

DEMOSTRACIONES Y DEFINICIONES EN ENSEÑANZA SECUNDARIA

**Sánchez Cobo, F. T.
Estepa, A.**

El presente trabajo es parte de una investigación más amplia y profunda que se ha llevado a cabo sobre las nociones de Correlación y Regresión (Estepa y Sánchez Cobo, 1.996; Sánchez Cobo y Estepa, 1.996a,b; Sánchez Cobo, 1.996), analizando una muestra de once libros de Matemáticas de 3º de B.U.P. del período de 1.977-1.990 de las editoriales más utilizadas en dicho nivel en la provincia de Jaén. Aquí exponemos los resultados obtenidos sobre la definición de los conceptos y las demostraciones exhibidas en estos manuales.

ANÁLISIS DE LAS DEFINICIONES INCLUIDAS EN LOS TEXTOS

Aunque no es sencillo expresar lo que es un concepto, podemos señalar que *“los conceptos describen alguna regularidad o relación dentro de un grupo de hechos y son designados por algún signo o símbolo”* (Novak, 1.977, citado en Orton, 1.990, p. 46). Es decir, la comprensión de un concepto nos posibilita detectar semejanzas con una clase ya formada. Un libro de texto de matemáticas recoge, dentro de sí, una gran cantidad de conceptos que comunica, en gran medida, a través de sus definiciones correspondientes. Podemos, en primer lugar, preguntarnos por la utilidad de las definiciones (Skemp, 1.980), pudiendo subrayarse las dos siguientes:

- Nos dice dónde comienza y dónde termina un concepto
- Nos capacita para relacionarlo con otros conceptos

Es decir, *“las definiciones pueden verse como una vía de añadir precisión a las fronteras de un concepto, una vez formado; y establecer explícitamente su relación con otros conceptos”* (Skemp, 1.980, p. 30). En relación con la comprensión de los conceptos, el propio Skemp ha distinguido entre *“comprensión relacional”* y *“comprensión instrumental”*, considerándose la comprensión

relacional como la que se produce cuando se integran y relacionan los conceptos con contenidos matemáticos más generales, mientras que cuando el énfasis se pone en la memorización de rutinas de las que desconocemos su por qué estaríamos en una comprensión instrumental (Informe Cockcroft, 1.985). Nosotros hemos establecido, basándonos en las anteriores ideas expuestas, una taxonomía de definiciones:

- *Definición relacional* : aquélla que pretende mostrar las diversas conexiones con todos los conceptos que está relacionado el concepto que se está definiendo. Por ejemplo, en el texto (81A) se presenta la definición: *“Llamaremos correlación a la teoría que trata de estudiar la dependencia que existe entre las dos variables que intervienen en una distribución bidimensional.”* (p. 441)
- *Definición instrumental* : aquélla que muestra únicamente cómo determinar procedimentalmente el concepto que se está definiendo. Desde un punto de vista matemático sería una definición de tipo constructivo. Así, por ejemplo, en el libro (77C) se presenta la definición (p. 303): *“En el caso de dos variables X, Y y de covariación lineal, se define el llamado coeficiente de correlación lineal, mediante la expresión*

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \text{ (p. 303)}$$

- En el análisis de los manuales hemos observado que se utiliza otro tipo de definiciones que podemos considerar como limítrofe con las dos indicadas anteriormente. Serían aquéllas que incluyen tanto las relaciones con otros conceptos, como los algoritmos para su determinación, siendo por ello denominadas *definiciones instrumento-relacionales*. Por ejemplo, en el libro de texto (88A) se presenta la definición (p. 164): *“Para medir la correlación existente entre dos variables definimos el coeficiente r de correlación lineal:*

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \quad \text{“(p. 303)”}$$

En la tabla 1 se recoge el examen correspondiente de los libros de texto respecto a los distintos tipos de definiciones, referidos exclusivamente a la correlación y a la regresión.

