

UNA PRESENTACIÓN DE LA INTEGRAL DE RIEMANN CON LA TI-92

Santonja Gómez, Francisco José

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se pretende reflejar una experiencia desarrollada con nuestros estudiantes en la presentación del concepto de integral bajo el soporte de la calculadora gráfica *Texas Instruments* modelo TI-92. Se está hablando de estudiantes de la licenciatura de Administración y Dirección de Empresas que conocen este concepto desde sus estudios de Secundaria y a los que, en este primer curso de licenciatura, se les sitúa ante la utilidad del propio concepto dentro de los fundamentos matemáticos de la economía.

LA PRESENTACIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL

Con el fin de *presentar las imágenes de los conceptos*, buscando una verdadera compenetración con su propia definición y con las posibles deducciones que sobre ellas podrán hacerse, trabajamos la *visualización del concepto de integral*.

Se presenta el uso de algunos programas y funciones creados con la calculadora gráfica *Texas Instruments* TI-92 como apoyo para este cometido.

EL COMIENZO DE LA CLASE

Tras una revisión del concepto de área ya conocido desde la Primaria y resaltando sus limitaciones en cuanto a polígonos *no rectilíneos*, se propone trabajar sobre la superficie limitada por la función $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0,1]$, las rectas $x=0$, $x=1$ y el eje OX .

¿Somos capaces de conocer el valor del área de este polígono *mixtilíneo*?

Una aproximación a su área puede conseguirse al inscribir rectángulos (superficies de fácil tratamiento) en este polígono. Razonando así, un método de aproximación consiste en sumar las áreas de los rectángulos inscritos.



Ilustración 1



Ilustración 2

¿Es posible mejorar esta aproximación?...

Pensemos en una mayor subdivisión de este polígono; en un mayor número de rectángulos inscritos.

Se observa en la ilustración 3 que para el área del trapecio mixtilíneo conseguimos una mejor aproximación al tomar más subdivisiones del intervalo ya que la porción del polígono no recogida por los rectángulos es menor.

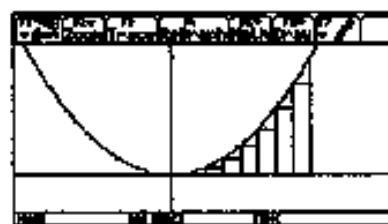


Ilustración 3

El papel de la calculadora es fundamental. Con un sólo cambio en el *input* del programa podemos *componer* el polígono con cuantos rectángulos deseemos, mejorando, así, la aproximación. Veamos en las siguientes ilustraciones como es posible realizar estas aproximaciones también desde el punto de vista analítico.

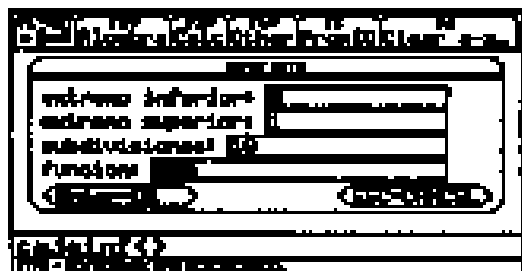


Ilustración 4

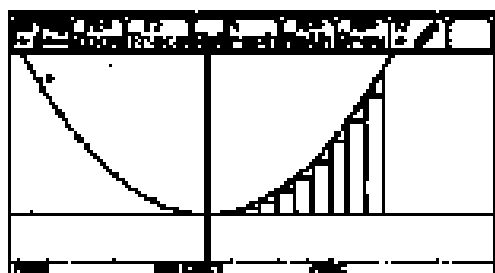


Ilustración 5

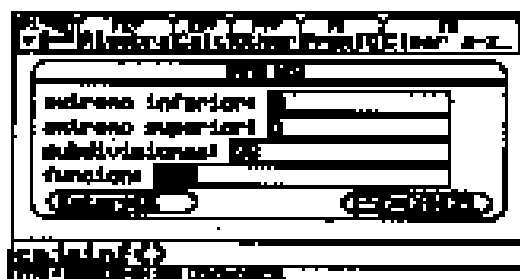


Ilustración 6

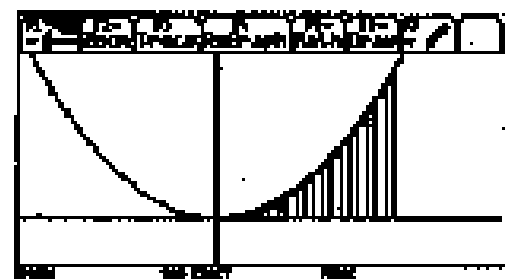


Ilustración 7

Veamos en las siguientes ilustraciones como es posible realizar estas aproximaciones también desde el punto de vista analítico.



