

TRIGONOMETRÍA EN IMÁGENES

**Ibañez, Marcelino
Ortega, Tomás**

0. INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, los programas de Matemáticas en Secundaria se han ocupado más de la presentación formalizada de esta disciplina que de sus procesos de construcción. Estos procedimientos, en ocasiones, ocultan a los estudiantes las fuentes intuitivas de inspiración, entre ellas las gráficas, de las que se habían servido sus creadores. El nuevo curriculum de Secundaria hace hincapié en los procesos de construcción, lo que permite rescatar para la enseñanza de las Matemáticas el razonamiento inductivo, las estrategias heurísticas, el apoyo visual, la interpretación de los gráficos, etcétera; procesos, todos ellos, que son extraordinariamente útiles para el aprendizaje de las Matemáticas.

De esta forma, la *visualización* surge como algo completamente natural, como un elemento necesario para la creación y desarrollo del pensamiento matemático, y lo que aquí más nos interesa: como algo imprescindible para la comunicación y el aprendizaje de las Matemáticas.

Tratando de contribuir, en este sentido, a la visualización en el campo de la Trigonometría, las figuras que se exponen, pretenden estar en la misma línea de las que se publican en la famosa sección *Proofs Without Words* de la revista norteamericana *Mathematics Magazine* y, siguiendo la clasificación de Miguel de Guzmán (1996), se pueden encuadrar en las *visualizaciones isomórficas*, que, según el autor, se caracterizan porque

“los objetos tienen un correlato ‘exacto’ en nuestra representación en cuanto a las relaciones que nos interesan estudiar... (lo) que significa que sería posible, en principio, establecer una especie de tabla de correspondencias entre ciertos aspectos de la representación visual, que son los que vamos a utilizar, y los significados matemáticos que representan, hasta tal punto que nuestras posibles manipulaciones con los objetos de nuestra repre-

sentación visual podrían ser traducidos, en el momento en que nos lo propongamos, con mayor o menor esfuerzo, en las relaciones matemáticas abstractas que representan”.

El presente artículo tiene tres partes, bien diferenciadas, que tan sólo pretenden ser una muestra de como CABRI II es una herramienta didáctica incuestionable para la enseñanza de la trigonometría. En la primera parte se muestra la fundamentación teórica de las construcciones, en la segunda se exponen cuatro imágenes trigonométricas que son las correspondientes demostraciones gráficas de sus correspondientes teoremas y, finalmente, en la tercera cuatro figuras ilustran una concepción dinámica de la trigonometría.

1. FUNDAMENTOS DE LAS CONSTRUCCIONES

Las construcciones que a continuación se presentan se basan en la interpretación geométrica de las distintas operaciones algebraicas. Se utilizan transformaciones geométricas del plano, tales como traslaciones y giros, para visualizar la suma y la diferencia (figura 1.1) y también para hacer más claros los dibujos. La visualización de las otras operaciones se fundamenta en la teoría de proporcionalidad de segmentos. En efecto, el producto y el cociente se obtienen como aplicación del teorema de Tales (figuras 1.2 y 1.3); en particular, se puede calcular de forma gráfica el área de un rectángulo. A partir del teorema de Tales se deducen los criterios de semejanza de triángulos y el teorema de la altura. Éste último, junto al teorema del ángulo inscrito, permite construir la raíz cuadrada de cualquier número expresado como producto de dos factores (figura 1.4). Asimismo, esta construcción permite dibujar un cuadrado de área dada.

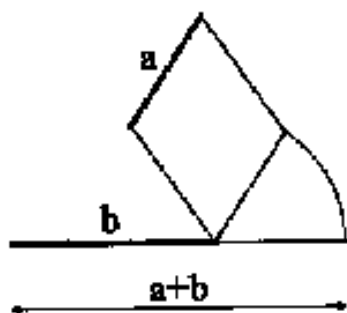


Figura 1.1.

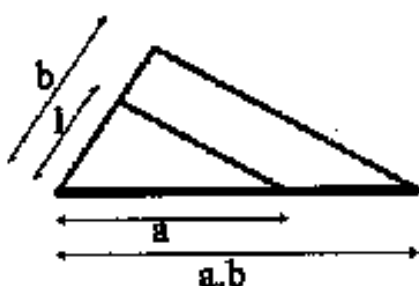


Figura 1.2.