Tabla 1. Frecuencia según el tipo de definición

	77A	77B	77C	77D	78A	81A	82A	86A	87A	88A	90A	Total
Definición relacional		2	1	5		5	3	2	2	2	4	26
Def. instrumental	2	3	1		1	1	1	2	2		2	15
Definición relacional							1		1	1		3

Como puede observarse existe un notable deslizamiento hacia las definiciones relacionales - casi el doble - frente a las instrumentales, siendo las primeras utilizadas para explicar las nociones de correlación y de regresión, no usándose nunca para este caso las de tipo instrumental. Igualmente, las definiciones instrumentales se emplean mayoritariamente para explicar los coeficientes de correlación y de regresión y la covarianza, lo que por otra parte parece bastante natural al tratarse de parámetros estadísticos.

Sin embargo, consideramos conveniente que también se diera una definición relacional, es decir, que se explicitaran de forma instrumento-relacional. Las definiciones instrumento-relacionales son altamente escasas, y en algunos casos los autores aunque las utilicen parecen querer subrayar alguno de estos dos aspectos.

Por ejemplo, en el texto (82A) se presenta la definición: “¿Cómo se mide la correlación? La correlación se mide mediante el coeficiente de correlación lineal, que se define así:

$$r = \pm \sqrt{\frac{m_y}{m_x}}$$

m_y = pendiente de la recta de regresión de y_x

m_x = pendiente de la recta de regresión de x_y ” (p. 311)

ANÁLISIS DE LAS DEMOSTRACIONES PRESENTADAS EN LOS TEXTOS

Según la tradición fue Tales de Mileto (600 a. de C.) el primero que realizó algún tipo de demostración para un teorema - “Todo círculo queda dividido en dos partes

iguales por un diámetro” - (Boyer, 1.986, p. 76), y, desde entonces una nota distintiva de todo trabajo matemático será la inclusión, en mayor o menor medida, de demostraciones que validen las proposiciones que se presentan. Por ello podemos considerar que “la matemática es, pues, la disciplina con demostraciones” (Davis y Hersh, 1.988, p. 117). La idea de lo que se juzga como una demostración ha sufrido una notable evolución a lo largo del tiempo, no constituyendo hace dos o tres siglos la demostración rigurosa, en la acepción moderna, la preocupación esencial que es hoy, pudiendo algunas de ellas ser estimadas insatisfactorias en la actualidad (MacNab y Cummine, 1.992). Incluso hay filósofos de las matemáticas, como Lakatos (1.986), que desplazan el centro de gravedad del progreso matemático de las demostraciones formales al proceso recursivo conjetura-refutación.

En educación matemática existe una abundante literatura sobre el análisis de las demostraciones. Uno de los trabajos que han hecho hincapié en el importante rol que desempeña la demostración en el currículo de matemáticas es el elaborado por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1.991) “Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática”, donde se recogen bajo el título de Las matemáticas como razonamiento - estándar 3 para los niveles 9 / 12 - las siguientes recomendaciones:

“En los niveles 9-12, el currículo de matemáticas debe incluir experiencias numerosas y variadas que refuercen y amplíen las destrezas de razonamiento lógico para que todos los estudiantes sean capaces de elaborar y comprobar conjeturas, formular contraejemplos, seguir argumentos lógicos, juzgar la validez de un argumento,

construir argumentos sencillos válidos, y para que, además, los futuros universitarios sean capaces de construir demostraciones para enunciados matemáticos, incluyendo demostraciones indirectas y demostraciones usando el principio de inducción” (p. 147)

Más adelante, dentro del segundo y tercer objetivo del estándar, vuelve a resaltarse la importancia que, para los alumnos que continúen estudios universitarios, tiene el adquirir métodos de demostración más formales, básicos en un nivel matemático superior, así como establecer como centro de interés el de la demostración por inducción dada su relevancia dentro de la matemática discreta.

