

## APORTACIONES DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN EL ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN 4<sup>º</sup> DE E.S.O.

*Bargueño Sancho, J.J.*

### DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

Se plantea aquí el uso de un material que se encuadra claramente dentro del Álgebra, pero dando un enfoque histórico, lo que implica un cambio metodológico, donde el alumno observe la evolución histórica del concepto, intentando así también que no reciban únicamente el automatismo del cálculo, y la exagerada exigencia de la aplicación de reglas, sin otro objetivo.

Las ecuaciones de todos los tipos, y su resolución han sido objetivo fundamental del Álgebra, y un sucinto recorrido por la historia del estudio de las ecuaciones de segundo grado y su resolución podría ser:

- 3000 a. C. a 600 a. C.: Babilonia. Se resuelven algunas ecuaciones.
- Edad Media: Arabia. Se resuelven algunas ecuaciones por métodos geométricos.
- Renacimiento: Italia. Se resuelven ecuaciones completas.

Se proponen en este trabajo, diversos textos de estos momentos, considerados los más interesantes en la evolución del estudio de la ecuación de segundo grado.

La utilización de textos de la historia de la Matemática, nos puede ayudar ante los alumnos a dejar constancia de que lo que se está aprendiendo es fruto de una actividad humana que tiene sus raíces en preocupaciones sociales o en intentos de dar respuesta a preguntas surgidas dentro de problemas científicos. También nos permite incidir en que los descubrimientos no son siempre fruto de mentes deslumbrantes de personas aisladas, por el contrario, han sido obtenidos con frecuencia como consecuencia de la colaboración de muchos, y como fruto de avances sucesivos a lo largo de los siglos.

Dentro de los currículos oficiales, las ecuaciones de segundo grado se tratan en la E.S.O. en cuarto curso, donde se propone una opcionalidad, A o B, pero en ambas opciones se puede tratar el tema.

Precisamente la decisión de su uso en Cuarto curso de la E.S.O., nos ha hecho prescindir de algunos textos correspondientes a momentos históricos en nuestra opinión importantes, como los correspondientes al método de resolución «Fan - fa» ( China, siglo XIII ), que es prácticamente el actual método de Horner, y algunos textos de los libros II y III del Álgebra de Rafael Bombelli ( Bolonia, siglo XVI ), que trataba soluciones complejas de las ecuaciones. Tanto uno como otro contenido se juzgan no adecuados ni en conocimientos previos exigibles al alumno ni en conocimientos a adquirir en ese curso.

El uso reiterado de los automatismos en este tema, nos hace olvidar muchas veces el papel práctico de las Matemáticas, pues la mayor parte de los conceptos han sido creados para resolver problemas, que a lo largo del tiempo se van perdiendo y dejan con frecuencia desprovisto de sentido a su tratamiento matemático, este problema puede ser atajado en parte con el uso de textos de Historia de la Matemática, como así se recomienda actualmente por casi todas las teorías didácticas y metodológicas.

Se proponen tres textos, con una pequeña introducción histórica para cada época y a continuación preguntas y ejercicios sobre ellos, todos enfocados hacia diversos tratamientos de la ecuación de segundo grado a través de la Historia.

Texto 1: Babilonia. Una primera resolución de ecuaciones reducidas.

Texto 2: Babilonia. Una resolución con equivalencia a un sistema.

Texto 3: Europa. Un ejemplo de resolución tomado de un texto matemático de la España del siglo XVIII.

### BABILONIA

Durante el cuarto milenio antes de Cristo en el valle de Mesopotamia había un alto nivel de civilización. Los

sumerios utilizaban ya cerámica y mosaicos, canales para riego, habían desarrollado la escritura cuneiforme, utilizando tablillas de arcilla blanda donde escribían con una varilla, que luego secaban al sol o en hornos, y de las que se han encontrado una gran cantidad que han proporcionado mucha información, que sin embargo, no se ha podido utilizar hasta bien entrado el siglo XX, pues hubo muchas dificultades de traducción.

Como curiosidad matemática hay que añadir que se utilizaba un sistema de numeración de base 60, sin que se haya podido por el momento, justificar el porque de su origen. Tenían una especial y difícil numeración posicional (importante de todos modos) y una desarrollada habilidad para crear algoritmos de cálculo, lo que hacía que manejaran las operaciones aritméticas con facilidad.

