

## DIDÁCTICA DE LAS SUCESIONES CON CALCULADORA GRÁFICA

Juan García, J. Fernando

### INTRODUCCIÓN

El enfoque didáctico del tema de sucesiones puede enriquecerse en gran medida si el tradicional tratamiento algebraico se combina con planteamientos numéricos y gráficos. Esta idea, que de ningún modo es nueva, es muy difícil de llevar a la práctica con los instrumentos de trabajo habituales en las clases de Matemáticas porque, además de requerir mucho tiempo, puede conducir a tareas rutinarias y tediosas que el alumnado convierte con facilidad en el objetivo de la actividad, con lo cual se pierde gran parte de su potencialidad para actuar didácticamente sobre los conceptos implicados.

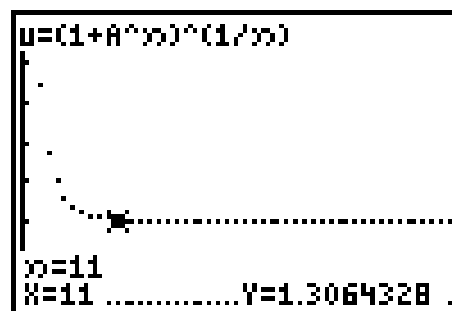
Así, por ejemplo, confeccionar una tabla de valores, como la que vemos en la figura adjunta para la sucesión de término general  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$  en el caso  $A = 1.3$ , es una tarea muy recomendable para una enseñanza de las sucesiones que quiera aprovechar las habilidades numéricas que el alumnado de Secundaria ya debe haber desarrollado. La exploración *numérica* del comportamiento de los términos de la sucesión para distintos valores del parámetro  $A$  es una actividad que facilita los procesos de generalización y abstracción necesarios para un análisis *algebraico* de carácter más global y sintético.

$n$	$u(n)$
1	2.300000000
2	1.650000000
3	1.433333333
4	1.325000000
5	1.260000000
6	1.216666667
7	1.185714286
8	1.162500000
9	1.144444444
10	1.130000000
11	1.118181818
12	1.108333333
13	1.100000000
14	1.093750000
15	1.088888889
16	1.084375000
17	1.080590909
18	1.077333333
19	1.074479231
20	1.071904762
21	1.069607843
22	1.067575758
23	1.065757576
24	1.064126984
25	1.062666667
26	1.061352941
27	1.060162601
28	1.059087302
29	1.058113208
30	1.057236842
31	1.056447368
32	1.055734375
33	1.055096774
34	1.054524691
35	1.054017544
36	1.053574468
37	1.053184643
38	1.052847923
39	1.052554217
40	1.052303922
41	1.052086957
42	1.051902381
43	1.051749244
44	1.051624621
45	1.051525370
46	1.051448438
47	1.051390729
48	1.051349246
49	1.051321429
50	1.051304348
51	1.051296078
52	1.051295619
53	1.051294940
54	1.051294000
55	1.051293766
56	1.051293220
57	1.051292833
58	1.051292589
59	1.051292451
60	1.051292391
61	1.051292371
62	1.051292361
63	1.051292357
64	1.051292353
65	1.051292350
66	1.051292348
67	1.051292346
68	1.051292345
69	1.051292344
70	1.051292343
71	1.051292342
72	1.051292341
73	1.051292340
74	1.051292340
75	1.051292339
76	1.051292339
77	1.051292338
78	1.051292338
79	1.051292337
80	1.051292337
81	1.051292336
82	1.051292336
83	1.051292335
84	1.051292335
85	1.051292334
86	1.051292334
87	1.051292333
88	1.051292333
89	1.051292332
90	1.051292332
91	1.051292331
92	1.051292331
93	1.051292330
94	1.051292330
95	1.051292329
96	1.051292329
97	1.051292328
98	1.051292328
99	1.051292327
100	1.051292327

Ahora bien,  $u(n) = 1.3064328$  pueden

desarrollar en clase si sólo contamos con papel, bolígrafo y la calculadora *científica*? Y, en cualquier caso, ¿se concentrará la atención en el análisis de los resultados o, como apuntaba al principio, serán relegados a un segundo plano por el tiempo y el esfuerzo necesarios para obtenerlos?

Pueden formularse reflexiones paralelas y preguntas idénticas respecto del estudio *gráfico* de sucesiones. Cada forma de representación, cada *lenguaje*, aporta nuevos elementos para la comprensión del objeto de estudio, y la capacidad de transferir la información de unos códigos a otros forma parte substancial del proceso.



Las calculadoras gráficas cuentan con utilidades específicas para el trabajo con sucesiones, que permiten su estudio gráfico y numérico en un *ambiente* que pone de manifiesto la conexión conceptual con las funciones. Es posible representar  $u_n$  en función de  $n$ , o en función de  $u_{n-1}$ , obtener una tabla de valores o, directamente, el valor de un término de la sucesión, etc. Pero, además, la rapidez de cálculo permite explorar muchos y muy diversos ejemplos en poco tiempo, incluyendo sucesiones definidas mediante recurrencia.

