

## LA PROGRAMACIÓN LINEAL Y LA CALCULADORA GRÁFICA

**Martín Álvarez, A.**

Se pretende en esta comunicación presentar el desarrollo del bloque temático **La Programación Lineal**, tal y como se ha tratado en un grupo de 2<sup>a</sup> de Bachillerato, modalidad de Ciencias Sociales.

Podemos destacar dos principios básicos en la metodología empleada:

- Las clases se basan, de una forma sistemática, en la resolución de problemas.
- Se utiliza, de modo habitual, **la calculadora gráfica** (en nuestro caso la CFX-9850G de CASIO) como herramienta de trabajo.

Se comienza la Unidad proporcionando a los alumnos y alumnas conocimientos que permitan concretar qué es la *Programación Lineal* y sus objetivos, destacando su importancia en la organización y planificación de la industria, y en el aumento de la efectividad económica. Las actividades están encaminadas a crear la necesidad de búsqueda de estrategias para resolverlas y la necesidad de apoyarnos en algún teorema, aunque sea intuitivo, que permita la optimización de una función. Poco a poco iremos, de esta forma, conociendo la terminología básica que hay que dominar para poder movernos en este tema que suele ser tratado en la mayoría de los libros de texto con un enfoque fundamentalmente referido a destrezas, dejando de lado su aspecto más investigador e innovador. Una herramienta como **la calculadora gráfica** enriquece su desarrollo, obteniéndose una nueva visión didáctica de cómo afrontar la optimización de problemas, sometidos a restricciones, ayudándonos a comprender su significado, interpretando y analizando críticamente las soluciones obtenidas, obviando el farragoso trabajo de realizar cálculos repetitivos; En definitiva, dando prioridad al razonamiento, objetivo fundamental de este Bachillerato, sobre el cálculo.

### ACTIVIDAD I

Una fábrica de vidrio reciclado va a producir 2 tipos de copas: unas sencillas que vende a 450 PTAS y otras talladas a 600 PTAS. Las máquinas condicionan la producción de modo que no pueden salir al día más de 400 sencillas, ni más de 300 talladas. Por razones de stock no se pueden fabricar más de 500 en total. Suponiendo que es vendida toda la producción:

- ¿Cuántas de cada clase convendrá producir para obtener máximos ingresos?
- ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?

### RESOLUCIÓN:

Trataremos de traducir el problema al lenguaje algebraico. Para ello es imprescindible la presencia del profesor ya que normalmente el error que se comete es de planteamiento, al explicitar las inecuaciones del conjunto de restricciones.

#### 1. Determinación de incógnitas:

**x:** Número de copas sencillas.

**y:** Número de copas talladas.

**2. Función objetivo:** Este problema, con dos variables, implica la existencia de una función que hay que optimizar. Esta función es la llamada *función objetivo*, que siempre es de la forma:  $F = ax + by$ .

|                          |  |
|--------------------------|--|
| <b>Función objetivo:</b> | <b>Ingresos = <math>450x + 600y</math></b> |
|--------------------------|--|

**3. Conjunto de restricciones.** Dichas variables están sometidas a unas restricciones expresadas en forma de sistemas de desigualdades o igualdades lineales. Así pues, con el profesor como moderador, comenzaremos a traducir el problema, haciendo hincapié en la necesidad de utilizar **inecuaciones** para enunciar restricciones.

$$\begin{array}{ll} y \leq 300 & x \geq 0 \\ x + y \leq 500 & x \leq 400 \\ y \geq 0 & \end{array}$$

**4. La región factible:** Esto nos permite reforzar el concepto de resolución de sistemas de inecuaciones y ver su aplicación a la práctica cotidiana. Al resolver este sistema obtenemos, en el supuesto de que tenga solución, una región del plano. Esta superficie, acotada o no, es **la región factible**.

Este es el momento en el que **la calculadora gráfica** cobra total protagonismo.

1. Seleccionamos el menú **GRAPH**
2. Seleccionamos el primer registro de función, señalando previamente que vamos a introducir inecuaciones en forma explícita.

Introducimos las inecuaciones  $y \leq 300$ ,  $y \leq 500 - x$ , y  $x \geq 0$ , pero...

