

## UN SOLITARIO ATRIBUIDO A DAVID SINGMASTER

Ruiz Blas, C.  
Gutiérrez, F.  
Guerrero, P.

### PLANTEAMIENTO

El solitario que estudiaremos, del cual desconocemos su origen, nos fue planteado por el profesor David Singmaster durante la celebración de la última conferencia del ICME (Sevilla, Julio'96); el enunciado es el siguiente.

El tablero consta de  $t$  casillas (huecos) alineadas; cada casilla puede albergar un número de bolas (fichas) arbitrario en forma de pila e inicialmente en cada casilla hay una ficha; dado un entero fijo  $s$  (amplitud del salto), un movimiento consiste en tomar una ficha de la cima de una pila y colocarla en la cima de otra, de forma que el número de fichas saltadas sea  $s$  (ver figura 0). El problema  $S_s^h(t)$  consiste en obtener una configuración en la cual cada casilla o bien está vacía o bien contiene una pila de altura  $h$ . Si sustituimos las casillas por platillos

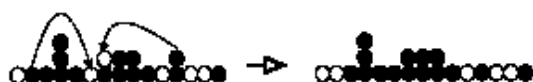


Figura 0. Dos posibles movimientos para  $s = 5$ ,  $t = 15$

y las pilas por montones obtenemos un problema equivalente: *partiendo de una bola en cada platillo, repartirlas en  $t/h$  montones iguales.*

Sea el predicado  $P_s^h(t)$  • el problema tiene solución. Entonces  $P_s^h(t) \iff t \in h\mathbb{Z}$   $s \in h\mathbb{Z}$ ; en efecto: si consideramos cualquier configuración final, en el último movimiento debió saltarse un número completo de pilas de altura  $h$ . Por consiguiente estudiaremos solamente los problemas de la forma  $S_{kh}^h(ph)$ , con  $h > 1$  (para  $h = 1$  la configuración inicial ya es solución); si  $t \in ph \cdot kh \cdot s$ , la longitud del tablero no supera el salto y no es posible realizar ningún movimiento desde la situación inicial; luego los problemas que pueden tener solución son  $S_{kh}^h(kh + h)$ ,  $S_{kh}^h(kh + 2h)$ ,  $S_{kh}^h(kh + 3h)$ ,... Demostraremos

en primer lugar que si uno de ellos tiene solución, también son resolubles los siguientes (es decir,  $P_s^h(ph) \iff P_s^h(ph + h)$ ); después probaremos que el más pequeño ( $S_{kh}^h(kh + h)$ ) tiene solución, con lo cual todos los resolubles. Si  $N_{kh}^h(ph)$  denota el número de pasos de la mejor solución del problema  $S_{kh}^h(ph)$  y consideramos el problema inverso (posición inicial con  $p$  pilas), el número de bolas que no están en su sitio es  $(h - 1)p$ , luego  $N_{kh}^h(ph) \geq (h - 1)p$ . El problema  $S_{kh}^h(ph)$  es *óptimo* si  $N_{kh}^h(ph) = (h - 1)p$ ; es *óptimo más uno* si  $N_{kh}^h(ph) = (h - 1)p + 1$ , etc. Si un problema es *óptimo más  $k$* , diremos que es de orden  $k$  (los *óptimos* son de orden 0). Exponemos algunos resultados sobre la cota del orden de los problemas citados.

### SOLUBILIDAD DEL PROBLEMA

**Lema 0.1**  $P_s^h(ph) \iff P_s^h(ph + h)$

*Demostración:* Comenzamos separando  $s + 1$  bolas desde la izquierda (ver figura 1-A) para después pasar las  $h - 1$  bolas siguientes encima de la primera bola de la izquierda; la situación quedará como en la figura 1-B; pero si  $S_s^h(ph)$  tiene solución, también tendrá soluciones sobre un tablero más largo y con el mismo número de bolas.

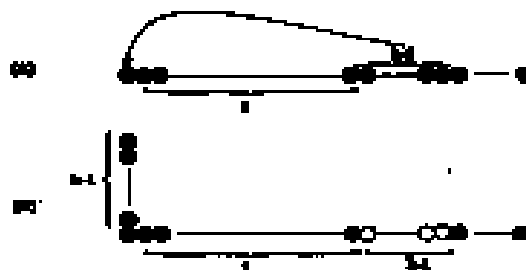


Figura 1. Construcción inductiva de la solución para  $P_k^h(ph + h)$

Del lema concluimos que es suficiente estudiar el problema  $S_{kh}^h(kh + h)$  y que una solución óptima de este problema conlleva a soluciones óptimas de los siguientes.

