

## SIMULACIÓN DEL FRENTE DE UN INCENDIO FORESTAL CON SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

**González Fernández, L.,  
Botana Ferreiro, F. R.**

### 1. INTRODUCCIÓN

Dos defectos sobradamente señalados en la práctica docente habitual son la estanqueidad entre las diversas áreas de conocimiento y el desequilibrio, particularmente en Matemáticas, en la relación teoría-aplicación a favor de la primera. En nuestra docencia a futuros ingenieros técnicos forestales el estudio del modelo propuesto de propagación del frente de un incendio forestal es una actividad basada en la aplicación del principio de Huygens a un campo en que el alumno tiene motivación específica, subrayando así el carácter instrumental de la Matemática en este ámbito. En la modelización estudiada aparecen consideraciones geométricas, de las que desgraciadamente los *currícula* actuales no andan muy dotados, y el alumno puede visualizar por sí mismo resultados «del mundo real», posibilitando con ello una mejor adquisición del conocimiento.

La capacidad de predecir el comportamiento de un incendio forestal es, sin duda, una útil herramienta en la lucha contra incendios y en la formación de personal mediante simulaciones. Sin embargo los mecanismos que rigen la propagación de un incendio no son bien conocidos y los modelos existentes son principalmente empíricos. Algunos se basan en teorías de combustión mientras otros ven la propagación del fuego como la de un frente de onda, permitiendo así la utilización del principio de Huygens. En esta comunicación se describe el modelo de propagación basado en este principio, la implementación en *Mathematica* del mismo y una ilustración sencilla realizada con un paquete de Geometría Dinámica, *Cabri Géomètre II*.

### 2. El modelo elíptico de propagación de un incendio forestal.

Es razonable suponer que en un terreno llano y con una cubierta uniforme de combustible un incendio de origen puntual se propagará de manera circular. El frente del incendio al cabo de un tiempo  $t$  estará descrito por la ecuaciones paramétricas

$$x=at\cos u, \quad y=at\sin u$$

donde  $a$  es un parámetro dependiente del combustible.

En la formulación original del modelo expuesta en [1] se introduce tras esta consideración la existencia de un viento uniforme de velocidad constante  $V$  en la dirección del eje  $x$ . Se postula que el viento hará variar el frente de fuego haciéndole adoptar una forma elíptica, desplazando el centro del área quemada en la dirección de  $x$ , como se muestra en la Figura 1.



(Figura 1. Perímetro del incendio iniciado en el origen con viento en la dirección de  $x$ )

Las ecuaciones del frente al cabo de un tiempo  $t$  son

$$x=at(f\cos u+g) \quad y=ath\sin u$$

una elipse de semiejes  $atf$  y  $ath$ , cuyo centro se desplaza en la dirección de  $x$  con velocidad  $ag$ , donde  $f, g$  y  $h$  dependen de  $V$ .

Considerando el perímetro del fuego como un frente de onda, en cada uno de los puntos del frente en  $t$  se genera un nuevo frente de onda en un tiempo  $dt$ . El principio de Huygens establece que el frente en el instante  $t+dt$  es la parte exterior de la envolvente de la familia de frentes generados en  $dt$  (Figura 2).

(Figura 2)

(Figura 2. Frente de fuego en  $t+dt$  obtenido como envolvente de los frentes producidos en  $dt$ )

La consistencia del modelo queda asegurada puesto que el frente en  $t+dt$  es una elipse de ecuaciones  $x=a(t+dt)(f\cos u+g)$

$$y=a(t+dt)h\text{sen}u$$

como se comprueba fácilmente.

