

## RESOLUCIÓN CONJUNTA DE PROBLEMAS EN LAS ASIGNATURAS DE FÍSICA Y CÁLCULO INFINITESIMAL EN PRIMERO DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

**Quintana Montesdeoca, M.P.  
García Rubiano, J.**

Desde la creación de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria la preocupación por la calidad de la docencia ha sido una constante. Esta preocupación ha llevado a un grupo de profesores de primer curso de Ingeniería Técnica a evaluar la capacidad de los alumnos para relacionar los conceptos comunes a las distintas asignaturas de primero. Ocurre muy frecuentemente que los alumnos consideran las asignaturas como compartimentos estancos sin nada que ver entre sí, de forma que no son capaces de aplicar las destrezas y conocimientos adquiridos en una asignatura para resolver problemas que puedan plantearse en otras.

Esta problemática es particularmente importante en el caso de las asignaturas de Cálculo Infinitesimal y Física debido a que una es herramienta de la otra. Hemos observado que aunque el alumno dispone, una vez avanzado el curso, de herramientas matemáticas muy poderosas, es incapaz de aplicarlas en la resolución de problemas de física porque considera que son campos distintos, de forma que, las 'matemáticas de la Física', no son iguales que las de Cálculo. Así, por ejemplo, un alumno puede no ser capaz de resolver un problema por no identificarlo con el problema análogo de cálculo (a veces por el simple hecho de cambiar la notación). Esto puede ser en gran parte debido a una falta de coordinación entre los profesores de física y de cálculo. Los profesores de física suelen resolver los problemas haciendo uso de 'trucos' que encubren conceptos y desarrollos matemáticos profundos, y los profesores de cálculo plantean problemas demasiado abstractos sin profundizar en las aplicaciones, esto es en parte debido a una mala (o inexistente) coordinación entre las asignaturas.

Sería deseable que los profesores de Física y de Cálculo (y del resto de las asignaturas) planteasen durante el desarrollo de la materia aplicaciones relacionadas con otras asignaturas, haciendo ver las posibles concurrencias.

En esta ponencia presentamos un ejemplo de problema de física resuelto desde el punto de vista de la asignatura de Cálculo.

El ejemplo seleccionado corresponde a un problema de cálculo integral de la asignatura de Física incluido en el Tema Campo Eléctrico, que se estudia a mitad del segundo semestre y que, posteriormente, en la asignatura de Cálculo Infinitesimal, vuelve a retomarse con el correspondiente enfoque matemático, ubicándolo en la lección de Integrales de Superficies que se estudia a finales del segundo semestre, con lo que el alumno posee cierta familiaridad con los conceptos de Campo Vectorial, Divergencia y el Teorema de Gauss.

**ENUNCIADO:** Calcular el campo eléctrico producido en todo el espacio por un cilindro de radio  $a$  y longitud infinita cargado con una densidad volúmica de carga dada por:

$$\rho = \begin{cases} A r & \text{si } r \leq a, \text{ Con } A \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

**RESOLUCIÓN:** Debemos calcular la expresión del campo eléctrico:

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\vec{i} + E_y(x,y,z)\vec{j} + E_z(x,y,z)\vec{k}$$

producido en todo el espacio por un cilindro de radio  $a$ , y que expresamos en coordenadas cilíndricas, mediante el siguiente cambio, con objeto de facilitar los cálculos:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} \rightarrow dr d\theta dz = \left| J \left( \frac{x,y,z}{r,\theta,z} \right) \right| dr d\theta dz$$

donde:

$$\left| \mathbf{r} \begin{pmatrix} \frac{z}{r} \hat{k} \\ \frac{r}{r} \hat{\rho} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

con lo que resulta,  $\mathbf{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\hat{r} + E_\theta(r, \theta, z)\hat{\theta} + E_z(r, \theta, z)\hat{k}$

siendo:

$$\begin{aligned} r &= \cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta} + 0\hat{k} \\ \hat{\theta} &= -\sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta} + 0\hat{k} \\ \hat{k} &= 0\hat{r} + 0\hat{\theta} + \hat{k} \end{aligned}$$

Para determinar la expresión de dicha función vectorial bajo las condiciones indicadas haremos uso del Teorema de Gauss o de la Divergencia, que expresa una relación entre la integral triple extendida a un volumen,  $V$ , y una integral de superficie tomada sobre la frontera de ese volumen,  $S_V$ , tal como se indica a continuación:

$$\phi(E) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \text{div} \mathbf{E} \, dx \, dy \, dz$$

Esta expresión permite calcular el valor de la componente del campo normal a la superficie. Razonamientos físicos de simetría, llevan a concluir que el campo solo tendrá componente normal y que ésta depende únicamente de la distancia al eje cilindro  $r$ .

