

PIRÁMIDES MÁGICAS: DE LOS NÚMEROS TRIANGULARES A LOS PIRAMIDALES

Bracho López, Rafael

1. INTRODUCCIÓN

La experiencia nos evidencia que la presentación en el aula y la utilización de todos los recursos didácticos que podamos tener a nuestro alcance, resultan determinantes a la hora de atraer a los estudiantes y conseguir que éstos sientan las matemáticas como nosotros, es decir, como una asignatura atractiva, útil, asequible y entretenida. En la actualidad, creemos que existen condiciones para que cada seminario didáctico o departamento programe las asignaturas, desarrollando los contenidos propios de cada nivel educativo de forma personal, buscando siempre ideas que permitan la motivación de los alumnos y la educación matemática integral de éstos.

Nuestro grupo centra su trabajo en la búsqueda de estrategias metodológicas que conduzcan a estos fines. En este sentido hemos elaborado diverso material, entre el que queremos destacar por su interés las prácticas de laboratorio, ya que creemos que éstas constituyen un medio ideal para ilustrar conceptos matemáticos, desencadenar ideas, simular situaciones y crear e investigar problemas de distinta índole.

Hablemos un poco, en primer lugar, sobre algunos aspectos prácticos de la metodología general: nuestra idea es utilizar de forma programada estas prácticas de modo que se aborden al menos tres de ellas por curso académico. Resultaría conveniente disponer de un espacio destinado a la realización de estas actividades, aunque como los elementos y herramientas que se utilizan suelen ser sencillos, también se pueden realizar en el aula habitual. En sus desarrollos los alumnos suelen trabajar en pequeños grupos (normalmente de cuatro o cinco) dispuestos en grandes mesas. Cada grupo desarrolla las actividades que se le entregan en forma de fichas y elabora informes y pruebas de grupo. El intercambio de ideas entre grupos se realiza mediante puestas en común, donde todos discuten y sacan conclusiones. No obstante, esta estructura debe ser flexible, de manera que si las actividades lo requieren, se pueda tra-

bajar individualmente o toda la clase a la vez. El papel del profesor es, en este contexto, el de programador de actividades, coordinador de trabajos, animador de procesos, consultor de dudas y evaluador. Particularmente este tipo de actividades puede servir para valorar los procedimientos y las actitudes de los alumnos.

2. JUSTIFICACIÓN DE LA EXPERIENCIA

La representación de un número natural por medio de una figura de puntos o modelo de puntos reconocible es lo que tradicionalmente se llama número figurado (N.F.). Desde hace más de 3.000 años, la matemática ha mostrado su interés por ciertas familias de N.N.F.F.. Así los babilonios estuvieron familiarizados con los números triangulares, cuadrados y piramidales y los pitagóricos se mostraron también bastante interesados por estas familias de números.

La Educación Matemática, en el ámbito de la implementación curricular, muestra también su interés por los N.N.F.F.; así desde la década de los 70, se van publicando con cierta candencia artículos donde se dan ideas sobre dichos números o sugerencias para su uso en las clases. Los propios diseños curriculares de E.S.O. en la Comunidad Autónoma Andaluza nos sugieren el tratamiento de los N.N.F.F. Nosotros por nuestra parte, hemos creído apropiado incorporar la presente experiencia a la programación de la Opción B del cuarto curso de E.S.O., desarrollándola cuando se están estudiando las sucesiones numéricas, si bien creemos que también puede tener su espacio en el estudio de las sucesiones de 1ª ó 2ª de B.U.P.. Indudablemente se podría realizar un estudio más exhaustivo de los N.N.F.F., sin embargo nuestro esfuerzo se centra en el estudio de una cuidada presentación que despierte el interés de los alumnos, desde el cuál podrán ir estudiando y descubriendo algunas de sus propiedades (las que estén a su alcance).

3. PRESENTACIÓN DE LA PRÁCTICA

Abordaremos el tratamiento de algunos N.N.F.F. desde el punto de vista del constructivismo icono-simbólico. Partiremos concretamente de los números triangulares, para una vez conocida la sucesión formada por éstos y estudiadas algunas de sus propiedades inmediatas, aprovechando las sugerentes figuras que nos proporciona un interesante rompecabezas tridimensional, utilizar los resultados obtenidos para la construcción de la serie de los números piramidales triangulares (o tetraédricos). Se culmina la práctica con la resolución constructiva del juego y el diseño de rompecabezas similares más complejos.

Como indicamos anteriormente, le damos especial importancia a la presentación de las actividades. Creemos que, si bien los medios con los que se cuenta suelen ser escasos, poco a poco se pueden ir consiguiendo condiciones apropiadas. En este caso, todo el material lo han elaborado los profesores que forman nuestro grupo y los alumnos que, integrados en una dinámica voluntaria de grupos de trabajo, se dedican entre otras interesantes actividades que no vienen al caso, a la elaboración de material didáctico (se ha contado con el taller de tecnología).

Nivel de aplicación: 4º de E.S.O. (Opción B) - 1º de B.U.P. - 2º de B.U.P.

Material: – Fichas o monedas (para los números triangulares).

– Esferas sueltas o soldadas (para las pirámides mágicas).

Objetivos: – Simbolizar los números triangulares y piramidales.

– Descubrir las propiedades de los mismos.

– Reconocer el enorme potencial del constructivismo matemático.

Temporalización: Preferentemente una sesión de dos horas (si no es posible, dos de una hora).

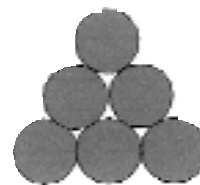
4. DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

Actividad nº1: Construye un triángulo con el menor número posible de fichas.

