

## LAS SUCESIONES COMO INSTRUMENTO DE APROXIMACIÓN DIDÁCTICA A LOS CONCEPTOS DE FUNCIÓN Y LÍMITE FUNCIONAL

**Blázquez Martín, Sonsoles  
Ortega del Rincón, Tomás**

### 1. INTRODUCCIÓN

El currículo de Educación Secundaria contempla grandes cambios conceptuales respecto al currículo del sistema educativo anterior. El tópico de sucesiones en el currículo LOGSE, aparece como algo poco relevante, ya que únicamente contempla la «búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en conjuntos de números», aparte de los contenidos propios de funciones. Otro de los cambios significativos es la importancia que se concede a la aproximación y la estimación, así como el tratamiento más intuitivo de muchos conceptos, como el de límite funcional.

Aunque al llevar a la práctica estas nuevas orientaciones surgen muchos aspectos problemáticos, aquí nos referiremos sólo a aquellos que están vinculados con funciones y con límite funcional. En segundo curso de Bachillerato los alumnos deben enfrentarse, por primera vez, al tópico de límite, comprenderlo y utilizarlo, tanto en lo que se refiere a la derivada como a la integral (hay que señalar que el límite que subyace a la integral es en realidad un límite secuencial), por lo que las dificultades conceptuales asociadas al concepto de límite son prácticamente insalvables.

Nuestra propuesta aboga por la inclusión de los tópicos de sucesiones y límite secuencial en Educación Secundaria, por dos razones: que las sucesiones sirven como ejemplo de funciones sencillas, que se adaptan a algunos modelos reales, siendo el límite secuencial más sencillo que el funcional; y otra, que bastantes de las dificultades del concepto de límite funcional ya aparecen al tratar el límite secuencial y, por tanto, se pueden detectar e intentar superar antes de llegar a él. También los cálculos con límites se pueden simplificar si se trabaja la aritmética de límites secuenciales.

### 2. DIFICULTADES CONCEPTUALES

Existen estudios interesantes relativos a las dificultades conceptuales del límite, más concretamente del límite

secuencial. Nos vamos a referir específicamente a un trabajo de Sierpinski (1990), ciertamente encomiable, en el que se hace un análisis epistemológico de la siguiente definición «*Casi todos los términos de una sucesión numérica infinita se acercan tanto como queramos a un número llamado límite*», y se señalan los obstáculos y los actos de conocimiento necesarios para superar dichos obstáculos.

En la puesta en práctica de la secuencia didáctica llevada a cabo en nuestra investigación se han reproducido muchos de esos obstáculos señalados por Sierpinski. Algunos de ellos son los siguientes:

- *El número es una forma escrita.* Este obstáculo hace referencia a la atención prestada a la forma del número y no a su valor. Esto dificulta la comprensión de la idea de tendencia, puesto que los alumnos son incapaces de observar cualidades de los términos; ellos sólo observan y describen su forma.
- *Convergencia es la estabilización de las cifras decimales.* Esta concepción aparece como consecuencia del uso de ordenadores y calculadoras para investigar la convergencia de sucesiones. Los alumnos observan la forma decimal de los términos y la estabilización de las cifras, lo que les distrae de la concepción de límite como aproximación.
- *Una sucesión es una regla para producir números o un conjunto de números.* En este caso, se centra la atención en los términos de la sucesión ó en la forma de generarlos (casi siempre utilizando el término general), y se olvida que una sucesión es una relación funcional.
- *Diferentes conceptos de infinito.* Los alumnos aceptan el infinito potencial, pero no el actual. Los procesos infinitos, para ellos, no son procesos acabados, por lo que la mayoría entienden el límite como algo inalcanzable. De ahí, por ejemplo, el hecho de que no sean capaces de entender que  $0,999... = 1$ .

– *El significado del término «acercarse» depende del contexto y, en general, suele diferir del dominio numérico y de las magnitudes físicas o geométricas.* Es necesario que sinteticen los conceptos de número y aproximación, para lo cual han de valorar el error de la misma.

– *El límite de la sucesión es el valor de la sucesión en el infinito.* Los alumnos utilizan notaciones como,  $1/$ ,  $1/0$ , como números, sin discriminar entre número y tendencia, ni entre límite y valor de un término.

