

LA MULTIPLICACIÓN EN PRIMARIA: CATEGORÍAS SEMÁNTICAS Y RAZONAMIENTO MULTIPLICATIVO IMPLICADO

**Girondo, M^a L.
Alegría, F.**

INTRODUCCIÓN

La educación matemática en todos los niveles, pero principalmente en la Educación Primaria actualmente reclama el huir de planteamientos mecanicistas de tiempos pasados en los que intentando transmitir una matemática formalizada, se ponía el énfasis en los cálculos abstractos y en la exactitud dejando la realidad cotidiana como simples ejemplos estereotipados. Son varias las corrientes en educación matemática actual que promueven una visión de la matemática como herramienta de comprensión de la realidad. Se trata de acentuar el uso de la matemática, ver como se pueden «modelizar» diferentes aspectos y como los alumnos—desde una perspectiva constructivista del aprendizaje—pueden construir sus herramientas matemáticas para el tratamiento de los problemas.

A partir de este planteamiento nosotros nos hemos interesado por el trabajo relacionado con la enseñanza-aprendizaje de las operaciones aritméticas elementales en la escuela intentando ver qué situaciones se pueden plantear al niño que den «significado» a la operación (matematización horizontal) y a la vez, teniendo en cuenta los requerimientos cognitivos de cada operación, que iran desde la interiorización de esquemas de acción simples a los esquemas mentales más sofisticados (matematización vertical). Dentro de este campo nos hemos centrado en el estudio de las situaciones que dan significado a la operación multiplicación en la Educación Primaria. En esta comunicación presentamos una agrupación de estas situaciones que creemos de utilidad para la práctica en el aula pretendiendo construir significados diferentes de la operación producto.

ANTECEDENTES

La investigación cognitiva alrededor de estos temas habla de estructura aditiva y de estructura multiplicativa como dos grandes campos conceptuales que se desa-

rollan durante un largo período de tiempo. La idea de campo conceptual se debe a Vergnaud y, de manera simple, podríamos decir que se trata del conjunto de situaciones y conceptos ligados entre sí; entre los que hay una fuerte relación en dos direcciones: cada situación necesita para su tratamiento de algún aspecto del concepto y por tanto, los conceptos surgen de la interpretación de las diversas situaciones a las que se aplican.

En el campo de la estructura aditiva se da prácticamente acuerdo entre los diversos investigadores en la clasificación de las categorías semánticas de los problemas que en términos vulgares llamamos de sumar-restar. Puede verse esta clasificación en diversas publicaciones en castellano (Puig, 1988) (Castro, 1995). Sin embargo en la estructura multiplicativa no hay tanta unanimidad en su tratamiento. De clasificaciones más o menos afortunadas para los problemas verbales multiplicativos como se recogen en la bibliografía antes citada, se va pasando a la consideración de una gran estructura dominada por lo que se llama «razonamiento multiplicativo» (Harel y Confrey, eds. 1994) y que corresponde, en cierta manera, a la idea de campo conceptual multiplicativo que propone Vergnaud. Esta estructura va mucho más allá de los simples problemas verbales multiplicativos de la Primaria, siendo el «razonamiento proporcional» el objetivo básico en los primeros cursos de secundaria relacionado con esta estructura; que incluye además de los conceptos de multiplicación y división los de razón, proporción, fracción, número racional, función lineal, análisis dimensional, etc.

Vergnaud dice que todos los problemas multiplicativos se pueden ver como situaciones de proporcionalidad (Vergnaud, en Harel y Confrey, 1994). Esta interpretación, que seguramente es adecuada para niveles de secundaria, creemos que ayuda poco al trabajo en Primaria; trabajo que ha de estar mucho más relaciona-

do con el brote de las ideas multiplicativas, seguramente ligadas a las ideas aditivas en un primer momento, pero que hay que ir cambiando progresivamente ya que el razonamiento multiplicativo va implicar mucho más que una manera simplificada de hacer sumas. Confrey (opus cit.) dice que la idea de multiplicación que subyace en muchas situaciones de razonamiento multiplicativo no se corresponde con la idea de suma repetida, en muchas ocasiones única idea trabajada en la escuela Primaria y que los alumnos deben abandonar al enfrentarse a las situaciones de proporcionalidad. Este autor propone trabajar ya otras ideas de multiplicación en los primeros niveles, concretamente la idea ligada a la acción de partir equitativamente o a la de reproducir varias copias de un original.

