

SOBRE ECUACIONES, FUNCIONES, ... Y ALGUNOS DE SUS ENCANTOS

Belmonte Martínez, A.
Belmonte Martínez, J.L.

Es un hecho más que evidente la resistencia que existe, en el ámbito correspondiente a la enseñanza secundaria, a enseñar desde un principio la estrechísima relación que existe entre la resolución de ecuaciones, de cualquier tipo, y la representación gráfica de funciones. Basta echar un vistazo a cualquier texto del sistema que se extingue y a numerosos que florecen a la luz del que nace para constatar este hecho. Creemos que no es exagerado pensar en que buena parte del profesorado seguimos en mayor o menor medida alguno de dichos textos.

A partir de nuestra experiencia hemos descubierto, amén de las bondades que tiene tal método, la transcendencia que puede tener este tratamiento a la hora de abordar conceptos más «finos» como pueden ser los de dominio, límite, continuidad, ... de una función. De hecho pueden surgir (todo depende de la sagacidad de algunos alumnos/as o del afán provocador de su profesor) aparentes «paradojas» a la hora de aplicar al estudio de funciones los conocimientos de cálculo asimilados con anterioridad. Así, por ejemplo, una de las propiedades de los logaritmos que recoge cualquier texto de 2º de B.U.P. es la siguiente:

$$\log N^m = m \cdot \log N$$

¡sin más!. Algunos días, o meses, o años, después puede aparecer la siguiente ecuación

$$2 \ln x = 4$$

aparentemente ingenua e inocente. No obstante, el conflicto surge. Si le abrimos la puerta a la representación gráfica no podemos escapar al enfrentamiento entre las funciones $y = 2 \ln x$ e $y = \ln x^2$, ni a nuestra propia reflexión —quizás más enriquecedora si tiene lugar en el aula— sobre una salida airosa, ni a preguntarnos que ocurrirá si intentamos hallar su intersección con la recta $y = 4$, o con la recta $y = -0.1x + 1$,...

Todo lo anterior puede parecer anecdótico y nos puede llevar a pensar que únicamente es producto de un

pequeño desliz en la definición de la operación logarítmica. Pero tenemos razones para pensar que no es así.

Una operación más «básica» que el logaritmo es la raíz. Y un buen ejemplo para poner en evidencia la no trivialidad de su naturaleza surge al intentar establecer la equivalencia entre las funciones siguientes:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x - 1}} \quad g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}$$

Pero su atractivo quedaría maltratado si a continuación no surgiera la duda sobre la ecuación

$$2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+1} + 2$$

¿Hemos de discriminar soluciones?, ¿qué método seguimos para ello?, ¿podemos encontrar un criterio para predecir las soluciones válidas?, ...

Tras resolver muchas de estas dudas uno podría creer que no quedan por doblar muchas más esquinas con sorpresas de este tipo, que quizá habrá que adentrarse en galaxias lejanas como la Geometría diferencial o simpléctica, el Álgebra no abeliana, ... Nada de eso. Sólo hemos de plantearnos operaciones «más sencillas» que la raíz o el logaritmo: el cociente de polinomios. Intentar resolver la ecuación

$$\frac{x^3 - 3x + 6}{x - 2} = 1$$

después de haberles enseñado a nuestros alumnos —que a veces no olvidan— a simplificar fracciones algebraicas, en 1º, 2º, 3º, ... o el curso que uno se quiera imaginar, puede resultar mucho más prometedor, y comprometedor, de lo que a simple vista pueda sugerir una expresión aparentemente tan poco motivadora. Si

tras meditada reflexión sobre los resultados que se pueden obtener, y su validez, se recurre a la dimensión gráfica del problema (ver Fig. 1 y Fig. 2), no es posible la decepción; de nuevo nos aguarda la riqueza que aporta dicha interpretación:

Pero al pensar en representaciones gráficas de funciones es difícil substraerse a la imagen de los **ortogona-**les ejes cartesianos. Ahora bien, ¿es posible manejar

otros tipos de ejes?, ¿de qué manera cambian los resultados?, ¿y las imágenes?, ¿qué aportan?, ¿qué invariantes presentan?, ...

En fin, ¿deberíamos prescindir del recurso gráfico, hoy día espectacular gracias al uso del ordenador, a la hora de introducir determinados conceptos de álgebra íntimamente ligados al análisis?. Presumimos la respuesta generalizada; vaya en su favor esta pequeña contribución.

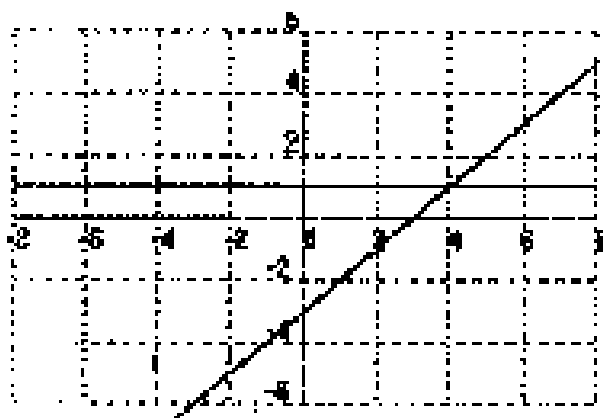


Fig. 1: $(x^2 - 5x + 6)/(x - 2) = 1$

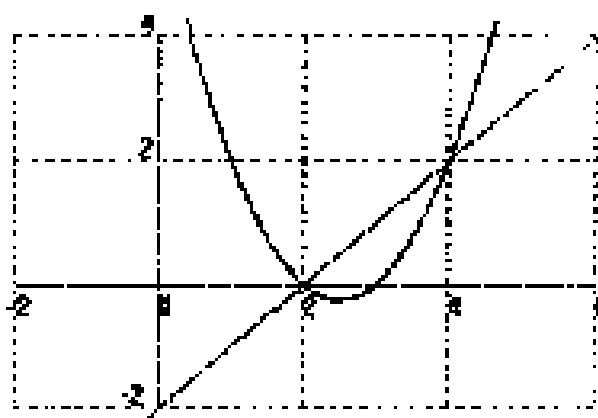


Fig. 2: $x^2 - 5x + 6 = x - 2$