

APLICACIONES DE LA DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES DE UNA MATRIZ

**Rojas Matas, A.
Serrano Gómez, I**

1. INTRODUCCIÓN

La descomposición en valores singulares de una matriz tiene interesantes aplicaciones. Por este motivo, hemos introducido esta descomposición matricial en la asignatura de Álgebra Lineal de la Escuela de Ingeniería Técnica Industrial. Conocen previamente otras descomposiciones matriciales como L.U, Q.R, etc. y se introduce esta nueva descomposición inmediatamente después de haber estudiado el tema de diagonalización de matrices por semejanza.

2. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES DE UNA MATRIZ

Sea A una matriz real $m \times n$, entonces existe una matriz U ortogonal de orden m , una matriz S diagonal $m \times n$ y una matriz V ortogonal de orden n de tal forma que: $A = U \cdot S \cdot V^T$. Esta expresión se conoce con el nombre de descomposición en valores singulares de la matriz A y se notará por SVD (**S**ingular **V**alue **D**ecomposition). Los elementos de la diagonal de S son los valores singulares de A y son números no negativos (la raíz cuadrada de los autovalores de la matriz). La matriz V se consigue escribiendo en forma de columna una base ortonormal de vectores propios de la matriz y la matriz U se consigue escribiendo de la misma forma una base ortonormal de vectores propios de la matriz. El rango de A coincide con el número de valores singulares no nulos.

3. PRIMERA APLICACIÓN: MÍNIMOS CUADRADOS

Supongamos que estamos interesados en resolver un sistema lineal del tipo: $A \cdot X = B$. Pretendemos calcular la solución exacta, si es que la tiene, y si esto no es posible se tratará de encontrar la solución "que mejor se aproxime" en el sentido de los mínimos cuadrados. Sabemos que esto se consigue resolviendo el sistema:

Calculamos la descomposición SVD de la matriz A . Supongamos que la matriz A es de rango r . Si r es igual a n , la matriz será invertible y no hay ningún problema. Si r es menor que n , el sistema admite infinitas soluciones de la siguiente forma:

$$X = Y \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{con } y_1 = (U^T \cdot B)_1 / s_1, \dots, y_r = (U^T \cdot B)_r / s_r, \\ \text{con } y_{r+1}, \dots, y_n \text{ cualesquiera}$$

y la solución con norma-2 mínima se obtiene haciendo $y_{r+1} = 0, \dots, y_n = 0$

4. SEGUNDA APLICACIÓN: CONDICIONAMIENTO DE UN SISTEMA LINEAL

Diremos que un sistema está *bien condicionado* si pequeñas perturbaciones en los coeficientes del sistema o en los términos independientes producen también pequeñas perturbaciones en la solución. En caso contrario, diremos que el sistema está *mal condicionado*. A modo ilustrativo consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

admite como solución: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Si consideramos el nuevo sistema:

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix}$$

resulta que la solución es: $x_1^* = 9.2$; $x_2^* = -12.6$; $x_3^* = 4.5$; $x_4^* = -1.1$.

Análogamente el sistema:

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{**} \\ x_2^{**} \\ x_3^{**} \\ x_4^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

admite como solución: $x_1^{**} = -81$; $x_2^{**} = 137$; $x_3^{**} = -34$; $x_4^{**} = -22$.

Tenemos por lo tanto un sistema mal condicionado. Si efectuamos la descomposición en valores singulares de la matriz de los coeficientes del primer sistema comprobaremos como el cuarto valor singular (suponiendo que están ordenados en forma decreciente) está próximo a cero, es decir que la matriz original es "casi" singular. Si tratamos esta matriz como una matriz de rango tres poniendo a cero este valor singular y hallamos la solución de norma mínima por el método de los mínimos cuadrados anteriormente comentado resulta que la solución es:

$$x_1 = 1.12; x_2 = 0.79; x_3 = 1.05; x_4 = 0.96$$

Análogamente tratando la matriz de los coeficientes del segundo sistema como una matriz de rango tres, la solución de norma mínima sería:

$$x_1^* = 1.09; x_2^* = 0.81; x_3^* = 1.13; x_4^* = 0.89.$$

De la misma forma tratando la matriz de los coeficientes del tercer sistema como una matriz de rango tres, la solución de norma mínima sería:

$$x_1^{**} = 1.01; x_2^{**} = 0.78; x_3^{**} = 1.22; x_4^{**} = 0.89.$$

Por lo tanto se obtienen soluciones más razonables al tratar estas matrices como singulares.

5. TERCERA APLICACIÓN: DESCOMPOSICIÓN DE UNA MATRIZ EN SUMA DE MATRICES DE RANGO UNIDAD

Sea A una matriz $m \times n$ de rango r , cuya descomposición SVD es: $A = U \cdot S \cdot V^T$ donde los valores singulares están ordenados de la siguiente forma: $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0$. Se puede comprobar como:

$$A = \sum_{j=1}^r s_j u_j v_j^t$$

donde s_j es un escalar (el valor singular correspondiente) mientras que u_j es la columna j -ésima de la matriz U y v_j es la columna j -ésima de la matriz V . La matriz ori-

ginal queda de esta forma descompuesta en una suma de r matrices de rango 1. Resulta lógico pensar que la suma anterior se podrá cortar cuando los valores singulares correspondientes sean suficientemente pequeños.

Supongamos que construimos las matrices:

$$A_k = \sum_{j=1}^k s_j u_j v_j^t$$

donde k varía desde 1 hasta r . Entonces se demuestra que la matriz de rango k más próxima en norma-2 a la original es precisamente la matriz A_k anteriormente construida y además el error cometido sería:

$$\|A - A_k\|_2 = s_{k+1}.$$

La posibilidad de sustituir una matriz A por una aproximación suya de rango inferior puede resultar interesante en algunas ocasiones. Vamos a ver a continuación una aplicación concreta de esta propiedad en el procesamiento de las imágenes digitales.

Una imagen digital no es más que una matriz de números donde cada número representa un nivel de gris. Si se trata de una imagen en blanco y negro, la escala habitual de grises varía entre 0 correspondiente al negro y 255 correspondiente al blanco. Para almacenar un sólo nivel de gris necesitaremos una posición de memoria. Así por ejemplo si tenemos una imagen digital cuya tamaño fuera 110×110 , necesitaríamos $110 \times 110 = 12100$ posiciones de memoria para almacenar la información correspondiente a dicha imagen. Si calculamos la descomposición SVD de la matriz correspondiente y resulta que sólo unos pocos valores singulares tienen magnitudes significativas, se puede cortar la expansión justo en el momento en que la magnitud del valor singular correspondiente sea despreciable. Así por ejemplo, supongamos que para el caso anterior ya es muy próximo a cero de manera que ya es una buena aproximación de A . Necesitamos almacenar como información las 5 primeras columnas de U , las 5 primeras columnas de V y los 5 primeros valores singulares, teniendo en total que reservar $5 \times 110 + 5 \times 110 + 5 = 1105$ posiciones de memoria para poder reconstruir la matriz A_5 . De esta manera se reduce significativamente la memoria necesaria para el almacenamiento de la imagen.

A continuación mostramos una imagen 110×110 de una flor que corresponde a la imagen original. Efectuamos la descomposición SVD de la matriz correspondiente y presentamos varias aproximaciones suyas. Como puede comprobarse visualmente, la matriz reproduce de forma bastante buena la imagen original.