

## ALGUNOS ASPECTOS DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS ITERATIVOS Y SU IMPLEMENTACIÓN

*Díez Fernández, H.*

### INTRODUCCIÓN

Los **Métodos Iterativos** presentan unas características muy particulares para motivar al alumno en el uso de las nuevas tecnologías. La iniciación a estos métodos puede llevarse a cabo con los medios propios (desde la más simple calculadora hasta los programas más potentes).

Muchos de estos experimentos pueden hacerse tempranamente. Por esta razón cada vez es mayor la creencia de que las **calculadoras o similares**, deben de ser introducidas en la enseñanza de las matemáticas, siempre que se cuente con la **complicidad de profesores** y alumnos, y ello debe hacerse en la dirección y medidas adecuadas, para evitar los riesgos que conlleva un mal uso.

### PRESENTACIÓN

Tome distintas calculadoras y haga lo siguiente:

- Multiplique un número sucesivamente por 0.5 o divídale por dos.
- Calcule sucesivamente la raíz cuadrada, en dos casos diferentes empezando por los números 0.1 y 10.

Hasta que los números de la pantalla se queden fijos.

Estos procesos iterativos sencillos se pueden realizar en cualquier calculadora y pueden **plantearse como un juego** que nos obligue a responder cuestiones como: ¿Por qué es diferente el resultado en distintas máquinas?. Llegamos así al concepto de límite, errores de redondeo, aritmética de punto fijo y flotante.

En la comunicación presentamos varios niveles de aprendizaje pensando en los alumnos como activos ejecutores y espectadores de sus propios resultados numéricos.

### ESTADIO 1

Empezamos trabajando con la **calculadora más simple** y así con ella completamos la tabla 1.

TABLA 1

	$x = \sqrt{x+1}$	$x = -\sqrt{x+1}$	$x = x^2 - 1$	$x = \frac{x^2+1}{2x-1}$	$x = \frac{x^2+1}{2x-1}$
$x_0$	0.5	-0.5	-0.5	0.75	-0.5
$x_1$	...	...	...	...	...
...	...	...	1	...	...
$x$	1.618033989	-0.618033989	0	1.618033989	-0.618033989

Para rellenar la primera columna, partimos del valor  $x_0 = 0.5$ , sumamos a cada valor de la pantalla el número 1, a continuación damos a la tecla "=", después calculamos la raíz cuadrada y repetimos este proceso hasta obtener el punto fijo 1.618033989 que aparece al final de la columna.

Este valor verifica la igualdad de la cabecera:  $1.618033989 = \sqrt{1.618033989+1}$  y como consecuencia se tiene  $1.618033989^2 - 1.618033989 - 1 = 0$  es decir, este valor es una raíz de la ecuación  $x^2 - x - 1 = 0$ .

Podemos enunciar que:  $f(x) = x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow g(x)$ , siendo  $g(x)$  alguna de las funciones:

$$x = \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$$

En esta situación decimos que el cero de la  $f(x)$  es un punto fijo de la  $g(x)$ ; ésta última recibe el nombre de **función iteración** y el proceso genera la sucesión

$$x_i = g(x_{i-1}).$$

Volviendo a la tabla 1, complete la tabla si no lo ha hecho y posteriormente responda a las siguientes preguntas:

- ¿Es la  $g(x)$  única?
- ¿Todas las funciones  $g(x)$  convergen a un punto fijo?

c) ¿Cómo han sido obtenidas las funciones de iteración  $g(x)$  a partir de la  $f(x)$ ?

d) ¿Observa distinta velocidad de convergencia al cambiar de columnas?

## ESTADO 2

Nos situamos en el nivel educativo correspondiente a la introducción de las funciones elementales. En este momento es aconsejable manejar la **calculadora científica**.

TABLA 2

	$x = e^{-x}$	$x = -e^x$	$x = \cos(x)$	$x = x + \sin(x)$	$x = \sin(x+1)$
$x_0$	...	...	...	...	...
	0.56714329	-0.56714329	0.739085131	4.493409458	0.93456321

La tabla anterior puede completarse con una **calculadora científica sencilla** de forma rápida y divertida. Basta apretar una o dos teclas en cada paso, para realizar la iteración.

El primer problema a resolver por el alumno, es encontrar el primer iterante " $x_0$ ". Este hecho le obliga a considerar la naturaleza de las funciones exponenciales y trigonométricas que aparecen en la tabla 2.

Una vez realizado el proceso iterativo, es conveniente retomar el problema aplicando funciones inversas en las igualdades de la cabecera de tabla 2; de forma natural el alumno se cuestiona las distintas ramas que tienen las funciones trigonométricas inversas, y como valorarlas en su máquina.

