

LA FUSIÓN DE CALCULADORAS Y ORDENADORES: EL FUTURO DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS REALIZADAS POR LA TECNOLOGÍA

Bert K. Waits

*Este artículo se escribió en
colaboración con Franklin Demana,
Catedrático Emérito de Matemáticas.*

The Ohio State University.

INTRODUCCIÓN

Hace diez años los ordenadores de mesa y las calculadoras se consideraban de una manera muy diferente. Los ordenadores eran máquinas poderosas, costosas y capaces de procesar software sofisticado. Las calculadoras eran económicas y capaces de llevar a cabo cálculos numéricos elementales solamente. Las calculadoras electrónicas datan de hace 25 años mientras que los ordenadores solo tienen 20 años. Las primeras calculadoras electrónicas como la Texas Data Math \$120 eran aparatos sencillos capaces de llevar a cabo aritmética básica solamente. Después vino la calculadora científica (regla de cálculo electrónica) capaz de evaluar funciones trascendentes con una precisión de hasta 12 dígitos. La primera calculadora científica fue la HP-35 que aparece en 1972 (con un costo de \$395 US). Aunque lentos y con poca memoria (32K(!)) los primeros ordenadores personales eran máquinas poderosas que anticiparon lo que había de venir. En 1979 la primera «hoja de cálculo», VisiCalc, se introdujo para el ordenador Apple II, y súbitamente el mundo vio una razón para comprar un ordenador personal.

En la actualidad, las calculadoras científicas son baratas (\$10-\$20 USA) y han cambiado substancialmente el currículo de matemáticas que se enseña en muchos países. Ya no es necesario gastar tiempo enseñando el cálculo de funciones trascendentes con papel y lápiz. Como resultado, podemos dedicar más tiempo a estudiar aplicaciones y conceptos que envuelven estas funciones. Por otro lado, los ordenadores personales han mantenido su precio elevado a través de los años. Por esta razón no son tan populares en la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas en la universidad, como podrían serlo.

Las calculadoras gráficas comenzaron una revolución en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los Estados Unidos, así como en otros países. Las calculadoras gráficas relativamente baratas son ordenadores manuales con software que proveen capacidades

gráficas. Debido a su bajo precio, a ser de uso fácil y a su portabilidad, han sido denominados *ordenadores accesibles a todos los estudiantes* (Demana & Waits).

Antes de que las calculadoras gráficas se inventaran, los profesores dependían exclusivamente de costosos ordenadores (situados en un laboratorio aparte) para acentuar con imágenes la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sólo unas cuantas universidades de élite podían hacer regularmente esta experiencia para todos los estudiantes de matemáticas. Las calculadoras gráficas proveían (a un costo mas reducido y con mayor facilidad de uso) dos de las tres capacidades determinantes de un CAS (Sistema Algebraico por Ordenadores), esto es, sus capacidades numérica y gráfica. No se puede subestimar la contribución pedagógica a la comunidad matemática de las pequeñas y económicas calculadoras gráficas de mano. La resolución de problemas aplicados es ahora una constante del currículo que incorpora el uso de estas calculadoras.

Hoy día, las calculadoras gráficas realzan el aprendizaje de las matemáticas para millones de estudiantes. Los maestros pueden presentar ideas, conceptos y aplicaciones matemáticas usando tanto el enfoque tradicional, como las representaciones numéricas y gráficas generadas por ordenador. Las calculadoras gráficas han hecho posible nuevos enfoques en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En muchos países, ya se ha aceptado que un currículo más completo es factible cuando los estudiantes tienen acceso a estas calculadoras.

Si bien las calculadoras gráficas tienen poderosas capacidades numéricas y gráficas, carecen sin embargo de tres aplicaciones sobresalientes a la hora de facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estas aplicaciones presentes en los sistemas algebraicos más populares como Maple TM y DERIVE TM son: la hoja de cálculo, la geometría interactiva (como Cabri TM) y la lógica simbólica. El próximo adelanto en la evolución de las calculadoras manuales y los ordenadores fue previsto por Texas Instrument en 1995.

Anticipando el Futuro: La Fusión de Calculadora y Ordenador

A finales de 1995, Texas Instruments introdujo la TI-92, una calculadora relativamente económica con álgebra simbólica (usando poderosos algoritmos de Derive™) y geometría interactiva (una versión casi completa de Cabri II™). Costaba casi el doble de una calculadora gráfica pero posiblemente era 25 veces más potente. Esta máquina nos acerca al ideal de «un ordenador para cada estudiante de matemáticas». Esta nueva generación de máquinas cambiará significativamente el currículo de un enfoque casi exclusivo de destrezas con papel y lápiz a un enfoque que incluirá algunas destrezas con papel y lápiz, destrezas analíticas de razonamiento y comprensión y un mayor énfasis en conceptos y resolución de problemas.

