



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

**S. A. E. M.
THALES**

PRIMERAS
JORNADAS SOBRE
APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA
DE LAS MATEMATICAS

BARCELONA 7, 8 Y 9 DE MAYO DE 1981

I.C.E. UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BARCELONA

Avda. San Antonio Ma. Claret 171. BARCELONA

Organizadas por el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, con la colaboración de la Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. de Sant Cugat del Vallès, el I.M.I.P.A.E. y el Grup Zero-Barcelona.



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

L'Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona i el equipo organizador os da la bienvenida a estas "I Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas".

Como podeis observar en el horario de sesiones, éstas se pueden dividir en primarias (inauguración, conferencias, clausura) y sesiones por grupos (mesas redondas y ponencias). De este segundo tipo de sesiones, siempre habrá 3 ó 4 realizadas simultáneamente. Cada participante podrá escoger libremente aquella la que quiere asistir. Un resumen del tema de cada ponencia lo podeis encontrar dentro de este dossier.

La organización ha creído conveniente introducir una dimensión complementaria y creemos que interesante dentro de las jornadas. Esta dimensión complementaria viene dada por una exposición de libros de texto, una exposición de calculadoras de varios tipos con demostraciones de sus posibilidades y proyecciones de material audiovisual.

Con tal de agilizar el desarrollo del programa creemos importante que los asistentes tengan en cuenta los siguientes puntos:

- dado que el tiempo está calculado al minuto pedimos el máximo de puntualidad de los asistentes.
- dentro del dossier hay un horario de las sesiones. De todas formas exhiben carteles, enganchados en las paredes del recinto, que cada día irán confirmando. Comprobar cada día los posibles cambios.
- existirá una secretaría permanente de las Jornadas. Para cualquier consulta o duda podeis dirigiros a ella.

La organización desea recibir cualquier crítica o sugerencia que pueda mejorar estas o futuras jornadas.

BIENVENIDOS!!!



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

LISTA DE CONFERENCIANTES, PONENTES Y COMITE ORGANIZADOR

COMITE ORGANIZADOR

Carmen AZCARATE

Miembro del "Grup Zero". Profesora de l'Escola Universitària del Professorat d'E.G.B. de Sant Cugat del Vallès.

Carmen GOMEZ

Miembro del I.M.I.P.A.E. Profesora de l'Escola Universitària del Professorat d'E.G.B. de Sant Cugat del Vallès.

José Manuel YABAR

Profesor de l'Escola Universitària del Professorat d'E.G.B. de Sant Cugat del Vallès.

CONFERENCIANTES

Gaston MIALARET

Profesor de la Facultad de Letras y Ciencias Humanas de la Universidad de Caen-Francia.

Claude JANVIER

Profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Quebec a Montreal-Canada.

Carmen GOMEZ

Miembro del I.M.I.P.A.E. Profesora de l'Escola Universitària del Professorat d'E.G.B. de Sant Cugat del Vallès.

PONENTES Y PONENCIAS

Jesús AURRECOECHEA

Profesor de I.N.B. - Bilbao.
Una experiencia sobre probabilidad y combinatoria

Agustín BLANCO

Profesor I.N.B. "Cardenal Herrera Oria" - Madrid.
Miembro "Equipo 2001".
Integración numérica con calculadora.



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

Ma. Rosa BORRAS

Profesora I.N.B. "Boscan" - Barcelona.
Miembro del Seminario Permanente de Filosofía.
Las paradojas lógicas (práctica interdisciplinar
Filosofía-Matemáticas).

Ma. Dolors BUSQUETS

Profesora de l'Escola "Pau Vila" (I.M.I.P.A.E.).
Aprentatge de lògica dins una globalització

Ma. Antonia CANALS

Profesora de l'Escola Universitaria del Professorat d'E.G.B. de Sant Cugat del Valles.
La Geometria al Parvulari i a la Primera Etapa d'E.G.B.

Ramon CEMELI

Profesor "C.N. Font d'en Fargues" - Barcelona.
Miembro del Grup d'Informàtica-"Rosa Sensat".
Las calculadoras en la E.G.B.

Manuel COBARRO

Profesor C.N. "Narciso Yepes" - Centro Piloto del I.C.E. - Murcia. Miembro del grupo INDIMA.
Ensayo de educación personalizada en Matemáticas (2a. etapa de E.G.B.).
El número entero en la E.G.B.

Colectivo de Didáctica de la Matemática - Sevilla

Combinatoria.
Radicales y logaritmos.
Las calculadoras en la enseñanza de las Matemáticas en B.U.P.
Trigonometría.

Albert FABREGA

Profesor I.N.B. "Boscan" - Barcelona.
Una introducció al nombre i la funció exponencial

Primitivo GARCIA

Profesor I.N.B. "Santa Clara" - Santander.
Coordinación E.G.B.-BUP.

Manuel GONZALEZ

Profesor I.N.B. "Manuel de Falla" - Puerto Real (Cádiz). Miembro del Grupo Didáctica de Matemáticas de Cádiz.
Reciclaje en geometría del profesorado de Enseñanza Media.

GRUP ZERO

Els nombres enters.
Un exemple de metodologia per B.U.P. La funció exponencial.

Grupo GAMMA - Madrid

Límites con la calculadora de bolsillo.
Cálculo de logaritmos en bases 2 y 10 con la calculadora de bolsillo.



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

Rafael HERNANDEZ

Profesor I.N.B. de Tafalla - Navarra
Producto escalar y Geometría métrica.

Jaume JORBA

Profesor I.N.B. "Joanot Martorell" - Esplugues de Llobregat (Barcelona). Miembro del Grup Zero.
Experiència interdisciplinar.

