

OBSTÁCULOS RELATIVOS AL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE PRIMER CURSO DE INGENIERÍAS TÉCNICAS

**Sánchez Gómez, C.
Contreras de la Fuente, A.**

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de límite de una función es una noción básica para el desarrollo posterior de otros conceptos en Análisis Matemático como continuidad, derivación, etc; por ello, la comprensión del mismo por parte de los estudiantes permite la evolución correcta de las restantes nociones que en él se sustentan. Distintos investigadores han señalado la importancia del estudio de los obstáculos relativos a conceptos; en este trabajo, considerando las aportaciones de Cornu (1983, 1985), El Bouazzoui (1988), Sierpiska (1985a, 1985b, 1987, 1991) y Sánchez y Contreras (1995a, 1995b) se presentan algunos de los resultados relativos a los obstáculos detectados en estudiantes universitarios de primer curso de Ingenierías Técnicas, de dos de los ítemes del cuestionario, extrayéndose diversas conclusiones para la enseñanza del concepto.

2. OBJETIVOS DEL ESTUDIO Y DESCRIPCIÓN DE LOS ÍTEMES

El cuestionario elaborado se aplicó a una muestra de 194 estudiantes de primer curso de Ingeniería Técnica, a principio y final del curso 1994-95. Para la elaboración del mismo se tomaron como referencia los resultados del estudio de manuales Sánchez y Contreras (1995b). En este trabajo se presentan, de dos de los ítemes, los resultados y el análisis de las respuestas en las que se detectaron obstáculos. Uno de los objetivos que se pretende lograr es descubrir los obstáculos presentes en los estudiantes y proporcionar información a los profesores que les permita facilitar en sus alumnos la realización de los actos de comprensión necesarios para la superación de dichos obstáculos. Se han tomado los términos obstáculo y acto de comprensión en el sentido de El Bouazzoui (1988) y de Sierpiska (1991) y, de las distintas clasificaciones de los obstáculos relativos al concepto de límite realizadas por Cornu (1983), Sierpiska

(1985a), Sánchez y Contreras (1995b), en este trabajo se han considerado los obstáculos O_x (centrarse en la forma de las aproximaciones de las variables independiente y dependiente más que en las propias aproximaciones); O_y (creer que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos); O_z (creer que el límite de una función en un punto es el valor de la función en dicho punto).

El primero de los ítemes analizados es el siguiente:

Ítem 1. Fíjate en las gráficas y expresiones siguientes, ¿qué gráficas y expresiones se pueden relacionar? Indica las posibles relaciones de la forma: gráfica ... con expresión(es) ... o expresión ... con gráfica(s) ...

gráfica 1

gráfica 2

gráfica 3

gráfica 4

expresión a: " $e > 0 \ \exists d > 0 / 1-d < x < 1 + d \ \frac{1}{2} 3-e < f(x) < 3 + e$ "

expresión b: " $e > 0 \ \exists d > 0 / 1-d < x < 1 + d \ \frac{1}{2} 0 < f(x) < e$ "

expresión c: " $e > 0 \ \exists d > 0 / 2-d < x < 2 + d \ \frac{1}{2} 2 - e < f(x) < 2 + e$ "

expresión d: " $e > 0 \ \exists d > 0 / 1 < x < 1 + d \ \frac{1}{2} 2 - e < f(x) < 2 + e$ "

expresión e: " $e > 0 \ \exists d > 0 / 2 < x < 2 + d \ \frac{1}{2} 2 - e < f(x) < 2 + e$ "

Este ítem es de respuesta múltiple ya que los alumnos deben identificar gráficas y expresiones (una o varias) y además contiene varios objetivos. Se han incluido gráficas de funciones que no deben plantear ninguna dificultad para un alumno de primer curso universitario, y casos distintos en cuanto a existencia, o no, de límite.

Con la gráfica 1 se presenta el caso de una función con límite en un punto y que no puede relacionarse con ninguna de las expresiones dadas, con objeto de conocer si el alumno distingue entre dicha situación y la expresión simbólica del concepto de continuidad. Con la gráfica 2 se presenta el caso de una función con límite en un punto, que no está definida en dicho punto, con objeto de conocer si el alumno distingue entre la existencia del límite en un punto y la existencia de la imagen de la función en dicho punto. Con la gráfica 3 se presenta el caso de una función que no tiene límite en un punto, pero sí tiene los dos límites laterales finitos. Se preten-

de detectar, por una parte, si el alumno identifica la existencia de límites laterales distintos con la no existencia del límite en un punto, y por otra, si identifica el límite lateral con el límite en el punto para aquél límite lateral que coincide con el valor de la función en el punto. Por último, con la gráfica 4, se presenta el caso de una función que no tiene límite en el punto y sólo uno de los límites laterales es finito, con el objetivo de revelar si el alumno en este caso, al observar que no existe imagen de la función en dicho punto, no identifica el límite lateral con límite en el punto considerado.