Poniendo en Práctica el Enfoque de la Enseñanza Realizada con Tecnología

En el pasado, muchos profesores renunciaron al uso del álgebra simbólica y de la geometría interactiva simplemente porque no era práctico o factible. Algunas de las razones fueron el alto costo de los laboratorios de ordenadores, su mantenimiento y los problemas asociados con el entrenamiento necesario. La dependencia de laboratorios y el costo del software son todavía serios obstáculos a la reforma del currículo de matemáticas. En el futuro ordenadores de mano como la TI-92 y sus sucesoras proveerán laboratorios económicos portátiles que convertirán cualquier aula en un laboratorio de ordenadores cuando así se desee.

Un Nuevo Reto para Profesores de Matemáticas

Nuestra comunidad no puede seguir ignorando el impacto que puede tener en el currículo de matemáticas el que los estudiantes utilicen álgebra simbólica y geometría interactiva por ordenador. No hay duda que esta nueva generación de ordenadores de mano llegará a ser tan popular como las calculadoras gráficas lo son hoy. Tenemos que enfrentarnos al hecho de que el álgebra simbólica y la geometría interactiva por ordenador son herramientas muy superiores al papel y lápiz para muchas de las manipulaciones que se llevan a cabo en matemáticas. Estas nuevas herramientas pueden utilizarse también para ilustrar mejor conceptos y aplicaciones importantes de las matemáticas. Debemos redefinir las «destrezas básicas» para que incluyan aquellas manipulaciones con papel y lápiz necesarias para la comprensión del álgebra como un language de representación. Tenemos también que ponernos de acuerdo en no pasar una gran parte de nuestro tiempo enseñando técnicas y destrezas obsoletas. Nuestro reto consiste entonces en identificar las destrezas esenciales que requieren el uso de papel y lápiz.

Ejemplos

Consideramos el tema básico de factorización de expresiones algebraicas. La factorización sigue siendo muy importante, después de todo, el teorema fundamental del álgebra es un teorema de factorización. Este teorema, así como las relaciones importantes entre factores, puntos de corte de la gráficas con el eje de abscisas, los ceros de la función y el comportamiento de las funciones son fundamentales para el conocimiento del álgebra básica. La figura 1 ilustra el uso de la instrucción CAS factor (con un polinomio de grado tres).

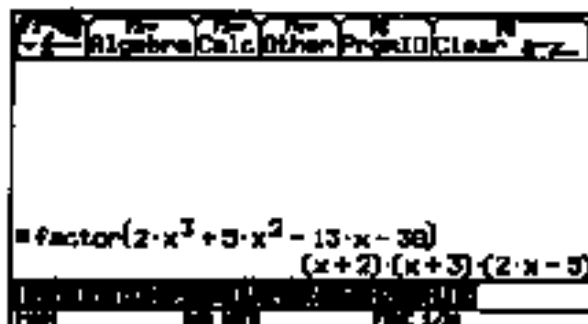


Figura 1

La importancia de esta operación no reside en el proceso, sino en el resultado. La expresión factorizada revela más información sobre el comportamiento local de la función polinómica, mientras que la expresión original nos informa sobre el comportamiento global de la misma. También podemos explorar las conexiones entre los factores, los ceros y la gráfica del polinomio como ilustra la figura 2.

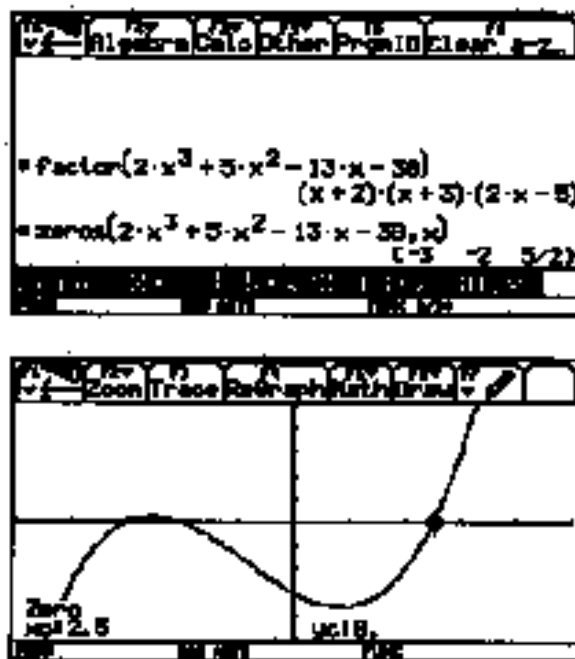


Figura 2

A medida que incorporamos un uso más equilibrado de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, encontraremos sorpresas interesantes. Por ejemplo, si consideramos el problema del párrafo anterior, la TI-92 produce un resultado inesperado para la mayoría de los estudiantes, como ilustra la figura 3.

$$\frac{2x-3}{x-5} - \frac{2-x}{x-7} + \frac{7}{x-5} + \frac{5}{x-7} + 3$$

$$\text{comdenom}\left(\frac{2x-3}{x-5} - \frac{2-x}{x-7}\right) = \frac{3x^2 - 24x + 31}{x^2 - 12x + 35}$$

Figura 3

La TI-92 automáticamente hizo una «descomposición» en fracciones, adelantándose a los procesos de cálculo. Lo que muchos estudiantes esperarían ver es lo ilustrado en el segundo panel de la figura 3 usando la instrucción CAS comdenom. Puede que algunos hayan esperado ver los resultados demostrados en la primera pantalla de la figura 4 usando el TI-92 Factor.