Aurea LIBORI

Profesora Escuela Municipal "Pau Vila" (I.M.I.P.A.).
El signo igual.

Manuel MARTIN

Profesor de I.N.B. Isla de León - San Fernando (Cádiz), Miembro del Grupo Didáctica de Matemáticas o Cádiz.
Límite de sucesiones.

Juan Francisco MONTERO

Profesor I.N.B. - Bilbao.
Sugerencias para la programación de las Matemáticas al B.U.P.

Enrique RUBIALES

Profesor de I.N.B. de Aranjuez - Madrid.
Las calculadoras en la enseñanza de las Matemáticas

Seminari del Vallès -
Barcelona

Prova inicial de coneixements a 1er. de B.U.P.

Ricardo ZAMARREÑO

Profesor I.N.B. "Cardenal Herrera Oria" - Madrid.
Miembro Equipo 2001.
Límites y resolución de ecuaciones.



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

C O N F E R E N C I A S

Claude JANVIER

Representaciones gráficas en la enseñanza en alumnos de 6 a 15 años.

Lengua: Francés (Conferencia plenaria)

Se trata de una presentación de la utilización de las representaciones gráficas dirigiendo esta utilización en varias direcciones.

Matemáticas y Biología.

Lengua: Francés (Conferencia plenaria)

Se presentaran experiencias realizadas con profesores de Ciencias Biológicas medio, en el nivel de 12 años utilizando tablas de números, gráficas,... en un estudio sobre el crecimiento de las plantas y el papel nefasto de los parásitos.

.

Carmen GOMEZ GRANELL

Aprendizaje operatorio en Matemáticas.

Lengua: Castellano (Conferencia plenaria)

Se expondrán en esta conferencia alguna de las experiencias de aprendizaje que en el campo de las Matemáticas y más concretamente de la representación gráfica del número y las operaciones básicas elementales, ha llevado a cabo el equipo del I.M.I.P.A.E. y que son un intento de alternativa a las formas tradicionales de Enseñanza de las Matemáticas que se caracterizan por la ausencia total de relación con la realidad, el aislamiento de las demás materias, el desconocimiento de los procesos y funcionamiento intelectual del niño y el adolescente, et

.



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

P O N E N C I A S

Jesús AURRECOECHEA

Una experiencia sobre probabilidad y combinatoria.

Lengua: Castellano

Presentamos una experiencia como modelo metodológico, útil para este tema, pero quizá no generalizable a otros apartados de las Matemáticas. Pretendemos, en líneas generales, que los alumnos obtengan por sí mismos resultados que permitan generalizar conceptos que de otra forma requerirían un proceso largo de comprensión, o bien una concepción axiomática de ellos.

* * * * *

Agustín BLANCO RUIZ

Integración numérica con calculadora.

Lengua: Castellano

Ejemplos ilustrativos de la integración numérica por los métodos de rectángulo y de trapecios. Rapidez de la convergencia.

* * * * *

Ma. Rosa BORRAS / Pelegrí VIADER

Las paradojas lógicas.

Lengua: Catalan

El tema de las paradojas lógicas que se plantea en la Historia de la Filosofía en Grecia (Zenón de Elea, Carneádes, ... etc.) constituye un tema profundo y de actualidad conectado con el problema de la crisis de fundamentos de los sistemas formales axiomáticos. La experiencia didáctica realizada consiste en exponer el tratamiento especializado que tiene la cuestión (tratamiento matemático de las paradojas de Zenón) para pasar luego a las paradojas modernas (exposición de la paradoja de Russell) y finalizar con la referencia a los límites de los sistemas formales (Teorema de Gödel).

* * * * *



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

Ma. Dolors BUSQUETS i PRAT

Aprententatge de lògica dins una globalització.

Lengua: Catalan

Presentación de un aprendizaje operatorio de lógica matemática dentro del marco de la globalización de materias que se lleva a cabo en E.G.B. partiendo de un tema elegido por los niños, lo cual convierte a cada una de las materias escolares en instrumentos de trabajo para resolver necesidades planteadas.

La programación y realización del aprendizaje debe incluir y respetar la evolución del niño y por consiguiente de su pensamiento, sus intereses y el proceso evolutivo y razonado de la construcción de todo concepto.

.....

Ma. Antonia CANALS

La Geometria al Parvulari i a la 1a. Etapa d'E.G.B.

Lengua: Catalan

.....

Ramon CEMELI / Jordi ACHON

Las calculadoras a la E.G.B.

Lengua: Castellano

Las calculadoras deben ser un elemento para la reflexión y el desarrollo heurístico de las matemáticas, no una simplificación del trabajo escolar.

Las máquinas mecánicas (antiguas de oficina) son útiles para el aprendizaje de los algoritmos de la multiplicación y la división iniciando de forma intuitiva en el lenguaje de la programación.

.....



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

Manuel COBARRO GARCIA

Ensayo de educación personalizada en Matemáticas (2a. Etapa de E.G.B.)

Lengua: Castellano

Se pretende dar respuesta a los problemas de falta de interés, comprensión de la matemática, desajustes entre el profesor y el alumno, libros de texto y alumno, desfase de ritmos de trabajo, desconexión con la realidad. Nuestra experiencia se centra en una metodología activa, "realista" y personal, elaborando nuestro propio material de trabajo. Por ahora solo tenemos conclusiones provisionales.

El número entero en la E.G.B.

Lengua: Castellano

Como llegar al concepto de número entero y todas las operaciones que se realizan en $\mathbb{Z}$ de una forma intuitiva i progresiva, Programación de $\mathbb{Z}$ y operaciones para 7º nivel con material elaborado por nosotros para una enseñanza personalizada y activa (Es un ejemplo concreto de la educación personalizada).

.....