a)

x	1.9	1.99	1.999	...	2	...	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.1	0.01	0.001	...	1	...	1.001	1.01	1.1

b)

x	1.9	1.99	1.999	...	2	...	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	1	1	1	...	1	...	1	1	1

c)

x	1.9	1.99	1.999	...	2	...	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.39	0.0399	0.003999	...	-	...	0.004001	0.0401	0.41

Ítem 2.- Sabemos que una función f tiene la tabla de valores abajo indicada. Estudia el comportamiento de la función f en $x = 2$ en cada uno de los casos siguientes:

La cuestión 6 también nos permite observar varios aspectos: 1º) Si la CN está presente en el alumno. 2º) Si la transposición didáctica que se hace de la noción de límite por parte de los manuales de enseñanza y por el profesorado es pertinente y clara para los alumnos, extrayendo así los efectos e influencias de esta transposición. Con la tabla a) se pretende detectar si los estudiantes distinguen entre la existencia de los límites laterales y la existencia de límite en un punto, o están presentes los obstáculos siguientes: el obstáculo O_y (creer que existe límite en un punto fijándose sólo en la existencia de uno de los límites laterales), inducidos a ello por tener éste igual valor que la función en dicho punto, por lo que se detectaría también la presencia del obstáculo O_z (creer que el límite en un punto es el valor de la función en dicho punto). Con la tabla b) se persigue igual objetivo que con la tabla a) y además detectar si en los estudiantes está presente el obstáculo O_t (creer que existe límite en un punto porque los valores de la variable dependiente "se acercan" a algo), porque los alumnos, al no ver aproximación por ser la función constante, indican que no hay límite. Con la tabla c) se pretende detectar si en los estudiantes está presente el obstá-

culo O_x (centrarse en la forma de las aproximaciones de los valores de las variables independiente y dependiente más que en las propias aproximaciones), y además si la no existencia de valor de la función en el punto en el que se estudia el comportamiento de la función les hace decir que no existe límite, por lo que se detectaría también la presencia del obstáculo O_z .

3. TABLAS DE RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO

Aplicado el cuestionario en los grupos, se procedió a corregir y clasificar las respuestas, hecho que planteó cierta dificultad debido a que la mayor parte de las cuestiones son de carácter abierto y, por tanto, presentan varias opciones que hubo que insertar en el sistema de categorías establecido. Se ha contabilizado en distintos apartados la respuesta de un mismo alumno a una cuestión, ya que en ella se incluían varios aspectos pertenecientes a diversas categorías. Terminado el recuento y codificados los datos obtenidos se ha aplicado el programa BMDP para el estudio estadístico, efectuándose distintos porcentajes según el tipo de cuestión y categoría considerada. Para el análisis de los resultados que se muestran en cada tabla se ha considerado, por una parte

la evolución general, y, por otra, la evolución por grupos. Los resultados del ítem 1 relativos a cada obstáculo están reflejados en la tabla 1, donde los porcentajes se han calculado respecto al total de alumnos de cada grupo. Por lo

que respecta a los obstáculos O_y y O_z , que se detectan en las respuestas de los estudiantes, en la gráfica nº 1 el O_z , y en la gráfica nº 3 ambos, se observa un aumento del pretest al posttest de forma individual y global.

Tabla Nº 1: Frecuencia y Porcentaje de respuestas con obstáculos por grupos y total

Tabla 1: Frecuencia y Porcentaje de respuestas con obstáculos por grupos y total						
	O_y		O_z		Total	
Grupos-Alumnos	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
1 - (30)	3 10.00	1 3.33	7 23.33	4 13.33	10 33.33	5 16.66
2 - (24)	3 12.50	3 12.50	10 41.66	9 37.50	13 54.16	14 58.33
3 - (32)	2 6.25	8 25.00	6 18.75	13 40.62	8 25.00	21 65.62
4 - (31)	1 3.22	3 9.68	2 6.45	6 19.35	3 9.67	11 35.48
5 - (27)	1 3.70	2 7.40	2 7.40	3 11.11	3 11.11	7 25.92
6 - (29)	3 17.24	9 31.03	10 34.48	9 31.03	13 44.83	18 61.72
7 - (21)	0 0.00	0 0.00	1 4.76	4 19.04	1 4.76	4 19.04
TOTAL (194)	15 7.73	30 15.46	38 19.58	52 26.80	33 17.01	82 42.26

