

CONSIDERACIONES PERSONALES SOBRE ASPECTOS DIDÁCTICOS DE MATEMÁTICAS

Sobrino Reyes, M.

Se hará un breve recorrido sobre algunas apreciaciones propias referidas a distintos aspectos que no se deben obviar en el tratamiento didáctico en el aula de las matemáticas. Advierto que el recorrido está a caballo entre una caminata al azar y el trayecto que marcaría, digamos, la curva de ecuación a la que no le falta su punto de discontinuidad, ni sus infinitos extremos relativos, ni sus puntos donde siendo continua no es derivable, pero que, sin embargo presenta una tendencia clara en el infinito. Esperemos que la tendencia de la comunicación sea percibida sin necesidad de irnos tan lejos.

SOBRE LO TRIVIAL EN MATEMÁTICAS

Siendo estudiante de Matemáticas, recién llegado a la facultad, aún recuerdo lo que me llamó la atención aquel plano afín más pequeño de 4 puntos y 6 rectas pintado en la pizarra por el profesor. Lo que yo percibía en el dibujo como las dos rectas “diagonales” de ese cuadrivértice tenían la curiosa propiedad de ser paralelas. Ese hecho debía ser tan trivial que el profesor no se molestó ni en decir que lo era. Esto como a menudo sucede, es del dominio de la matemática elemental —ya que tan sólo necesita utilizar el axioma de las paralelas junto con el hecho de estar con el plano afín más pequeño— pero no es trivial.

Lo trivial de manera absoluta no existe a menos que, en el otro extremo, pensemos que todo el conocimiento humano es trivial, obviando el esfuerzo empleado en alcanzarlo. La trivialidad de un hecho está condicionada por la persona que lo interpreta, por sus capacidades y conocimientos previos. Recuerdo ese comentario en el que se afirma que matemático es aquella persona que sin dudarlo conoce y entiende la igualdad

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

El resultado es elemental y cualquier matemático sabe que su deducción es fácil y mecánica pero no es trivial.

En el aula nada debe ser considerado como trivial porque aun lo más sencillo algún alumno no lo percibirá como tal. Con frecuencia empleamos expresiones del tipo: este problema es fácil, no merece la pena justificar este resultado, es evidente, cualquiera puede entender que... sin embargo, a veces nuestras suposiciones son erróneas y muchos alumnos/as no sólo no entienden tales *evidencias* sino que además seguramente se pregunten cómo tenemos el descaro de llamar inmediato a algo difícil de entender por ellos.

SOBRE LOS CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS

La importancia de los procedimientos va más allá de la concedida a muchas técnicas rutinarias repetidas hasta la saciedad. Habitualmente tales técnicas están o se presentan desprovistas del aparato conceptual subyacente y, consecuentemente, esto da lugar a que el alumno no sea capaz de darle sentido, pierda interés y, por tanto, no la aprenda. Lo anterior se agrava cuando no se ve una utilidad inmediata de lo aprendido como sucede cuando a los niños se los tiene un buen tiempo resolviendo ecuaciones sin mostrarles sus aplicaciones.

Es necesario trabajar los procedimientos de rango superior implicados en la resolución de problemas. Así el trabajo de alumnos y alumnas pasará necesariamente por la selección, nada evidente, del/de los procedimiento/s adecuado/s, y ello constituirá la verdadera dificultad más allá de, una vez seleccionado/s, encadenar los pasos de que consta cada procedimiento en cuestión.

Este planteamiento implica presentar en el aula la estrecha relación entre los aspectos conceptuales y los procedimentales de los contenidos, aunque cuando se realicen los procedimientos más rutinarios no se piense en tales relaciones. Por ejemplo, el cálculo de derivadas es

una técnica mecánica necesaria de conocer pero no es un fin en sí misma. De nada sirve saber derivar si no se conoce su interpretación geométrica —que nos ayudará, entre otras cosas, a dar una interpretación intuitiva de la optimización de una función— o si no se asocia la noción de derivada con la idea de rapidez de cambio que nos permitirá dar sentido a sus aplicaciones —la potencia es la variación del trabajo respecto del tiempo—.

