente son muy pocos los profesores de matemáticas, cualquiera que sea el nivel en que trabajan, que se encuentren honestamente satisfechos del modo como transcurre su enseñanza. Efectivamente, son muchos los niños que sienten antipatía por las matemáticas –antipatía que aumenta con la edad– y muchos los que encuentran dificultades casi insuperables en las cuestiones más sencilla. Hay que reconocer que la mayor parte de los niños nunca logra comprender la significación real de los conceptos matemáticos. En el mejor de los casos, se convierten en consumados técnicos en el arte de manejar complicados conjuntos de símbolos, pero la mayor parte de las veces acaban por desistir de comprender las imposibles situaciones en que las exigencias matemáticas escolares de hoy les colocan. La actitud más corriente consiste, simplemente, en esforzarse en «aprobar el examen», tras lo cual nadie dedica a las matemáticas ni un pensamiento más. Con muy pocas excepciones, esta situación se puede considerarse lo bastante general como para llamarla normal (1)

Por supuesto que la situación actual de la enseñanza de la matemática se debe a la confluencia de múltiples causas. Sin embargo, en mi opinión, uno de los factores más influyentes es la concepción dominante entre el profesorado y la familias sobre lo que es la matemática escolar.

Desde esa concepción, mayoritariamente compartida, se suele entender por matemática escolar un conglomerado característico integrado por:

- Un conjunto de técnicas específicas, sobre todo algorítmicas (cuentas y «trucos» de cálculo).
- Unos modelos de resolución de problemas, que son cuatro y sus variantes.
- Y unos conceptos peculiares : decena, ángulo, fracción, etc.

A esa concepción dominante del conocimiento matemático escolar se une otra idea muy extendida: la de que el conocimiento matemático escolar antes citado puede ser transmitido -y, por tanto, aprendido- mediante enseñanza directa concretada en la secuencia «explicación verbal (pizarra)-ejercitación (lápiz y papel)». Es más, la simbiosis entre ambas concepciones se asienta en otra idea firmemente arraigada, en una creencia : *toda enseñanza produce aprendizaje*.

Pero la realidad de las aulas y el fracaso escolar generalizado muestran que toda enseñanza no produce aprendizaje, que la enseñanza directa o metodología de pizarra, papel y lápiz no es ni la mejor ni la única forma de abordar la enseñanza de la matemática, máxime en Primaria. Y, por supuesto, la concepción de la matemática antes citada es una interpretación reduccionista, tendente más a destacar el aprendizaje de rutinas y la

memorización cuantitativa de datos que a priorizar el desarrollo del razonamiento o la capacidad de resolución de problemas.

Mi intención no es provocar un debate sobre esos complejos temas. Por el contrario, sólo pretendo exponer unas ideas que, traducidas en práctica concreta, pueden ayudar a mejorar la enseñanza de la matemática en la escuela. Esas ideas se centran, de un lado, en interpretar de un modo diferente la matemática escolar; de otro, en apreciar de distinta forma el aprendizaje matemático escolar. Y, finalmente, en concretar los dos tópicos anteriores organizando el trabajo y la dinámica del aula bajo principios coherentes con ellos. Esos tres pilares forman un entramado, una propuesta que pretende ser alternativa a la práctica rutinaria actual. En estas páginas trataremos de los dos primeros.

1. LA MATEMÁTICA COMO LENGUAJE

Es cierto que la matemática escolar puede ser concebida, organizada y enseñada desde distintas perspectivas. Y que en cada una de ellas se enfatiza alguno de los aspectos que la conforman: algoritmos, cálculo mental y competencia numérica, razonamiento, resolución de problemas, pensamiento simbólico y comunicación codificada, etc. Así, quienes enfatizan los aspectos antes citados como representativos del sentir mayoritario (técnicas algorítmicas, modelos de resolución, memorización) organizan el contenido y la enseñanza hacia la consecución de objetivos coherentes con ello. Otros, en cambio, ponen el acento en la resolución de problemas —«corazón de la matemática»—, organizando contenidos y enseñanza desde esa perspectiva, priorizando el desarrollo de estrategias y el cultivo del razonamiento. Otros enfatizan, por ejemplo, el cálculo numérico nucleando en torno a ello prácticamente toda la actividad escolar. También hay quien prioriza el descubrimiento y la creatividad. Etc.