Puesto que la definición utilizada no es la misma<sup>1</sup>, y los obstáculos dependen también de la metodología utilizada, cabe destacar también los siguientes:

– *Distintas formas de representación de los términos de la sucesión.* Cuando se trabaja con ordenador o calculadora se utiliza la forma decimal del término y, sin embargo, cuando se trabaja con modelos se utilizan términos generales, que vienen dados en forma de operaciones.

– *El límite es simplemente una aproximación.* La idea de aproximación con la que trabajan los alumnos se basa, sobre todo, en la forma del número y no está vinculada al control del error de aproximación; por tanto, muchos de los límites que proponen son aproximaciones, pero no aproximaciones óptimas.

– *Excesiva confianza en los medios informáticos.* Los alumnos piensan que los ordenadores no tienen limitaciones técnicas y son incapaces de hacer un análisis cualitativo que complete la información que proporcionan los medios técnicos.

– *Las sucesiones con tendencia infinita son monótonas.* La utilización de frases como por ejemplo «los términos crecen, superando cualquier valor» les llevan a pensar en el hecho de que una sucesión que tienda a infinito es necesariamente una sucesión creciente.

### 3. CONEXIONES ENTRE SUCESIONES Y FUNCIONES

El esquema general de los contenidos de análisis de segundo curso de Bachillerato (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II) que nos ha servido para organizar la secuencia didáctica se expone a continuación. En este esquema se ve claramente la conexión existente entre los contenidos relativos a sucesiones y los relativos a funciones. También resalta la importancia del concepto de límite —en sucesiones lo llamamos tendencia— para la definición posterior de derivada e integral.

SUCESIÓN	FUNCIÓN		
– <b>Concepto</b>	– Concepto		
– <b>Determinación</b>	– Formas de representación		
	– Características		
– <b>Ejemplos</b>	– Funciones elementales		
– <b>Tendencia</b>	– <i>Límite</i>	DERIVADA	INTEGRAL
– <b>Concepto</b>	– Concepto $\mathbb{A}$ Continuidad	– Concepto	– Concepto
– <b>Operaciones</b>	– Operaciones	– Cálculo	– Cálculo
	– Propiedades	– Aplicaciones	– Aplicaciones
		– Primitivas	

Así, las sucesiones aparecen como ejemplo sencillo de funciones, las formas de representación funcional tienen relación con la determinación de sucesiones, las funciones elementales son ejemplos de funciones (más bien modelos) y el límite es la generalización de las tendencias en sucesiones en lo que se refiere al concepto en sí y al cálculo. El cálculo de límites en sucesiones es más sencillo, pues la tendencia de  $n$  es siempre la misma y la atención se centra en los términos. El cálculo de límites en general sigue las mismas reglas (tiene la misma aritmética) y se puede basar en lo anterior.

### 4. SECUENCIA DIDÁCTICA

La secuencia didáctica seguida se muestra en la siguiente tabla, junto con los materiales que se emplean y que se describen a continuación de la misma. La metodología se basa en el trabajo diario de los alumnos y la puesta en común en el aula del mismo. Se trata de que los alumnos descubran por sí mismos los conceptos e ideas importantes, antes de que el profesor los plantee en el aula, los aclare y los sintetice.

1. Se distingue entre tendencia finita (los términos son aproximadamente óptimas de un número, el límite —en el sentido de que cualquier otra aproximación del número se puede mejorar a partir de un término—) y tendencia infinita (los términos superan —o son superados— por cualquier número a partir de un término).