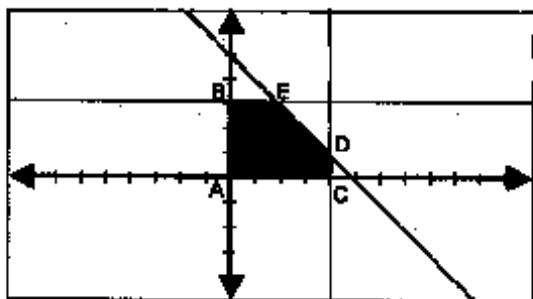
**¿Cómo hacer para introducir las inecuaciones  $x \leq 400$ ,  $x \geq 0$ ?**

Estrategia: Basta con acotar la última función escrita en el intervalo  $[0, 400]$ .

4. Por último tenemos que ajustar los parámetros de la escala para la visualización de la ventana. Este ejercicio de búsqueda es muy didáctico e interesante para profundizar en los conceptos de escala de los ejes de coordenadas. Por ejemplo:

View Window : Xmin: - 150; Xmax: 700; scale:50;  
Ymin: - 150; Xmax: 700; scale:50

Representamos gráficamente el sistema:



En este momento se puede rastrear dentro del recinto con la función **TRACE** para comprobar las coordenadas de los infinitos puntos que hay en el interior del recinto y comprobar que verifican todas y cada una de las restricciones del problema, reforzando así el concepto de *solución de un sistema de inecuaciones*. Pero...

**(¿Cuál de esos infinitos puntos genera unos ingresos máximos?)**

**5. Localización de soluciones.** Tomamos la función objetivo, y comprobamos uno de sus posibles valores; por ejemplo, cuando los ingresos son mínimos:

$$\text{Ingresos} = 450x + 600y \quad ' \quad 450x + 600y = 0$$

A continuación vamos a hacer un barrido con todas las posibles rectas paralelas a ésta (denominadas *líneas de nivel*) que pasen por el recinto de la región para saber cuando estos ingresos alcanzan un máximo, es decir, para comprobar cual de todas ellas tiene mayor ordenada en el origen. Lo cierto es que son infinitas las posibilidades por lo que **se hace necesario la existencia de un teorema** que permita la optimización de una función. Intuitiva y visualmente podemos demostrar el teorema que habitualmente se enuncia y no se demuestra algebraicamente:

**Teorema:** Como la región factible existe y está acotada, el valor óptimo de la función objetivo se alcanzará en uno de *los vértices del polígono que limita la región*, o a lo largo de uno de los lados. Si la región factible no es acotada, la función objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero si lo hace, éste se encuentra en uno de los vértices de la región.

Por lo tanto calculamos previamente los vértices con **la calculadora gráfica**, a través de la función **G - Solve**, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{array}{llll} A(0,0) & B(0,300) & C(400,0) & D(400,100) \\ & & & E(200,300) \end{array}$$

## 6. ANÁLISIS GRÁFICO DE ÓPTIMOS:

Volvamos a la recta que representa a la función objetivo que pasa por (0,0):

$$450x + 600y = 0$$

$$\text{En forma explícita } ' \quad y = \frac{-45}{60}x$$

$$' \quad \text{Por lo que la pendiente} = \frac{-45}{60} = -0.75$$

Para aplicar el teorema, dibujaremos las rectas *paralelas* a ésta de ganancia nula que pasan por los vértices anteriormente calculados:

Las líneas de nivel serán rectas que tienen por ecuación:

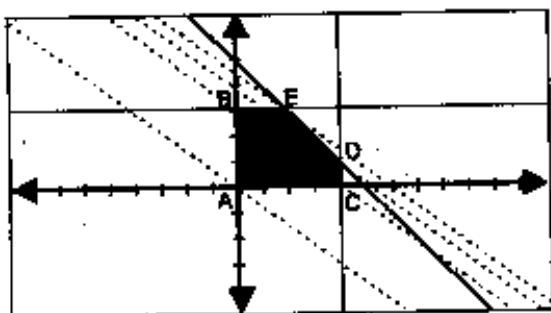
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

que en forma explícita, para representarlas en la calculadora, vienen dadas por

$$y = m (x - x_1) + y_1$$

Vamos a la lista de funciones, *seleccionamos la forma "y ="* y procedemos a dibujar dichas líneas de nivel que pasan por los vértices calculados.

Así podemos comprobar que la recta que tiene mayor ordenada en el origen es la que pasa por el punto **E (200, 300)**.



## 7. SOLUCIÓN:

**\$ Los máximos ingresos** se obtendrán cuando se produzcan **200 copas sencillas y 300 copas talladas**.

$$\text{Ingresos} = 450 \times 200 + 600 \times 300 = 270.000 \text{ PTAS.}$$

**\$ En ese momento los ingresos** ascenderán a **270.000 PTAS**.