Ahora bien, puede existir un enfoque que ofrezca una visión integradora de los diferentes contenidos que conforman el currículo escolar al tiempo que sirva de guía adecuada para interpretar el aprendizaje y la enseñanza a lo largo de la escolaridad obligatoria. Ese enfoque, que es el que voy a tratar de defender, parte de la consideración de la matemática como un lenguaje, como un sistema simbólico complejo de rasgos peculiares.

La idea central de esta hipótesis explicativa es la de afirmar que el rasgo fundamental de la matemática escolar es el de ser un sistema simbólico complejo, con características propias y distintas a las de otros sistemas simbólicos: música, lengua, etc.

Cierto que la «matemática no es el lenguaje», ni tampoco puede afirmarse tajantemente que «la matemática es una lengua o idioma». Pero es grande el número de autores y de trabajos que tratan esos aspectos. Uno de ellos, David Pimm en su obra «El lenguaje matemático en el aula» concluye afirmando:

«Las matemáticas disponen de un sistema de escritura que es complejo y está regido por reglas, [...] El aspecto simbólico de las matemáticas escritas, junto con el estímulo que brindan los matemáticos para hacer tabla rasa de la distinción entre símbolo y objeto, además de la naturaleza abstracta de los mismos objetos matemáticos, se unen para producir la percepción de que las matemáticas constituyen un lenguaje.» (2).

Considerar la matemática como un lenguaje es útil, es una buena estrategia didáctica, al menos por tres razones:

- Una, porque ayuda a interpretar la mayoría de las dificultades que tienen los niños en su aprendizaje. Es sabido que gran parte de las dificultades de aprendizaje son semánticas o bien sintácticas, esto es, son debidas a la ausencia de significado que muchos niños encuentran en la simbología matemática y/o al desconocimiento de las reglas por las que se rige el manejo de los símbolos.
- Otra, porque es una visión integradora que procura dar la debida importancia a cada uno de los componentes de una buena formación matemática: resolución de problemas, comunicación, memorización de datos, formación de conceptos, etc.. Esto es, no se trata de situarse en ninguna de las tendencias actuales de la enseñanza —enseñanza directa, enseñanza por descubrimiento, resolución de problemas, etc.—, sino que pone el acento en la construcción progresiva de los significados, en los aspectos comunicativos y en el dominio sintáctico orientado hacia la operatoria.

M. Fernández afirmaba en un artículo publicado en SUMA:

«... considero que la meta final de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en los niveles no universitarios, ha de ser que el alumno adquiera una cierta soltura en la interpretación y escritura del lenguaje simbólico.» (3).

Yo no creo que esa sea «la meta final», pero sí que el relativo dominio del sistema simbólico sea la clave, siempre que se considere diacrónica y evolutivamente el tema en cuestión.

- Y, en tercer lugar, porque es una buena guía para organizar, planificar e interpretar la enseñanza a lo largo de la escolaridad obligatoria. En efecto, son los rasgos inherentes a los procesos de simbolización, las dificultades en la manipulación de los símbolos y el uso de los códigos para razonar y resolver problemas los tres puntos en torno a los que gira la acción escolar, a los que se les dedica más tiempo en el aula de Primaria, los puntos en torno de los cuales se acumula la mayoría de las dificultades de aprendizaje.

La escuela ofrece la matemática a los niños presentándola como un sistema codificado, presentación que va haciendo de forma planificada y graduada. La matemática aparece así como un sistema del que se va enseñando, transmitiendo, diferentes contenidos parciales, diferentes conceptos y procedimientos, pero por medio de un lenguaje específico cada vez más abstracto y alejado de la experiencia física. Es así como ese lenguaje, que en principio no es sino el medio para transmitir ideas y operaciones con entes, deviene en objeto mismo de conocimiento, es así como se acaba diciendo que «el medio es el mensaje».