Este trabajo pretende ilustrar con ejemplos algunas de las posibilidades del uso de las calculadoras gráficas en la didáctica de las sucesiones en Secundaria. Para su desarrollo se ha utilizado el modelo TI-83 de Texas Instruments.

**Ejemplo 1: Estableciendo una conjetura.**

Consideremos la siguiente sucesión, definida mediante recurrencia:

$$a_1 = A \text{ y } a_n = 1 - \frac{1}{1 + a_{n-1}} \quad (A > 0 \text{ y } n \geq 2)$$

Analizaremos su comportamiento para diferentes valores del parámetro. Para ello vamos a utilizar solamente dos opciones muy concretas de la máquina que estamos empleando:

- La posibilidad de asignar valores numéricos a parámetros definidos por el usuario.
- El hecho de que la máquina guarda en memoria la última orden ejecutada y permite volver a realizar el cálculo correspondiente con sólo presionar una tecla.

En nuestro ejemplo, y considerando un valor inicial de  $A = 10$ , la sintaxis es la siguiente:

- En primer lugar asignamos el valor 10 al parámetro  $A$ .
- En segundo lugar, introducimos la expresión

$$= 1 - \frac{1}{1 + A},$$

y hacemos que el valor resultante se almacene en  $A$ . De esta forma hemos obtenido el valor de  $a_2$  y, al mismo tiempo, hemos actualizado el valor de  $A$ , sustituyendo el valor 10 que hemos asignado en el paso anterior, por el valor calculado para  $a_2$ .

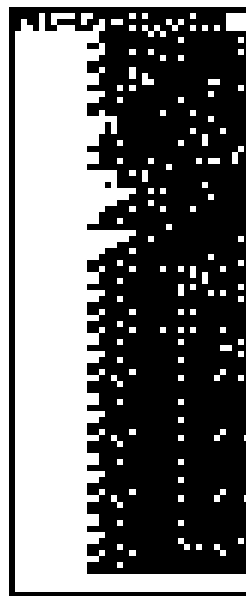
```
10→A
√(1-1/(1+A))→A
.9534625892
```

Obtener ahora el siguiente término de la sucesión,  $a_3$ , es muy fácil. Basta con pulsar otra vez la tecla **ENTER**: la máquina evalúa de nuevo la expresión

$$= 1 - \frac{1}{1 + A},$$

pero con el valor actualizado de  $A$ , y repite el proceso de asignación. El pequeño bucle que hemos formado nos permite obtener un nuevo término de la sucesión con cada pulsación de la tecla **ENTER**.

En el caso que estamos analizando ( $A = 10$ ), basta con apenas 25 pulsaciones para obtener una estabilización de los términos que nos ofrece la máquina.



Una vez supuesta la convergencia de la sucesión, podemos comparar el valor obtenido, con el que resulta de resolver la ecuación

$$= 1 - \frac{1}{1 + x} = x$$

Después, visto que la solución que se obtiene es independiente del valor asignado a  $A$ , podríamos probar con algunos otros valores, para aumentar la evidencia de la conjetura.

**Ejemplo 2: El coste de producción.**

Consideremos la siguiente situación:

En una fábrica se ha estimado que el coste mensual de producción de un determinado artículo, en función del número total de unidades producidas en ese período, viene determinado aproximadamente por la siguiente expresión, en miles de pesetas:

$$C(n) = 100n + 5000 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

donde  $n$  es el número total de unidades producidas en el mes.

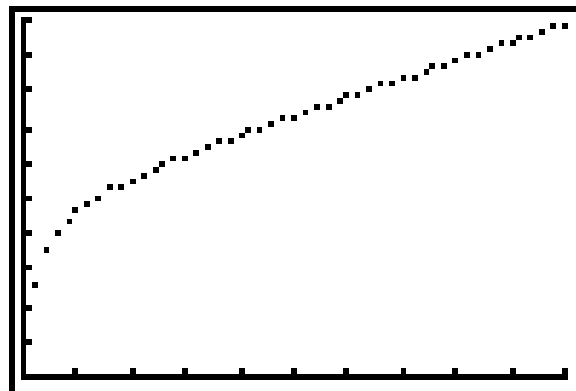
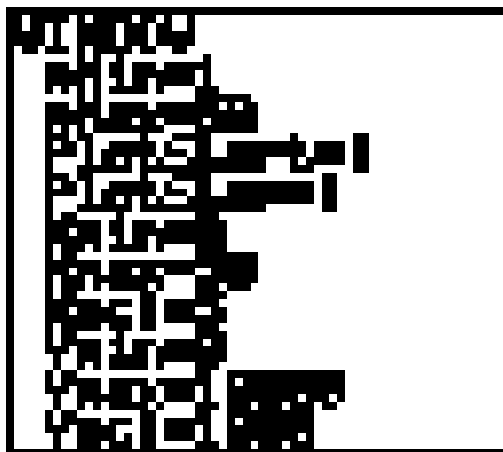
Vamos a analizar algunos aspectos de este supuesto, con la ayuda de la calculadora gráfica. Utilizaremos ahora las utilidades específicas para el trabajo con sucesiones con que cuenta la máquina:

- El editor de sucesiones, que permite definir una sucesión en función de su término general o, como podríamos haber hecho en el *ejemplo 1*, en función del término anterior (o de los dos términos anteriores).
- La representación gráfica de los términos de la sucesión para un rango de valores determinado por el usuario.
- La tabulación de los valores de los términos de la sucesión.