Ilustración 8

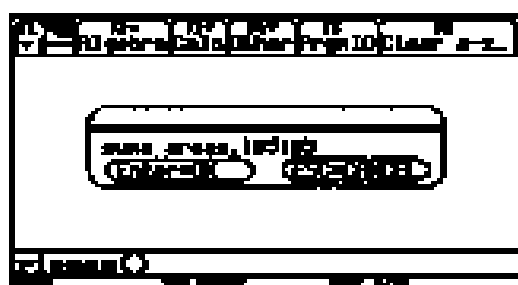


Ilustración 9

Obtenemos en la ilustración 8 una aproximación al área del polígono con tres rectángulos inscritos. Veamos para siete y veinte rectángulos la mejora (ilustraciones 10-13).

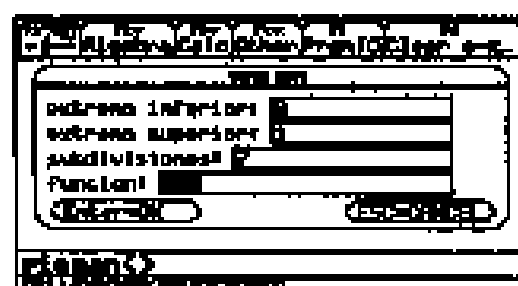


Ilustración 10

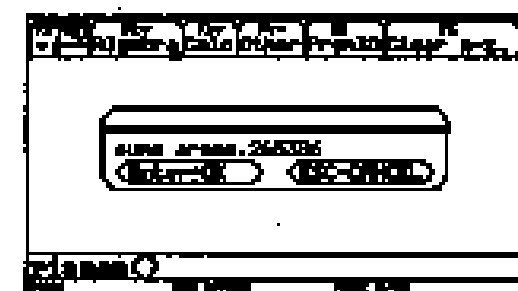


Ilustración 11

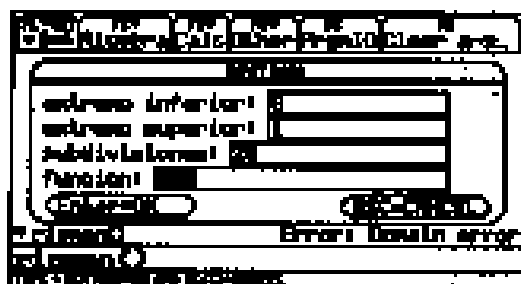


Ilustración 12

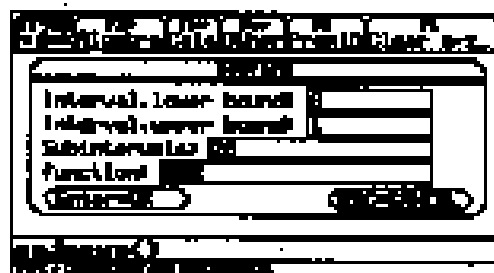


Ilustración 16



Ilustración 13

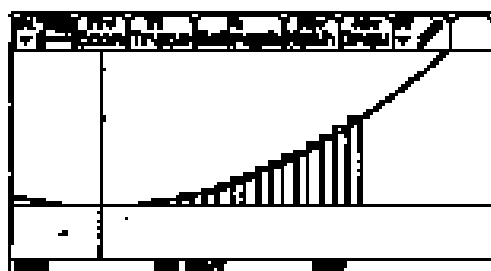


Ilustración 17



Ilustración 18

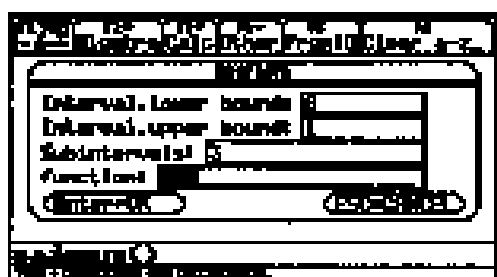


Ilustración 14



Ilustración 19

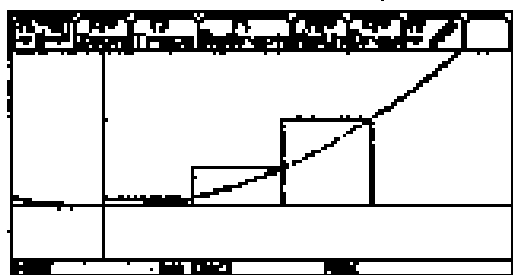


Ilustración 15

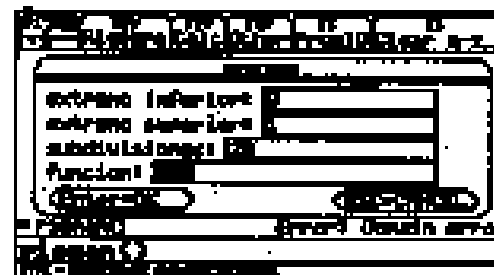


Ilustración 20

De la misma forma que para rectángulos inscritos, podemos encontrar una aproximación por exceso al área del polígono (rectángulos circunscritos).

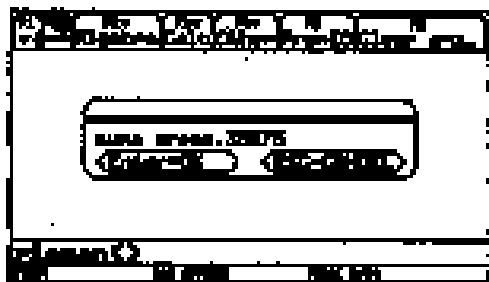
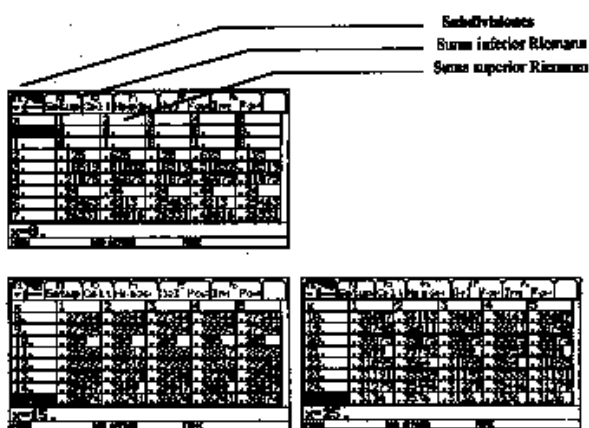


Ilustración 21

Resulta muy oportuno a la vista de estas ilustraciones, introducir las *sumas de Cauchy-Riemann*. El uso de la calculadora ayuda, pues, a presentarlas de una forma *natural*.

También es interesante observar, a través de la calculadora, el *acercamiento* entre las *sumas de Cauchy-Riemann*, mediante las siguientes tablas:



Parece claro que el método utilizado para resolver el problema del área para el polígono mixtilíneo plantea una cuestión de **convergencia**. En cualquier caso, la obtención de una *buena* aproximación supone una tarea engorrosa y casi inimaginable sin la ayuda de la tecnología.

REGLA DE BARROW