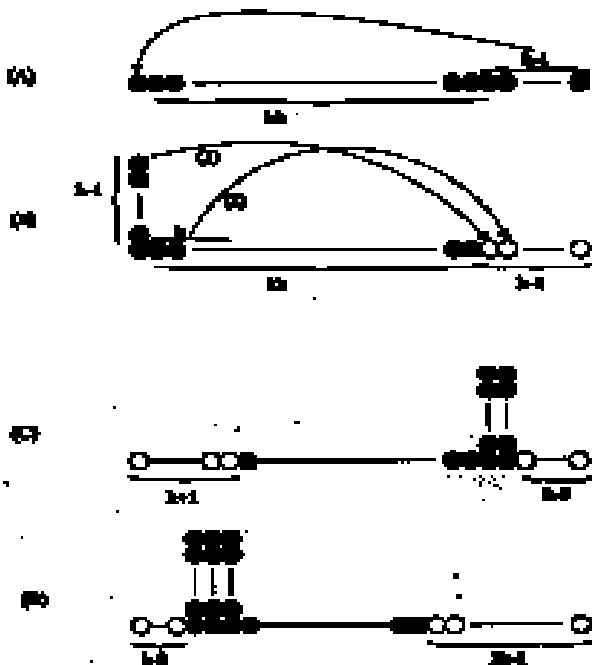


Figura 2. Primeros pasos de la solución para  $S_{kh}^h(ph + h)$

Es fácil ver que para  $h = 2$  el problema  $S_{2k}^2(2k + 2)$  no tiene solución, ya que los únicos movimientos a partir de la configuración inicial son dos, uno inverso del otro. Sin embargo, después veremos que el de menor número de bolas con solución se obtiene precisamente para el siguiente múltiplo:  $S_{2k}^2(2k + 4)$ . Para el resto de valores de  $h$  tenemos el siguiente

**Lema 0.2** Para  $h > 2$ , el problema  $S_{kh}^h(kh + h)$  tiene solución.

**Demostración:** Para construir una solución (no necesariamente óptima) consideremos los primeros movimientos agrupados tal como indica la figura 2; en primer lugar (A) movemos las  $h - 1$  bolas finales formando una pila de altura  $h$  sobre la primera posición (en total,  $h - 1$  movimientos), a continuación (B) apilamos todas las bolas de esta columna pero sobre el hueco de la posición  $kh + 2$ , para después pasar la  $h$  primeras bolas (si quedan todavía), de forma que tendremos ya dos columnas (figura 2-C); a partir de aquí se repiten los movimientos pero hacia la izquierda; es decir, trasladamos en primer lugar las dos columnas hacia la izquierda, para después pasar las  $h$  bolas de más a la derecha en una nueva pila, junto a las restantes, resultando la configuración (D); es decir, el algoritmo consiste en ir alternan-

do (a izquierda o derecha, mientras sea posible) las operaciones: *trasladar las pilas ya formadas y construir una nueva pila junto a la última trasladada*. Evidentemente el algoritmo termina, y quedaría probar que siempre es posible realizar tales movimientos. Para ello consideremos un paso genérico del algoritmo (fig. 3); sean  $a_n$  y  $b_n$  las sucesiones (finitas) que determinan el número de huecos consecutivos a izquierda y derecha inmediatamente después de construir las primeras  $n$  columnas, y sea  $c_n$  la sucesión que determina en ese momento el número de fichas aún no apiladas; la sucesión  $c$  es una progresión aritmética de razón  $h$  (en cada paso eliminamos  $h$  bolas), valor inicial  $kh$  y último valor 0 ( $c_{k+1} = 0$ ); los primeros valores (fig. 3) de tales sucesiones  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$  son  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = h - 1$ ,  $c_1 = kh$ ,  $a_2 = h + 1$ ,  $b_2 = h - 3$ ,  $c_2 = kh - h$ , ... Es fácil comprobar que la recurrencia para tales sucesiones es, con  $1 \leq n \leq k + 1$ ,  $a_{n+2} = a_n + h - 2$  (si  $n$  es impar)  $a_{n+2} = a_n$  (si  $n$  es par) y " $n$ ,  $a_n + b_n = n(h - 1)$ ;  $c_n = (k + 1)h - nh$ , de donde

$$a_{2k} = kh + 1 \quad b_{2k} = k(h - 2) - 1 \quad a_{2k+1} = k(h - 2) \quad b_{2k+1} = (K + 1)h - 1$$

y de aquí, si  $h > 2$ , " $n : 1 \leq n \leq k + 1 : a_n, b_n \geq 0$ ", lo cual significa que siempre hay huecos suficientes en los extremos para realizar los movimientos indicados.