Por otro lado, sabemos de la importancia que con vistas al trabajo en las aulas tiene la representación que el alumno se puede hacer de cada una de las situaciones de multiplicación, ya que el docente debería incidir sobre esta representación para ayudar al alumno en el tratamiento del problema. Este es un tema difícil, pero creemos que si se apela al significado de la situación y se utilizan representaciones externas adecuadas pueden ser de ayuda (Maza, 1995).

1. Tipos de situaciones multiplicativas para Primaria

La agrupación que proponemos para los problemas multiplicativos de una operación, tiene en cuenta clasificaciones anteriores, bien de tipo semántico (Vergnaud), lingüístico (Nesher) o de estructura de cantidades (Schwartz); no obstante, sigue la línea propuesta por Schmidt (1996), de la cual nosotros hacemos una simplificación que consideramos necesaria para que le sea útil al maestro. A continuación describimos cada una de ellas.

Como es bien sabido cada situación de multiplicación puede llevar asociadas dos situaciones de división. Por razones de extensión de la comunicación sólo de manera breve nos referiremos a ellas al final, aunque creemos que en el trabajo escolar el análisis de las diferentes situaciones debe implicar tanto la operación en un sentido como en el otro.

categoría 1. Situaciones de PARTE-TODO

Se tratará de situaciones en las que una medida se repite un número de veces. Podemos distinguir dos casos:

i) «Recuento»

Son situaciones en las que aparece un todo que hay que cuantificar y en las que aparece alguna partición que

nos facilitará el recuento. Para el caso de magnitudes discretas nos interesará el recuento de una colección que por tener una presentación determinada: grupos iguales, disposición rectangular... podremos ayudarnos de un conteo con unidades no-simples. En el caso de magnitudes continuas, serán situaciones en que dada una unidad de recuento: el tramo de valla, la distancia unitaria, la longitud del segmento, también se vea claramente la aditividad de la magnitud.

Ejemplos

1. En una clase hay 4 filas de mesas y 6 mesas en cada fila ¿cuántas mesas hay en la clase?
2. En clase hemos hecho grupos de 4 alumnos para realizar un trabajo, si resultaron exactamente 8 grupos ¿Cuántos alumnos somos en clase?
3. Para vallar el patio de la escuela han colocado 6 tramos de valla que mide cada uno 2 m de largo ¿Cuanto mide toda la valla del patio?

Si analizamos lo que el niño necesita para poder interpretar estas situaciones, seguramente nos conformaremos con que sepa contar con unidades no simples. Este conteo podemos codificarlo en los primeros niveles como una suma repetida y por tanto, a nivel de razonamiento numérico, se corresponde con los ejercicios de contar de «n» en «n».

Del esquema aditivo « $n+n+n+n$ » se pasa a la codificación multiplicativa « $m \times n$ » o « m veces n ».

Es fácil reconocer aquí las típicas situaciones que podemos representar mediante una disposición rectangular, situaciones útiles para modelizar los razonamientos numéricos implicados, descubrir propiedades algebraicas de la operación, etc.

ii) Situaciones de relación parte-todo con una estructura lógica de correspondencia múltiple

(Más tarde estas situaciones se pueden considerar de proporcionalidad). Se distinguen de las anteriores en que ahora el todo no está presente pero se puede construir físicamente y por tanto, es fácil imaginar ese todo.

Ejemplos

1. Hemos comprado bolsitas de bombones para festejar el cumpleaños de Maria, si hay 12 bombones en cada bolsita y hemos comprado 4 ¿Cuántos bombones hemos comprado?
2. En mi album de cromos puedo colocar 6 cromos en cada página. Si para terminar la colección tengo que llenar 22 páginas ¿Cuántos cromos tiene la colección?
3. Me han regalado tres monedas de cinco duros, ¿Cuántas pesetas son?