Colectivo DIDACTICA DE LA MATEMATICA de SEVILLA

Radicales y logaritmos. Introducción con calculadora

Lengua: Castellano

Expondrá la ponencia: José Antonio ALONSO JIMENEZ

La utilización de calculadoras con cuatro operaciones permite la introducción de nuevos algoritmos. Siguiendo intuitivamente el Teorema de Bolzano se construye un algoritmo para el cálculo aproximado de los radicales y los radicales de finidos como operación inversa de las potencias. Además esta introducción posibilita calcular con números aproximados, errores, sucesiones y límites; construcción de tablas, gráficas, exponenciales y logarítmicas.

Combinatoria

Lengua: Castellano

Expondrá la ponencia: Antonio ARANDA PLATA

Ofrecemos una concepción del tema distinta a la usual con un enfoque metodológico basado en la resolución de problemas ordenados adecuadamente. No tenemos



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

en cuenta el modelo conjuntista. Como punto de partida de la combinatoria pensando que la formalización de las aplicaciones es posterior a la numeración. Pretendemos salir del excesivo formalismo al que se llega reduciendo la teoría variaciones permutaciones y combinaciones. La aplicación de los contenidos se hace en base a los siguientes puntos:

1. Problemas generales de numeración.
2. Problemas de recuento por recurrencia.
3. Codificación.
4. Relación algebra-enumeración.

Las calculadoras en la enseñanza de las Matemáticas al B.U.P.

Lengua: Castellano

Expondrá la ponencia: Antonio MARTIN CASTILLA

El uso de las calculadoras puede suponer un cambio sustancial en el enfoque de algunos temas de B.U.P. En esta ponencia trataremos por un lado de las posibilidades didácticas que ofrece una calculadora de bolsillo ciñéndonos en nuestra exposición a un aspecto concreto: "la capacidad de conjetura que puede inducir el manejo de calculadoras" y por otro lado, relataremos la experiencia y proyecto que actualmente llevamos a cabo con calculadoras programables.

Trigonometria

Lengua: Castellano

Expondrá la ponencia: Antonio PEREZ JIMENEZ

La idea que preside el tema consiste en plasmar el método científico en su desarrollo. Se comienza con el Teorema de Tales, dado como axioma, previa justificación. Se introducen las razones trigonométricas y se construyen tablas con dos decimales, distinguiendo entre valores aproximados (obtenidos por medición) y valores exactos (obtenidos teóricamente). Mediante extensión de las razones trigonométricas se introducen las funciones trigonométricas. El tema continúa el estudio de la trigonometría plana para acabar con las principales desigualdades trigonométricas y ecuaciones. Finalmente se confrontan los resultados obtenidos numéricamente con los resultados obtenidos por medición.

* * * * *



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

Albert FABREGA ENFEDAQUE

Una introducció al número e i la funció exponencial

Lengua: Catalán

A partir d'una simplificació de la llei de Hubble, es resol l'equació $y' = y$ per aproximacions successives. En primer lloc, per $x = 1$, s'arriba al número e , després en general, s'obté la funció e^x . Pel camí s'exposa el concepte de límit i el càlcul de límits. Finalment es torna a fer el mateix per la llei de desintegració radioactiva. El tema el van treballar els alumnes de 2n. de B.U.P. sobre un esquema que indica el procés a seguir.

* * * * *

Primitivo GARCIA TERAN

Coordinación E.G.B. - B.U.P.

Lengua: Castellano

Presentación de los documentos elaborados por los asistentes a las Jornadas sobre coordinación didáctica (I.C.E. Universidad de Santander) que figuran en el libro "Coordinación didáctica y sistema educativo" I.C.E. Universidad Santander 1979. Explicación de la organización, difusión y seguimiento de las conclusiones sobre las programaciones propuestas en dicho documento. Evaluación de una experiencia alternativa a la programación de los cursos de 2º y 3º de B.U.P. que también figura en el documento citado.

* * * * *

Manuel GONZALEZ / Rafael HERNANDEZ

Reciclaje en Geometría del profesorado de Enseñanza Media.

Producto escalar y Geometría métrica.

Lengua: Castellano

* * * * *



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

GRUP ZERO - BARCELONA

Els nombres enters

Lengua: Catalan

Expondrà la ponència: Jordi DEULOFEU

Creiem que hem d'ensenyar les Matemàtiques basant-nos en la resolució de problemes interessants, més o menys familiars als alumnes i que formen el suport concret i intuïtiu dels conceptes abstractes que els presenten. El tema Els nombres enters té dues parts: el concepte i les operacions. En l'estudi del concepte ens proposem que els alumnes arribin a distingir els dos aspectes: variació (disminució-augment) i estat (valor fix). Treballem també la representació gràfica i l'ordenació. Finalment estudiem les operacions de manera que, en acabar aquest tema, els alumnes estiguin en condicions d'abordar l'àlgebra.

Un exemple de metodologia per B.U.P. La funció exponencial.

Lengua: Catalan

Expondrà la ponència: Daniel BOSCH

Exposició d'una metodologia de la Matemàtica a B.U.P. centrada en la resolució de problemes que porten a la definició de conceptes con la funció exponencial i logarítmica.

* * * * *

GRUPO CERO - VALENCIA

Probabilidad al B.U.P.

Lengua: Castellano

* * * * *

GRUPO GAMMA

Límites con la calculadora de bolsillo

Lengua: Castellano

Expondrà la ponència: Joaquín PEREZ NAVARRO

Se propone el uso de la calculadora en el estudio de las indeterminaciones, co



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

un enfoque que hace incapié en la experimentación y elaboración de conjeturas

Cálculo de logaritmos en bases 2 y 10 con la calculadora de bolsillo.

