

PROGRAMA INSTRUCCIONAL PARA RESOLVER PROBLEMAS ADITIVOS DE CAMBIO Y DE COMBINACIÓN

***Aguilar Villagrán, M.
Martínez Montero, J.***

INTRODUCCIÓN

Un amplio campo de investigación de la didáctica de las matemáticas ha recaído en la resolución de problemas. Este planteamiento no resulta sorprendente, ya que es un hecho comúnmente aceptado que la adquisición y transferencia de las habilidades de resolución de problemas constituyen uno de los objetivos fundamentales de la escolarización en general, y de la educación de las matemáticas en particular. En Estados Unidos, por ejemplo, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de EEUU (National Council of Teachers of Mathematics) ha establecido en su Agenda for Action (1980), que «la resolución de problemas debe ser el núcleo de las matemáticas escolares» (pag. 1). Asimismo, también se enfatiza la importancia de la resolución de problemas en el Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 1989).

El consenso alcanzado con respecto a que el objetivo central de la educación matemática radica en la resolución de problemas, contrasta vivamente con una gran cantidad de datos consistentes de investigación en los que se hace patente que muchos estudiantes no dominan, o al menos no suficientemente, las habilidades requeridas para abordar eficientemente nuevas tareas y problemas matemáticos, que garanticen una oportunidad razonable de tener éxito.

Numerosas publicaciones y estudios muestran datos que indican cómo los alumnos de la escuela actual no dominan suficientemente el conocimiento y las habilidades cognitivas necesarias para abordar con éxito y eficientemente nuevos problemas y tareas de aprendizaje: CARPENTER, LINDSQUIST, MATTHEWS y SILVER (1983), BETHENCOURT (1985), RABIEWSKA y SZETELA (1988), DE CORTE, VERSCHAFFEL y VAN COILLIE (1988), AIZPÚN, CASALS y SUÁREZ (1994), INCIE (1996).

El propósito de este estudio ha sido contribuir a un mejor conocimiento teórico y aplicado de los procesos implica-

dos en el aprendizaje de las matemáticas elementales, y en concreto en el campo de los problemas aritméticos de una sola operación. Tratamos de comprobar la eficacia del entrenamiento en resolución de un tipo de problemas aritméticos. Para ello se ha elaborado y aplicado un Programa Instruccional de Resolución de Problemas Aritméticos de Combinación y de Cambio.

Hemos formulado la siguientes hipótesis:

La aplicación del Programa Instruccional de Resolución de Problemas Aritméticos de Combinación y de Cambio a un grupo de sujetos muestra resultados sensiblemente superiores en las puntuaciones finales, respecto a un grupo de sujetos que siguen la práctica curricular ordinaria en estas categorías semánticas de problemas.

MÉTODO

Sujetos

El estudio se ha llevado a cabo sobre 98 alumnos de Tercero de Educación Primaria distribuidos en 4 unidades de dos colegios de Educación Primaria de la ciudad de Cádiz. Se formaron dos grupos no equivalentes por ser elegidos en función del aula en que se encontraban: dos aulas formarían el Grupo Control (49 sujetos) y dos aulas el Grupo Experimental (49 sujetos). La edad media es similar (8, 10 años) en los dos grupos. El nivel socioeconómico es medio-bajo. El rango de edad del grupo experimental: 8 años, 5 meses a 9 años, 4 meses. Rango de Edad del Grupo Control: 8 años, 5 meses a 9 años, 5 meses.

Materiales

El material utilizado en esta investigación se puede clasificar en dos grandes apartados:

1. Baterías de Problemas Aritméticos Elementales Verbales de Combinación y Cambio. (En el Anexo I se muestra una de las baterías).

2. Diseño de un Programa Instruccional de Resolución de Problemas Aritméticos de Combinación y de Cambio. El Programa Instruccional se basa en la utilización de diferentes diagramas esquemáticos para representarse los diversos tipos de problemas de Cambio y Combinación. Estos diagramas modelan, con los pasos que se describen en las diferentes sesiones de entrenamiento, la construcción de las representaciones de las categorías de los problemas verbales. Estas representaciones visuales son diferentes según sean los problemas. Para los problemas de Cambio se utiliza un diagrama que expresa la situación inicial, el cambio y el estado final, para los problemas de Combinación (las partes y el todo) un diagrama estático que señala las partes y el todo y el lugar donde se sitúa la incógnita. Los diagramas utilizados siguen el modelo propuesto por WILLIS y FUSON (1988) pero con algunas modificaciones, por ejemplo siempre se indica el lugar de la incógnita con un trazo discontinuo y con el signo de interrogación. (Ver Anexo II).