4. Cuatro amigos se reúnen para jugar, cada uno lleva dos juguetes ¿Cuántos juguetes juntan ?

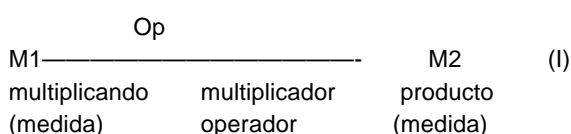
Si analizamos la expresión lingüística utilizada en estos casos, solemos encontrarnos con «cada uno» o está claro ese significado aunque no esté formulado de manera explícita. Por ejemplo ¿Cuántos días hay en seis semanas? Cada semana tiene.....

La correspondencia múltiple hace que se puedan esquematizar estas situaciones por diagramas de árbol, diagramas sagitales o bien representar gráficamente el todo a partir de las partes, con lo que estaríamos en una situación similar a la del apartado anterior.

Con estas situaciones empieza a verse la no conmutatividad de la operación, ya que cobran importancia las unidades de cada factor. Los niños ven claramente que aunque el total sean 12 cuentos no es lo mismo que entre seis niños expliquen dos cuentos cada uno, que si dos niños deben explicar seis cuentos cada uno.

categoría 2. Situaciones de FACTOR MULTIPLICATIVO SIMPLE

Para abordar estas situaciones el niño ya necesita tener un esquema multiplicativo más abstracto. Las representaremos mediante el esquema operacional siguiente:



Atendiendo al significado del operador podríamos distinguir:

i) *Situaciones en las que el operador tiene un significado de iteración.* (Acción que se repite).

Ejemplos

1. De mi casa a la escuela hay una distancia de 350 m. ¿Cuántos metros recorro al día en mis viajes casa-escuela si voy a la escuela por la mañana y por la tarde?
2. Para medir la anchura de la pizarra hemos colocado nuestra regla que mide 52 cm cuatro veces ¿Cuál es el ancho de la pizarra?
3. A partir de una cartulina cuadrada grande voy recorriendo cuadrados más pequeños. Para ello el cuadrado grande lo divido en cuatro partes cuadradas iguales; cada una de estas partes la vuelvo a dividir en cuatro cuadrados iguales. Si repito la operación tres veces ¿cuántos cuadraditos obtengo?

ii) *Situaciones en que el operador tiene el significado de transformación de una medida o implica la comparación entre dos medidas*

Ejemplos

1. Hace diez años un refresco valía 75 pts, si hoy vale el doble, ¿cuánto dinero necesitas para comprar uno?

2. Pedro tiene 8 años y su padre tiene 4 veces su edad. ¿cuántos años tiene el padre de Pedro?

3. La propaganda de una marca de jabon para limpiar vajillas dice que con un litro de jabon normal se limpian 120 platos pero que con su marca, la misma cantidad de jabon limpia 4 veces más. Si la propaganda es verdad ¿Cuántos platos limpiamos con un litro de jabon de esta marca?

4. Maria medía 55 cm al nacer, ahora está en 6º curso y ha triplicado su altura. ¿Cuánto mide Maria?

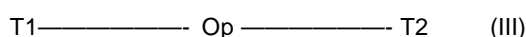
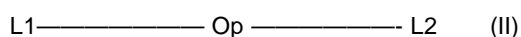
Los problemas de escalas que se inician en Primaria, implican esta noción de multiplicació. Ej. a) Cada km de la realidad lo representamos por un cm en el papel. b) Cada unidad de escala del gráfico estadístico representa 20 individuos.

En las situaciones de este apartado podemos encontrar el sentido de «veces» en el operador, pero es adimensional. En la 1a subcategoría aparece la idea de «múltiples acciones»; partiendo de un cierto parecido con las situaciones del apartado anterior, reclama un significado nuevo para la multiplicación. En la 2a subcategoría se «utiliza» el esquema multiplicativo para transformar una cantidad o para realizar una comparación entre dos cantidades. Creemos que se trata de los primeros significados de multiplicación desligados de la suma.

categoría 3. Situaciones de PROPORCIONALIDAD

Un ejemplo: En una carrera de «muntan-bike» hemos hecho una media de 8 km cada hora. Si la carrera ha durado 3 horas, ¿cúal es la distancia del recorrido?