De ello vamos a tratar a continuación, pero antes quisiera puntualizar algo sobre el aprendizaje y los conceptos.

2. EL APRENDIZAJE Y LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS CLAVE

En orden a establecer una teoría que nos sirva de referencia tanto para la comprensión de los fenómenos de aprendizaje en el aula, como para la planificación y desarrollo de la enseñanza, interesa concebir el aprendizaje como un *proceso continuo* de construcción de *significados*, es decir, como un proceso de *conceptualización progresiva* que se produce, entre otras cosas, gracias a la *creación y uso de sistemas simbólicos*, sistemas que, como veremos, son cada vez más abstractos y *jerarquizados*.

Vayamos por partes.

A) En primer lugar conviene resaltar el carácter de proceso que tiene todo aprendizaje complejo, al menos el aprendizaje matemático escolar. Carácter más bien de *largo e inacabado proceso*.

Si se exceptúa la memorización de ciertos datos, o la mecanización de algunas rutinas, el aprendizaje matemático, por su carácter de operatorio es muy dife-

rente a la mera retención y acumulación de información, o a la práctica de una habilidad como puede ser un deporte o una técnica. Es por ello por lo que hay que apreciar de modo evolutivo la formación de conceptos y el aprendizaje de procedimientos. La noción de decena, de decimal, de fracción, de plano... no se alcanza tras una breve explicación del maestro o la lectura del libro de texto, sino tras un largo y prolongado proceso de significación, pues aprender conceptos, propiedades, procedimientos es dar significado al contenido que el maestro trata de transmitir, es subjetivar el conocimiento objetivo.

Entenderemos por significados las *representaciones subjetivas* de todo aprendizaje, representaciones que el individuo construye en su proceso de aprendizaje, en su proceso de apropiación del conocimiento ya existente. Es por ello por lo que el saber matemático, si bien es objetivo e independiente del aprendiz, no por ello deja de ser subjetivo, pues el proceso de aprendizaje no es sino un proceso de subjetivación de la cultura del entorno: en nuestro caso, del conocimiento matemático.

B) Vistas las cosas de este modo cabe preguntarse: ¿entonces, cómo son los conceptos matemáticos? Efectivamente, los conceptos que tienen mayor importancia en la matemática escolar podemos adjetivarlos de dinámicos, polifacéticos e idiosincrásicos. *Dinámicos* por cuanto que son siempre inconclusos. Tomemos la idea de número o, por ejemplo, el concepto de fracción y veremos cómo la conceptualización de la fracción va pasando por sucesivos estadios: desde la fracción como representación simbólica de parte de una cantidad (niños de 8-9 años) hasta la idea de racional, pasando sucesivamente por otras diferentes significaciones. Es decir, no son conceptos estáticos, acabados, definidos eternamente, sino que van siendo configurados progresivamente por quien aprende.

Con la calificación de *polifacéticos* hago referencia al hecho de que no suelen tener una única significación. En efecto, los diferentes significados dependen de la situación, del problema y, sobre todo, del nivel o conocimiento previo del aprendiz. Finalmente, el adjetivo *idiosincrásicos* se refiere al hecho de que en el proceso de aprendizaje (de apropiación de, de subjetivación del saber) se personaliza el concepto, conformándose una representación subjetiva que sólo es comunicable parcialmente y mediante los códigos establecidos comúnmente.

Por supuesto, quienes piensan que los conceptos son transmisibles tal cual vienen definidos en los textos y que son aprendidos (retenidos, asimilados) tras una buena explicación. O sea, quienes piensan que no son,

en definitiva, resultado de un proceso de conformación activa por parte de quien aprende, toda la caracterización anterior sobra.

C) Pero el aprendizaje matemático no se reduce al aprendizaje de conceptos sino que, y sobretodo, es un *aprendizaje operatorio*, es decir, de relaciones entre objetos, de propiedades, de operaciones peculiares con símbolos también peculiares. Aprendizaje que es creciente y, como demostrara suficientemente Gagné, acumulativo.