Lengua: Castellano

Expondrá la ponencia: Juan Manuel GARCIA DOZAGAVAT

Apoyéndonos en las propiedades de la función exponencial o de la función logarítmica obtendremos un algoritmo para el cálculo de logaritmos de números racionales. A partir de dicho algoritmo haremos un organigrama para las calculadoras de cuatro operaciones y otro para las programables.

* * * * *

Jaume JORBAS i BISBAL

Experiència interdisciplinària.

Lengua: Catalan

Presentació d'una experiència interdisciplinària que s'està realitzant a l'Institut Nacional de Batxillerat "Joanot Martorell" d'Esplugues de Llobregat, a partir de B.U.P. i en la qual hi col·laboren tots els seminaris que tenen assignatures en aquest nivell.

* * * * *

Aurea LIBORI RAMOS

El signo igual

Llengua: Catalan

Experiencia que se está llevando a cabo en la Escuela Municipal "Pau Vila", Centro Piloto del I.M.I.P.A.E., con alumnos de 5º de Básica. Mediante esta experiencia se pretende que los alumnos lleguen por sí mismos y a través de construcciones sucesivas, a: 1) la generalización del concepto de igualdad, como preparación a la resolución de ecuaciones y 2) a la utilización correcta de las propiedades de las estructuras de grupo y anillo.

Se exponen los sondeos realizados y los distintos ejercicios que constituyen el aprendizaje, organizado éste a partir de las respuestas de los niños, que nos indican en cada momento cual es su nivel evolutivo.

* * * * *



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

Manuel MARTINEZ FERNANDEZ / Manuel GONZALEZ DAVILA

Límite de sucesiones

Lengua: Castellano

Este trabajo consta de dos partes:

- Aproximación al concepto intuitivo de límite de una sucesión mediante la utilización de una calculadora de bolsillo: "Necesidad del uso de la calculadora. Idea intuitiva de límite. Cálculo de límites. Errores de redondeo. Rapidez de aproximación. Sucesiones no convergentes.
- Formalización del concepto intuitivo: Necesidad de formalización. Definición de límite (por entornos). Propiedades elementales. Importancia de la definición dada. Crítica de la formulación clásica. Posibilidad de desarrollar una investigación a través del concepto de límite.

Juan Francisco MONTERO

Sugerencias para la programación de las matemáticas al B.U.P.

Lengua: Castellano

Recorrido de algunos de los temas más importantes en la programación del B.U.P. partiendo de la consideración de las deficiencias de planteamiento en la orientación habitual de la misma: Álgebra, Geometría, Análisis.

En base al análisis de los temas anteriores, se pueden proponer algunas posibilidades de cambio en el orden habitual de desarrollo del programa oficial.

Enrique RUBILAES CAMINO

Las calculadoras en la enseñanza de las matemáticas.

Lengua: Castellano

El manejo de la calculadora en la clase para su utilización en la introducción de ciertas cuestiones de los actuales programas de matemáticas de Bachillerato.

Ejemplos: Cálculo de raíces cuadradas, cúbicas, ... por medio de una fórmula iterativa, a la que deberán llegar los alumnos. Método de Ruffini. Introducción de



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

límite de una función.

A un nivel más elevado, resolución de sistemas lineales de ecuaciones, cálculo aproximado de la raíz de una ecuación y cálculo aproximado de una integral.

.....

SEMINARI DEL VALLÈS

Prova inicial de coneixements a 1er. de B.U.P.

Lengua: Catalan

Expondrà la ponència: Manuel UDINA / Pilar PINEDA

Es descriu una prova que s'ha proposat a 500 alumnes de 1er. de B.U.P. i es planteja el problema de com fer aquest tipus de proves. Els objectius primers eren conèixer el nivell dels alumnes de cara a la programació del curs i d'una valoració crítica dels programes d'E.G.B.

.....

Ricardo ZAMARREÑO FERNANDEZ

Límites y resolución de ecuaciones.

Lengua: Castellano

Breves ejemplos de cálculo de límites con calculadores y estudio del cálculo de número con los diferentes algoritmos que conducen a él. Resolución de ecuaciones con calculadoras.

.....

INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

CEMELI SALA Ramon
Marques Caldas de Montbui, 42
BARCELONA - 42

COBARRO GARCIA Manuel
Alfaro 10 3ºiz.
Murcia

Colectivo Didactica de la
Matematica
Sevilla

FABREGA ENFEDAQUE Albert
Nicano 6 1ºla.
Barcelona - 22

GARCIA DOZAGARAT
San Emilio, 7 3ºC
Madrid - 17

GARCIA TERAN Primitivo

GOMEZ GRANELL Carmen
Pza. Pep Ventura, 1
Barcelona - 17

CONZALEZ DAVILA Manuel
Glorieta Ingeniero Lanerva, 4 5 A
Cadiz

GRUP GAMMA
Madrid

GRUP ZERO
Barcelona

C.N. Font d'en Fargues
P. Font d'en Fargues s/nº
Barcelona - 32

C.N. Narciso Yepes
Avda. Antonete Galvez
Murcia

Antonio Perez
Asunción, 35 2ºD
Sevilla - 11

I.N.B. Boscan
Carretera de Esplugues, 40
Barcelona - 34

I.N.B. Quevedo
Arcos de Jalon s/nº
Madrid - 17

I.N.B. Santa Clara
Santa Clara - Santander

IMIPAE
Fuenflorida s/nº
Barcelona - 4

I.N.B. Manuel de Valla
Alejandro s/nº
Puerto Real Cadiz.

Juan MANUEL GARCIA
San Emilio, 7 3ºC
Madrid - 17

I.C.E. Universitat Autònoma de
Barcelona. St. Antoni Ma. Cla
ret, 171 Barcelona.