Algunos autores, como los Van Hiele (1955, 1973, 1986), utilizan como referente del nivel de razonamiento de los estudiantes la capacidad para entender una demostración explicada por el profesor o desarrollada en un manual, pero que no tienen capacidad para su construcción - Nivel 3 (de clasificación) -o cuando adquieren sentido para ellos, hasta en demostraciones de varios pasos o las demostraciones alternativas, - Nivel 4 (de deducción formal) - (Jaime y Gutiérrez, 1990; 1991).

Bell establecía tres etapas “relacionadas vagamente con la edad” que se pueden aplicar a las demostraciones: i) etapa 1, predominante entre los niños de 11 a 13 años, donde se “reconoce, describe y amplía los esquemas de relaciones, pero no se intenta explicarlos, justificarlos ni deducirlos”; ii) etapa 2, predominante entre los niños de 14 a 18 años, donde se emplean “argumentos deductivos que abarcan desde los comentarios

relevantes pero fragmentarios, hasta las argumentaciones casi completas; o comprobaciones empíricas que abarcan desde la comprobación de sólo uno o dos casos a la de toda una variedad que cubriría casos de casi todos los tipos significativos”, y, iii) etapa 3, que únicamente la alcanzan un 10 % de los niños entre 11 y 18 años, consistiendo en un argumento deductivo “informal pero bastante completo” o en comprobar empíricamente todas las posibilidades (Bell, 1.976 a,b, citado en Langford, 1.990, pp. 155 y 156).

Una de las características típicas de los libros de texto de matemáticas correspondientes no sólo a nivel universitario sino también al de la Enseñanza Secundaria, y que podemos circunscribir casi exclusivamente a los manuales de esta disciplina, es la presencia dentro de su organización de las demostraciones. En los textos que hemos analizado, como refleja la tabla 2, existe una gran variabilidad entre ellos en cuanto a la presentación de demostraciones. Puede observarse que casi todos de los libros de texto recogen alguna demostración y que, únicamente, los textos (87A) y (88A) no las muestran directamente, por ejemplo el manual (87A) remite al lector al apéndice donde éstas se hallan. El número de demostraciones que incluyen se mueve entre 2 - (77A), (77C), (77D), (78A) y (81A) - y 4 - (82A) y (86A) -, siendo más numerosas las que hacen referencia a la regresión que a la correlación. Dentro de la regresión hemos detectado un fuerte sesgo en las proposiciones que se tratan de demostrar, siendo la determinación de la recta de regresión la que al encontrarse en 9 textos recibe la mayor atención de los autores.

Tabla 2. Frecuencia de las demostraciones presentadas en los textos

	77A	77B	77C	77D	78A	81A	82A	86A	87A	88A	90A	Total
Covarianza							X					1
Coefficiente de correlación		X					X	X			X	4
Propiedades coef. correlación			X	X	X			X				4
Recta de regresión	X	X	X	X	X	X	X	X			X	9
Rec. regresión(m. simplificado)	X					X	X	X			X	5
Coefficiente de regresión		X										1

En el lado opuesto están la covarianza y el coeficiente de regresión que sólo se hallan en 1 texto, (82A) y (77B) respectivamente. Posiblemente, esto se deba a que al tratarse de parámetros estadísticos, los autores consideren como esencial su definición, que, como citamos anteriormente, son de carácter instrumental, es decir, a través de una fórmula. Todas las demostraciones desarrolladas son deductivas, lo cual, en un segmento educativo como el de la Enseñanza Secundaria, va en detrimento de destrezas investigadoras (MacNab y Cummine, 1.992)

Dada la dependencia que los estudiantes tienen respecto de los libros de texto, sería conveniente la inclusión en los mismos de *demostraciones en dos columnas* (NCTM, 1.991). No hemos encontrado ningún manual en el que se haga utilización de semejante herramienta didáctica.