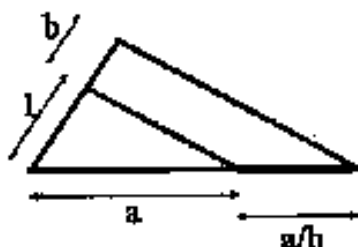


Figura 1.3.

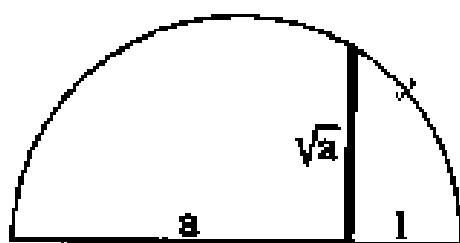


Figura 1.4.

2. TRIGONOMETRÍA ESTÁTICA

Para hacer estos dibujos, se han utilizado los recursos que proporciona CABRI de construcciones de figuras y

aplicación de transformaciones geométricas, pero sin aprovechar al máximo sus posibilidades en aras de una mayor claridad de exposición; por ejemplo, CABRI permite obtener de forma directa, sin dejar rastro, el traslado de un segmento según un vector o la bisectriz de un ángulo, pero se ha preferido mostrar la construcción completa con sus pasos intermedios, utilizando otras herramientas tales como *trazado de paralelas* o *compás*.

La figura 2.1 muestra la relación trigonométrica $\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b)$. Una vez situados los ángulos a y b de forma contigua sobre la circunferencia unidad, el primer miembro representa directamente. Para obtener el segundo se construyen de forma separada sus dos sumandos, que son productos de dos factores; las representaciones de las razones trigonométricas del ángulo a se sitúan, mediante traslaciones y giros, en posiciones adecuadas para ser multiplicadas por las correspondientes de b , mediante la construcción asociada a la figura 1.2. Para obtener la diferencia se aplica la traslación PQ y el giro de centro H . Finalmente, la igualdad queda establecida mediante un nuevo giro.

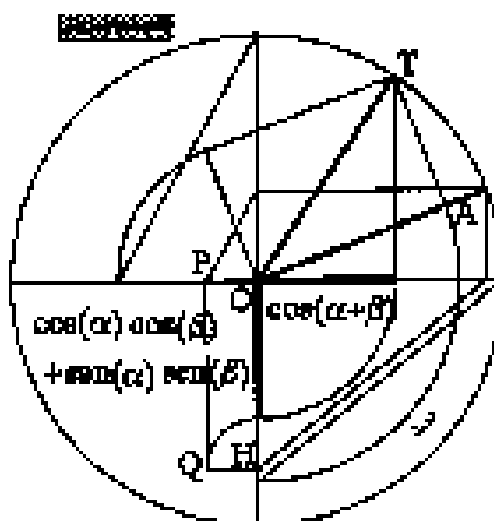


Figura 2.1.

La figura 2.2 representa la relación trigonométrica $\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin((a+b)/2) \cdot \cos((a-b)/2)$. Sobre la circunferencia unidad se sitúan los ángulos a y b ($a > b$) superpuestos y a continuación de a se pone b otra vez. Se visualiza $\sin(b)$ sobre éste último y mediante una traslación y un giro se añade a $\sin(a)$, obteniéndose así el primer miembro. Los ángulos $a+b$ y $a-b$ se bisecan a la vez, trazando la correspondiente bisectriz. Mediante un giro se sitúa $\cos((a-b)/2)$ en la posición adecuada para ser multiplicado por $\cos((a+b)/2)$. La duplicación de este segmento mediante un giro y una traslación esta-

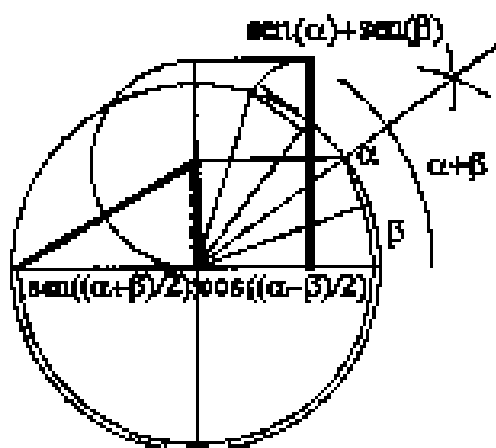


Figura 2.2.