Como vemos en el ejemplo se trata de dos dominios de medida, en este caso tiempo y longitud. Por tanto se puede interpretar esta situación con un esquema operacional como el de la categoría anterior pero doble, tal como a continuación mostramos



La incógnita del problema es L2 que se relaciona con L1 mediante un operador multiplicativo simple, pero ahora ese operador no es un dato del problema sino que debemos calcularlo. Para ello es necesario establecer una relación de proporcionalidad entre las magnitudes longitud y tiempo, lo que supone que L1 y L2 guardan la

misma relación multiplicativa que T1 y T2, con lo que el operador que podemos obtener por (III) es el que aplicaremos a la expresión (II).

En el ejemplo anterior se ve fácilmente que la relación entre los tiempos es 3 (operador adimensional) y ese es el operador a aplicar en el dominio de las longitudes.

Esta interpretación de los operadores como adimensionales, con lo cual se hace alusión al esquema del apartado anterior, obliga a considerar las dos relaciones multiplicativas simultáneamente y por tanto a entrar en el pensamiento proporcional.

No creemos que esta interpretación sea sencilla para los niños de ciclo medio. Por otra parte, estas situaciones de proporcionalidad entre magnitudes aparecen mucho en los textos escolares. Son muy frecuentes los problemas «de precios», seguramente porque son situaciones cercanas al campo de experiencia de los niños y en todos los centros suelen presentarse como campo de aplicación de la operación producto. Si por otra parte, la operación producto se les hace ver como una suma repetida o como una situación de factor multiplicativo simple, aparece aquí un problema con las unidades. Algunos alumnos encuentran la contradicción: «no se pueden sumar pesetas y caramelos...pero se pueden multiplicar...da pesetas!»

Una manera de dar una interpretación adecuada para estas situaciones a nivel de Primaria, es la interpretación «funcional». Es decir, las dos magnitudes se relacionan entre sí mediante un operador funcional. En el ejemplo anterior: longitud = 8 x tiempo (Esquemáticamente $L = 8.T$).

Con lo que se pasa a unas representaciones similares a las que propone Vergnaud para las situaciones de proporcionalidad

T1	L1	En el ejemplo,	1 hora	x8	8km
T2	L2		3 horas	x8	..km

Estas situaciones se prestan a hacer tablas de valores de las dos magnitudes que se relacionan y por tanto iniciar así el razonamiento proporcional tal como se propone en (Fiol, 1996).

Ejemplo. Una lata de refresco vale 85 pts, cuanto valen dos latas? y cuatro? y seis?

	1	2	4	6
x85	85	170	170+170	340+170

categoria 3.Situaciones de RECuento COMBINATORIO

Desde el punto de vista semántico, estas situaciones

son notablemente diferentes. Todos tenemos experiencia de trabajo con niños (e incluso con adultos) que utilizan con fluidez la operación multiplicación en situaciones como las descritas anteriormente y deben recurrir a técnicas de resolución de problemas si los enfrentamos a enunciados como «Ana tiene tres pantalones y cinco blusas ¿de cuántas maneras diferentes se puede vestir con estos pantalones y blusas?

Aunque también admiten una interpretación de correspondencia múltiple y por tanto una representación en diagrama de árbol, en este caso el efecto de las unidades en juego es muy fuerte. Todos los investigadores hacen de ellos una clase a parte, especialmente interesante puede resultar la caracterización como «situaciones de simetría» referida al posible intercambio de los dos factores, que señala (Bell, 1989).

Es usual la interpretación de los dos factores como cardinales de conjuntos y consecuentemente el producto aparece como el producto cartesiano de esos conjuntos.

Ejemplos

1. Para merendar puedo elegir entre tres tipos de bocadillos y como bebida puedo elegir agua o un refresco. ¿Cuántas meriendas diferentes de bocadillo y bebida puedo elegir?

2. Una marca de coche se fabrica en tres modelos y en cinco colores. ¿Cuántos coches diferentes hay de esta marca?

La tabla de doble entrada es una buena herramienta de representación en estos casos.