El primer paso consistirá en introducir la expresión que queremos analizar, en el editor de sucesiones:

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)=100n+5000(
1-1/(n+1))
u(nMin)=
u(n)=
u(nMin)=
u(n)=
```

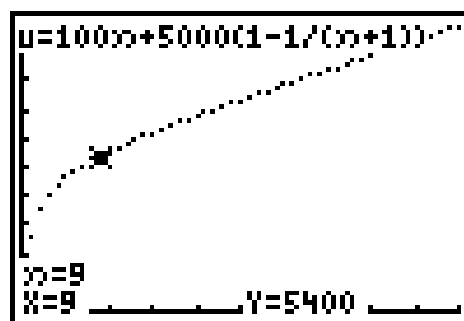
Para representarla, tendremos que ajustar primero los parámetros de la ventana gráfica. Es un paso importante, porque exige reflexionar sobre qué queremos obtener y qué debemos hacer para conseguirlo. Para definir, por ejemplo, la siguiente representación de los 50 primeros términos de la sucesión, hemos tenido que decidir: para qué valores de  $n$  se calcularán los términos de la sucesión, cuáles se representarán, y qué intervalos sobre los ejes coordenados permitirán que los puntos calculados aparezcan en la representación gráfica.



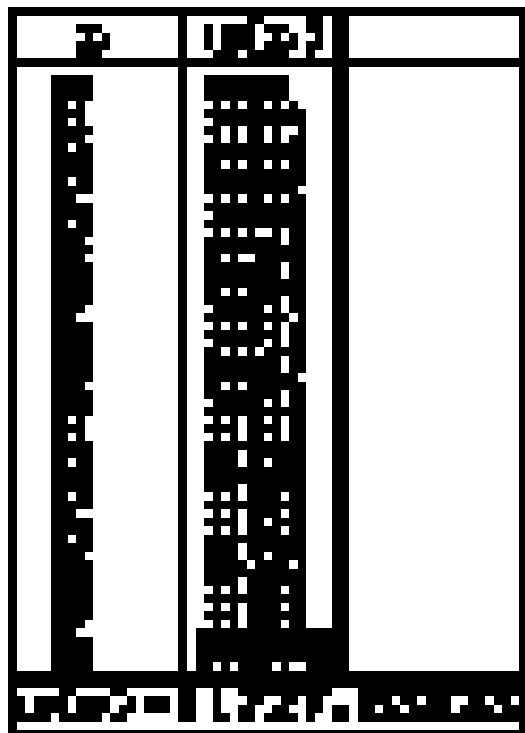
La gráfica obtenida ofrece de inmediato una gran cantidad de información, que será necesario conectar con la que proviene de la fórmula y del contexto del problema:

- Crecimiento: ¿es lógico que cuanto mayor sea el número de unidades producidas sea mayor el coste total de producción?
- Pendiente: ¿qué significado tiene, en el contexto del problema, que la pendiente de la gráfica se comporte como lo hace?

Podemos obtener información más concreta sin abandonar la representación gráfica: la tecla *TRACE* permite desplazar un cursor sobre los puntos de la gráfica y observar en la línea inferior los valores correspondientes.



Por último, veamos qué podemos observar sobre la tabla de valores. Si ajustamos los parámetros que controlan su funcionamiento para que nos permita un listado que comience en el término  $C(50)$ , por ejemplo, pronto observamos que, a partir de  $C(60)$ , los valores que obtenemos forman, prácticamente, una progresión aritmética. En otras palabras, la relación entre  $n$  y  $C(n)$  es, a partir de  $n = 60$  y aproximando hasta las unidades, casi lineal como, por otra parte, también se puede apreciar sobre la gráfica. Puede ser interesante preguntar al alumnado si en algún momento la sucesión dejará de ser creciente. El contexto sobre el que estamos trabajando puede ayudar a comprender el papel que juega el coeficiente 100 en la expresión del término general de la sucesión. Una extensión lógica del problema es la siguiente:



En realidad, el producto sólo resulta competitivo en el mercado si el coste medio de fabricación es inferior a 150000 pesetas. Define y representa la sucesión correspondiente al coste medio de producción mensual, y determina el mínimo número de unidades que garantiza la competitividad deseada. Si la producción se pudiera aumentar sin ninguna limitación, llegaría el coste medio a ser cero?

### CONCLUSIÓN

Este trabajo, como resultará obvio, no pretende agotar los recursos para la didáctica de las sucesiones, ni siquiera las posibilidades que para ello aporta el uso de las calculadoras gráficas. Es sólo, para quienes no lo conocían ya, una invitación a explorar este nuevo recurso tecnológico. Las decisiones sobre en qué niveles y con qué objetivos didácticos concretos utilizarlo deben estar basadas en planificaciones de carácter más global, que son competencia de cada profesor y de cada profesora en el marco del equipo docente correspon-