

# CONTRIBUCIÓN AL PROCESO DE MODELIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LAS ESCUELAS UNIVERSITARIAS

Gómez Urgellés, J.  
Igual López, S.

## 1. INTRODUCCIÓN

Se presenta una experiencia de modelización realizada en la escuela universitaria politécnica de Vilanova i la Geltrú. Las materias estudiadas se engloban en las áreas del álgebra lineal y las ecuaciones diferenciales. Se analiza el proceso de aprendizaje a través de unidades didácticas y el trabajo en proyectos. Las hipótesis de trabajo son la

experimentación en alumnos que carecen de conocimientos previos de cálculo matricial y ecuaciones diferenciales de primer curso de ingeniería técnica.

## 2. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

### 2.1. Unidad didáctica: Estudio de un sistema de resortes.

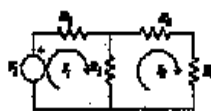
El objetivo es inicialmente que a partir de situaciones reguladas por la ley de Hooke, los estudiantes descubran dicha ley como una relación lineal entre la fuerza y el desplazamiento. A medio plazo es conseguir que se modelice dicha ley en varias variables como un modelo lineal análogo. De esta forma descubren el concepto de matriz y sus propiedades como modelo de la ley de Hooke. En este proceso se involucran los conceptos de matriz de elasticidad y rigidez (inversas entre sí). Se pretende con ello que descubran la obtención de la matriz inversa y obviamente su utilidad en la mecánica. En una tercera fase se presenta una situación usual en el área de mecánica técnica para su estudio y posterior interpretación del comportamiento físico de la situación. El objetivo final se centra en que reconozcan e interpreten situaciones distintas a las estudiadas y que compartan el mismo modelo. Entre ellas destacan las aplicaciones a circuitos eléctricos. Detallamos el esquema:

*Existe un paralelismo entre la ley de Ohm y la ley de Hooke. Las dos son expresiones del tipo en el caso*

$$\text{que } \begin{cases} A=V & C=I \Rightarrow \text{Ley de Ohm} \\ A=F & C=x \Rightarrow \text{Ley de Hooke} \end{cases}$$

*Veamos el paralelismo en el siguiente gráfico:*

Superponer el siguiente circuito



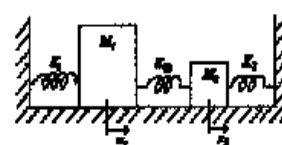
si planteamos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} V &= (R_1 + R_2) \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 \\ 0 &= -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_2 \end{aligned}$$

Expresándolo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Superponer el siguiente gráfico



Planteamos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_1 &= -K_1 \cdot x_1 + K_{12} \cdot (x_2 - x_1) \\ f_2 &= -K_{12} \cdot (x_1 - x_2) - K_4 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Expresándolo de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(K_1 + K_{12}) & K_{12} \\ K_{12} & -(K_{12} + K_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

**Observar la similitud entre ambos problemas. También tenemos que darnos cuenta de que en estos problemas obtenemos siempre matrices simétricas.**

Con esta unidad se pretende que los estudiantes aprendan de una forma dirigida y entretenida la necesidad y existencia del cálculo matricial como modelo matemático de situaciones usuales en las áreas propias de sus estudios y que a su vez obtengan una motivación a través de las aplicaciones.

### 3.2. Unidad didáctica: El mundo de las ecuaciones diferenciales.

El principal objetivo es que los estudiantes aprendan por descubrimiento, partiendo de la idea de crearles la necesidad del aprendizaje, mostrando situaciones en donde aparecen las ecuaciones diferenciales lineales. El obje-

tivo final es, como en el caso anterior, que reconozcan diversas situaciones distintas en la realidad pero que comparten el mismo modelo matemático. Se pretende que de una forma dirigida y atractiva construyan las ecuaciones diferenciales involucradas y a su vez las resuelvan.