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

Relación de inscritos a las Primeras Jornadas de Matematicas.
Lista de ponentes - / Comité Organizador

ALONSO JIMENEZ José Antonio.
Pza. Barraquer, 11 7ºA.
Sevilla - 9

Colectivo Didáctica de la
Matemática de Sevilla.

ARANDA PLATA Antonio
S. Estanislao, B-1 8ºiz.
Sevilla - 7

C.D. de la Matemática de
Sevilla.

AURRECOECHEA Jesus

I.N.B. BILBAO.

AZCARATE Carmen
Ecuador, 26 2º2a.
Barcelona - 29

F.F. Professorat d'E.G.B.
Sant Cugat del Valles.
(Barcelona)

BLANCO RUIZ Agustin
Avda. Generalísimo, 26 7ºD
ALARCON (Madrid)

I.N.B. "Cardenal Herrera
Oria". C/ Fermín Caballe
ro s/nº MADRID - 34

BORRAS BORRAS Ma. Rosa
Via Augusta, 114
BARCELONA

I.N.B. BOSCAN
C/ Esplugas s/nº
Barcelona

BUSQUETS IRRAT Ma. Dolors
Guillem Tell, 15-17 3er. 2a.
BARCELONA - 6

Escola Pau Vila (IMIPAE)
Barcelona

CANALS Ma. Antonia
Barcelona

E.F. Professorat d'E.G.B.
Sant Cugat del Valles

GRUPO CERO

Valencia.

HERNANDEZ GARCIA Rafael

I.N.B. Tafalla

Tafalla (Navarra)

JANIER CLAUDE

Centre Interdisciplinaire de
recherches sur l'apprentissage
et le développement en éducation
Université du Québec à Montréal
Montréal Québec H3C 3P8

JORBA Jaume

Via Augusta 187 2º1a

Barcelona - 21

I.N.B. Joanot Martorell

Sant Mateu s/nº

ESPLUGUES (Barcelona)

LIBORI RAMOS Aurea

Fabra y Puig, 313

BARCELONA - 31

E. Municipal Pau Vila

Fuenflorida s/nº

BARCELONA

MARTIN CASTILLA Antonio

Sta. Maria del Reposo 1º 3A

Sevilla - 8

Colectivo de Didactica de las
Matematicas - Sevilla.

MARTIN FERNANDEZ Manuel

José Leon de Carranza 14 12ºA

Delfin - 8 Cadiz

I.N.B. Isla de Leon

Avda. Carraca s/nº

San Fernando Cadiz.

MIALARET Gaston

Facultad de Letras y Ciencias
Humanas - Universidad de Caen
Francia.

MONTERO Juan Francisco

Avda. Basagoiti 75 Es. D 2ºI.

ALGORTA _ Vizcaya

I.N.B. Bilbao.

PEREZ JIMENEZ Antonio

Asunción 35 2ºD

Sevilla - 11

Colectivo Didactica de la
Matematica - Sevilla

PEREZ NAVARRO Joaquín
Ma. Auxiliadora 1 4ºB
Madrid - 20

I.N.B. Quevedo
Arcos de Jalon s/nº
MADRID - 17

RUBIALES CAMINO Enrique
Bravo Murillo, 23
Madrid - 3

I.N.B. de Aranjuez
Valeras, 12
Aranjuez - Madrid

ZAMARRENO FERNANDEZ Ricardo
Puerto Rico, 10 1º2
Madrid - 16

I.N.B. Cardenal Herrera Oria
Fermin Caballero s/nº
Madrid -34

YABAR MADINABEITIA José Manuel
Fabra y Puig 63 2º4a.
Barcelona - 30

E.F. Professorat d'E.G.B.
Sant Cugat del Valles
BARCELONA



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

RELACION DE INSCRITOS A LAS "I JORNADAS SOBRE EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA
DE LAS MATEMATICAS"

ACHON MASANA, Jordi BARCELONA	"Cardenal Cisneros"
ADMETLLA MASERAS, Francisco BARCELONA	I.N.B. "Emperador Carlos"
AGUILAR VALENZUELA, Maria BELLPUIG (Lleida)	I.N.B. "Bellpuig"
AGUIRREGABIRIA MARIN, Eulalia BARCELONA	"Asunción de Ntra. Sra."
ALCALDE ESTEBAN, Manuel CASTELLON DE LA PLANA	E.U. Formación Prof. E.G.B.
ANTSCHERL HAVLANGE, Michel BARCELONA	I.N.B. "Rafael Casanova" SANT BOI DE LLOBREGAT (Barcelona)
ANDION GASTON, Juan Antonio TAFALLA (Navarra)	I.N.B. Mixto nº 3 PAMPLONA (Navarra)
APARICIO HELLIN, Herminia BARCELONA	
ARNAIZ MORENO, Elena BLANES (Girona)	I.N.B. "Blanes"
ARTOLA, Concepción	
ATXER GOMA, Montserrat BARCELONA	I.N.B. "San Andres"
AZCARATE, Carmen BARCELONA	Escola Universitària del Professorat d'E.G.B. SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)
AZUARA CASADAS, Ana BARCELONA	I.N.B. "Can Tunis" BARCELONA
BAÑOS MASIP, Pilar BARCELONA	"Garbi" ESPLUGUES DE LLOBREGAT (Barcelona)
BARBA URIACA, David BARCELONA	Escola Universitària del Professorat d'E.G.B. SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)
BARBERO SAMPEDRO, Carmen MADRID	