Son varias las razones que se aducen para el uso de los diagramas para mejorar la capacidad de los niños para resolver problemas:

Primera. Muchas de las investigaciones sobre adición y sustracción tempranas han mostrado que los niños necesitan comprender no solamente los diversos componentes de un problema (palabras, números, datos, símbolos, etc.) sino también las relaciones que se establecen entre los componentes del problema (CARPENTER y MOSER, 1984; RILEY, GREENO y HELLER, 1983). Los análisis cognitivos con resolutores de problemas han conducido a los investigadores a creer que existe una correlación entre los resolutores exitosos y la comprensión de estas relaciones. Los investigadores han desarrollado modelos de simulación que han sido bastante precisos en la predicción de las estrategias de solución que los niños usarán en diversos tipos de problemas con base en el conocimiento conceptual de las diferentes estructuras de problemas (BRIARS y LARKIN, 1984; RILEY, 1983; SIEGLER y SHRAGER, 1984). Estos modelos ahondan en la comprensión de los procesos mentales de los niños. El trabajo empírico y los modelos explicativos juntos nos proporcionan la base de

lo importante que es que los niños comprendan la manera en que las partes de un problema correlacionan. Sin embargo, los niños no son necesariamente conscientes de lo que ellos han comprendido (GREENO, 1987). El conocimiento que ellos tienen de las relaciones entre los diferentes componentes de un problema es con frecuencia tácito. Por lo tanto, uno de los propósitos de usar los diagramas para la instrucción está en hacer este conocimiento explícito y disponible para el estudiante. Plantean que el traslado de la información explícita a una forma representacional como es el diagrama sirve como un medio para el reflejo y ayuda al estudiante a hacerse consciente del conocimiento.

Una *segunda* razón para usar diagramas en la instrucción está en proporcionar a los niños una herramienta heurística. Esto significa que un diagrama puede presentar la información de una forma que hace la estructura subyacente de un problema más transparente. Por ello, muchos buenos resolutores de problemas (y no simplemente niños) tienden a sacar un diagrama de un problema antes de tratar de resolverlo. Como ya hemos mencionado, SCHOENFELD (1985), discute sus esfuerzos por enseñar explícitamente herramientas heurísticas para resolver problemas. Su primer heurístico es, «Trazar un diagrama, si es posible». Esto naturalmente conduce a dos preguntas: ¿Cuáles son las características de un diagrama que lo hacen (potencialmente) valioso?, y ¿Son todos los diagramas necesariamente útiles?

Una *tercera* razón para enseñar el uso de diagramas es que puede fomentar en los niños el aprendizaje de cómo aprender a construir su propio aprendizaje (LINDVAL, TAMBURINO y ROBINSON, 1982). De hecho, muchos de los artículos informan anécdotas de cómo los niños extienden y adaptan determinados diagramas de unas situaciones a otras. En el Anexo se muestran ejemplos de los diagramas utilizados.

PROCEDIMIENTO

En el cuadro se sintetizan los pasos seguidos en este estudio.

EVALUACIÓN INICIAL PRETEST	TRATAMIENTO	EVALUACIÓN FINAL POSTEST.
- Bateria de Problemas (PAEV). Formas A. Grupos Experimental y Control.	- Grupo experimental: Aplicación del Programa Instruccional: 3 sesiones para problemas de Cambio. 3 sesiones para los problemas de Combinación. - Grupo control: Enseñanza regular, práctica en problemas.	- Bateria de problemas (PAEV). Formas B. Grupos experimental y control.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados expresados como Índices de Dificultad se presentan en la Tabla 1. En la Tabla 2 se

muestran las comparaciones intergrupo para los dos tipos de problemas trabajados en las sesiones instruccionales.

EXPERIMENTAL			CONTROL	
	LDIFIC1	LDIFIC2	LDIFIC1	LDIFIC2
COP	0,84	0,98	0,89	0,93
COBP	0,50	0,73	0,57	0,45
CAIP	0,95	0,96	0,89	0,92
CABP	0,98	0,97	0,73	0,78
CASP	0,30	0,78	0,40	0,37
CAMP	0,84	0,91	0,75	0,86
CABP	0,41	0,67	0,46	0,57
CAMP	0,67	0,91	0,61	0,67

Tabla 1. Índices de Dificultad de la Primera (I. DIFIC1.) y de la Segunda Aplicación (I. DIFIC2) en los Problemas de Combinación (COP) y problemas de Cambio (CAP) planteados con números pequeños.

