

## EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN, RESPECTO A SU INTRODUCCIÓN, EN MANUALES UNIVERSITARIOS (1950-1970)

**Contreras de la Fuente, A,  
Sánchez Gómez, C.**

### INTRODUCCIÓN

Los manuales tienen su influencia en la transposición didáctica del conocimiento, del saber a enseñar al saber del estudiante (Henry, 1991), representando las concepciones colectivas de una época y determinando muchas de las concepciones y obstáculos que más tarde afloran en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Numerosos investigadores, como Goezt y Lecompte (1988), El Bouazzoui (1988), Rico (1991), Chandler (1992), Konior (1993), Sierpinski (1993) y Romero (1994), destacan la importancia del libro de texto en el proceso de adaptación del saber del alumno, y señalan la pertinencia de considerar distintos aspectos en su análisis, entre los que se destacan:

- El estudio de la evolución de los conceptos dentro de las diversas ediciones de un libro.
- Los cambios en el tratamiento didáctico dado al concepto entre obras de autores distintos.

En este trabajo se describen los resultados de un estudio sobre manuales, parte de uno más extenso, algunos de cuyas conclusiones aparecen en Sánchez y Contreras (1995, 96 y 97), del período de 1950 a 1970, dirigidos a estudiantes universitarios, en el que se analiza la evolución del tratamiento dado por diversos autores al concepto de límite de una función en cuanto al modo de introducir la noción, ejemplos utilizados, definiciones y conceptos relacionados. Por último, se extraen conclusiones de cara a tratar de explicar la incidencia que puedan tener los manuales sobre el éxito o fracaso académico ligado a la enseñanza-aprendizaje de la citada noción.

### MANUALES ESTUDIADOS Y VARIABLES CONSIDERADAS

Se han considerado manuales universitarios cuya fecha de edición está dentro del 1950-1970, anterior a la Ley General de Educación de 1970, donde aparecen manuales dirigidos a estudiantes universitarios de autores tan relevantes como Puig Adam o Rey Pastor, los

cuales forman parte de la bibliografía recomendada en asignaturas de Cálculo de primer curso de Facultades de Ciencias y en Escuelas Técnicas, principalmente del antiguo distrito universitario de la Universidad de Granada y en otras Universidades españolas. Es decir, se trata de los textos significativos para la investigación, cuya elección está justificada por alguna de las causas siguientes:

- Su autor es un matemático importante en su época.
- Hay obras de dicho autor en distintos años y permite analizar su evolución.
- En él aparecen de forma relevante las variables objeto del estudio.

Los manuales de enseñanza universitaria objeto de este estudio son 10 y corresponden al período de 1950 a 1970. Los autores, fechas de edición y demás elementos aparecen descritos en las tablas que se expondrán posteriormente. Se han analizado teniendo en cuenta las variables siguientes:

- Introducción: Si es a través de una definición intuitiva, con la definición formal o con ejemplos.
- Relación con otros conceptos: Cuando se incluye un concepto en este apartado es porque el autor hace referencia a él dentro del tema en el que se estudia el concepto de límite, ya sea en la introducción, definición o ejemplos. En algunos casos se incluye porque el autor se refiere o dirige al lector a otro capítulo del manual.
- Definición: Se consideran aquella o aquellas definiciones no intuitivas (por sucesiones, métrica y topológica), se tiene también en cuenta el tipo de la interpretación geométrica que se da de las definiciones métrica y topológica:
  - Si representa la gráfica de una función:
    - a) Conocida
      - incluyendo el punto en el que se calcula el límite.
      - sin incluir el punto en el que se calcula el límite.
    - b) Abstracta
      - incluyendo el punto en el que se calcula el límite.
      - sin incluir el punto en el que se calcula el límite.

- Sólo considera uno o los dos entornos sin representar ninguna función
- incluyendo el punto en el que se calcula el límite.
- sin incluir el punto en el que se calcula el límite.
- Ejemplos: A la hora de analizar los ejemplos, se ha tenido en cuenta:
  - Lugar donde se incluyen (antes o después de la definición formal).
  - Tipo de función utilizada (continua o no continua, lineal, cuadrática, racional, etc).
  - Contexto utilizado (numérico, gráfico-geométrico, algebraico).

- Resolución (si, no, completa, incompleta).
- Procedimiento de resolución (numérico, gráfico, algebraico).

## RESULTADOS OBTENIDOS

Para poder observar esquemáticamente el estudio, se han elaborado dos tablas en etapas correspondientes a dos décadas: 1950-1959 y 1960-1968.

Los resultados, muy resumidos y extraídos del amplio estudio pormenorizado realizado con los diferentes manuales, se reflejan en las dos tablas siguientes:

TABLA - 1 1950 - 59	Sixto Ríos 1951	Rey Pastor 1956	Sixto Ríos 1957	Paig Adam 1959	G.B. Thomas 1959
Introducción	Con ejemplo Tabla y gráfica de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$	Con una definición intuitiva (observación)	Igual que en el manual del año 1951	Con una definición en la que mezcla la métrica y topológica.	Para definir la derivada mediante la pendiente o la v. instantánea.
Relación con otros conceptos	Límite de sucesión	Límite de sucesión infinitésimo	Igual que en el manual del año 1951	Continuidad	Derivada Diferencial
4. Definición	Métrica Topológica	Por sucesiones Métrica Topológica	Igual que en el manual del año 1951	Métrica-topológica	Métrica con notación no común
5. Ejemplos	$y = k$ , $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $y = 4 - \sqrt{x^2 + 3}$ $y = E(x)$ ejemplo geométrico $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$	$y = x^2 + 2$ $y = \frac{x^3 + 2x}{x}$ $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ $y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$	$y = k$ , $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $y = 4 - \sqrt{x^2 + 3}$ $y = E(x)$ ejemplo geométrico	Ninguno	$\lim_{t \rightarrow 0} t^2$ $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 9}{t - 3}$ $y = E(x)$ $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

