

# ¿PODEMOS ENSEÑAR PROCESOS ITERATIVOS Y RECURSIVOS SIN PROGRAMAR?

**Antonio R. Quesada**

Department of Mathematical Sciences  
The University of Akron  
Akron, Ohio

**C**on el advenimiento de las nuevas calculadoras gráficas, algunas de las premisas que hasta hace unos años sirvieron de base para definir el contenido curricular de matemáticas a todos los niveles, han perdido validez. Las capacidades de las calculadoras actuales al integrarse en la enseñanza de las matemáticas están promoviendo cambios tanto en los temas que se enseñan y la profundidad con que se cubren, como en la metodología con que se presentan. Por ejemplo, en los últimos años, respondiendo tanto a los nuevos estándares curriculares de NCTM [5] como a los avances de la tecnología, han empezado a aparecer en los libros de texto de secundaria en EEUU [1], [2], [3], [4], [6], [7], un número de aplicaciones iterativas y recursivas. Las dos capacidades con que las calculadoras gráficas nos proveen para implementar estos procesos en la Pantalla Base son:

- i) el poder efectuar un conjunto de instrucciones con solo apretar una tecla, y
- ii) el poder usar los resultados de una operación como valor inicial de otra.

Estas dos capacidades nos permiten llevar a cabo procesos iterativos y recursivos (recurrentes) sin programar. Alan Tucker [8] resume el rol de estos procesos en combinatoria diciendo:

«Así como la inducción matemática es una técnica de pruebas que verifica una fórmula o enunciado cotejando recursivamente su validez para conjuntos de tamaño creciente, las relaciones recursivas son una técnica de conteo que resuelven un problema de enu-

meración computando recursivamente la respuesta para valores sucesivamente mayores de  $n$ .»

En este artículo presentamos ejemplos que ilustran los beneficios de los procesos iterativos y recursivos en la enseñanza media, a saber: i) versatilidad, ya que estas técnicas pueden usarse para resolver una gran variedad de problemas; ii) accesibilidad de modelos relevantes, que por depender de estos procesos, tradicionalmente se han enseñado a nivel avanzado y consecuentemente a un grupo reducido de estudiantes, y que ahora son accesibles a nivel de bachillerato y por tanto a un gran número de estudiantes; y finalmente iii) como solución alterna, ya que el uso de recursión en algunos casos provee un método alternativo, menos dependiente de fórmulas hechas, para resolver problemas.

## Fraciones Continuas

**Ejemplo 1.** Calcular  $x = \frac{30}{39}$  usando fracciones continuas.

**Solución:** Sea  $x = \frac{30}{39}$ . Entonces  $x^2 - 36 = 3$ , y podemos expresar, substituyendo repetidamente el valor de  $x$  en esta expresión obtenemos.

$$x = 6 + \frac{3}{x+6} = 6 + \frac{3}{(6 + \frac{3}{x+6}) + 6}$$

de donde

$$x = 6 + \frac{3}{x+6} = 6 + \frac{3}{12 + \frac{3}{12 + \frac{3}{x+6}}}$$

```

6
6+3/(Ans+6)
6.25
6.244897959
6.245
6.244997958

```

Figura 1

Como se ilustra en la figura 1, la implementación en la *Pantalla Base* de esta fracción continua se obtiene iniciando primero la variable *Ans* con un valor numérico, digamos 6, y luego dejando que *Ans* tome el lugar de *x*.

### Resolución de Ecuaciones

**Ejemplo 2.** Resolver la ecuación  $\cos x = 2x$

*Solución.* Sea  $y_1 = \cos x$ , a continuación presentamos cuatro métodos recursivos.