Abundando en lo anterior, un planteamiento subyacente de este tipo influye incluso en la propia secuenciación de los contenidos. Tomando otro ejemplo de Análisis resulta curioso pasarse una buena temporada hallando primitivas sin que el alumno sepa para qué. Posiblemente al llegar a su aplicación en el cálculo de superficies ya se habrán quedado irremediabilmente algunos alumnos por el camino. Si empezamos por el cálculo de áreas la integral indefinida se verá como una necesidad y no como algo artificial.

SOBRE LOS MATERIALES

Para jugar al ajedrez no son necesarios ni el tablero ni las fichas pero estos materiales son lo primero que se muestra a un principiante.

Es impensable hacer Geometría sin manipular objetos geométricos o familiarizarse con el azar sin lanzar dados, monedas o extraer cartas y analizar lo que sucede.

¿Hay mejor forma de introducirnos en el estudio de la representación gráfica de funciones que visualizándola sobre la pantalla de un ordenador? Utilizar sólo la pizarra y el cuaderno tiene inconvenientes como: la imposibilidad de percibir las peculiaridades globales antes de realizar el estudio pormenorizado de los distintos aspectos locales, la lentitud o la pérdida de exactitud. En cualquier caso el uso del ordenador no debe dificultar la pretensión final de que los/as alumnos/as conozcan y utilicen las herramientas del Cálculo que permiten construir funciones.

Las reflexiones anteriores nos llevan, sin remedio, a la utilización de todo tipo de materiales y esto nos lleva también a resolver con urgencia los problemas de organización en los centros que van desde la disponibilidad de espacios para tener los materiales y que éstos sean accesibles a profesores y alumnos, hasta la utilización de las aulas de informática y audiovisuales optimizando su uso. Estos problemas aparentemente secundarios en la mayor parte de las ocasiones se convierten en obstáculos que hacen que “todo siga igual”.

SOBRE ALGUNAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE

De entre todas las posibles dificultades trataré mediante algunos ejemplos dos: las relacionadas con la percepción y con la intuición.

PERCEPCIÓN

La percepción es la manera habitual que tenemos de formar las primeras imágenes que estructurarán nuestro conocimiento sobre un determinado hecho —cotidano o científico—. Los sentidos son nuestros mecanismos encargados de percibir y son los que favorecen en unos casos y dificultan en otros, los menos afortunadamente, la comprensión.

De entre las numerosas posibilidades he seleccionado tres tipos de problemas relacionados con la percepción:

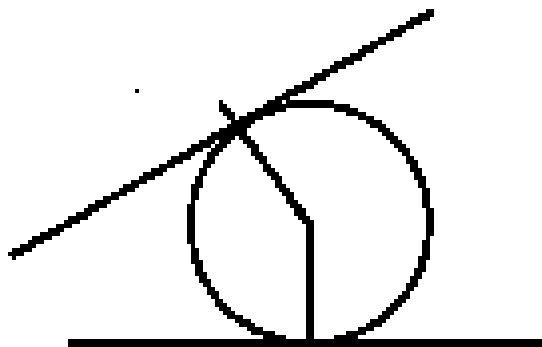
Las formas o imágenes las situamos en un marco contextual incorrecto.

Esta dificultad aparece cuando, al hilo del comentario inicial, situamos al plano afín más pequeño “sobre” un plano afín real: percibimos dos diagonales que se cortan pero conceptualmente son paralelas.

La imagen percibida pierde su carácter concreto y pasa a un plano superior de generalidad.

Sucede esto cuando un cuadrado apoyado sobre su vértice se interpreta como un rombo ya que no descansa sobre uno de sus lados (este error viene motivado por la falta de uso de materiales manipulativos porque si el alumno sólo ha visto el cuadrado pintado de esta forma en la pizarra o en los libros es posible que se forme esa idea errónea).

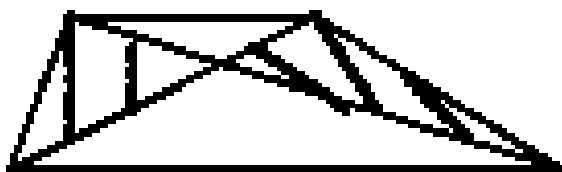
Esa supuesta posición “natural” hace que en unos casos se vea que el ángulo que forma la tangente a una circunferencia con el radio que pasa por el punto de tangencia es recto y en otras no (ver figura).



