

APLICACIONES DIDÁCTICAS DE LAS REGLAS DE HUDDE

*De la Fuente Martínez,
Constantino
Pérez Espinosa, Rosa María*

1. INTRODUCCIÓN

Johann Hudde (1629-1704) fue un matemático holandés, discípulo de Fran Van Schooten (1615-1660). Muchos de sus descubrimientos se conservan gracias a que fueron incorporados a la segunda versión en latín de «La Géométrie» (escrita originalmente en francés) de René Descartes, que Van Schooten publicó en dos volúmenes bajo el título «La Geometría a Renato Descartes» en 1959-1961. Estas versiones, además de usar el idioma universal de los intelectuales de entonces, ayudaron a una mejor comprensión de la obra de Descartes, gracias a las aclaraciones y el material complementario que contenían.

Estas circunstancias no surgen por casualidad, pues la estancia de Descartes en Holanda, durante una veintena de años, propició que la geometría analítica arraigara allí antes que en ningún otro lugar de Europa, y que surgiera un grupo de holandeses y flamencos que la pusiera en funcionamiento.

Por otra parte, centrándonos en el quehacer matemático, Descartes había ideado un método para calcular la normal a una curva algebraica en uno de sus puntos. Él mismo decía que «éste es no sólo el problema más útil y más general que conozco en geometría, sino incluso el que yo haya deseado jamás conocer».

La idea fundamental del método de Descartes consistía en lo siguiente: si $y=f(x)$ es la curva, y deseamos calcular la normal en un punto P de la misma, podemos considerar las ecuaciones de las circunferencias que pasan por P. En general, la curva y una de estas circunferencias tendrán dos puntos de corte distintos. Aquella circunferencia que tenga un solo punto en común con la curva, y por tanto la solución del sistema formado por ambas sea única y de orden dos, nos proporcionará los datos necesarios para calcular la recta normal.

Por tanto, Descartes tomaba como característica esencial el doble contacto de la circunferencia con la curva,

evitando el uso de infinitésimos y propiciando un método algebraico. El inconveniente radicaba en que si la curva no tenía una ecuación sencilla, las operaciones se complicaban mucho, y aquí es donde surgen las reglas de Hudde, que eran muy útiles para la búsqueda de raíces dobles. Hudde le comunicó a Van Schooten sus reglas en una carta y éste último las añadió a la edición latina de 1659 de «La géométrie» de Descartes.

2. LAS REGLAS DE HUDDE

Hudde enuncia así una de las reglas inventada por él:

«Si una ecuación tiene dos raíces iguales y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria, de manera que el primer término de la ecuación queda multiplicado por el primer término de la progresión, y así sucesivamente, entonces digo que el producto obtenido será una ecuación que tiene de nuevo la raíz dada.»

Una demostración de la misma, con notación moderna, se puede encontrar en (Grattan-Guinness, 1984).

También aparecen enunciadas (Boyer, 1986) de la siguiente manera:

1. Si r es una raíz doble de la ecuación algebraica

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0; \text{ y si } b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$$

son números en progresión aritmética, entonces r es raíz de la ecuación

$$a_0b_0x^n + a_1b_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}b_{n-1}x + a_nb_n = 0.$$

2. Si en $x=a$ el polinomio

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

tiene un valor máximo o mínimo relativo, entonces a es raíz de la ecuación

$$na_0x^{n+(n-1)} + (n-1)a_1x^{n-1} + \dots + 2a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x = 0.$$

Es preciso hacer notar que Hudde aceptó como hipótesis, en sus cálculos de valores máximos o mínimos, que: si a es un valor que hace máximo o mínimo a $p(x)$, entonces la ecuación $p(x)-p(a)=0$ tiene dos raíces iguales.

El enunciado 1 engloba al enunciado moderno: si r es raíz doble de $p(x)=0$, entonces es también raíz de $p'(x)=0$, ya que si tomamos la progresión aritmética formada por los términos siguientes: $b_0=n$, $b_1=n-1$, $b_2=n-2$, ..., $b_{n-1}=1$, $b_n=0$, el resultado es evidente sin más que sacar factor común la x en la ecuación resultante.