#### I. Iteración sobre un punto fijo o Método de Picard

En la *Pantalla Base*, iniciamos *x* con un valor aproximado. Seguidamente, como ilustra la figura 2.a, procedemos a asignar sucesivamente a *x*, el valor de la función evaluada en el valor anterior de *x*. El proceso continúa hasta que la diferencia de dos resultados consecutivos es menor o igual que la precisión buscada.

```

0.5→X
1/2Y1(X)→X
.4387912809
.4526329217
.4496493762
.4502997781

```

Figura 2.a

#### II. Método de Newton

Definimos las funciones  $y_2 = 2x - \cos x$  y  $y_3 = n \text{ Deriv}(y_2, x, x)$ . A continuación asignamos a *x* un valor inicial próximo a la raíz, seguidamente procedemos recursivamente a asignar a *x* el valor resultante de  $x - y_2/y'$  (figura 2.b).

Los estudiantes pueden apreciar la rapidez con que este método converge.

```

0.5→X
X-Y2/Y3→X
.4506266915
.4501836476
.4501836113
.4501836113

```

Figura 2.b

#### III. Método de Bisección

Un grupo de buenos estudiantes puede interesarse en escribir un programa recursivo para el método de bisección, como el que se ilustra en la figura 2.d (para ser usado en la *Pantalla Base*). Nótese el uso de la constante *K* (de Boole) para determinar el extremo del intervalo (*I*, *D*) que debe reemplazar el nuevo punto medio *M*.

```

0→I:1→D
1
(I+D)/2→M:(Y2(M)
*Y2(I)>0)→K:K0+(
1-K)M→D:KM+(1-K)
I→I:(I,D,D-I)
...000 .500 .500

```

Figura 2.d

#### IV. Método de la Secante

La figura 2.e ilustra el método de la secante. Primero se calcula y se almacena en *C* la pendiente de la secante que pasa por (*A*, *f*(*A*)) y (*B*, *f*(*B*)). Después se redefinen convenientemente los valores de *A* y *B*.

```

0→A:1→B
1
(Y2(B)-Y2(A))/(B
-A)→C:B→A:B-Y2(B)
)/C→B
.4065540259
.4465123273

```

Figura 2.e

## Comportamiento Local de una Función

**Ejemplo 3.** Explorar el comportamiento de la función

$$f(x) = \left(x - \frac{\tilde{s}}{2}\right) \sin \frac{1}{\left(x - \frac{\tilde{s}}{2}\right)} \quad \text{cerca de } x = \tilde{s}/2.$$

$$\text{Sea } y_i = \left(x - \frac{\tilde{s}}{2}\right) \sin \frac{1}{\left(x - \frac{\tilde{s}}{2}\right)}$$

La figura 3 nos muestra como generar iterativamente la sucesión que converge a  $P = \tilde{s}/2$ , y evaluar la función en cada  $\{0, 1, 0, 01, \dots\}$ , uno de sus valores. Claramente podemos acercarnos a  $(P, f(P))$  por la izquierda dejando  $N = -1$

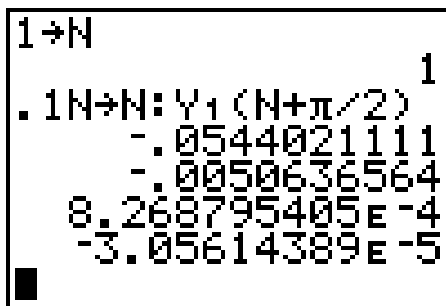


Figura 3

## Comportamiento Global de una Función

**Ejemplo 4.** Estimar numéricamente  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

*Solución.* Podemos emular  $x^*$  usando una sucesión divergente de términos positivos. La figura 4.a ilustra como la sucesión de valores de la función evaluada en la sucesión  $\{10, 100, 1000, \dots\}$  parecen converger, mientras que la figura 4.b sugiere que la diferencia entre el límite y  $e$  puede hacerse arbitrariamente pequeña.