¿Cuántas fichas has necesitado?

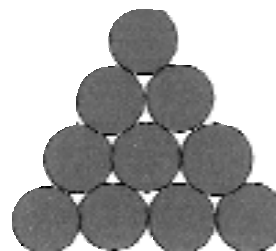


Actividad nº 2: Construye a partir de él el triángulo que le seguiría en tamaño.



¿Cuántas fichas has empleado?.

Actividad nº 3: Repite el proceso unas pocas de veces:



Actividad nº 4: ¿Cuántas piezas tendrá cada lado del triángulo siguiente?. ¿Cuántas tendrá todo el triángulo?

Actividad nº 5: Busca definiciones apropiadas para: a) Triángulos del tipo de los que has construido. b) Orden de los mismos. c) Números que se correspondan con los de fichas que forman cada triángulo.

Tras la puesta en común suelen convenir la siguiente,

Definición: Los números naturales que son iguales al número de fichas de un triángulo como los anteriores se llaman **números triangulares**. El **orden** de un número triangular es el número de fichas que componen cada lado del triángulo a que corresponde.

Actividad nº 6: a) Construye los diez primeros números triangulares. ¿Cómo podrías formar el número triangular de orden n a partir del de orden $n-1$?

b) Construye la sucesión de los números triangulares hasta el vigésimo primero...

3	6	10	15	21	28	36
45	55	66	78	91	105	120
136	153	171	190	210	231	253

.....
.....

Actividad nº 7: Señala en la serie construida los números triangulares que no son múltiplos de tres. ¿Qué lugares ocupan?

Actividad nº 8: El que te indico en la figura, se podría llamar “El triángulo de los números triangulares”. Continúalo hasta la fila décima:

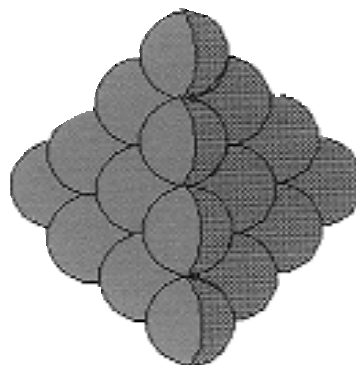
$$\begin{array}{c}
 3 \\
 3 + 3 \\
 3 + 3 + 4 \\
 3 + 3 + 4 + 5 \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Otras actividades: Nos parece que las actividades desarrolladas son suficientes para los objetivos que nos planteamos, por lo que sería el momento de pasar a la introducción de los números piramidales, basándonos en los triangulares. No obstante, si se prefiere, pueden idearse más actividades. Nosotros solemos volver a proponer ejercicios relacionados con prácticas experimentadas cuando se están estudiando nuevas unidades didácticas que los propician. A continuación esbozamos algunos:

1. Si construyes el triángulo de orden 4 con círculos de 1 cm de radio. ¿Qué altura tendrá? ¿Qué altura tendrá el triángulo de orden n ?
2. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los centros de las circunferencias que a su vez son vértices del triángulo circular de orden 4 en función del radio. Idem del de orden n (figura 1).
3. Calcula el área del hueco existente entre tres círculos contiguos (figura 2).
4. a) Inscribe el triángulo circular de orden 4, formado por círculos de 1 cm de radio, en un triángulo. Calcula su área. Inscribe el triángulo anterior en una circunferencia y construye con 6 circunferencias como ésta, un triángulo circular de orden 3. Halla su altura.
b) Elige un sistema de referencia ortogonal y calcula respecto de él, las coordenadas de los vértices y las ecuaciones de los lados del triángulo circunscrito (figura 3).
5. ¿Qué altura debe tener una bodega para poder colocar los barriles de vino tal como indica la figura, si el diámetro de cada barril mide dos metros?
6. La fábrica de pinturas “La Charra”, suele emplear para el transporte camiones que tienen una caja de dimensiones 2m x 2m x 6,5m. Se nos ocurren dos formas de cargar las latas de un litro (10,92 cm de diámetro), representadas en las dos figuras siguientes. ¿Cuál de los dos procedimientos permite transportar más carga? ¿Cuánto hueco queda en el camión? ¿Qué porcentaje de la caja queda vacía en cada caso? ¿Se te ocurre alguna otra alternativa de carga?. Compárala con las anteriores.

Definición: (Pirámides mágicas)

Llamaremos “**Pirámides Mágicas**” a las triangulares regulares (esto es, tetraedros). Formadas por esferas apiladas como las de los modelos y la figura:



El orden de una pirámide mágica será el número de esferas que tenga cada arista, y el orden o tamaño de una cara será el número de esferas que tenga cada lado de la misma.

A continuación te propongo algunas actividades con estas interesantes figuras:

Actividad nº 9: a) ¿Cuántas esferas tendría en cada cara la pirámide mágica de 4º orden? b) ¿Y la de 3º? ¿Y la de 5º? b) ¿Qué te recuerdan las caras de las pirámides mágicas?

Actividad nº 10: a) Sigue observando la pirámide de 4º orden. ¿Cuántas esferas tiene en total? b) Imagínate una pirámide de orden 5. ¿Cuántas esferas tendría? c) ¿Cómo podrías construir la pirámide de 5º orden a partir de la de orden 4? ¿Y la de orden $n+1$ a partir de la de orden n ? d) ¿Cuántas esferas tendrá la pirámide de orden 6?

Actividad nº 11: Completa la siguiente tabla:

Orden	Esferas/cara	Esf./pirámide
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		