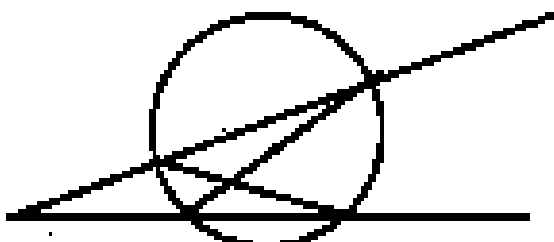
En otras ocasiones a la vista del dibujo de, pongamos, un triángulo el alumno hace suposiciones tales como que es rectángulo, equilátero o de cualquier otro tipo sin más argumento de la simple percepción en el dibujo.

Las formas o figuras se superponen dificultando aislar lo relevante.

¿Cómo llegar a la demostración elemental de que las dos partes rayadas en el trapecio de la figura tienen la misma superficie?



¿Cómo justificar que la definición de la potencia de un punto respecto a una circunferencia es consistente?



En este caso a la dificultad de percibir los triángulos superpuestos semejantes se une la posición de los lados correspondientes.

INTUICIÓN

En numerosas ocasiones las deducciones científicas parecen oponerse a la *intuición* o sentido común. El hecho científico siempre creativo, en muchas ocasiones -como cualquier creación- ha sido precedido de intuiciones, bien acertadas, bien erróneas. A pesar de ello a lo largo de la historia estos dos amigos han mantenido una continua lucha y aun después de establecida una determinada teoría se han mostrado situaciones aparentemente de “sentido común” que las refutaban, son las paradojas. No entraré en ellas aunque sí destaco su valor didáctico.

A continuación se muestran dos ejemplos con sus correspondientes “razonamientos intuitivos”.

Un ladrón está en un edificio de 7 plantas con probabilidad p . Se ha buscado en vano en las seis primeras plantas. ¿cuál es la probabilidad de que esté en la séptima?

Como está en el edificio con probabilidad p y no está en las seis primeras plantas, estará en el 7º con la misma

probabilidad p .

Un prisionero puede elegir entre tres puertas una de las cuales le conduce a la libertad. Tras hacer su elección y antes de abrir la puerta, el carcelero le muestra que en una de las dos no escogidas no está la ansiada libertad y le da la posibilidad de cambiar su elección. Tú, ¿qué harías?

Si el preso se mantiene en su elección la probabilidad de quedar libre es $1/3$. Sin embargo, si cambia, la probabilidad de fallar es $1/3$ (igual a la probabilidad de que en la puerta elegida inicialmente estuviera la salvación), luego la probabilidad de quedar libre en este caso es $2/3$.

¿Qué te parece? ¿Alguna de estas argumentaciones es correcta?

PERCEPCIÓN E INTUICIÓN

La verdad es que cuando se aíslan las variables se hace una representación excesivamente simplista y en la mayor parte de las situaciones son muchos los factores que se relacionan.

Una mezcla entre dificultades de intuición y percepción puede darse cuando pensamos, por ejemplo, en la transformación mediante una afinidad de un cuadrado en un rombo de lado igual al del cuadrado.

Intuitivamente el alumno o la alumna pueden pensar que las áreas son iguales (utilizando la idea preconcebida errónea de que dos figuras del mismo perímetro deben tener la misma superficie). Pero aun superado este error -puesto que si construimos el rombo con las diagonales muy dispares apreciarán sin dificultad la diferencia entre sus áreas- precisamente la percepción puede llevar al alumno a la conclusión de que en el interior del rombo no tenemos el mismo “número” de puntos que en el interior del cuadrado.

SOBRE EL FINAL

Este es el final y el momento de ser conscientes de *nuestra tendencia*, no aquí sino en el aula. Preguntémonos por la riqueza de las situaciones que presentamos a nuestros alumnos y alumnas. Detrás de unas consideraciones didácticas serias y coherentes hay más matemáticas de las que los más escépticos