A la hora de efectuar el recuento de las respuestas dadas por los estudiantes en el ítem 2 se ha tenido en cuenta que se puede detectar el obstáculo O_y cuando en la respuesta dada, en las tablas a) y b), no se tiene en cuenta la aproximación por ambos lados al valor $x = 2$ y se incluye la expresión "... el límite, para x tendiendo a 2, de $f(x)$ es 2 ...". Se puede detectar el obstáculo O_z cuando en la respuesta dada se incluye "... el límite es igual a $f(2)$...". Los dos obstáculos anteriores pueden ser detectados en una misma respuesta a las tablas a) y b), o sólo uno de ellos, cuando se escribe alguna de las expresiones siguientes: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$, en esta respuesta se puede detectar el obstáculo O_y (creer que existe límite en un punto en el que sólo existe límite lateral). $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 = f(2)$, en esta respuesta se puede detectar el obstáculo anterior y además el obstáculo O_z (creer que el límite en un punto es el valor que toma la función en ese punto). Se puede detectar O_x cuando al indicar que si existe el límite en el punto $x = 2$, para la tabla c), se dice "... el límite a la izquierda y derecha de cero vale

0.004 ...". En la tabla nº 2 se reflejan las frecuencias y porcentajes correspondientes a las respuestas en las que se detectan obstáculos tanto en el pretest como en el posttest, con objeto de comparar la influencia que tiene cada obstáculo en particular en el total de respuestas en las que se ha detectado alguno. Al observar los porcentajes globales, se aprecia una presencia muy importante del obstáculo O_y respecto a O_x y O_z tanto en el pretest como en el posttest. Siendo O_z el que tiene el porcentaje menor, lo cual contrasta con su mayor presencia en los demás ítemes. Dado que esta importante disminución de O_{gz} en cuanto a su incidencia respecto a otros ítemes, coincide con un comportamiento contrario para O_y , se infiere que en esta cuestión 6, al estar ligada a la CN, permite detectar la presencia en los estudiantes del obstáculo O_y , íntimamente relacionado con los límites laterales. Sin embargo, el cálculo algorítmico de límites influye poco en las respuestas a esta cuestión, y por tanto el obstáculo O_z aparece con menor frecuencia.

Tabla N° 2: Frecuencias y Porcentajes de respuestas, según obstáculo, por grupos, y total.
PRETEST- POSTEST.

Tabla N° 2: Frecuencias y Porcentajes de respuestas, según obstáculo, por grupos, y total. PRETEST- POSTEST.								
	O ₁		O ₂		O ₃		Total	
Grupos	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
1	4 30.76	10 53.55	5 38.46	4 22.22	4 30.76	4 22.22	13	18
2	4 44.44	0 0.00	3 33.33	1 83.33	2 22.22	1 16.66	9	6
3	9 52.94	4 50.00	0 0.00	3 37.50	8 47.05	1 12.50	17	8
4	12 66.66	3 37.50	2 11.11	0 0.00	4 22.22	3 62.50	18	8
5	10 76.92	5 62.50	2 15.38	0 0.00	1 7.69	3 37.50	13	8
6	4 28.57	7 58.33	5 35.71	0 0.00	5 35.71	5 41.66	14	12
7	9 75.00	11 84.61	2 16.66	0 0.00	1 8.33	2 15.38	12	13
Total	52 54.16	40 54.79	19 19.79	12 16.43	25 26.04	21 24.76	96	73

Se observan cambios mínimos en cuanto al porcentaje de obstáculos entre pretest y posttest, siendo muy heterogéneo el comportamiento de los grupos, con aumentos en el obstáculo O_x para los grupos n° 4, 5, 6 y 7, con importante incremento en los n° 4 y 5, del 22.22% al 62.50% y del 7.69% al 37.50% respectivamente y, sin embargo, con disminución en los grupos n° 1, 2 y 3, destacando este último, que pasa del 47.05% al 12.50%. Los cambios que se aprecian para el obstáculo O_z se consideran poco representativos.

4.2.5. Conclusiones del estudio de la evolución de las concepciones de los estudiantes.

Antes de la enseñanza (pretest)

1. Los estudiantes no saben interpretar gráficas elementales, lo cual no les permite determinar a partir de ellas la existencia o no de límite de la función que representan. La representación de gráficas similares abunda en los manuales que se les recomiendan en primer curso de Ingenierías Técnicas.