Uno de los aspectos que recientemente se ha analizado con más profundidad es el de la utilidad o funciones de las demostraciones. Ya Bell (1.976) realizó una primera categorización de las funciones de la demostración, y destacó tres tipos : I) verificación; II) iluminación, y, III) sistematización. Desde una perspectiva histórica, Barbin (1.996) indica que la actividad de demostrar posee un triple significado : la de convencer, la de educar y la de interesar. Una aportación más pormenorizada es la llevada a cabo por De Villiers (1.993), que amplía hasta cinco las funciones de toda demostración: 1. La demostración como medio de verificación/convicción, 2. La demostración como medio de explicación, 3. La demostración como medio de sistematización, 4. La demostración como medio de descubrimiento, y, 5. La demostración como medio de comunicación.

La demostración como medio de verificación/convicción subraya que la demostración es el argumento que proporciona certeza absoluta de la veracidad de lo enunciado. Era, y prácticamente sigue siéndolo, la función fundamental, aunque el binomio demostración-convicción en realidad debería establecerse en orden contrario, puesto que de la práctica de los matemáticos se infiere que se tiende a demostrar lo que previamente se está convencido de su validez (Davis y Hersh, 1.989). La demostración como medio de explicación indica que la función radica en la profundización en por qué es verdad, sirviendo la demostración como iluminación o clarificación. La demostración como medio de sistematización pretende la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas, lo cual la involucra estrechamente con procesos de axiomatización y definición a posteriori (Krygowska, 1971; Human, 1.978). Aparece únicamente a niveles muy avanzados. La demostración como medio de descubrimiento hace hincapié en la obtención de nuevos resultados en el proceso de alcanzar dicha

demostración. A este respecto son paradigmáticos los múltiples intentos por demostrar el postulado euclídeo de las paralelas que desembocaron en la geometría no euclídea (Boyer, 1.986). Finalmente la demostración como medio de comunicación enfatiza el hecho de que *"la argumentación matemática no es mecánica ni formal, ..., es un intercambio entre humanos basado en significados compartidos, no todos los cuales son verbales ni formulísticos"* (Davis y Hersh, 1.989, p. 56).

En el análisis realizado de las demostraciones incluidas en los manuales hemos encontrado que son utilizadas como herramientas de convicción y de explicación, aunque el papel verificador de la demostración no tiene sentido para los alumnos (De Villiers, 1.993), siendo las demás funciones ignoradas.

El último aspecto de las demostraciones examinado es el referido a los componentes de ella. Konior (1.993) indica que toda demostración responde a un plan general, que a veces dada su complejidad puede subdividirse en planes etapa. Estos planes son introducidos o finalizados por lo que él denomina *delimitadores de estructura*, que el autor destacaría por razones formales o heurísticas. Para tal fin emplearía un *delimitador inicial* y un *delimitador final*.

Es muy evidente el interés que, desde un punto de vista didáctico, tiene para un estudiante el conocimiento de los planes que, en forma "taquigráfica", se encuentran inmersos dentro del tejido de una demostración, pues permitiría que se captara de una forma más significativa los argumentos lógicos que la configuran, apartando el aprendizaje memorístico que en poco colabora en su asimilación. En todas las demostraciones presentadas se hallan estos componentes, siendo un ejemplo bastante paradigmático el de la recta de regresión. El plan general se divide en tres etapas, muy destacadas por los autores, a saber: i) Obtención de la función a optimizar; ii) Cálculo de los extremos relativos de esta función, y, iii) Determinación de la recta de regresión, que era el problema original. Muchos libros de texto inician la demostración exponiendo este plan general, que a continuación van desplegando. Por ejemplo el manual (90A) indica:

"Consiste este método en determinar los dos parámetros de la recta de regresión (su ordenada en el origen y su coeficiente angular), con la condición de que la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores reales y los estimados sea mínima. Es decir, siendo

$$d = y - y_e$$

la condición descrita es

$$Sd^2 = \text{mínima}$$

considera la recta de regresión

$$y_e = ax + b$$

cuyos parámetros a y b se desean establecer por el método de los mínimos cuadrados.