BAYO SAMSO, Jaume BARCELONA	"Blanquerna" BARCELONA
BELZUNCE MANCEBO, Antonio MATARO (Barcelona)	I.N.B. "Arenys de Mar" ARENYS DE MAR (Barcelona)
BENACH, Dolors	"Grup Zero"
BERENGUER CLARIA, Joaquim SABADELL (Barcelona)	I.N.B. "Pau Vila"
BERGADA MARIMON, Ramon Miguel ROCALLAURA (Lleida)	I.N.B. "Arbúcies" ARBÚCIES (Girona)
BERINI, Marta BARCELONA	"Grup Zero"
BERNAT AGUSTI, José Manuel ALMAZORA (Castellón de la Plana)	Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. CASTELLON DE LA PLANA
BIBILONI MATOS, Lluís BARCELONA	Escola Universitària del Professorat d'E.G.B. SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)
BILBAO BUÑUEL, Rosalia PALMA DE MALLORCA (Balears)	I.N.B. "Joan Alcover"
BLANCH ESMERATS, Merce MATADEPERA (Barcelona)	Escola "Montcau la Mola" MATADEPERA (Barcelona)
BLASCO ANDRES, Joan TERRASSA (Barcelona)	Col·legi "Niño Jesús"
BOADA PINADELL, Maite BARCELONA	Academia Pinadell BARCELONA
BRASO CAMPDERROS, Enric ESPLUGUES DE LLOBREGAT (Barcelona)	I.N.B. nº 1 CORNELLÀ DE LLOBREGAT (Barcelona)
BRECHA QUEROL, Concepción GRANOLLERS (Barcelona)	Escuela Cerveto
BRICHS TORELLO, Albert BARCELONA	I.N.B. "Sant Josep de Calasanç" BARCELONA
BOIX ESTRADA, Albert BARCELONA	I.N.B. "Valldemossa"
BORRAS, Eliseo VALÈNCIA	"Grupo Cero" VALÈNCIA
BORRELL ALONSO, Jordi BADALONA (Barcelona)	Escola Jungfrau
BOSCH, Daniel BARCELONA	I.N.B. "Sant Boi de Llobregat" SANT BOI DE LLOBREGAT (Barcelona)

BUJALANCE MORALES, José Rafael
SANT JOAN D'ESPI (Barcelona)

A.P. "Gran Capitan"
SANT JOAN D'ESPI (Barcelona)

BUITRON GONZALEZ, Lucía
VALÈNCIA

I.N.B. "Eduardo Primo"
CARLET (València)

BUSQUETS GUBAU, Montserrat
BARCELONA

Escola Tramontana"
BARCELONA

CAMACHO GARCIA, Enrique
MADRID

CANAL CASOLIVA, Josefina
BARCELONA

"Ntra. Sra. de las Mercedes"

CANALS TOLOSA, Ma. Antonia
BARCELONA

CAMPAMA, Xavier
BARCELONA

Centre de Salut
RIPOLLET (Barcelona)

CAPSADA BLANCH, Ramon
SABADELL (Barcelona)

Escola Cooperativa Joanot Alisanda"
SABADELL (Barcelona)

CARBALLO MARTINEZ
SALAMANCA

I.C.E. Universidad de Salamanca
SALAMANCA

CARBAYO MARTINEZ, Angel
SALAMANCA

I.C.E. Universidad de Salamanca
SALAMANCA

CARDEÑOSO DOMINGO, José Ma.
MADRID

CARRILLO, Marisa
VALÈNCIA

"Grupo Cero"
VALÈNCIA

CARRILLO GALLEGO, Dolores
MURCIA

Escuela Universitaria Profesorado de E.G.B.

CASADEVALL, Martí
CARDEDEU (Barcelona)

"Grup Zero"
BARCELONA

CASALS COLL, Ignasi
SANT ESTEVE DE PALAUTORDERA (Barna.)

Escola "Ginebró"

CASANOVAS CASANOVAS, Jaime
PALMA DE MALLORCA (Balears)

Inspección de Bachillerato

CASELLAS, Esther
BARCELONA

"Grup Zero"
BARCELONA

CASTILLO ARAMBURU, Ma. Karmen
SAN SEBASTIAN

Escuela Universitaria Profesorado de E.G.B.
SAN SEBASTIAN

CENDROS FONOLLET, Josefina BARCELONA	Escola Estel BARCELONA
CERDAN PEREZ, Fernando VALÈNCIA	Escuela Universitaria Profesorado E.G.B. VALÈNCIA
CERVANTES, Carmen BARCELONA	
CERVELLO COLLAZOS, Teresa BARCELONA	I.N.B. nº1 SANT BOI DE LLOBREGAT (Barcelona)
CERVERA GALLEMI, Raimon VILAFRANCA DEL PENEDÈS (Barcelona)	"E. Montagut"
CLAVERA ORTIZ, Magdalena IVARS D'URGELL (Lleida)	I.N.B. "Bellpuig"
CLAVERIA PINA, Ma. Josefa LA LAGUNA(Sta. Cruz Tenerife)	C.N. "San Lufs Gonzalva"
COLOME PERICAS, Ma. Carme CORRO D'AMUNT (Barcelona)	Escola Cervetó
COMAS, Montserrat	"Grup Zero" BARCELONA
COMEMALE TISSEYRE, Martine LA ROCA DEL VALLÈS (Barcelona)	Escola Sant Jordi LA ROCA DEL VALLÈS (Barcelona)
COMPANY CRUSELLAS, Montserrat TERRASSA (Barcelona)	Escuela Municipal "Tramuntana"
BOMPOSTELA MUÑIZ, Benita	
COMPTA CREUS, Albert BARCELONA	I.N.B. "Torre Baró"
CONTRERAS PUJADAS, Mario MONTGAT (Barcelona)	Mireia Centre d'Estudis
CORBALAN YUSTE, Fernando ZARAGOZA	Instituto Mixto nº 10 ZARAGOZA
CORBERO, Ma. Victoria SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)	I.N.B. "Cerdanyola" CERDANYOLA DEL VALLÈS (Barcelona)
CORCOBADO CARTES, Teresa CACERES	Escuela Formación Profesorado de E.G.B.
CORDOBA RODA, Luisa SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)	Colegio "Oak House"
CUADRADO GOMEZ, Ma. Victoria MARTORELL (Barcelona)	I.N.B. "Pompeu Fabra"
CURTO SANCHEZ, Juan Antonio VALLDORÈIX (Barcelona)	"Jaime Ferran Clua"