Entonces se debe volver a experimentar, dando una explicación de lo que ocurre.

## ESTADO 3

Después de la calculadora científica más simple, los alumnos manejan una gama muy variada de máquinas, con adjetivos como, **Programable (P)**, **Gráfica (G)**, **Librerías (L)**, **Fórmulas (F)**, y otras. También observamos que el potencial de la máquina, no es utilizada por falta de conocimiento de la misma. Los métodos iterativos deben motivar al alumno a utilizar y por lo tanto a conocer mejor su calculadora. Con estas últimas máquinas de proceso iterativo de los ejercicios anteriores se hacen, introduciendo la fórmula, el valor  $x_0$  y dando sucesivamente a la tecla EXE.

Es muy posible que el alumno nos haya preguntado ya, cómo hemos obtenido la ecuación,

$$\frac{x^2 + 1}{2x - 1}$$

de la tabla 1. Este es el momento para introducir el **método de Newton**, y una buena opción para hacerlo es la forma gráfica.

También hemos visto que este método nos da las dos raíces partiendo de los dos iterantes correspondientes 0,75 y -0,5 con una rapidez muy superior a las otras funciones de iteración.

En el **progresivo aprendizaje** que vamos proponiendo, ahora es el momento de almacenar y ejecutar un programa o fórmulas almacenadas en cadena, así obtenemos un nivel de análisis mucho mayor que si ejecutamos una librería de la máquina. Esta situación y otras es analizada con la siguiente experiencia. Nuestros alumnos en estos últimos años se han planteado resolver la ecuación  $x^2 + 2xe^x + e^{2x} = 0$ , por el método de Newton.

La experiencia de lo ocurrido es muy amplia. Destacamos ahora algunos aspectos de valor educativo.

- (1) Inténtelo con las librerías de la calculadora.
- (2) Hágalo paso a paso de las formas semimanual y programada.
- (3) Utilice un programa de ordenador y opciones gráficas.

¿Qué ha ocurrido?. En general el punto se ha quedado fijo en valores distintos dependiendo de la precisión de la máquina. ¿Por qué?, ¿Cuál es la solución?

Si utilizamos los métodos anteriormente expuestos, nos encontramos con una serie de anomalías que hacen evidente que el **proceso falla**. Para entender lo que ocurre proponemos completar una tabla con la siguiente cabecera:

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h(n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - h(n)$	$\frac{e_n}{x_{n+1}}$
-----	-------	----------	-----------	---------------------------------	------------------------	-----------------------

Una forma de hacerlo es utilizar la calculadora semimanualmente, a través de fórmulas almacenadas en cadena. Si analizamos la tabla anterior, vemos que los valores de la derivada forman un infinitésimo de orden la mitad que la función.

Tome , o bien sustituya por el valor exacto y haga la misma tabla con , compare los valores. Haga el cociente de errores para la primera columna de la tabla 2 y dé significado al orden de convergencia.

## ESTADO 4

En este último nivel incluimos programas de cálculo numérico, simbólico y gráfico.

Los resultados siguientes han sido obtenidos con Maple:

> f:=x^2 + 2\*x\*exp(x) + exp(2\*x);

```

> solve(f=0); - W(1), -W(1)
> solve (f=diff(f,x)); -w(1), -W(-exp(2)) + 2
> solve(0=diff(f,x)); Ln(-1), - W(1)
> fsolve(0=diff(f,x),x,-100..100,fulldigits);
-
.56714329040978387299996866221035554975381578
7186512508135131
07922304579308668456669321944698617522945576
38024972867.
> fsolve(f=diff(f,x),x,-100..100,fulldigits);
-5671432904097838729999686622103555497538157
87186512508135131

```

```

07922304579308668456669321944698617522945576
38024972867.

```

```

> fsolve(f=0,x,-100..100,fulldigits);

```

```

-5671432904097838729999686622103555497538157
87186512508135131

```

```

07922304579308668456669321944698617522945661
916745084522.

```

¿Quién es  $W(1)$ ? La respuesta está en la tabla 2 !encuéntrela!. Vemos cómo el **ingenio matemático** es necesario además del software y la algorítmica.

Desde el punto de vista gráfico, para analizar la situación expuesta proponemos realizar los pares de gráficas  $(f(x), f'(x))$ ,  $(x, g(x))$ ,  $(g'(x), 1)$ .

## BIBLIOGRAFÍA

Actas del Congreso sobre Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad. T.E.M.U. 95 . Editores: Antonio Montes, Josep M. Brunat. (Departamento de Matemática Aplicada II. U. P. Cataluña 1995).

Análisis Numérico. R. L. Burden, J. D. Faires. Grupo de. Iberoamericana.