Se presenta la actividad a partir de un artículo periodístico referente al proyecto “Columbia”, comentando la experiencia del astronauta Miguel López Alegría en su permanencia durante 16 días en el espacio. A partir del artículo, se les hace notar que las condiciones de gravedad en la tierra y en el espacio son evidentemente distintas. A continuación y a través de leyes físicas descubren la ecuación diferencial lineal. La práctica finaliza introduciendo la ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constantes a partir de dos situaciones usuales en sus estudios: Un circuito LRC y un oscilador mecánico. En general, resuelven una ecuación de la forma: como modelo común de las oscilaciones mecánicas y eléctricas.

Oscilador mecánico		Circuito LCR	
posición	$x$	carga condensador	$Q$
masa	$m$	autoinducción bobina	$L$
factor de amortiguación	$b$	resistencia	$R$
cncte. recuperadora	$k$	inverso de la capacidad	$1/C$

### 3.3. Los proyectos.

En las unidades didácticas, los alumnos trabajan en las aulas y construyen modelos. En los proyectos tienen que trabajar sobre el modelo. Para ello es imprescindible el trabajo fuera de las aulas y en grupo ya que este tipo de práctica requiere la búsqueda de información desde distintas áreas de conocimiento que se encuentran involucradas, pasando por consultas de libros de texto y tutorías.

Los proyectos propuestos són de diagonalización y se presentan a partir de problemas reales. Proyecto1: Estudio del crecimiento de una población de conejos. En el mismo, los alumnos tienen que buscar la información adecuada para hallar la llamada matriz de crecimiento y a partir de las técnicas de diagonalización establecer, mediante el cálculo de vectores propios, la población óptima de conejos. Proyecto2: Se estudia sistemáticamente un hipotético caso del crecimiento de un virus informático regido por la sucesión de Fibonacci. Los alumnos tienen que hallar el término general. Proyecto3: Se plantea un problema de circuitos eléctricos en donde aparece una ecuación diferencial de segundo orden. Para su resolución se les dirige al cálculo de la matriz exponencial.

## 4. INTENCIONES INICIALES

1. Conseguir que los estudiantes asuman una actitud creativa.
2. Desarrollar su habilidad en las aplicaciones de las matemáticas y motivarles para sus fines académicos y profesionales.
3. Capacitar a los estudiantes en las técnicas de modelización.
4. Proporcionar una imagen de las matemáticas y su enseñanza, distinta a la tradicional.
5. Ayudar al estudiante a adquirir y comprender técnicas y conceptos matemáticos a partir de sus aplicaciones.

## 5. APORTACIONES Y COMENTARIOS DE LOS ALUMNOS

Mostramos argumentos proporcionados por los propios alumnos que avalan la necesidad de la inclusión de la modelización matemática en los currículos.

**1.”He aprendido a construir matrices y su utilidad en aplicaciones cotidianas”** 2. **“He aprendido aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana de un ingeniero”** 3. **“El beneficio de estas experiencias será una nueva y mejor docencia”** 4. **“Todo parte de las matemáticas. En la enseñanza tradicional no se contempla la utilidad de las matemáticas en la vida real”** 5. **“Prefiero la inclusión de las técnicas de modelización, es un método más creativo. En él observas en qué ámbito puedes aplicar lo que has aprendido. En el método tradicional sólo ves temario y no aplicación”** 6. **“El modelaje es un método importante porque presenta situaciones reales que puedes resolver matemáticamente”** 7. **“El trabajo en grupo hace participar a los alumnos en clase y ayuda a hallar aplicaciones prácticas de la teoría”** 8. **“Realizando un proyecto se aprende el tema muy bien, ya que resuelves un problema buscando tú la información”**

## 6. REFLEXIONES Y CONCLUSIONES

A continuación exponemos a modo de conclusiones la necesidad de un cambio en la metodología de la enseñanza de las matemáticas para no matemáticos.