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

DE LA CRUZ MARQUEZ, Francisco
CACERES

DEULOFEU PIQUET, Jordi
BARCELONA

DOMENECH AGUILA, José Ramon
IGUALADA (Barcelona)

DOMINGO GARCIA, Josep Ma.
VILASSAR DE DALT (Barcelona)

DRAGO PARIS, Leonor
BARCELONA

EGEA, Miquel
SABADELL (Barcelona)

ESCRIBANO MARTINEZ, Robert
BARCELONA

ESCUDE, Belen

ESTAFANELL, Joan
CARDEDEU (Barcelona)

ESTAUN FERRER, Ma. Antònia
TERRASSA (Barcelona)

ESTEVE RUESCAS, Gema
SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)

ESTRADA ROCA, Ma. Asunción
LLEIDA

ESTRUCH, Ma. Josep
BARCELONA

FABRA LASALVIA, Margarita
BARCELONA

FABREGAT, Cristina

FAYOS VALLES, Pilar

FERNANDEZ GARCIA, Angeles
SALAMANCA

FERNANDEZ LLEYDA, Elisa
SALOU (Tarragona)

FERNANDEZ MORAL, Emilio
LOGROÑO

FERNANDEZ SOLE, José
BARCELONA

"San Juan Bautista"

Escola Universitària Professorat E.G.B.
SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)

"Ntra. Sra. del Rosario"

"La Vall del Tenes"
VILASSAR DE DALT (Barcelona)

I.N.B. "Cornellà II"

C.N. "Pau Casals"

C.N. "Ntra. Sra. de Bellvitge"
L'HOSPITALET DEL LLOBREGAT (Barcelona)

"Grup Zero"
BARCELONA

"Grup Zero"
BARCELONA

Escola Cooperativa "Joanot Alisanda"
SABADELL (Barcelona)

Colegio Alemán
ESPLUGUES DE LLOBREGAT (Barcelona)

Escola Universitària del Professorat d'E.G.B.
LLEIDA

Centre de Salut
RIPOLLET (Barcelona)

I.N.B. nº1
CORNELLÀ DE LLOBREGAT (Barcelona)

"Grup Zero"
BARCELONA

I.N.B. "Fernando Rojas"
SALAMANCA

I.N.B. "Antonio Martí Franqués"

I.N.B. "Práxedes M. Sagasta"

FERNANDIZ DELICADO, Bernardo
VILLARROBLEDO (Albacete)

I.N.B.

FERRER, Bartolomé
MANRESA (Barcelona)

FIGUERA GARRETA, José Ma.
BARCELONA

I.N.B. "Infanta Isabel"
BARCELONA

FIOL MORA, Ma. Lluïsa
BARCELONA

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.
SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)

FOIX TARRE, Rosa
BARCELONA

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.
SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)

FONOLL SALVADOR, Joaquín
BARCELONA

C.N. "Virgen del Mar"
BARCELONA

FONSECA BOU, Cecilio
MANRESA (Barcelona)

FONT, Vicens

"Grup Zero"
BARCELONA

FONT CAMPDELACREU, Elisenda
BARCELONA

I.N.B.A.D.

FORTUNY AYMENI, José Ma.
BARCELONA

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.
SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)

FRANCO GONZALEZ, Gumersinda
EL MASNOU (Barcelona)

I.N.B. Mixto
EL MASNOU (Barcelona)

GALAN PELAEZ, Eduardo
VALÈNCIA

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.
VALÈNCIA

GALI CAMRPUBI, Francesc
ROSES (Girona)

GALI LOPEZ, Ma. Pilar
BARCELONA

I.N.B. nº 1
SANT BOI DE LLOBREGAT (Barcelona)

GARCIA DOZAGARAT, Juan Manuel
MADRID

GARCIA FERRER, Maite
BARCELONA

Colegio CELA

GARCIA GRANADO, Emiliano
MADRID

GARCIA LUENGO, Miguel
EL MASNOU (Barcelona)

"Mireia C.E."

GAYA BONNIN, Miguel
BARCELONA

GIBERT MOMBRO, Judith
BARCELONA

"Costa i Llobera"

INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

GIRO GRAMONA, Ma. Carmen
TARRAGONA

I.N.B. "Antonio Martí Franqués"

GISBERT GINER, Vicente
VALÈNCIA

I.N.B. "Clot del Moro"
SAGUNTO (Valencia)

GOMA NASARRE, Antoni
TORTOSA (Tarragona)

I.N.B. "Joaquin Bau"

GOMEZ ALFONSO, Bernardo
VALÈNCIA

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.