La introducción de cambios en la dirección del viento no presenta ninguna dificultad conceptual. Si en el instante  $t$  cambia la dirección del viento, sea ésta  $u$ , en cada punto  $(x_t, y_t)$  del frente se forma en  $dt$  una elipse

$$x=x_t+adt(f\cos u+g)\cos u-adth\text{sen}u\text{sen}a,$$

$$y=y_t+adt(f\cos u+g)\text{sen}a+adth\text{sen}u\cos a$$

La envolvente de esta familia de elipses cuando  $(x_t, y_t)$  recorre el frente en tiempo  $t$  es el frente en  $t+dt$ . Sin embargo esta curva no es, salvo para valores particulares de  $a$ , una elipse y su obtención resulta computacionalmente costosa. En [1] se usa un método gráfico consistente en el dibujo de algunas elipses de la familia que define la envolvente y el ajuste gráfico de una nueva elipse a las dibujadas, arguyendo que «after a longtime the fire forgets its initial shape».

### 3. ECUACIÓN DE LA ENVOLVENTE

De las distintas formulaciones de la envolvente [4], la elección clásica es fácilmente soportada bajo cualquier paquete de cálculo simbólico de propósito general.

En el caso tratado se tiene una elipse  $E(x_t, y_t)=0$  y la familia biparamétrica  $F(x, y, x_t, y_t)=0$ . La envolvente se obtiene al eliminar  $x_t$  e  $y_t$  en el sistema

$$S = \begin{cases} E(x_t, y_t) = 0 \\ F(x, y, x_t, y_t) = 0 \\ W(x, y, x_t, y_t) = 0 \end{cases}$$

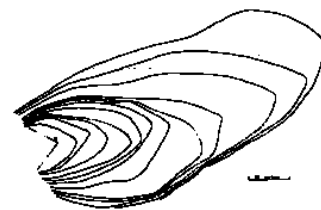
donde la condición de tangencia  $W(x, y, x_t, y_t)=0$  es el jacobiano:

$$W(x, y, x_t, y_t) = \frac{\partial(E(x_t, y_t), F(x, y, x_t, y_t))}{\partial(x_t, y_t)}$$

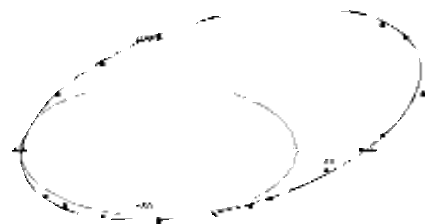
El cálculo de la envolvente se hace, en *Mathematica*, con la función:

Eliminate[{E[x\_t,y\_t]==0, F(x,y,x\_t,y\_t)==0,  
W(x,y,x\_t,y\_t)==0},{x\_t,y\_t}]

El algoritmo que utiliza *Mathematica* para la implementación de Eliminate se basa, según creemos dada la escasa documentación del sistema, en el Teorema de Eliminación [5]. En el desarrollo de la base de Groebner de  $S$  las expresiones intermedias crecen desmesuradamente provocando que, salvo para valores distinguidos de  $a$  (0,  $\pi$ , ...), el sistema se muestre incapaz de devolver resultados. Basándonos en [5,7] hemos implementado la resultante de Dixon en *Mathematica* [3], obteniendo de manera eficiente la envolvente buscada. Como ilustración en la Figura 3 se muestran los contornos de un incendio a los 16 y 22 minutos de su aparición. En  $t=16$  se ha producido un cambio en la dirección del viento de  $a=\pi/6$ . La Figura 4 muestra una nube de puntos que pertenecen al perímetro del fuego a los 22 minutos, calculado mediante la resultante de Dixon. La elipse exterior se ha ajustado a estos puntos mediante mínimos cuadrados.



(Figura 3: Perímetro observado de un incendio a los 16 y 22 minutos)

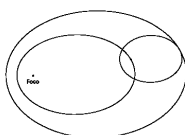


(Figura 4: Puntos del frente en  $t=22$  y ajuste de una elipse)

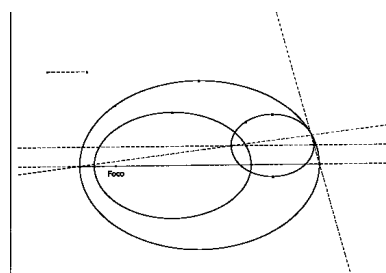
4. Ilustración del modelo de propagación con software de Geometría Dinámica