Resolvían problemas algebraicos, sin dificultad problemas de ecuaciones lineales hasta el punto de considerarles demasiado elementales. La resolución de ecuaciones cuadráticas parece que superó totalmente a sus contemporáneos egipcios, y sin embargo tales ecuaciones habían sido manejadas ya por los babilonios hábilmente, en algunos de los textos más antiguos que conocemos.

Es importante reseñar que no hacían nuestro actual uso de letras en sentido algebraico, pues no tenían alfabeto sino que usaban las palabras completas, área, longitud, ..... pero su uso abstracto está perfectamente probado en el hecho de plantear problemas en los que se suman o restan áreas y volúmenes, longitudes y áreas, etc..... lo que no tendría ningún sentido práctico para resolver problemas reales de medida.

#### TEXTO 1

En una de las tablillas citadas anteriormente hay un problema en el que se pide :

Hallar el área de un cuadrado, si su área menos el lado es igual a 870. Viene explicado por el escriba de la siguiente manera :

*« Toma la mitad de 1, que es 0'5 y multiplica 0'5 por 0'5, que es 0'25; suma este número a 870, lo que da 870'25, este número es el cuadrado de 29'5, ahora suma 0'5 a 29'5, cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado ».*

#### Cuestiones

- Plantea la ecuación con nuestro lenguaje matemático actual.
- Si el problema variara y fuera el área menos el doble del lado, igual 360. ¿Podrías dar instrucciones para resolverlo del mismo modo que el escriba?

- Propon un problema parecido.
- Busca una fórmula algebraica de este método. Comparala con la que conoces. Busca en un libro alguna parecida o igual.
- ¿Ves alguna limitación, tanto en el cálculo como en el enunciado?
- ¿Qué opinas de la falta de unidades de medida en el texto inicial?
- Debate con tus compañeros las ventajas e inconvenientes de este método, teniendo en cuenta el momento histórico en que se utilizaba.

#### TEXTO 2

Los ejemplos de ecuaciones cuadráticas del tipo  $x^2 + c = bx$  aparecen tratados por los babilónicos en algunos textos haciéndoles equivalentes a sistemas de ecuaciones del tipo  $x + y = b$ ;  $x \cdot y = c$ . Una tablilla cuneiforme que se conserva en la Universidad de Yale, propone el siguiente problema:

Hallar dos números cuya suma es 6'5 y cuyo producto es 7'5. El escriba propone el siguiente método:

*« Calcula la mitad de la suma de los números, (3'25); y elévala al cuadrado, (10'5625); a continuación réstale el producto, (10'5625 - 7'5 = 3'0625); el número que resulta es el cuadrado de la mitad de la diferencia de los números, (1'75); entonces sumando y restando las dos mitades, (3'25 + 1'75 y 3'25 - 1'75); obtenemos la suma y la diferencia de los números, (6'5 y 3'5); y volviendo a sumar y restar estos números, (6'5 + 3'5 y 6'5 - 3'5); obtenemos el doble de los números buscados, (10 y 3); con lo que los números pedidos son 5 y 1'5 ».*

#### Cuestiones

- Plantea el problema con el lenguaje algebraico actual.
- Haz un seguimiento de los diferentes pasos mediante un planteamiento algebraico.
- Justifica el cuarto paso (el número que resulta es el cuadrado de la mitad...) mediante un cálculo algebraico actualizado.
- Resuelve utilizando los mismos pasos el siguiente problema: Hallar dos números cuya suma es 4 y su producto 3.
- Propón algún problema parecido.
- ¿Conoces alguna propiedad de las soluciones de la ecuación de segundo grado, que puedas asociar a este método de resolución?

- ¿Ves alguna limitación tanto en el cálculo como en el enunciado?. Piensa que pasa si los números son tales que su suma es 4 y su producto 5.