Por ejemplo, tomemos la idea de número. La noción que un niño tiene de lo que son los números es cambiante e inconclusa pues se va conformando lentamente, gracias a la acumulación sucesiva de pequeños aprendizajes. Así, será primero la distinción de agrupaciones, después el conteo elemental que confluirá con la cardinalidad conduciendo a la conservación del número. Pero este conocimiento provisional de los primeros naturales va a verse modificado cuando se entre en el aprendizaje de la decena y los valores de posición, es decir, cuando se entre en el estudio del número como sistema complejo (4).

La tesis que yo sostengo es que el avance en el conocimiento, la progresión en el aprendizaje escolar, *se produce gracias a la creación (re-creación, apropiación de) y uso de sistemas simbólicos cada vez más abstractos*. Es el código mismo, el, digamos, relativo dominio del lenguaje cifrado matemático propio de cada nivel lo que hace avanzar en el aprendizaje. El mayor o menor dominio del código a un determinado nivel sirve de acelerador o de freno en el avance en la conquista del conocimiento matemático escolar. (Tengamos en cuenta que no hay dominio del código si no se tiene un conocimiento semántico (significado) y también sintáctico -estructura, reglas operatorias, propiedades- del mismo).

Pero de ello tratamos en el epígrafe siguiente.

3. LOS CUATRO NIVELES SUPERPUESTOS

El desarrollo global y diacrónico de ese proceso de complejidad creciente que es al aprendizaje de la matemática en la escuela obligatoria lo podemos imaginar seccionado en *cuatro* tramos, momentos, niveles o fases, siendo cada tramo condición del posterior.

Esos cuatro niveles tienen como eje, sucesivamente, la introducción en el símbolo, la adquisición del formalismo de las operaciones aditivas, las operaciones multiplicativas y, en cuarto lugar, la entrada en el álgebra.

Cada nivel está definido por las características que

toma el sistema simbólico (código).

Nivel 1: introducción en el símbolo

Es un hecho comunmente asumido que sólo los seres humanos utilizan sistemas notacionales, como también es asumido que en su desarrollo el ser humano, que es eminentemente cultural, pasa por un período que puede etiquetarse de «simbólico» (entre los 2 y los 6 años).

H. Gardner en «La mente no escolarizada» afirma que «Durante este período todos los niños normales del mundo llegan de un modo fácil y natural a dominar toda una gama de símbolos y de sistemas de símbolos». En un estudio sobre simbolización temprana muestra cómo ésta se produce no linealmente sino por avances sucesivos u «oleadas» (5). Pero quizá para nuestro objetivo sea más interesante el trabajo de Clotilde Pontecorvo sobre la notación numérica. En un estudio realizado con niños de 4 a 6 años Pontecorvo distingue tres etapas en la representación de la cantidad. Su conocimiento puede servir de ayuda para el trabajo escolar.

Sin embargo, lo esencial a efectos de la hipótesis que vengo proponiendo es que el aprendizaje matemático viene introducido por una fase de apropiación de las primeras simbolizaciones. Que en esa fase se va conformando tanto la noción de número como la de símbolo y la de código. Y, muy importante, se comienza a trabajar con símbolos (que remiten a objetos, a agrupaciones de objetos, o a acciones con ellos) en lugar de hacerlo con los objetos mismos.

Será, entonces, esa capacidad de trabajar (actuar, razonar) con símbolos lo que nos dé la entrada en el siguiente nivel.

Nivel 2: operaciones aditivas y formación básica del número

Este período suele extenderse para la mayoría de los niños entre los 5 y los 8 años aproximadamente. Las simbolizaciones ahora abarcan tanto aspectos semánticos como sintácticos ya que la atención se centra en:

- Plasmar mediante código (números y otros signos) acciones (reales o ficticias) con cantidades y/o relaciones entre cantidades o números.
- Interpretar y utilizar el código aritmético aditivo.