1. Se consigue una mayor conexión con el mundo real. Históricamente las matemáticas han estado desvinculadas de la realidad.
2. El modelaje es una herramienta de aprendizaje eficiente : 2.1. Los estudiantes aprenden de una manera espontánea y agradable. 2.2. Los estudiantes ven la utilidad de lo que aprenden. 2.3. Los estudiantes ven la necesidad de las matemáticas para resolver problemas y deducen ellos mismos las herramientas. 2.4. Se ha observado una fuerte motivación

por los temas tratados. 2.5. Los estudiantes adquieren actitudes creativas. 2.6. Desarrolla la habilidad en el uso de las matemáticas en situaciones no matemáticas. **3.** La enseñanza tradicional mantiene excesivos formalismos que se alejan de la realidad del futuro ingeniero. En la modelización se evita la carga de formalismos apos-

tando por un aprendizaje más intuitivo y próximo a los problemas de la técnica. En síntesis podríamos concluir este trabajo con la frase de Mogens Niss : ***“El modelaje matemático es el arte de aplicar las matemáticas a una situación de la vida real”***

## RESOLUCIÓN CONJUNTA DE PROBLEMAS EN LAS ASIGNATURAS DE FÍSICA Y CÁLCULO INFINITESIMAL EN PRIMERO DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

**Quintana Montesdeoca, M.P.  
García Rubiano, J.**

Desde la creación de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria la preocupación por la calidad de la docencia ha sido una constante. Esta preocupación ha llevado a un grupo de profesores de primer curso de Ingeniería Técnica a evaluar la capacidad de los alumnos para relacionar los conceptos comunes a las distintas asignaturas de primero. Ocurre muy frecuentemente que los alumnos consideran las asignaturas como compartimentos estancos sin nada que ver entre sí, de forma que no son capaces de aplicar las destrezas y conocimientos adquiridos en una asignatura para resolver problemas que puedan plantearse en otras.

Esta problemática es particularmente importante en el caso de las asignaturas de Cálculo Infinitesimal y Física debido a que una es herramienta de la otra. Hemos observado que aunque el alumno dispone, una vez avanzado el curso, de herramientas matemáticas muy poderosas, es incapaz de aplicarlas en la resolución de problemas de física porque considera que son campos distintos, de forma que, las 'matemáticas de la Física', no son iguales que las de Cálculo. Así, por ejemplo, un alumno puede no ser capaz de resolver un problema por no identificarlo con el problema análogo de cálculo (a veces por el simple hecho de cambiar la notación). Esto puede ser en gran parte debido a una falta de coordinación entre los profesores de física y de cálculo. Los profesores de física suelen resolver los problemas haciendo uso de 'trucos' que encubren conceptos y desarrollos matemáticos profundos, y los profesores de cálculo plantean problemas demasiado abstractos sin profundizar en las aplicaciones, esto es en parte debido a una mala (o inexistente) coordinación entre las asignaturas.

Sería deseable que los profesores de Física y de Cálculo (y del resto de las asignaturas) planteasen durante el desarrollo de la materia aplicaciones relacionadas con otras asignaturas, haciendo ver las posibles concurrencias.

En esta ponencia presentamos un ejemplo de problema de física resuelto desde el punto de vista de la asignatura de Cálculo.

El ejemplo seleccionado corresponde a un problema de cálculo integral de la asignatura de Física incluido en el Tema Campo Eléctrico, que se estudia a mitad del segundo semestre y que, posteriormente, en la asignatura de Cálculo Infinitesimal, vuelve a retomarse con el correspondiente enfoque matemático, ubicándolo en la lección de Integrales de Superficies que se estudia a finales del segundo semestre, con lo que el alumno posee cierta familiaridad con los conceptos de Campo Vectorial, Divergencia y el Teorema de Gauss.

**ENUNCIADO:** Calcular el campo eléctrico producido en todo el espacio por un cilindro de radio  $a$  y longitud infinita cargado con una densidad volúmica de carga dada por:

$$\rho = \begin{cases} A r & \text{si } r \leq a, \text{ Con } A \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

**RESOLUCIÓN:** Debemos calcular la expresión del campo eléctrico:

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\vec{i} + E_y(x,y,z)\vec{j} + E_z(x,y,z)\vec{k}$$

producido en todo el espacio por un cilindro de radio  $a$ , y que expresamos en coordenadas cilíndricas, mediante el siguiente cambio, con objeto de facilitar los cálculos:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} \rightarrow dr d\theta dz = \left| J \left( \frac{x,y,z}{r,\theta,z} \right) \right| dr d\theta dz$$

donde:

$$\left| \mathbf{r} \begin{pmatrix} \frac{z}{r} \hat{k} \\ \frac{r}{r} \hat{\rho} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

con lo que resulta,  $\mathbf{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\hat{r} + E_\theta(r, \theta, z)\hat{\theta} + E_z(r, \theta, z)\hat{k}$

siendo:

$$\begin{aligned} r &= \cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta} + 0\hat{k} \\ \hat{\theta} &= -\sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta} + 0\hat{k} \\ \hat{k} &= 0\hat{r} + 0\hat{\theta} + \hat{k} \end{aligned}$$