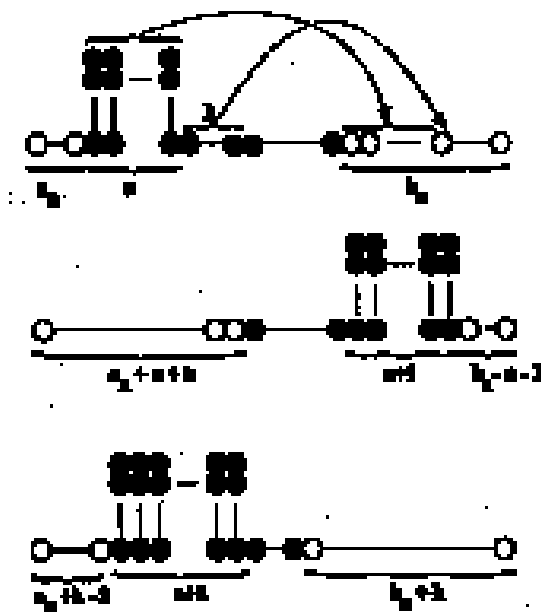


Figura 3. Pasos genéricos de la solución para  $S_{kh}^h(kh + h)$

Hemos visto que para  $h = 2$  el problema  $S_{2k}^2(2k + 2)$  no tiene solución (por lo que el lema 0.1 no es útil), pero sí el siguiente múltiplo.

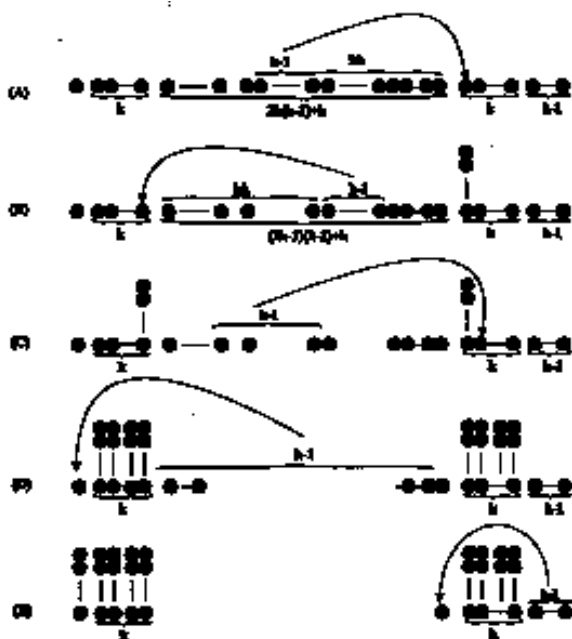


Figura 4. Una solución óptima del problema  $S_{kh}^h(2kh(k+1))$ .

**Lema 0.3**  $S_{2k}^2(2k+4)$  es resoluble.

*Demostración:* Sigamos los siguientes pasos: en primer lugar pasamos las dos penúltimas bolas de la derecha a la primera posición para obtener una pila en la parte derecha; a partir de aquí, podemos seguir el algoritmo descrito en el lema 0.2 ya que el número de huecos a la derecha es 3 (si consideramos también como hueco la cima de la pila derecha) y las sucesiones descritas en el citado lema tienen sentido.

Es fácil ver que el problema  $S_{kh}^h(ph)$  (con  $p > k$ ) jugando sobre un *tablero circular* siempre tiene solución y es óptimo. Para ello basta con demostrar que el primer problema con solución  $S_{kh}^h(kh+h)$  se puede resolver en  $(h-1)(k+1)$  pasos, lo cual se consigue mediante la iteración (en sentido horario) del siguiente grupo de movimientos: *buscar  $h-1$  bolas consecutivas y trasladarlas encima de una bola aislada*. Por tanto, en el resto de apartados estudiaremos únicamente tableros lineales. En [Dud95] (reedición parcial de [Dud17]) se plantea la resolución del problema  $S_2^2(12)$  sobre un tablero circular imponiendo como condiciones adicionales que los saltos sólo se hagan de izquierda a derecha, que no se pueda retroceder la mano para realizar un nuevo salto y que se dé el mínimo número de pasadas por la lista hasta volver al 1.