Tabla 2

	VARIANZA TOTAL				VARIANZA POR GRUPO		
	F	t	gl	p	t	gl	p
COP	3,29	-1,08	99	0,282	-1,06	70,66	0,291
COBP	1,28	2,97	99	0,004	2,99	92,67	<u>0,004**</u>
CAIP	1,80	,76	99	0,430	,77	88,34	0,446
CABP	8,18	3,09	99	0,003	3,17	60,23	<u>0,003**</u>
CASP	1,36	4,45	99	0,000	4,47	92,24	<u>0,000***</u>
CAMP	1,54	,85	99	0,400	,85	90,93	0,397
CABP	1,11	1,02	99	0,309	2,46	92,99	0,309
CAMP	2,77	2,96	99	0,004	3,01	79,31	<u>0,004**</u>

Tabla 2. Comparación de los resultados en Problemas de Combinación y de Cambio con números pequeños. La probabilidad que se ofrece es para el estadístico «t de Student» y las que resultan estadísticamente significativas se resaltan con subrayado y asteriscos.

En los problemas de Combinación 2 en el postest encontramos diferencias significativas entre el grupo experimental y el grupo control (Con números pequeños $F=1,28$; $p<0.004^{**}$). La pauta encontrada en el grupo control muestra un peor rendimiento en la segunda aplicación de la Batería de problemas.

Teniendo en cuenta que los problemas de Combinación son problemas muy fáciles, es lógico que las diferencias sólo se presenten en Combinación 2 (encontrar una parte en un problema que presenta el todo y otra parte).

Por tanto, cabe concluir que el Programa Instruccional de entrenamiento para los problemas de Combinación es efectivo para ser enseñado a alumnos de 3º de Educación Primaria.

Si analizamos los resultados en los problemas de Cambio en el postest comparando los dos grupos de sujetos se observan diferencias significativas sólo en algunos de los tipos de problemas de Cambio. Estas diferencias se encuentran en CA2P ($F= 8.18$; $p<0.002^{**}$) que es un problema con bajo índice de dificultad (Muy fácil o Fácil) y es una diferencia en puntuaciones directas igual a la de la Primera Aplicación. En los problemas

de Cambio 3 con números pequeños se señala la efectividad del entrenamiento, los niveles de significatividad son, para CA3P, $F=1.36$; $p<0.0001^{***}$. El problema de Cambio 3 es un problema de lenguaje inconsistente, el enunciado puede inducir a resolverlo con una suma, cuando se resuelve con una resta (se pide por el Cambio en una situación de Cambio aumentando).

Igualmente las diferencias son significativas en el problema de Cambio 6 con números pequeños (CA6P, $F=2.77$; $p<0.004^{**}$). En los problemas de Cambio 6 se pregunta por la situación inicial después de realizar un cambio disminuyendo, el enunciado del problema mueve a realizar la operación contraria a la correcta.

A la vista de estos resultados podemos concluir, respecto del entrenamiento de los problemas de Cambio lo siguiente: la aplicación del Programa Instruccional resulta efectiva para la mayor parte de los problemas de Cambio (a excepción de Cambio 1 y Cambio 4); la tendencia general de los resultados da a entender que a medida que aumenta la dificultad de los problemas, el entrenamiento es más útil para los alumnos. (Puede consultarse los índices de dificultad hallados en la Primera Aplicación).

ANEXO I

PROBLEMAS DE CAMBIO	
1.	P. Tenía 4 pesetas y me dieron 3. ¿Cuántas tengo ahora?
2.	P. Daniel tiene 8 pesetas. Se gasta 3. ¿Cuántas pesetas le quedan?
3.	P. Tenía 4 pesetas. Mi madre me da dinero. Ahora tengo 9 pesetas. ¿Cuántas pesetas me ha dado mi madre?
4.	P. Tenía 7 cromos. Después de jugar me quedan 2. ¿Cuántos cromos he perdido?
5.	P. Mi tío me da 4 pesetas. Ahora tengo 7. ¿Cuántas pesetas tenía antes de ver a mi tío?
6.	P. He perdido jugando 3 cromos. Me quedan 5. ¿Cuántos tenía cuando empecé a jugar?
PROBLEMAS DE COMBINACIÓN	
1.	P. En una mesa están sentados 3 chicas y 2 chicos. ¿Cuántos niños hay?
2.	P. Tengo 7 caramelos. 3 son de menta y los demás son de fresa. ¿Cuántos caramelos son de fresa?

ANEXO 2

Diagrama para los problemas de Combinación 1.