Quizá para entendernos sería conveniente precisar algunos términos. Por *operaciones* entenderemos patrones de razonamiento que los seres humanos vamos conformando progresivamente y que utilizamos en la

resolución de situaciones. Cuando esos patrones se ejecutan con cantidades o números (símbolos de cantidades, por ahora) tenemos las operaciones numéricas. Si esas operaciones se efectúan con simbolizaciones del mismo nivel (elementos con elementos, grupos con grupos, etc.) y van referidas a adición o sustracción tendremos las *operaciones aditivas*. Esas operaciones se construyen en/se aplican a situaciones de unión de cantidades, o de transformación de alguna cantidad mediante adición o sustracción de elementos, de igualación entre cantidades o de diferencia entre cantidades o números. Progresivamente esos cuatro tipos, con sus variantes, van cristalizando en dos únicas escrituras aritméticas, que se conocen con el nombre de *operaciones aritméticas* de suma y resta.

La evolución dentro de este mismo nivel del aprendizaje de la operación va describiendo un arco que comienza con la apropiación paulatina del código y que termina con el uso del propio código como instrumento para resolver problemas. Es decir, las primeras escrituras pueden corresponder a descripción de acciones efectivas con objetos o números. Así $5 + 6 = \dots$; $9 - 4 = \dots$, pueden ser el trasunto simbólico de una acción, de un cálculo numérico. Pero con el tiempo el relativo dominio del código va convirtiendo la escritura misma en herramienta para resolver una situación.

Veámoslo con un ejemplo: «Yo tenía 125 pts y regalé 50 a mi hermano, ¿cuántas tengo ahora?». La escritura puede interpretarse como un trasunto de una posible acción efectiva de sustraer. Pero veamos este ejemplo: «Pedro tenía en su hucha 50 pts y, después de regalarle su abuelo cierta cantidad, tiene 125; ¿cuánto le regaló su abuelo?». En este caso hay que buscar una cantidad desconocida. La operación aritmética es la misma en los dos casos, pero ha pasado de ser trasunto de un gesto a algo más abstracto: herramienta de búsqueda. Es decir, con el tiempo, el relativo dominio del código va convirtiendo la escritura misma en herramienta para resolver problemas. Jaulin-Mannoni dejó esto claro hace años. Textualmente:

«El signo, a medida que la evolución del pensamiento que lo utiliza va desligándose de lo que representa, se vuelve totalmente abstracto, permitiendo así a la inteligencia lógico-matemática utilizarlo como un instrumento de búsqueda y no como una simple representación directa de la realidad. [...] Hay, pues, desde el punto de vista de utilidad de las operaciones, dos estadios diferentes.» (7)

Nivel 3: las operaciones multiplicativas

Es éste un nivel superior al anterior que integra en sí a las operaciones aditivas. La multiplicación procede de

situaciones de correspondencia entre grupos y elementos o de situaciones de combinación. Es la aritmetización de esas situaciones lo que conduce a montar sobre el código aditivo otro nuevo, el multiplicativo, con la particularidad de que uno los números del sistema es de nivel diferente, es decir, los números del código se refieren a cosas distintas: elementos y grupos.

De igual forma la división puede proceder de situaciones de equidistribución o agrupamiento. En principio, ni es inversa de la multiplicación ni tiene mucho que ver con ella. Entonces, ¿cómo es que ambas constituyen el nivel de las operaciones multiplicativas? Es, precisamente, la virtualidad del código y el relativo dominio del mismo lo que va haciendo la una inversa de la otra; largo proceso que favorece la confluencia de multiplicación con división en un sistema de mayor complejidad

Nivel 4: entrada en el álgebra

El desarrollo de la escritura y, por tanto, del aprendizaje escolar tiene como nivel superior la entrada en el código algebraico: etapa de mayor abstracción y complejidad. La entrada en el lenguaje algebraico y, por tanto, en el modo algebraico de resolver problemas, de operar, se produce a lo largo de los cursos de la ESO, por lo que aquí no trataremos de ello.

PARA TERMINAR

Quisiera finalizar esta brevísima descripción de los niveles apuntando una característica esencial: la *inclusión jerárquica*. Un tramo (las características del sistema simbólico propio de una etapa) es la base del inmediatamente superior, quedando subsumido en él. El plano superior incluye los rasgos del inferior.