TABLA - 2 1960 - 69	Rey Pastor 1960	Rey Pastor 1964	Martínez Salas 1964	Sixto Ríos 1966	G.B. Thomas 1968
Introducción	Con la definición métrica	Con la definición métrica	Con una definición intuitiva (aproximación)	Con ejemplo Tabla y gráfica de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$	Para definir la derivada mediante la pendiente o la v. instantánea
Relación con otros conceptos	Límite de sucesión Verdadero valor de la función f Continuidad Límite lateral	Límite de sucesión Continuidad	Límite lateral	Límite de sucesión	Derivada Diferencial
Definición	Métrica Topológica Por sucesiones	Métrica	Topológica	Métrica-topológica mezclada	Métrica con notación no común
Ejemplos	$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$	$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$	$y = k$ $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $y = E(x)$	$\lim_{t \rightarrow 0} t^2$ $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 9}{t - 3}$ $y = E(x)$ $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

Respecto a la introducción, se pueden observar distintas adaptaciones del saber según los autores, pero sin relación con las etapas. Es decir, parece ser que el proceso de transposición didáctica está ligada a la "didáctica" de cada autor, sin depender de los posibles paradigmas de la enseñanza de cada época. Esto puede explicarse por la falta de una teoría didáctica que canalizara los comportamientos de los autores respecto a la enseñanza. Los resultados que se muestran en las tablas 1 y 2, pueden clasificarse según las siguientes categorías, con frecuencias muy similares:

1. Utilización de un ejemplo.
2. A través de una definición intuitiva.
3. A través de una definición formal.
4. Por medio de otros conceptos.

En cuanto a la definición con la que se formaliza el concepto, se distinguen dos tendencias; una de ellas, en la que los autores utilizan la definición métrica o topológica y otra, que se basa en el empleo de límites de sucesiones para definir la noción. Hay un porcentaje del 84,61% que lo realiza sin sucesiones y un 15,38% con sucesiones.

Los resultados, junto a los obtenidos en la introducción, indican una visión formalista como perfil epistemológico de los distintos autores.

En los ejemplos, se detecta la no utilización de funciones definidas a trozos, lo que supone en la enseñanza del límite que la noción de límite lateral tenga muy poco protagonismo, al no disponer de ejemplos de funciones donde su utilización sea obligada y no trivial.

## CONCLUSIONES DEL ESTUDIO

El análisis de manuales efectuado permitió hacer, en función de cada una de las variables estudiadas, algunas consideraciones, relacionadas con la enseñanza del límite de una función, entre las que se destacan las siguientes:

La forma de plantear la introducción debe consistir en ejemplos que, apoyándose en los conocimientos previos del alumno en cuanto al concepto de límite de una sucesión, contemplen la triple representación gráfica, numérica y simbólica (Tall, 1994).

Respecto a la definición, se observa en los autores una utilización muy frecuente de las definiciones métrica y topológica, únicamente Rey Pastor da una definición por sucesiones que consideramos mucho más didáctica en estudiantes de primer curso. Se deberían utilizar definiciones que fomentaran los caminos intuitivos, más acordes con la formación de los estudiantes.

En relación a los ejemplos que se presentan, deberían tener presencia aquellos casos de funciones definidas a trozos, que además de ampliar la visión del alumno respecto al concepto, proporciona ejemplos naturales de límites laterales.

Por todo lo anterior, se considera necesario que en un libro de texto, dirigido a estudiantes universitarios de primer curso, se presente el concepto de límite de una función de modo que incluya un abanico de situaciones didácticas, lo más amplio posible, en las que se dé una verdadera evolución del concepto en cuanto a los niveles académicos, tratando de desarrollarlo progresivamente según la complejidad del mismo.

## BIBLIOGRAFÍA

- CHANDLER, D.G. (1992). *A content analysis of mathematics textbooks for grades one through eight to determine the match to the Ohio ninth grade proficiency*. Ph. D. The Ohio State University.
- EL BOUAZZOUI, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. PHD. Université de Bordeaux I.
- GOEZE, J.P. Y LECOMPTE, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- HENRY, M. (1991). *Une presentation de la didactique en vue de la formation des enseignants*. IREM Besancon Cedex.
- KONIOR (1993). *Research into the construction of mathematical test*. Educational Studies in Mathematics, 24, pp. 251-256.
- Martínez Salas, J. (1964). *Elementos de Matemáticas*.
- PUIG ADAM, P. (1959). *Cursos de Análisis Matemático para Ingenieros*. (Tomo I: Curso teórico práctico de Cálculo Integral aplicado a la Física y Técnica).
- REY PASTOR, J. - PI CALLEJA, P. - TREJO, C.A. (1956). *Análisis Matemático*. Volumen I.
- REY PASTOR, J. (1960) *Elementos de la Teoría de Funciones*.
- REY PASTOR, J. y DE CASTRO, A. (1964). *Elementos de Matemáticas*.

- RICO, L. (1991). *Investigación sobre Errores de Aprendizaje en Educación Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- RÍOS, S. (1951) *Complementos de Matemáticas y Métodos Estadísticos*.
- RÍOS, S. (1957) *Complementos de Matemáticas*.
- RÍOS S. (1966). *Cálculo Infinitesimal*.
- ROMERO, L. (1991). *Un modelo didáctico para la adquisición del concepto de límite*. Tesis Doctoral. Universidad de Murcia.
- SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. (1995).
- SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. (1996).
- SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. (1997).
- SIERPINSKA (1993).
- THOMAS, G.B. (1959). *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*.
- THOMAS, G.B. (1968). *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*.