Nótese que la factorización ilustrada es trivial. Ningún estudiante esperaría encontrar el resultado ilustrado en la segunda pantalla de la figura 4, en el que se usa la orden factor (expresión, x) en la misma expresión. Esta orden le pide a la TI-92 los factores reales.

Otro ejemplo de «fracciones propias» se puede hacer con el uso de la instrucción Expand de la TI-92 como proceso de «caja negra.» La figura 5 demuestra el resultado de aplicar la instrucción CAS Expand a una función racional sencilla que es difícil de integrar mentalmente. Nótese que ahora es muy fácil el integrar mentalmente cada fracción de la descomposición encontrada. La figura 5 provee el resultado de usar la instrucción «integrate» antes de la descomposición en fracciones propias. Esto nos permite revisar nuestras destrezas de integrar mentalmente.

$$\frac{3x^2 - 24x + 31}{x^2 - 12x + 35}$$

$$\text{factor}\left(\frac{3x^2 - 24x + 31}{x^2 - 12x + 35}, x\right) = \frac{(3x+5)(x-12)}{(x-7)(x-5)}$$

Figura 4

$$\frac{2x^3 - x + 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{expand}\left(\frac{2x^3 - x + 2}{x^2 - 2x + 1}\right) = 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Figura 5

Hemos usado aquí el proceso de integración como un proceso de «caja blanca». Esto es, permitimos el uso de algunos procesos algebraicos (no de cálculo) de «caja negra» al mismo tiempo que prohibimos cualquier proceso de integración de «caja negra» hasta que la mecánica o el concepto se ha aprendido. El principio de «caja blanca/negra» fue introducido por el profesor Bruno Buchberger del Instituto de Investigación para Cómputos Simbólicos de Linz, Austria. Este excelente

principio junto a otros ejemplos se detallan en el libro de Heugl, Klinger, and Lechner (Addison-Wesley Publishing Company, 1996). Los profesores deben enseñar los conceptos tradicionales pero gastar mucho menos tiempo con los métodos de papel y lápiz y más tiempo tanto con las herramientas de CAS como con los nuevos temas de matemáticas que las mismas hacen posible. *Nuestro énfasis no debe ser el eliminar temas tradicionales sino reducir el tiempo y cambiar las herramientas usadas para estudiar los mismos, a la vez que añadimos algunos de los nuevos conceptos matemáticos que ahora son accesibles.*

Un Problema de Imagen

La comunidad de matemáticos necesita actuar más efectivamente para cambiar la imagen que internacionalmente se tiene sobre las matemáticas. El público frecuentemente asocia el «trabajar con matemáticas» con operaciones aritméticas y computaciones algebraicas mentales y con papel y lápiz que aprendieron en el colegio y en la universidad. Tenemos que comunicar convincentemente al público general que «trabajar con matemáticas» en el siglo XXI va a requerir mucho más que en el pasado. En el futuro, las matemáticas usarán más la tecnología, como resultado, serán de más interés y con más aplicaciones que en el pasado.

Sumario

Las calculadoras gráficas que realzan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ya tienen más de 10 años. Casio inventó la primera calculadora gráfica en 1985 y con esto empezó una revolución en la presentación de todo tipo de gráficas a millones de estudiantes. Las calculadoras gráficas económicas ciertamente han realizado nuestro sueño de hacer posible que todos los estudiantes de matemáticas puedan usar visualización por ordenador regularmente, tanto en actividades dentro como fuera del salón de clase. Texas Instruments ha producido el primer ordenador económico de mano con capacidades de álgebra simbólica y geometría interactiva, diseñada para estudiantes de ciencia y matemáticas. Sin duda otras compañías pronto producirán productos similares.

Concretando, no podemos seguir tratando de hacer todo lo que tradicionalmente hacíamos con papel y lápiz, y además añadir todos los nuevos temas y métodos que nuestros estudiantes necesitan en el mundo de tecnología al que nos dirigimos. Nos falta mucho por aprender sobre el currículo de matemáticas del futuro; a pesar de que sabemos que en menos de 20 años, tanto lo que enseñaremos como las herramientas que usaremos serán dramáticamente diferentes a las de ahora. Será interesante observar esta evolución.

REFERENCIAS

- Damana, Franklin and Bert K. Waits. «A Computer for ALL Students.» *Mathematics Teacher* 85 (February 1992): 94-95.
- Waits, Bert K. and Franklin Damana. «A Computer for ALL Students - Revised.» *Mathematics Teacher* 89 (December 1996): 712-714.
- Helmut Heugl, Walter Klinger, and Josef Lechner. *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-System: Ein Didaktisches Lehrerbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt*. Addison-Wesley: Bonn, Germany, 1996.