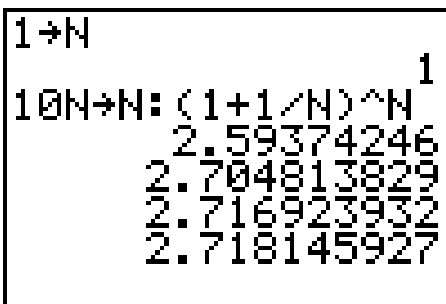


Figura 4.a

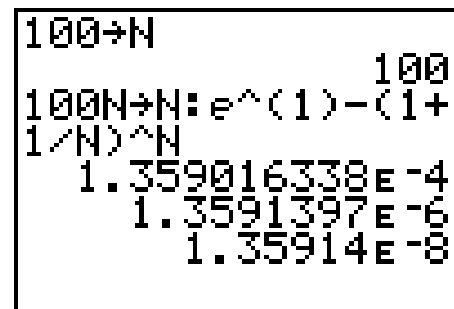
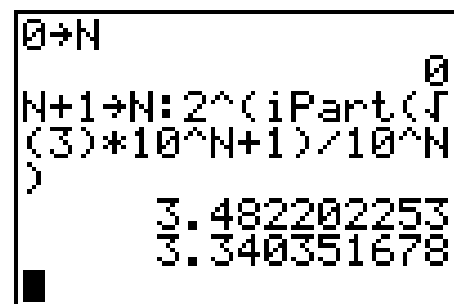
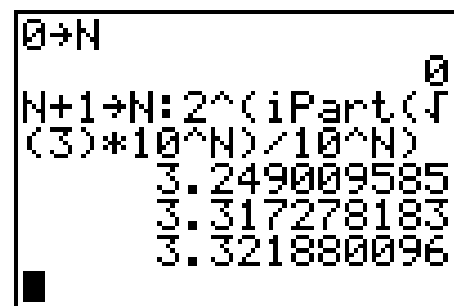


Figura 4.b

## Continuidad

**Ejemplo 5.** Investiga la continuidad de  $y = 2^x$  en  $x = 3^e$ .

*Solución.* Ya que  $3^e = 1.7320508075689\dots$ , podemos aproximar  $3^e$  por la izquierda usando la sucesión  $1, 1.7, 1.73, 1.732, \dots, 1.7320508, \dots$ , esto es,  $2^1, 2^{1.7}, 2^{1.73}, \dots, 2^{1.7320508}, \dots$ , se acerca a  $2^{3^e}$  por la izquierda. La figura 5.a muestra como obtener esa sucesión. Del mismo modo, la sucesión  $2, 1.8, 1.74, 1.733, \dots, 1.7320508$ , aproxima  $3^e$  por la derecha, y por tanto (figura 5.b)  $2^2, 2^{1.8}, 2^{1.74}, \dots, 2^{1.7320508}$ , converge a  $2^{3^e}$ . La figura 5.c confirma que la diferencia de ambas sucesiones se acerca a cero.



```

N+2→N:2^(iPart(√
(3)*10^N+1)/10^N
)-2^(iPart(√(3)*
10^N)/10^N)
      .0230734945
2.302631625E-4
2.3026324E-6

```

### Convergencia de Series

**Ejemplo 6.** Estima numéricamente si alguna de las series  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{X}$  ó  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{X^2}$  converge.

Las figuras 6.a y 6.b ilustran como sumar subsucesiones de 998 términos. Puede observarse como en el segundo caso las sumas parciales parecen estabilizarse.

```

0→S:1→C
      1.000000
sum(seq(1/N,N,C,
C+998,1))+S→S:C+
999→C:{S,C}
(7.484471 1000...
(8.177368 1999...

```

```

0→S:1→C
      1.000000
sum(seq(1/N^2,N,C
,C+998,1))+S→S:C
+999→C:{S,C}
(1.643934 1000...
(1.644434 1999...