**Campo en la región I:** Para calcular el campo escogemos una superficie de Gauss cilíndrica coaxial con el eje del cilindro de altura  $h > 0$  y de radio  $r > a$  y calculamos el flujo a través de ella. Para ello descomponemos la superficie  $S = S_1 + S_2 + S_3$ , como se muestra en la figura. La ecuación de la superficie lateral es  $\phi_{S_2}(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2$  y el vector normal asociado a dicha superficie se calculará a partir de  $\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi(x,y,z)}{|\nabla\phi(x,y,z)|}$  con lo que obtendremos, tras realizar un cambio a cilíndricas, que  $\mathbf{n} = \cos u \hat{r} + \sin u \hat{\theta}$  que es la expresión cartesiana del vector unitario en la dirección radial  $\hat{r}$ . Procedemos de forma análoga para las superficies superior e inferior, siendo, en este caso

$\phi_{S_1}(x, y, z) = z$  y  $\phi_{S_3}(x, y, z) = -z$ , obteniéndose  $\mathbf{n}_{S_1} = \hat{k}$  y  $\mathbf{n}_{S_3} = -\hat{k}$ .

Teniendo en cuenta esto y los razonamientos de simetría se obtiene:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = (E_r(r, U, z), E_\theta(r, U, z), E_z(r, U, z)) \cdot \mathbf{n} = E(r)$$

quedando así:  $\phi(E) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS + \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS + \oint_{S_3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS + \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS + \oint_{S_3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS$ , ya que,  $\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$

Como  $\mathbf{E}$  es constante a la superficie, ya que sólo depende del radio, tendremos que:

$$\phi(E) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = E 2\pi r h$$

Por otro lado, según una de las leyes fundamentales de la física, la divergencia de un campo electrostático y la

densidad volúmica de carga están relacionados según la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1^\text{a Ley de Maxwell})$$

Estamos, pues, en disposición de calcular el campo en dicha superficie, para lo que tendremos que calcular la siguiente integral en el volumen encerrado por la superficie gaussiana

$$\phi(E) = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dx \, dy \, dz = \frac{Q_I}{\epsilon_0}$$

siendo  $Q_I$  la carga total encerrada en esta superficie, quedando así:

$$Q_I = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz = \iiint_V \rho \, r \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^r \rho \, r \, dr \, d\theta \, dz = \frac{2}{3} \pi h \rho a^3$$

Finalmente, se tiene al sustituir en:  $\phi(E) = \frac{Q_I}{\epsilon_0}$  que:

$$E 2\pi r h = \frac{2}{3} \frac{\pi h \rho a^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0 r} \hat{r}, \text{ para } r > a$$

De modo similar calculamos el Campo en una región II considerando ahora una superficie de Gauss cilíndrica coaxial con el eje del cilindro, de altura  $h > 0$  y radio  $r < a$ . Según el teorema de Gauss, se tendrá:

$$\phi(E) = \frac{Q_{II}}{\epsilon_0}$$

el cálculo del flujo es idéntico con lo que obtendremos la misma expresión con la condición  $r < a$ :

$$\phi(E) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = E 2\pi r h$$

La carga total ( $Q_{II}$ ) dentro de la superficie de Gauss actual será:

$$Q_{II} = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz = \iiint_V \rho \, r \, dr \, d\theta \, dz = \frac{2}{3} \pi h \rho r^3$$

por tanto, según el Teorema de Gauss:

$$E 2\pi r h = \frac{2}{3} \frac{\pi h \rho r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} \hat{r}, \text{ para } r < a$$

Por tanto, el campo producido en todo el espacio por el cilindro de radio  $a$  cargado con la distribución de carga considerada viene dado por:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} \hat{r} & \forall r < a \\ \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0 r} \hat{r} & \forall r > a \end{cases}$$