SESION	MATERIAL	TRABAJO REALIZADO
1 y 2	Práctica 1 (Guión para los alumnos). Ordenador	Práctica con ordenador con hoja de cálculo. Creación de tablas para observar tendencias.
3	Esquema de la unidad. Guión de trabajo	Situar el tema de sucesiones. Introducir y determinar sucesiones mediante ejemplos. Plantear ejercicios de consolidación- Recoger la práctica 1.
4	Tareas 1 y 2.	Acabar los ejercicios. Discusión y puesta en común de la práctica para introducir el concepto de tendencia. Proponer tareas 1 y 2 para resolver en casa.
5	Transparencias: Concepto de tendencia, y ejercicios.	Revisión del concepto de tendencia. Ejercicios de tendencias. Recoger tareas 1 y 2.
6	Tarea 3. Transparencia con tarea 1 corregida.	Plantear el problema de la aritmética de límites. Puesta en común de la tarea 1. Proponer tarea 3 para casa.
7	Transparencia con tarea 2 corregida.	Recoger tarea 3. Puesta en común tarea 2. Recapitulación.
8	Transparencia con tarea 3 para corregir.	Puesta en común de la tarea 3, insistiendo en la aritmética de límites.
9	Tarea 4 y transparencia con la tarea corregida.	Terminar la tarea 3. Proponer la tarea 4 para resolver de forma individual en el aula. Corrección de la misma .

**Práctica 1 (Planteada para introducir las tendencias finitas e infinitas en sucesiones, observando el comportamiento de los términos avanzados de varias sucesiones):**

1.1. Elabora una tabla con ayuda del ordenador como la que tienes a continuación, dando valores a  $n$  cada vez mayores:

$n$	$2^n$	$2^n - 1$	$(2^n - 1)/2^n$

– Observa la tabla y contesta:

a) ¿Se puede superar 10.000 con algún término de  $2^n$ ? ¿Con cuántos? (Modifica  $n$  si es necesario) ¿Y 1.000.000? ¿Se podría superar cualquier valor?

b) ¿A qué número,  $L$ , se aproximan los valores de la última columna? Añade una columna restando dicho número, ¿qué observas en esta columna?

– Resuelve en casa: Supón que  $(2^n - 1)/2^n$  describe la altura a la que vuela una mosca en el minuto  $n$ . ¿En qué lugar pones el centro de un spray matamoscas que lanza un haz horizontal, de amplitud proporcional a la fuerza con que se presiona, para que tarde o temprano mate a la mosca?

1.2. Haz lo mismo que en el ejercicio 1.1. con la siguiente tabla:

$n$	$50.000 (1'02)^n$	$50.000 (1 + 0'02 \cdot n)^n$

Si la segunda columna representa el dinero que poseemos después de depositarlo  $n$  años en el banco, ¿podemos convertirnos nosotros o nuestros descendientes en millonarios? ¿Y si el dinero es el de la tercera columna?

**Tarea 1 (Planteada para revisar el concepto de tendencia e introducir el cálculo de tendencias, sirve en concreto para plantear la indeterminación que se obtiene al elevar una sucesión que tiende a 1 a otra que tiende a infinito. Se introduce de paso el número  $e$ ). Rellena la siguiente tabla con ayuda de la calculadora, utilizando todas las cifras decimales que aparezcan en pantalla. Como guía observa el ejemplo:**

$n$	$n+1$	$(n+1)/n$	$(1+1/n)^n$	$e - (1+1/n)^n$
10	11	1,1	1,7713	0,2286
100	101	1,01	1,7709	0,2290
10.000	10.001	1,0001	1,7708	0,2291
1.000.000	1.000.001	1,000001	1,7708	0,2291
10.000.000	10.000.001	1,0000001	1,7708	0,2291

Observa atentamente y responde:

- Describe lo que ocurre con los valores de las cuatro primeras columnas (¿crecen?, ¿decrecen?, ¿se relacionan entre sí?, ¿cuál es su tendencia?).
- Comenta la información que aporta la última columna.
- Investiga la tendencia de sucesiones de la forma  $(1+a_n)^{an}$  donde  $a_n$  tiene tendencia infinita (Prueba con ejemplos de tipo polinómico).

**Tarea 2 (Con la misma idea que la tarea 1, se estudian otros dos tipos de indeterminación: cociente de tendencias a infinito y diferencia de tendencias a infinito).** Construye una tabla similar a la de la tarea 1 para investigar la tendencia de:

$$a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}, b_n = \frac{n^2+5}{2n^2+1}, c_n = \frac{n^3}{2n^2+n}, d_n = n - \sqrt{n^2-n} \text{ y } e_n = \frac{n}{n + \sqrt{n^2-n}}.$$

- Observa atentamente y responde: ¿Qué tendencia tiene cada sucesión?