Si bien en ninguno de los programas de Geometría Dinámica más ampliamente difundidos, *Cabri Géomètre II* [Cabri] y *The Geometer's Sketchpad 3* [GSP], es la elipse un objeto elemental, ambos incorporan en su distribución procedimientos sencillos para definirlos. En GSP el *script* ellipse.gss construye una elipse dados dos puntos, su centro y otro que define el semieje menor. *Cabri* tiene dos macroconstrucciones específicas para la construcción de elipses: *elip\_ejp.mac* y *elip\_ejf.mac*, por cierto que con el nombre cambiado. *elip\_ejp.mac* construye la elipse dados un foco y su eje mayor. Además de la indeterminación de la elipse obtenida por GSP frente a la unicidad de *Cabri*, éste presenta una ventaja añadida: es capaz, fijado un sistema de referencia, de calcular la ecuación de la elipse.

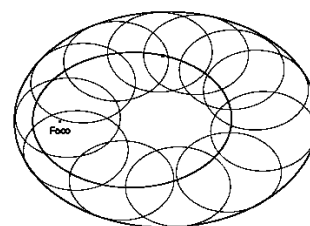
Una comprobación mediante *Cabri* de la consistencia del modelo elíptico se muestra en la Figura 5. En ella la elipse interior representa el frente de fuego en el instante  $t$  y se ha dibujado en uno de sus puntos una elipse con eje mayor en la misma dirección que simula el avance del frente en  $dt$  suponiendo dicho punto como origen de un nuevo incendio. Finalmente la elipse de mayor área, el contorno del frente en  $t+dt$ , representa la parte exterior de la envolvente de la familia de elipses generadas en  $dt$  y se ha dibujando añadiendo al eje mayor de la elipse de partida el eje mayor de una cualquiera de las elipses de la familia. El detalle de toda la construcción se presenta en la Figura 6. En la Figura 7 se han utilizado las herramientas Animación y Traza para completar la ilustración.



(Figura 5: Comprobación de la consistencia del modelo en Cabri)

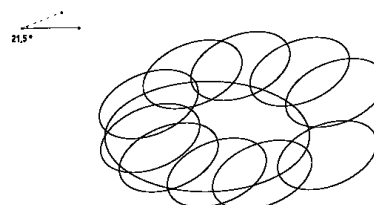


(Figura 6: Objetos utilizados para la construcción de la Figura 5)



(Figura 7: La familia de elipses generadas en  $dt$  y su envolvente)

La introducción de un cambio en la dirección del viento no supone ninguna dificultad añadida para obtener el contorno del frente (Figura 8). Sin embargo el ajuste de una elipse a este perímetro no es, en general, una tarea sencilla en el entorno de trabajo de *Cabri*.



(Figura 8: Obtención del perímetro del incendio tras un cambio)

## BIBLIOGRAFÍA

- D. H. ANDERSON, E. A Y OTROS *J. of Austral. Math. Soc. (Series B)* **23**, 451-466 (1982)  
 V. G. BOLTIANSKI, *La envolvente*, Mir, Moscú 1977.  
 F. BOTANA, J. M. CASAL, Solución simbólica de la propagación del frente de un incendio forestal en combustibles homogéneos, *II Congreso de Mathematica*, Madrid, 8-9 de julio de 1997 (remitido).  
 J. W. BRUCE, P. J. GIBLIN, *Curves and singularities*, Cambridge University Press, 1992.  
 D. COX Y OTROS, *Ideals, varieties and algorithms*, Springer-Verlag, Nueva York 1992.  
 A. L. DIXON, *The eliminant of quantics in two independent variables*, Proc. London Mathematical Society **6**, 468-478, (1908).  
 D. KAPUR, T. SAXENA, L YANG, Algebraic and geometric reasoning using Dixon resultants, *ACM Int Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 94)*, (1994).  
*Cabri-Géomètre. Manuel de l'utilisateur*, -, LSD2, Grenoble 1992.  
*The Geometer's Sketchpad. User guide and Reference Manual*, Key Curriculum Press, Berkeley 1993.