## 1. BUSQUEDA DE SOLUCIONES ÓPTIMAS

La siguiente tabla anterior muestra para  $h = 2$  los valores de  $N_{kh}^h(ph)$ ; observamos que  $S_6^2(10)$  es de orden 3,

mientras que  $S_6^2(16)$  es de orden 0 (óptimo); también es fácil comprobar (según lema 0.1) que si  $S_s^h(l)$  es de orden  $k$ , entonces, para  $l' > l$ , el orden de  $S_s^h(l')$  es menor o igual que  $k$ . Los valores en negrita son óptimos mientras que los encuadrados óptimos más uno

$k/p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	*	*	<b>4</b>	4	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2	*	*	*	<b>5</b>	5	5	*	*	*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	8	<b>7</b>	8	8	*	*	*	*	*	*
4	*	*	*	*	*	> 10	<b>8</b>	9	10	10	*	*	*	*
5	*	*	*	*	*	*	?	?	<b>10</b>	11	12	12	*	*
6	*	*	*	*	*	*	*	?	?	<b>11</b>	12	12	14	14

**Teorema 1.1** El problema  $S_{kh}^h(2h(k+1))$  es de orden cero.

*Demostración:* En la figura 4 exponemos la construcción de una solución óptima; los pasos (B) y (C) se repiten hasta alcanzar la situación (D), en la que en el centro y sin apilar hay  $h$  bolas, de las cuales se toman  $h-1$  para pasar a la configuración (E); desde aquí es fácil obtener la solución. Obsérvese que el total de movimientos realizados es el menor posible.

**Lema 1.4** Para  $1 > p > 4$ , el problema  $S_{ph}^h(ph)$  es de orden uno

*Demostración:* Si  $\bar{0}$  indica 0 o más huecos contiguos, los pasos que conducen a una solución óptima del problema  $S_{ph}^h(2h)$  (y análogamente para  $S_{ph}^h(3h)$ ) inverso (pasar de  $\bar{0} h \bar{0} h \bar{0}$  a  $\underbrace{1 \ 1 \dots 1}_{2h}$ ) llevan tras  $h-1$  pasos a

$\underbrace{\bar{0} \ 1 \ \bar{0} \ 1 \dots \bar{0} \ 1}_{h-1} \ 0 \ h \ \bar{0} \ 1 \ \bar{0}$ , que no conduce a una solución

óptima. Para probar que  $S_{ph}^h(2h)$  es de orden 1, desde  $\underbrace{1 \ 1 \dots 1}_{2h}$  alternamos los movimientos *la de más a la*

*izquierda a la derecha*, y *la de más a la derecha a la izquierda* hasta llegar tras  $2h-3$  movimientos a  $\bar{0} h \ 1 \ (h-1) \ \bar{0}$ , y desde ésta basta mover la bola central a la izquierda y después colocarla en la segunda pila: en total serán  $2h-1$  movimientos.

**Conjetura 1.1** (a) El problema  $S_{kh}^h((k + [k-1/2] + 2)h)$  es de orden uno. (b) El problema  $S_{kh}^h((k+s)h)$  es de orden uno si  $[k-1/2] + 2 \leq s \leq k+1$ .

Para  $h = 2$  hemos comprobado empíricamente la conjetura anterior con  $k < 7$ . Finalmente, invitamos al lector a establecer cotas del orden  $S_{kh}^h(kh+h)$  a través de ecuaciones diofánticas que aparecen al parametrizar la posible elección de columnas a mover de izquierda a derecha.

## BIBLIOGRAFÍA

HENRY E. DUDENEY. En *Los Gatos del Hechicero*, problema 63 (Platos y monedas), págs. 50-51 (ver también *Los acertijos de Canterbury*, problema 39 (La adivinanza del estanque de los peces)). Zugarto Ediciones, 1995.

HENRY E. DUDENEY. *Amusements in Mathematics*. Nelson; Londres, 1917.