El enunciado 2 es una modificación del teorema de Fermat que hoy se formula: si $f(a)$ es un valor máximo o mínimo relativo de un polinomio $f(x)$, entonces $f'(a)=0$.

¿Cuál era la utilidad de estas reglas de Hudde? Sencillamente, si la curva tenía un término complicado se podía buscar una progresión adecuada para que el término conflictivo quedara multiplicado por cero, lo que facilitaba la puesta en práctica del método de Descartes y la búsqueda de la solución doble de la ecuación, que se conservaba en la ecuación transformada.

3. APLICACIONES DIDÁCTICAS

Las reglas de Hudde pueden ser utilizadas en la Secundaria, ya sea en la Obligatoria o en el Bachillerato, restringiendo el grado de los polinomios con los que se trabaje y teniendo en cuenta su necesaria adecuación al contexto.

Se presentan, a continuación, algunos resultados obtenidos a partir de la aplicación de las reglas de Hudde a las ecuaciones y funciones más sencillas que se pueden trabajar en estas etapas educativas. Se omiten las demostraciones para no alargar excesivamente este resumen de la comunicación y teniendo en cuenta que, para los lectores, no tienen un nivel de dificultad grande. Están agrupadas en tres bloques, cada uno de ellos referido a un contexto distinto:

* Resultados sobre ecuaciones de segundo grado desde el punto de vista algebraico, de resolución y búsqueda de soluciones que verifiquen ciertas condiciones, utilizando para ello las progresiones adecuadas.

* Resultados sobre funciones cuadráticas desde el punto de vista gráfico, de representación y búsqueda de funciones que verifiquen ciertas propiedades, o cuyos elementos esenciales (vértice y puntos de corte con el eje OX) cumplan determinadas condiciones, utilizando para ello progresiones adecuadas.

* Resultados conectados con los conceptos de máximo o mínimo relativos y con algunas de sus propiedades.

Los enunciados, tal y como se presentan en esta comunicación, no pueden ser trasladados al aula ya que su nivel de abstracción es muy elevado para el alumnado de estas etapas educativas. No obstante, constituyen el banco de ideas para poder ser concretadas en el aula, mediante estrategias metodológicas adecuadas (particularizaciones previas con funciones, ecuaciones y progresiones concretas, búsqueda de regularidades y leyes que permanecen, elaboración de conjeturas, justificación y/o demostración de las mismas, generalización de resultados, etc.).

3.1. Resultados sobre ecuaciones de segundo grado:

Resultado 1:

Dadas las ecuaciones de segundo grado:

$$\mathbf{E1} \quad ax^2+bx+c=0;$$

$$\mathbf{E2} \quad apx^2+b(p+d)x+c(p+2d)=0;$$

siendo p , $p+d$, $p+2d$, una progresión aritmética. Se verifican las siguientes proposiciones:

a) El discriminante de **E2** tiene por valor:

$$(b^2-4ac)(p^2+2pd)+b^2d^2.$$

b) Si **E1** tiene una solución doble, entonces **E2** también tiene esa misma solución, aunque simple.

Resultado 2:

En la situación anterior, si **E1** tiene una solución doble $x=x_1=x_2=-b/2a$, entonces **E2** cumple:

a) Si p no es nulo, **E2** tiene dos soluciones distintas, cuyos valores son:

$$x'_1=x_1=-b/2a; \quad x'_2=x_2=-b(p+2d)/2ap.$$

b) Si $p=0$, **E2** tiene una única solución $x'_1=-b/2a=-2c/b=x_1$. En este caso se transforma en una ecuación de primer grado.

Resultado 3:

Sea la ecuación **E1** con soluciones distintas x_1 , x_2 . Para x_1 existe una ecuación de la forma

$$\mathbf{E3} \quad a'(x-x_1)^2=0$$

y una progresión aritmética p , $p+d$, $p+2d$, de tal manera que la ecuación **E1** es la transformada de **E3** por la progresión. Se verifica lo mismo para x_2 .

Resultado 4:

Sean las ecuaciones **E1**, con una solución doble, y **E2**, con p no nulo. Sea q un número distinto de $-b/2a$. En estas condiciones existe una progresión aritmética para la cual **E2** tiene como soluciones los números q y $-b/2a$.