Barrow ya dio una solución a este problema de la convergencia, descubriendo que, para muchas funciones,

se resuelve sin más que evaluar una primitiva suya en los extremos del intervalo de integración.



Ilustración 23

Visualicemos pues, la *Regla de Barrow* definiendo la función $\text{area}(f(x), a, b, n)$ como la suma de las áreas de los n rectángulos inscritos en el trapecio delimitado por $f(x)$, $x = a$, $x = b$ y el eje OX .

Como se observa en la ilustración anterior, aplicando la función $\text{area}(f(x), a, b, n)$ obtenemos una aproximación que, aunque mejorable, se asemeja bastante a la evaluación de una primitiva de la función en los extremos del intervalo.

Es importante también el papel de la calculadora en la presentación de la Regla de Barrow como conclusión al problema del área planteado.

CONCLUSIÓN

Queda reflejada una introducción del *concepto de integral* en la que el *cálculo de primitivas* queda como algo complementario al propio concepto. Ha sido presentado como remedio al problema del área de polígonos mixtilíneos y no como una consecución del propio cálculo de primitivas. Se subraya una presentación del concepto matemático y de sus relaciones, y no de la adquisición de destrezas, en nuestro caso, el *cálculo de primitivas*. Motivo de abandono, en muchas ocasiones, de la verdadera idea de integral.

BIBLIOGRAFÍA

- LLORENS FUSTER, J. L. : "Aplicaciones de DERIVE al Análisis Matemático-1". Ser. Public. de la Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 1993. p. 231-236.
 LLORENS FUSTER, J. L. *Una Lección de Matemáticas con Ordenador*. EPSILON. n. 31-32. p. 81-88. 1995.