La figura 2.3 prueba que si $a+b+g=\pi$, entonces $\tan(a)+\tan(b)+\tan(g)=\tan(a)\cdot\tan(b)\cdot\tan(g)$. Para mayor claridad se realizan dos construcciones, partiendo de sendas circunferencias de la misma magnitud, colocando en cada una de ellas a , b y g de forma consecutiva, a partir del origen de ángulos y en el mismo orden. Para representar el primer miembro, se traslada $\tan(g)$ para sumarlo a $\tan(b)$, mediante un giro; sobre el segmento obtenido se aplica el mismo proceso para sumarlo a $\tan(a)$. Para obtener el segundo miembro se traslada $\tan(g)$ para llevarlo al mismo origen, A, que $\tan(b)$, se gira para superponerlo sobre el radio OA y se multiplica por $\tan(b)$. Este resultado se traslada para llevarlo al origen, B, de la $\tan(a)$, se gira para superponerlo sobre el radio OB y se multiplica por $\tan(a)$. Finalmente se esta-

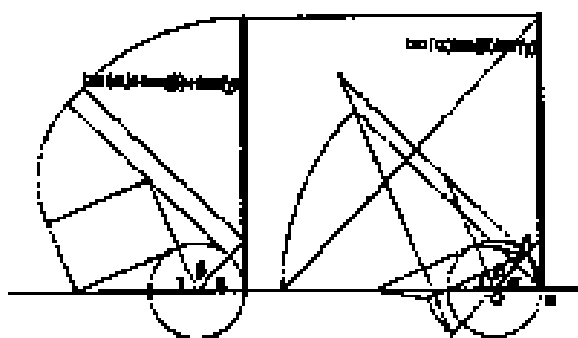


Figura 2.3.

3. TRIGONOMETRÍA DINÁMICA

Sin duda alguna, una de las mayores dificultades de la enseñanza/aprendizaje de las funciones trigonométricas consiste en hacer ver a los alumnos que las coordena-

das (x, y) del punto P, que describe la circunferencia unidad, son las funciones básicas de la trigonometría, seno y coseno, y que ambas dependen de la variable θ que expresa la amplitud del ángulo central medido en radianes o, lo que es lo mismo, la longitud del arco de la circunferencia unidad; dificultades ya señaladas en Ortega, T. (1992).

La primera gráfica, figura 3.1, muestra como se genera la función $y=\sin(a)$ cuando un punto P recorre la circunferencia y describe con el origen O y con el semieje positivo de las abscisas el ángulo a . La animación de CABRI II permite dotar al punto P de un movimiento uniforme sobre la circunferencia en calquiera de los dos sentidos y, por tanto, se pueden generar ángulos de cualquier cuantía. A la vez que P describe la circunferencia, ésta se va rectificando sobre el semieje positivo de las abscisas; para ello, se transfiere sobre este eje la longitud del arco, y sobre el punto que describe esta rectificación, mediante una traslación, se va colocando la correspondiente ordenada de P. La periodicidad de la función se manifiesta inmediatamente, ya que en sucesivas vueltas de P sobre la circunferencia se repite la misma trayectoria. Sólo se ha representado la gráfica de la función para valores positivos de a , porque si se hiciese lo propio para valores negativos, la representación sería excesivamente pequeña y dejaría de apreciarse el

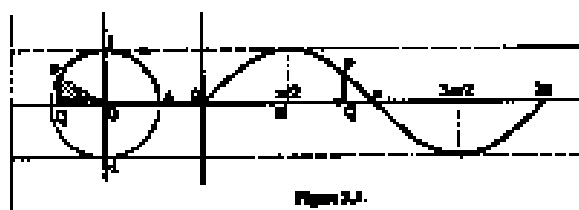
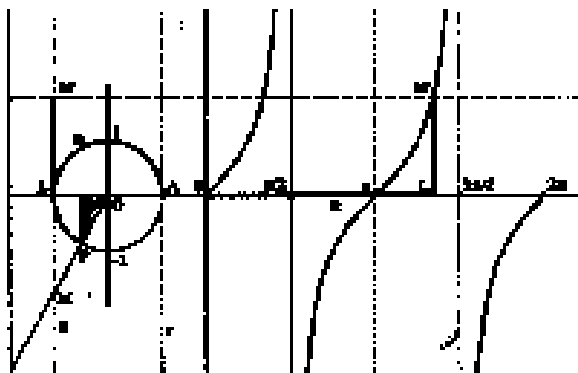
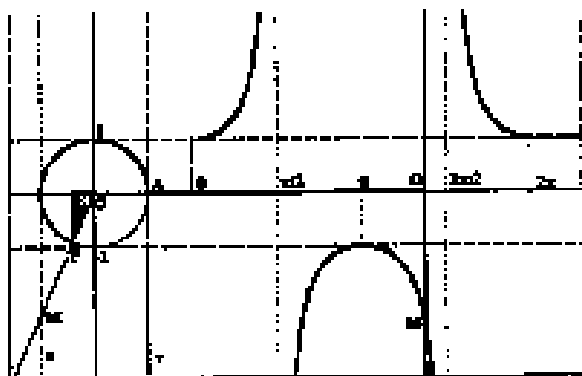