Según la condición de cálculo, $S(y - y_e)^2 = S(y - ax - b)^2 = \text{mínimo}$ (p. 286)

En este caso utiliza como un delimitador inicial el siguiente párrafo:

“Para determinar los valores que hacen mínima una función, es necesario que su derivada primera sea nula.” (p. 286).

y como delimitador final, del mismo plan etapa, este otro párrafo:

“Las expresiones [4] constituyen las ecuaciones normales de la recta de regresión de y sobre x .” (p. 286).

BIBLIOGRAFÍA

- BARBIN, E. (1996). ¿Qué concepciones epistemológicas de la demostración para qué tipos de aprendizaje? *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica*. Publication des I.R.E.M. pp. 195-210
- BELL, A. W. (1976a). Stages in generalisation and proof. *Proceedings of the CIMI Conference*. Nyireghaza, Hungría.
- BELL, A. W. (1976b). A study of pupils' proof-explanations in Mathematical situation. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40
- BOYER, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad.
- COCKCROFT, W. H. (1985). *Las matemáticas si cuentan (Informe Cockcroft)*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- DAVIS, P. J. y HERSH, R. (1988). *Experiencia matemática*. Barcelona: MEC-Labor.
- DAVIS, P. J. y HERSH, R. (1989). *El sueño de Descartes*. Barcelona: MEC-Labor.
- DE VILLIERS, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30
- ESTEPA, A. y SÁNCHEZ COBO, F. T. (1996). Sesgos en la enseñanza de la asociación. *Book of abstracts of short presentation ICME VIII*, (p. 426). Sevilla.
- HUMAN, P.G. (1978). *Wiskundige werkwyses in Wiskunde-onderwys*. Ph.D. Dissertation. University of Stellenbosch.
- JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El Modelo Van Hiele. En: Llinares, S. y Sánchez, M^aV. (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-383). Sevilla: Alfar.
- JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1991). La Evaluación del nivel de Razonamiento de Van Hiele a través de Tests escritos de Respuesta libre. *Epsilon*, 21, 39
- KONIOR, J. (1993). Research into the construction of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 251-256
- KRIGOWSKA, A. Z. (1971). Treatment of the Axiomatic Method in Class. En: Servais, W. y Varga, T. (Eds.), *Teaching school mathematics* (pp. 124-150). London: Penguin-Unesco.
- LAKATOS, I. (1986). *Pruebas y refutaciones*. Madrid: Alianza Universidad.
- LANGFORD, P. (1990). *El desarrollo del pensamiento conceptual en la escuela secundaria*. Barcelona: MEC-Paidós.
- MacNAB, D. S. y CUMMINE, J. A. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16*. Madrid: Visor.
- N.C.T.M. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: S.A.E.M. Thales.
- NOVAK, J. D. (1977). *A Theory of Education*. Ithaca: Cornell University Press.
- ORTON, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: MEC-Morata.
- SÁNCHEZ COBO, F. T. (1996). *Análisis de la exposición teórica y de los ejercicios de correlación y regresión en los textos de bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.
- SÁNCHEZ COBO, F. T. y ESTEPA, A. (1996a). Análisis de ejercicios de correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. En: Fuente, M. de la y Torralbo, M. (Eds.), *VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "THALES"* (pp. 303-316). Córdoba.
- SÁNCHEZ COBO, F. T. y ESTEPA, A. (1996b). Estudio de la presentación de la correlación en los libros de texto. (En prensa) *Jornadas Internacionales sobre el material impreso en la enseñanza a distancia*. IUED. UNED.
- SKEMP, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.
- VAN HIELE, P. M. (1955). De niveau' in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van het V.H.M.O., *Paedagogische Stúdien*, XXXII (J.B. Wolters: Groningen), 289-297
- VAN HIELE, P. M. (1973). *Begrip en Inzicht*. Países Bajos: Muusees Purmerend.
- VAN HIELE, P. M. (1986). *Structure and Insight. A theory of mathematics education*. Londres: Academic Press.