## EUROPA

En la Europa Medieval y Renacentista, la mayor parte de los matemáticos estaban en Alemania e Italia, y comenzaron impulsados por el conocimiento de las obras de Diofanto, pero fue el conocimiento de la obra de Al - Khwarizmi de quien la Europa Medieval aprendió los métodos algebraicos. El libro más conocido de esta época se publicó en 1494, por Lucca Pacioli, era el llamado «Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni et Proportionalità», que fue muy influyente, pero poco original, pues es una recopilación de material de cuatro campos: Aritmética, Álgebra, Geometría y Contabilidad. Dentro de la sección dedicada al Álgebra incluye las soluciones usuales de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Es importante pues se considera el libro de Lucca Pacioli como el primer libro de Álgebra impreso.

Desde el momento del uso de la imprenta, la importancia y popularidad de los libros aumentó mucho, y se pudo extender con más rapidez la cultura y los conocimientos. Hay desde este momento, diversos libros y tratados que estudian el tema, pero no hacen ninguna aportación especialmente significativa. Se plantea como ejemplo, un texto de un libro editado en Madrid en 1778 del capuchino Francisco Villalpando, donde plantea un proceso de resolución bastante asimilable a los métodos de los algebristas del Renacimiento italiano.

### TEXTO 3

Resolución de ecuaciones de segundo grado

165 - Ecuaciones de segundo grado se llaman aquellas en que la incógnita se encuentra elevada a la segunda potencia. De éstas, unas son simples y otras avanzadas.

166 - Simples son aquellas en que se contiene únicamente la segunda potencia de la incógnita. Así  $x^2 + dx^2 = n$ , será una ecuación simple de segundo grado, cuya resolución depende de las reglas anteriores; así como si es  $cx^2 + dx^2 = n$ ; será también  $(c + d)x^2 = n$ ;  $x^2 = n / (c + d)$  y entonces

$$x = \pm n / (c + d).$$

167 - Ecuaciones avanzadas son aquellas que contienen además de la segunda potencia, también la prime-

ra potencia de la incógnita. Así  $x^2 + bx = m$  será ecuación avanzada de segundo grado, para cuya resolución debe seguirse éste orden: 1º Todos los términos en que se encuentre la incógnita se trasladan a un sólo miembro de la ecuación, de modo que el término que contiene la máxima potencia sea positivo.

2º La máxima potencia de la incógnita no debe tener otro coeficiente que la unidad. 3º Que se añada lo que sea necesario para que sea un cuadrado perfecto. 4º Extraer la raíz cuadrada de cada uno de los miembros y después trasponer para obtener el valor de la incógnita.

Resolvamos la ecuación  $a^2 - x^2 / 2d = c + x$ , transferimos en primer lugar todos los términos en que se encuentra la incógnita a un único miembro de modo que a aquel en que se encuentra la máxima potencia sea positivo: Será:  $x^2 / 2d + x = a^2 - c$ , si quitamos el coeficiente de la máxima potencia se tendrá  $x^2 + 2dx = 2a^2 d - 2cd$ , ya que el miembro en que se encuentra la incógnita no es un cuadrado completo (142), se completará añadiendo  $d^2$ , por supuesto cuadrado de  $2d/2$  (143), añadiendo al otro miembro igual cantidad  $d^2$ , manteniendo la igualdad, tenemos:  $x^2 + 2dx + d^2 = 2ad - 2cd + d^2$ , y extrayendo raíz, tendremos  $x + d = \pm \sqrt{2a^2 d - 2cd + d^2}$ , o sea  $x = -d \pm (\sqrt{2a^2 d - 2cd + d^2})$  Y  $d$

### Cuestiones

- ¿Hay algún tipo de ecuación de segundo grado que no pudieras resolver por éste método?
- ¿Supondría algún problema, la presencia de coeficientes numéricos?. Por ejemplo, si la ecuación fuera  $3x^2 - 4x + 12 = 0$ . ¿Podrías resolverla por éste procedimiento?
- Pon algunos ejemplos de ecuaciones de las que el texto llama simples y de las que llama avanzadas.
- Resuelve siguiendo las indicaciones del texto, los ejemplos que has propuesto en la cuestión anterior.
- ¿Ves alguna limitación, en el cálculo o en el método, en éste procedimiento?
- ¿Qué opinión te merece el procedimiento? Haz un debate con tus compañeros sobre ventajas e inconvenientes que ves en éste método, teniendo en cuenta la situación histórica en que se utilizaba.
- Si conoces otros textos históricos referidos a la ecuación de segundo grado ¿Aprecias alguna diferencia notable entre éste texto y los anteriores?