Para determinar la expresión de dicha función vectorial bajo las condiciones indicadas haremos uso del Teorema de Gauss o de la Divergencia, que expresa una relación entre la integral triple extendida a un volumen,  $V$ , y una integral de superficie tomada sobre la frontera de ese volumen,  $S_V$ , tal como se indica a continuación:

$$\phi(E) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \text{div} \mathbf{E} \, dx dy dz$$

Esta expresión permite calcular el valor de la componente del campo normal a la superficie. Razonamientos físicos de simetría, llevan a concluir que el campo solo tendrá componente normal y que ésta depende únicamente de la distancia al eje cilindro  $r$ .

**Campo en la región I:** Para calcular el campo escogemos una superficie de Gauss cilíndrica coaxial con el eje del cilindro de altura  $h > 0$  y de radio  $r > a$  y calculamos el flujo a través de ella. Para ello descomponemos la superficie  $S = S_1 + S_2 + S_3$ , como se muestra en la figura. La ecuación de la superficie lateral es  $\phi_{S_2}(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2$  y el vector normal asociado a dicha superficie se calculará a partir de  $\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi(x,y,z)}{|\nabla\phi(x,y,z)|}$  con lo que obtendremos, tras realizar un cambio a cilíndricas, que  $\mathbf{n} = \cos u \hat{r} + \sin u \hat{\theta}$  que es la expresión cartesiana del vector unitario en la dirección radial  $\hat{r}$ . Procedemos de forma análoga para las superficies superior e inferior, siendo, en este caso

$\phi_{S_1}(x, y, z) = z$  y  $\phi_{S_3}(x, y, z) = -z$ , obteniéndose  $\mathbf{n}_{S_1} = \hat{k}$  y  $\mathbf{n}_{S_3} = -\hat{k}$ .

Teniendo en cuenta esto y los razonamientos de simetría se obtiene:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = (E_r(r, U, z), E_\theta(r, U, z), E_z(r, U, z)) \cdot \mathbf{n} = E(r)$$

quedando así:  $\phi(E) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{S_3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{S_3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$ , ya que,  $\oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0$

Como  $\mathbf{E}$  es constante a la superficie, ya que sólo depende del radio, tendremos que:

$$\phi(E) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E 2\pi r h$$

Por otro lado, según una de las leyes fundamentales de la física, la divergencia de un campo electrostático y la

densidad volúmica de carga están relacionados según la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1^\text{a Ley de Maxwell})$$

Estamos, pues, en disposición de calcular el campo en dicha superficie, para lo que tendremos que calcular la siguiente integral en el volumen encerrado por la superficie gaussiana

$$\phi(E) = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dx dy dz = \frac{Q_I}{\epsilon_0}$$

siendo  $Q_I$  la carga total encerrada en esta superficie, quedando así:

$$Q_I = \iiint_V \rho dx dy dz = \iiint_V \rho r dr d\theta dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_a^r \rho r dr d\theta dz = \frac{2}{3} \pi h \rho a^3$$

Finalmente, se tiene al sustituir en:  $\phi(E) = \frac{Q_I}{\epsilon_0}$  que:

$$E 2\pi r h = \frac{2}{3} \frac{\pi h \rho a^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0 r} \hat{r}, \text{ para } r > a$$