2. Un elevado porcentaje de alumnos, al llegar a la Universidad, no conoce el significado de los términos y

, lo cual permite inferir que, al tener los estudiantes unos conocimientos previos limitados, se encontrarán con excesivas dificultades para comprender los numerosos conceptos para los que son básicos en la asignatura de Cálculo.

3. Un elevado número de estudiantes, (la mayoría procede de estudios de reforma), indica que ni siquiera sabía de la existencia de dichos términos, lo cual muestra la existencia de desequilibrios, casi insalvables, que impedirán que, con una enseñanza generalizada, que parte de ciertos conocimientos mínimos en los alumnos, logren superar la asignatura.

4. Las gráficas, en el caso de saber interpretarlas, no les son útiles para relacionarlas con el concepto de límite, debido a lo indicado en los apartados 2 y 3.

5. El bajo porcentaje de respuestas correctas en la mayoría de las cuestiones, en particular en el ítem 3 referido a elementos relacionados con el concepto de límite, nos muestra la ausencia, en un elevado número de alumnos, de conocimientos mínimos fundamentales para que, al recibir enseñanza de Análisis en la Universidad, los alumnos no encuentren dificultades

para la comprensión de los conceptos básicos de esta asignatura, entendiéndose, por tanto, el elevado fracaso en estas asignaturas en primer curso.

Después de la enseñanza (postest)

1. Los alumnos, a pesar del tiempo transcurrido y de la materia enseñada, continúan sin saber interpretar gráficas elementales, cuya representación abunda en los manuales más usados, cuando éstas sólo se relacionan con expresiones simbólicas.
2. Un elevado porcentaje de alumnos sigue sin recordar el significado de los términos y , y otros alumnos, (la mayoría procede de estudios de reforma), indica que no lo sabía al principio ni para responder en el postest,

lo cual permite afirmar que difícilmente habrán comprendido el concepto de límite ni, obviamente, todos aquellos para los que resulta básico (continuidad, derivada, integral, etc).

3. De las respuestas dadas por los alumnos al ítem 6, se infiere que las gráficas, en el caso de saber interpretarlas, sólo les son útiles para relacionarlas con el concepto de límite si éstas se relacionan a su vez con la tabla de valores, ya que cuando al estudiante se le plantea una situación de carácter exclusivamente numérico indica que "tiene que hacerse una gráfica aproximada para poder contestar", lo cual nos permite corroborar la necesidad de introducir y estudiar el concepto de límite, en cualquier nivel, desde la triple perspectiva numérica-gráfica-simbólica para facilitar en el alumno la comprensión del mismo.

BIBLIOGRAFÍA

- BROUSSEAU, G. 1983. Les obstacles epistemologiques et les problemes en Mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4, 2, 164-198.
- CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage. (Edición original, 1985).
- CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 12, 1, 73-112.
- CORNU, B. 1983. *Apprentissage de la notion de limite*. These de doctorat de troisieme cycle de Mathématiques pures. Université de Grenoble.
- CORNU, B. 1986. *Quelques obstacles a l'apprentissage de la notion de limite*. Laboratoire de Mathématiques Pures. Université de Grenoble I.
- EL BOUAZZOUI, H. 1988. *Conceptions des élèves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. PH.D. Université de Bordeaux I.
- SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. (1995a). Concepciones de los alumnos de COU en torno a la noción de límite de una función. VII J.A.E.M. "Thales". Córdoba.
- SÁNCHEZ, C. Y CONTRERAS, A. (1995b). Epistemología del concepto de límite. Análisis de manuales. VII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Madrid.
- SIERPINSKA, A. 1985. Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 6, nº 1, pp. 5-67.
- SIERPINSKA, A. 1987. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics* **18**, 371-397. T
- SIERPINSKA, A. 1990. Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 10, pp. 24-36.
- SIERPINSKA, A. 1991. Some remarks on understanding in mathematics. Versión revisada del trabajo presentado al Canadian Mathematics Education Study Group. Vancouver.
- SIERPINSKA, A. 1993. Curriculum materials for integrated teaching: The case of application sections in a linear algebra textbook. En L. Bazzini (Ed.): *Proceedings of the V Conference on systematic cooperation between theory and practice*. pp. 221-230. Grado: Italia.
- WILLIAMS, S. 1990. The understanding of limit: Three perspectives. *Proceedings of the PME 14*. 1, pp. 101-108.
- WILLIAMS, S. 1991. Models of limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 3, pp. 219-236.