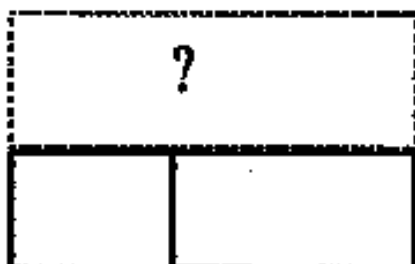


Diagrama para los problemas de Combinación 2.

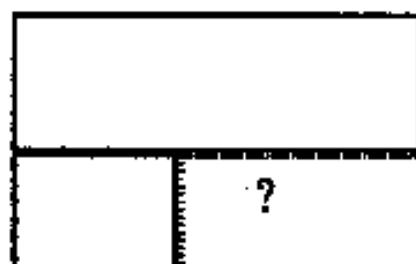
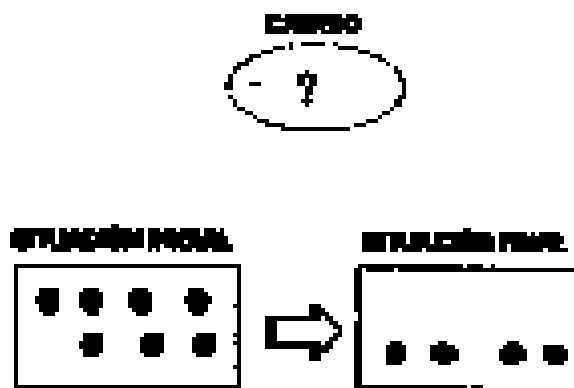


Diagrama para los prot



BIBLIOGRAFÍA

- AIZPÚN, A., CASALS, M. y SUÁREZ, J. J. (1994): Perspectivas del aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela Primaria. En *Los aprendizajes instrumentales en la Educación Primaria. Programación, situación e implicaciones*. Madrid. Escuela Española.
- BETHENCOURT, J. (1985): Estrategias cognitivas en la resolución de problemas aritméticos. Tesis doctoral no publicada. Universidad de la Laguna.
- BRIARS, D., y LARKIN, J. (1984): «An integrated model of skills in solving elementary word problems». *Cognition and Instruction*, 1, 245-296.
- CARPENTER, T. P., LINDSQUIST, M. M., MATTHEWS, W. y SILVER, E. A. (1983): Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary School. *Mathematics Teacher*, 76 (9), 652-659.
- CARPENTER, T. P., MOSER, J. M. (1984): «The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three». *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 179-202.
- DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. y VAN COLILLIE, V. (1988): Influence of number size, problem structure, and response mode on children's solution of multiplication problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 197-216.
- GREENO, J. G. (1987) : «Nature of problem solving abilities», en W.K. ESTES (Comp), *Handbook of learning and cognitive processes*, Vol5, Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- INSTITUTO NACIONAL DE CALIDAD Y EVALUACIÓN (1996): *Evaluación de la Educación Primaria. Informe Preliminar*. Documento poligrafiado. Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia.
- LINDVAL, M. C., TAMBURINO, J.L. y ROBINSON, L (1982): «An exploratory investigation of the effect of teaching primary grade children to use specific problem solving strategies in solving simple arithmetic story problems». Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, New York.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1980): *An agenda for action: Recommendations for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1989, 1991): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM. Edición en castellano: *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática «THALES». Sevilla.
- RABIJEWSKA, B y SZETELA, W.(1988): A study of problem solving in Poland and Canada. En *Proceedings of 1987 Meeting of the International Commission for Study and Improvement of Mathematics Teaching (CIEAEM): The Role Errors Play in the Learning and teaching of Mathematics*. Sherbrooke, Quebec, Canadá.
- RILEY, M. S. (1981): «Conceptual and procedural knowledge in development», citado por RILEY, M. S. , GREENO, J. G. y HELLER, J. I. (1983), «Development of children's problem-solving ability in arithmetic », en H. GINSBURG (comp), *The development of mathematical thinking*, Nueva York, Academic Press, págs. 153-196.
- RILEY, M., GREENO, J., y HELLER, J. (1983): *Development of children's problem solving ability in arithmetic*. En GINSBURG, H (comp). *The development of mathematical thinking* (241-311). New York: Academic Press.
- SCHOENFELD, A.H. (1985): «Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos». En *La enseñanza de la matemática a debate*. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC).
- SIEGLER, R. S. y SHRAGER, J. (1984): «A model of strategy choice». En SOPHIAN, C. (Ed). *Origins of cognitive skills* (229-293). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- WILLIS, G. B. y FUSON, K.C. (1988): «Teaching children to Use Schematic Drawings to Solve Addition and Subtraction Word Problems». *Journal of Educational Psychology*, 80, 2, 192-201.