De modo similar calculamos el Campo en una región II considerando ahora una superficie de Gauss cilíndrica coaxial con el eje del cilindro, de altura  $h > 0$  y radio  $r < a$ . Según el teorema de Gauss, se tendrá:

$$\phi(E) = \frac{Q_{II}}{\epsilon_0}$$

el cálculo del flujo es idéntico con lo que obtendremos la misma expresión con la condición  $r < a$ :

$$\phi(E) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E 2\pi r h$$

La carga total ( $Q_{II}$ ) dentro de la superficie de Gauss actual será:

$$Q_{II} = \iiint_V \rho dx dy dz = \iiint_V \rho r dr d\theta dz = \frac{2}{3} \pi h \rho r^3$$

por tanto, según el Teorema de Gauss:

$$E 2\pi r h = \frac{2}{3} \frac{\pi h \rho r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} \hat{r}, \text{ para } r < a$$

Por tanto, el campo producido en todo el espacio por el cilindro de radio  $a$  cargado con la distribución de carga considerada viene dado por:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} \hat{r} & \forall r < a \\ \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0 r} \hat{r} & \forall r > a \end{cases}$$

## APLICACIONES DE LA DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES DE UNA MATRIZ

**Rojas Matas, A.  
Serrano Gómez, I**

### 1. INTRODUCCIÓN

La descomposición en valores singulares de una matriz tiene interesantes aplicaciones. Por este motivo, hemos introducido esta descomposición matricial en la asignatura de Álgebra Lineal de la Escuela de Ingeniería Técnica Industrial. Conocen previamente otras descomposiciones matriciales como L.U, Q.R, etc. y se introduce esta nueva descomposición inmediatamente después de haber estudiado el tema de diagonalización de matrices por semejanza.

### 2. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES DE UNA MATRIZ

Sea  $A$  una matriz real  $m \times n$ , entonces existe una matriz  $U$  ortogonal de orden  $m$ , una matriz  $S$  diagonal  $m \times n$  y una matriz  $V$  ortogonal de orden  $n$  de tal forma que:  $A = U \cdot S \cdot V^T$ . Esta expresión se conoce con el nombre de descomposición en valores singulares de la matriz  $A$  y se notará por SVD (**S**ingular **V**alue **D**ecomposition). Los elementos de la diagonal de  $S$  son los valores singulares de  $A$  y son números no negativos (la raíz cuadrada de los autovalores de la matriz). La matriz  $V$  se consigue escribiendo en forma de columna una base ortonormal de vectores propios de la matriz y la matriz  $U$  se consigue escribiendo de la misma forma una base ortonormal de vectores propios de la matriz. El rango de  $A$  coincide con el número de valores singulares no nulos.

### 3. PRIMERA APLICACIÓN: MÍNIMOS CUADRADOS

Supongamos que estamos interesados en resolver un sistema lineal del tipo:  $A \cdot X = B$ . Pretendemos calcular la solución exacta, si es que la tiene, y si esto no es posible se tratará de encontrar la solución "que mejor se aproxime" en el sentido de los mínimos cuadrados. Sabemos que esto se consigue resolviendo el sistema:

Calculamos la descomposición SVD de la matriz  $A$ . Supongamos que la matriz  $A$  es de rango  $r$ . Si  $r$  es igual a  $n$ , la matriz será invertible y no hay ningún problema. Si  $r$  es menor que  $n$ , el sistema admite infinitas soluciones de la siguiente forma:

$$X = Y \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{con } y_1 = (U^T \cdot B)_1 / s_1, \dots, y_r = (U^T \cdot B)_r / s_r, \\ \text{con } y_{r+1}, \dots, y_n \text{ cualquiera} \end{array}$$

y la solución con norma-2 mínima se obtiene haciendo  $y_{r+1} = 0, \dots, y_n = 0$

### 4. SEGUNDA APLICACIÓN: CONDICIONAMIENTO DE UN SISTEMA LINEAL

Diremos que un sistema está *bien condicionado* si pequeñas perturbaciones en los coeficientes del sistema o en los términos independientes producen también pequeñas perturbaciones en la solución. En caso contrario, diremos que el sistema está *mal condicionado*. A modo ilustrativo consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

admite como solución:  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ . Si consideramos el nuevo sistema:

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix}$$

resulta que la solución es:  $x_1^* = 9.2$ ;  $x_2^* = -12.6$ ;  $x_3^* = 4.5$ ;  $x_4^* = -1.1$ .