Resultado 5:

Dada la ecuación **E1**, si la operamos con la progresión geométrica **p**, **pr**, **pr²**, (**p** no nulo) se obtiene la ecuación

$$\mathbf{E5} \quad apx^2 + bprx + cpr^2 = 0.$$

En estas condiciones, **E5** tiene por soluciones las de **E1** multiplicadas por **r**, la razón de la progresión.

Nótese que el valor **p** puede ser sustituido por **p=1**, ya que está multiplicado por todos los términos de la ecuación y se podría simplificar.

Resultado 6:

Dada la ecuación **E1** con dos soluciones distintas x_1, x_2 , y sea **r** un número real, no nulo y distinto de **1**. Entonces existe una ecuación de segundo grado

$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

tal que sus soluciones x'_1, x'_2 verifican $x'_1 r = x_1, x'_2 r = x_2$.

3.2. Resultados sobre funciones cuadráticas:**Resultado 1:**

Dada la parábola **F1** $y = ax^2 + bx + c$ con un solo punto de contacto con el eje **OX**. Podemos obtener a partir de ella una parábola que corte al eje **OX** en dos puntos distintos, sin más que multiplicar por los términos de una progresión aritmética **p**, **p+d**, **p+2d**, con **p** no nulo. La ecuación de la parábola resultante es

$$\mathbf{F2} \quad y = apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d).$$

Nótese que **b** $\neq 0$, pues si **b=0**, como corta en un solo punto al eje **OX**, entonces **c=0** y sería la parábola $y = ax^2$, que al multiplicarla por la progresión sigue teniendo el mismo punto de corte con el eje **OX**: el **(0,0)**.

Resultado 2:

En las condiciones anteriores se verifica:

A) La abscisa del vértice de **F2** es el valor $x = -b(p+d)/2ap$. (Nótese que el valor $-b/2a$ es la abscisa del vértice de **F1**)

B) La ordenada del vértice de **F2** es el valor $y = -cd^2/p$. (Nótese que la ordenada del vértice de **F1** es cero).

Resultado 3:

La posición relativa de las parábolas **F1** y **F2** del primer enunciado es la siguiente para el caso **d** $\in \mathbb{Q}$

A) Si **p** $\in \mathbb{Q}$ y **p** $\in \mathbb{1}$, entonces hay dos puntos en común entre **F1** y **F2**, siendo uno de ellos el vértice de la primera. Las abscisas de los puntos de corte son:

$$X_1 = -b/2a \quad X_2 = b[1-(p+2d)] / 2a(1-p)$$

B) Si **p** = **1**, entonces sólo hay un punto en común, que es el vértice de la primera, de coordenadas: **(-b/2a, 0)**.

Para el caso **d=0** la posición relativa puede presentar las siguientes situaciones:

A) Si **p** $\in \mathbb{1}$, tienen un punto en común que coincide con el vértice de la primera.

B) Si **p** = **1**, entonces las dos parábolas coinciden.

Resultado 4:

En el caso en que **p** = **-1** (con **d** $\in \mathbb{Q}$), las parábolas verifican que sus puntos de corte son sus vértices respectivos.

Resultado 5:

Si **p=0** (**d** $\in \mathbb{Q}$), entonces **F2** es una recta y tiene dos puntos de corte con la parábola **F1**. Las abscisas de los puntos en común son:

$$X_1 = -b/2a, \quad X_2 = -b(1-2d)/2a.$$

3.3. Resultados sobre máximos y mínimos relativos:**Resultado 1:**

La derivada de un polinomio se puede obtener aplicándole la regla de Hudde con una progresión aritmética apropiada.

Resultado 2:

Si en **x=a** el polinomio

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

tiene un valor máximo o mínimo relativo, se puede comprobar, utilizando la regla de Hudde, que la función $g(x) = f(x) - f(a)$ verifica que $g'(a) = 0$.

BIBLIOGRAFÍA

BOYER, C. B., 1986. Historia de la matemática. Alianza Editorial, Madrid.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1984. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica. Alianza Editorial, Madrid.