A partir de estas situaciones se puede construir el significado de la multiplicación que se utiliza en el cálculo del área, ya que a partir de dos situaciones de medida se obtiene una nueva magnitud.

2.1. Los «significados» de la operación producto de los niños de ciclo superior

A la vez que empezamos a organizar información sobre esta operación, hemos intentado ver qué ideas atribuían los alumnos de 6º curso de Primaria a esta operación. Para ello hemos propuesto a 6 grupos de alumnos de 3 escuelas diferentes que escribieran problemas que se pudieran resolver mediante las operaciones: 6×75 ; 7×8 ; 16×3 ; 12×15 y $24 \times (10+6)$. Hemos de decir que seguramente el tipo de números en juego y el tamaño de los mismos influye en el contexto que se elige para el problema y también para el «significado» de la operación. No obstante, hemos valorado que los niños de esta edad se sentirían seguros con números enteros del tamaño de los empleados ya que su dominio del decimal es aún incipiente.

Aunque los problemas que los niños han escrito admiten diversos tipos de análisis, para este trabajo nos interesa mostrar las tipologías de problemas según el esquema que hemos presentado anteriormente. Estos datos se muestran en las tablas 1 y 2. Es fácil ver la preponderancia de la idea de parte-todo, casi siempre enunciadas como una situación de correspondencia múltiple. Hemos indicado un grupo de problemas «de precios» ya que aunque podíamos pensar que se trata de situaciones de proporcionalidad, creemos que para los alumnos de

esta edad son problemas similares a parte-todo (problemas en los que se suele utilizar la expresión «...cada uno...»). Relativamente pocos problemas son de factor multiplicativo. Si analizáramos el número de alumnos que dan un significado de «factor» al producto nos encontramos con un 21 % frente a prácticamente el 98 % de los alumnos que utilizan otros significados. Esto indica que es una idea que se trabaja poco en la escuela y que por tanto, el niño va tener que cambiar la idea de multiplicar como suma de sumandos iguales, segura-

TABLA 1

Escuela	Nº alumnos	Nº problemas	Parte todo	Precios	Iteración	Factor	Otros
A	63	223	142	51	13	16	1
B	29	77	43	14	3	17	—
C	38	113	57	36	2	16	2
Total	205	413	242	101	18	49	

Tipos de problemas verbales multiplicativos escritos por los alumnos

TABLA 2

Escuela	Parte todo	Precios	Iteración	Factor
A	64 %	23 %	6 %	7 %
B	56 %	18 %	4 %	22 %
C	50 %	32 %	2 %	14 %
Del total	58 %	24 %	4 %	12 %

Porcentaje de problemas de cada tipo escritos por los alumnos

mente la más simple, y que creemos que la escuela «institucionaliza» en exceso, ya que no es la noción básica que se utiliza en el razonamiento multiplicativo 6 %.

2.2. Consejos para la didáctica

Enseñar la multiplicación debe tener por objetivo iniciar a los niños en el razonamiento multiplicativo, ello impli-

ca ver en qué situaciones utilizamos este tipo de razonamiento y tener en cuenta las distintas ideas de la operación que cada situación necesita. De manera breve podríamos decir que una planificación de aprendizaje adecuada pasa por presentar situaciones que impliquen diferentes significados. Se puede pasar de modelos más o menos de adición a situaciones de factor multiplicati-

BIBLIOGRAFÍA

- CASTRO E Y OTROS (1995) «Estructuras aritméticas elementales y su modelización» Ed. Grupo Editorial Iberoamericana.
- GUERSON HAREL AND JERE CONFREY Eds. (1994) «The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics» Ed. State University of New York Press.
- FIOL, L (1996) «Igual forma, diferente mida» Perspectiva Escolar nº 211.
- MAZA C. (1995) «Aritmética y representación» Ed. Paidós.
- PUIG L Y CERDAN F. (1988) «Problemas aritméticos escolares» Ed. Síntesis
- Schmidt S. «Mantic Structures of Word Problems. Mediators Between Mathematical Structures and Cognitive Structures? ICME-8. Sevilla 1996.