Figura 3.1.

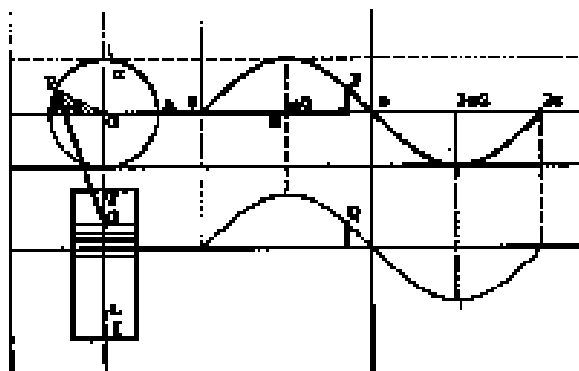
La figura 3.2 muestra la gráfica de la función tangente y, al igual que en la función seno, se aprovecha el efecto de la animación de CABRI II para asociar esta construcción al movimiento del punto P sobre una circunferencia. Los valores de esta función que corresponden al ángulo a son las longitudes de los segmentos orientados LM. Los valores de esta función que corresponden a los de los ángulos de los cuadrantes I y IV se transfieren al sistema cartesiano igual que en la función anterior, de forma directa, pero en los cuadrantes II y III se deben hallar los segmentos simétricos, LM' de LM, y transferir LM' . La periodicidad de la función tangente se observa de manera natural ya que, igual que antes, los valores de la función son los mismos que en sucesivas **semi-vueltas** de P. La tendencias infinitas de esta función se pueden conjeturar al ver como se genera su gráfica y se concluye que la conjetura es cierta, porque el punto M, que es la intersección de la semirrecta OP con las rectas r o s , y en el movimiento de P sobre la circunferen-



La figura 3.3 es una representación de la función secante y, como las anteriores, se aprovecha el efecto de la animación de CABRI II para asociar esta construcción al movimiento del punto P sobre una circunferencia. Los valores de esta función que corresponden al ángulo a son las longitudes de los segmentos orientados, OM, y el signo es el mismo que el de la función coseno. Se denota por M el punto de corte de la semirrecta OP con la recta r o con la recta s . Si M está en r , se transfiere la medida de OM con signo positivo y si está en s con signo negativo. Tanto la periodicidad como las tenden-



La figura 3.4 representa la asociación entre el movimiento de un émbolo y el movimiento circular uniforme de un punto sobre una circunferencia. Este modelo puede representar la transferencia, mediante una viga, PQ, del movimiento de vaivén (de L a F) que se produce en un émbolo, por ejemplo un pistón, a otro circular (que puede ser el de rodadura de una rueda motriz) este modelo es totalmente reversible y, el movimiento original puede producirse en la circunferencia (rueda motriz accionada por un motor eléctrico) y transmitirse a un émbolo (bomba, martillo, etc.). Como el movimiento de P es circular uniforme el arco, a , que recorre se puede identificar con el tiempo t , y ambas posiciones, la de P y la de Q describen la misma curva respecto del tiempo, que en la gráfica se representa por a . La animación de CABRI II permite generar este movimiento y los gráficos de las dos funciones asociadas. Evidentemente, aquí las dos gráficas tienen la misma amplitud porque la longitud de LQ (desplazamiento del émbolo) coincide con la de un diámetro de la circunferencia. Según que el diámetro fuese mayor o menor la amplitud de la función cir-



BIBLIOGRAFÍA

- GUZMÁN, M. de (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Pirámide. Madrid.
- ORTEGA, T. (1992) Una didáctica para las funciones trigonométricas. IV JAEM. Badajoz.