- ¿Tiene relación la tendencia de las sucesiones  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$  con el grado de los polinomios que forman el numerador y el denominador?

- Compara las sucesiones  $d_n$  y  $e_n$ . Observa que

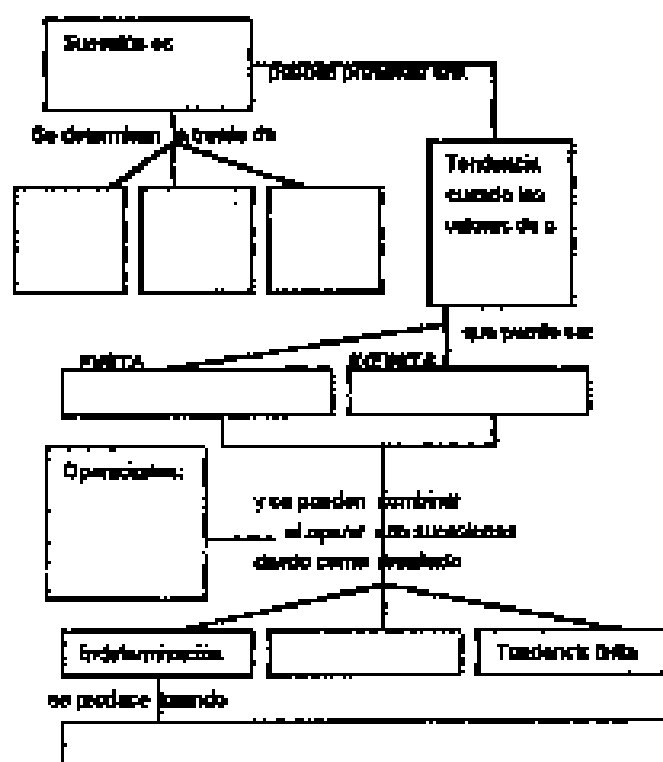
$$(n^2 - n) - (n^2 - n) = n^2 - (n^2 - n) = n$$

¿Qué relación tiene con lo anterior?

**Tarea 3 (Se trata de recoger los casos de aritmética de límites en una tabla, para captar las intuiciones de los alumnos en los resultados de la combinación de distintas tendencias).** Completar la siguiente tabla:

**Tarea 4 (La tarea sirve para resumir y sistematizar el tema a través de un mapa conceptual, es una tarea que evalúa los conocimientos de los alumnos en los contenidos trabajados).** Completar el siguiente mapa conceptual.

$a_n'$	$b_n'$	$a_n' + b_n'$	$a_n'$	$b_n'$	$a_n' \cdot b_n'$
k	+•	+•	$k > 0$	+•	
-•	k		$k > 0$	-•	
+•	+•		k	0	0
-•	-•		0	+•	
+•	-•	Indeterminación	+•	+•	
			-•	+•	
$a_n'$	$b_n'$	$a_n' / b_n'$	$a_n'$	$b_n'$	$a_n^{b_n'}$
$k > 0$	0-		$k > 1$	+•	
0	$k \in 0$	0	$0 < k < 1$	+•	0
0	0		1	k	1
+•	$k > 0$		1	+•	
+•	$k < 0$	-•	$k > 0$	0	
-•	$k > 0$		0	$k \in 0$	
-•	$k < 0$		0	0	Indeterminación
k	-•		0	+•	
k	+•		+•	$k > 0$	
+•	+•		+•	$k < 0$	
+•	-•	Indeterminación	+•	0	
-•	+•		+•	+•	
-•	-•		+•	-•	



## BIBLIOGRAFÍA

B.O.E. de 13 de Septiembre de 1991. Real Decreto 1345/1991, de 6 de Septiembre, por el que se establece el currículo de la E.S.O.

B.O.E. de 21 de Octubre de 1992. Real Decreto 1179/1992, de 2 de Octubre, por el que se establece el currículo del Bachillerato.

BLAZQUEZ, S. (1996): *E nuevo concepto curricular de límite*. Actas del IV Seminario Regional de Educación Matemática (en prensa).

SIERPINSKA, A. (1990): *Some remarks on understanding in mathematics*. For the learning of Mathematics 10, 3, 24-36.