```

### Crecimiento de una población

**Ejemplo 7.** Cuando Juan Afortunado nació, sus abuelos, para garantizar los gastos de sus estudios universitarios, depositaron en una cuenta de ahorros a su nombre con un interés compuesto garantizado de un 5% anual.

a) ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta dentro de 19 años? b) ¿Cuál será el balance final si los padres de Juan, conscientes de los efectos de la inflación, deciden depositar 20000 pts al final del primer año e incrementan este deposito en un 4% cada año?

**Solución.** La solución recursiva inicial de la figura 7.a a la pregunta a) se ha refinado en la figura 7.b usando dos constantes para almacenar los valores actuales de tiempo (T) y balance (B). La figura 7.c ilustra como introduciendo una nueva constante D para los depósitos anuales en la solución anterior, obtenemos la respuesta a b).

```

250000
Ans*1.05
      250000
      262500
      275625
      289406
      303877

```

```

250000→A:0→T
T+1→T:A*1.05→A:{
A,T}
      (262500 1)
      (275625 2)
      (289406 3)

```

```

250000→B:0→T:200
00→D
      20000
T+1→T:B*1.05+D→B
:D*1.04→D:{T,B,D}
      (1 282500 20800)

```

Las figuras 7.d, y 7.e, presentan una solución alterna a la pregunta b) usando las sucesiones recursivas y mostrando una tabla de balances acumulados y depósitos anuales correspondientes.

La simplicidad de las soluciones a la pregunta b) obtenidas por medio de procesos recursivos contrasta con las formulas de anualidades que típicamente se usan.

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)=u(n-1)*1.0
5+v(n-1)
u(nMin)=25000.
v(n)=v(n-1)*1.0
4
v(nMin)=20000

```

$n$	$u(n)$	$v(n)$
12	769355	30789
13	838612	32021
14	912564	33301
15	991493	34634
16	1.08E6	36019
17	1.17E6	37460
18	1.26E6	38958
$u(n)=1261240.224$		

Relaciones recursivas conocidas

**Ejemplo 8.** Por último presentamos la solución a algunas conocidas relaciones recursivas usando **seq**.

**I. Propagando un rumor** (las personas que oyen el rumor un día lo comunican a dos personas sólo el día siguiente):  $u(n) = u(n-1) + 2^{(n-1)}$ ,  $u(1) = 1$ .

**II. Los granos de trigo en el tablero de ajedrez:**

$u(n) = 2 * u(n-1)$ ,  $u(1) = 1$ ,  
 $v(1) = 1$ ,  $n = 1$ ,  $v(n) = v(n-1) + 2 * u(n-1)$ .

**III. Las torres de Hanoi:**  $u(n) = 2 * u(n-1)$ ,  $u(1) = 1$ .

**IV. La sucesión de Fibonacci:**

$u(n)=u(n-1) + v(n-1)$ ,  $v(n) = u(n-1)$ ,  $u(1)=1$ ,  $v(1)=0$ .

### Conclusión

La variedad e importancia de los ejemplos presentados nos indica que debemos dar seria consideración a hacer de los procesos iterativos y recursivos una de las herramientas de trabajo con que la mayor parte de los estudiantes termina secundaria.

## REFERENCIAS

1. Brown, R., (1992). *Advanced Mathematics*. Boston, MA: Houghton Mifflin.
2. Core-Plus Mathematics Project (1996). Dedham, MA: Janson Publications, Inc.
3. Demana F., & Waits, B. (1993). *Precalculus*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
4. Ferguson, Ronald D., (1994). *Precalculus Plus*. St. Paul, MN: West Publishing Company.
5. National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.
6. The North Carolina School of Science and Mathematics (1992). *Contemporary Precalculus Through Applications*. Deham, Massachusetts: Janson Publications, Inc.
7. The University of Chicago School Mathematics Project. (1992). *Precalculus and Discrete Mathematics*. Glenview, Illinois: Scott, Foresman.
8. Tucker, A., (1980). *Applied Combinatorics*, 3a. ed. New York, N.Y.: John Wiley & Sons.