O, expresado de otro modo, el aprendizaje matemático puede imaginarse como una construcción continua, como un *continuun* creciente y acumulativo en el que se superponen planos cada vez de mayor complejidad y abstracción. Podemos decir que se entra en el código aditivo gracias a la fase previa de simbolización. Por lo mismo, suma y resta son condición para la formación de multiplicación y división, es decir, para la interpretación y uso del código multiplicativo, en el que quedan subsumidas, pues los aprendizajes que llevan al dominio del código aditivo serán la base sobre los que se construya la operatoria multiplicativa.

Es importante, creo, ver el camino que recorre todo aprendiz seccionado en esos cuatro tramos porque ello nos da una visión general del currículo escolar, al tiempo que nos orienta sobre los aspectos esenciales a trabajar

en cada uno de los cursos y/o niveles, que no son otros que los que más inciden en la conformación del lenguaje matemático. Si eso es así, ¿cómo se construye, entonces, ese lenguaje, especialmente el sistema simbólico que ha de usarse en la operatoria? Y ¿cómo organizar la actividad en el aula de modo coherente con esta tesis? ¿En qué consiste, entonces, enseñar matemáticas?

De ello podremos debatir tomando como base, como ejemplo, la evolución de un problema por los cuatro niveles.

EVOLUCIÓN DE UN PROBLEMA POR LOS CUATRO NIVELES

Nivel 1

«Luis tiene en un bolsillo 4 caramelos y en el otro bolsillo tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Luis en total?».

- Es problema no escrito, esto es, verbal o gráfico.
- Estrategias de resolución mediante conteo de objetos discretos o bien apoyándose en los dedos y la tira numérica.

Nivel 2

«Luis tiene en un bolsillo 54 pesetas y en el otro, 39. ¿Cuántas tiene en total?».

(El tamaño de los números depende del nivel de los aprendices).

- Problema escrito.
- Codificación aritmética aditiva.
- Resolución mediante algoritmo y/o estrategias de cálculo mental.

Nivel 3 (Incluye los tres rasgos del anterior)

«Luis tiene en un bolsillo 6 monedas de 25 pesetas y en otro tiene 15 pesetas. ¿Cuánto dinero tiene Luis?».

- Números de distinto nivel.
- Diferentes estrategias de solución (aditivas o multiplicativas).

Este problema se puede complejizar. Por ejemplo:

«Luis tiene en un bolsillo 6 monedas de 25 pts. y en el otro tiene también dinero, pero no te digo cuánto. En total tiene Luis 165 pts. ¿Cuánto dinero tiene en el segundo bolsillo?».

Nivel 4

«Luis tenía 5 monedas de igual valor en su hucha. Hoy su madre le ha regalado 15 pts. En total tiene ahora 265 pts. ¿Sabrías tú de qué clase eran las 5 monedas primeras?».

REFERENCIAS

1. Dienes, Z. P.: *La construcción de las matemáticas*. Vicens-Vives, Barcelona, 1970, p. 5. El texto fue escrito en 1964.
2. Pimm, D.: *El lenguaje matemático en el aula*. Morata-MEC, Madrid, 1990. Página 288.
3. Fernández, M.: «Sobre los diversos lenguajes matemáticos y del paso de unos a otros», en SUMA, nº 16, 1994, p. 35.
4. Un texto que auna diferentes investigaciones sobre la formación del número y su enseñanza y, además, es útil por otros muchos conceptos es *El aprendizaje de las matemáticas*, de DICKSON, L., BROWN, M. y GIBSON, O., en Labor-MEC, 1991.
5. Gardner, H.: *La mente no escolarizada. Cómo piensan los niños y cómo deberían enseñar las escuelas*. Paidós, Madrid, 1993, p. 68 y ss.
6. Pontecorvo, C.: «La notación y el razonamiento con números y nombres en el período preescolar y en la escuela primaria», en *Infancia y Aprendizaje*, nº 74, 1996.
7. Jaulin-Mannoni, F.: *Las cuatro operaciones básicas de las matemáticas*. Pablo del Río, Madrid, 1980, p. 11.