GOMIS, Elena
BARCELONA

"Grup Zero"
BARCELONA

GONZALEZ GARCIA, Sofía
LEON

I.N.B. "Ordoño II"
LEON

GONZALEZ GONZALEZ, Herminio
BARCELONA

C.N. "El Casalot"

GONZALEZ MARTINEZ, José Ramon
LEON

I.N.B. "Juan del Enzina"

GRAJAL ALONSO, Luis Antonio
LEON

I.N.B.
CAMINO DE LA RIBERA (Leon)

GRANELL TRENCO, Ramon Vicente
VALÈNCIA

Escuela Universitària Professorat d'E.G.B.
VALÈNCIA

GRASA ABAD, Fernando
BARCELONA

I.N.B. "Albeniz"

GRAU GASSO, Rosa
SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)

I.N.B. "Pau Vila"
SABADELL (Barcelona)

GREOLES COLL, Josep Ma.
BARCELONA

I.N.B. "Valldemossa"
BARCELONA

GRIFOLL SENTIS, José Ma.
BARCELONA

I.N.B. nº 1
SANT BOI DE LLOBREGAT (Barcelona)

GROS EZQUERRA, Maria José
LLEIDA

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.
LLEIDA

GUALS SALA, Ma. Ester
BARCELONA

I.N.B. "Pompeu Fabra"
BARCELONA

GUILERA ALMIRALL, Maria
BARCELONA

I.N.B. Mixto 2
L'HOSPITALET DE LLOBREGAT (Barcelona)

GUILLEN SOLER, Gregoria
VALENCIA

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.
VALÈNCIA

GUILLEN VILA, Ma. Coloma
BADALONA (Barcelona)

Escola "Pere Vergés"
BADALONA (Barcelona)

GUTIERREZ MONTSERRAT, Joan Maria
SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)

Sanzorrio F.P.

GUTIERREZ RODRIGUEZ, Angel
VALÈNCIA

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.
VALÈNCIA

HERAS PABLO, Ma. del Carmen
CACERES

Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B.
CACERES

HERNANDEZ ALONSO, Eulogio
SALAMANCA

I.C.E. Universidad de Salamanca
SALAMANCA

HERNANDEZ GARCIA, José Manuel
SALAMANCA

I.C.E. Universidad de Salamanca
SALAMANCA

HERNANDEZ SARDA, José Manuel
SALAMANCA

Instituto Politécnico

HERNANDEZ GOMEZ, Joaquin
LOGROÑO

I.N.B. "Práxedes Mateo Sagasta"
LOGROÑO

HERNANDEZ MARTINEZ, Honorato
LEON

I.N.B. "Juan del Enzina"
LEON

HERRERO RUIZ, Francisco
MADRID

HOLGADO, Gloria
BARCELONA

HUERTA GONZALO, Ma. Jesús
MURCIA

Centro Piloto I.C.E. Universidad de Murcia

IBÁÑEZ MARTINEZ, Ramon
L'HOSPITALET DEL LLOBREGAT (Barna)

Col·legi Casp

ISLA ARENAS, Blanca
PAMPLONA

I.N.B. "Ximénez de Rada"

JANE RUMEU, Pepita
BARCELONA

Institución "Garbí"

JAUSET MARTI, Pilar
BARCELONA

I.N.B. "Valldemossa"
BARCELONA

JIMENEZ, Joaquim
BARCELONA

Grupo Periódica Pura

JIMENEZ LAPENA, Carlos
BARCELONA

I.N.B. nº 1
CORNELLÀ DE LLOBREGAT (Barcelona)

JORBA, Jaume

"Grup Zero"

JUAN RIVAYA, Francisco
CORDOBA

Escuela Universitaria Profesorado de E.G.B.
CORDOBA

LAGARTOS RODRIGUEZ, Guillermo
LEON

I.N.M. "Ordoño II"
LEON

LEIRA RODRIGUEZ, Antonio
SAHUN (León)

I.N.B. "Sahun"
SAHUN (León)

LILLO BUEDO, José Antonio
MADRID

Escuela de Adultos
MADRID

LOPEZ ARIAS, Rocio
BARCELONA

C.N. "Joan Maragall"

LUELMO VERDU, María Jesús
LEON

I.N.B. "Legio VII"

LLADO, Carles
SABADELL (Barcelona)

I.N.B.
SABADELL (Barcelona)

LLOMBART IGLESIAS, Antoni
BARCELONA

I.N.B. nº 1
SANT BOI DE LLOBREGAT (Barcelona)

LLONGUERAS AROLA, Ma. Dolors
SABADELL (Barcelona)

Col·legi Vedruna
TERRASSA (Barcelona)

LLORENTE SITJAS, Pascual
BARCELONA

Universitat Autònoma de Barcelona
BELLATERRA (Barcelona)

MALET TOMAS, Antoni
ESPLUGUES DE LLOBREGAT (Barcelona)

I.N.B.
SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)

MARGALEF, Neus
BARCELONA

MARGINEDA ROMEU, Ma. Montserrat
BARCELONA

Colegio Alemán
ESPLUGUES DE LLOBREGAT (Barcelona)

MARIÑO SIEIRO, Miguel Angel
BARCELONA

I.N.B. "Miranda de Ebro"

MARTI, Carlos
BARCELONA

MARTIN MARTIN, Ma. Carmen
ALICANTE

I.N.B. "Francisco Figueras Pacheco"
ALICANTE

MARTINEZ DE ALBENIZ SALAS, Javier
BARCELONA

I.N.B. "Menéndez Pelayo"

MARTINEZ RECIO, Angel
CORDOBA

Escuela Universitaria Profesorado de E.G.B.
CORDOBA

MASSA ESTEVE, Ma. Rosa
BARCELONA

I.N.B. "Valle Hebrón" (Patronato Ribas)
BARCELONA

MASSUET TRIADO, Ana Ma.
BARCELONA

I.N.B. "Albeniz"
BADALONA (Barcelona)

MENENDEZ SUAREZ, Juan Manuel
LEON

I.N.B. "García Bellido"
ARMUNIA (León)

MESTRES GAVARRO, Joan
BARCELONA

Inspección de E.G.B.
BARCELONA

MINANO SANCHEZ, Antonio
MURCIA

C.N.M. "San Juan Bautista"

MOLINERO URTASUN, Juan José
TIANA (Barcelona)

Mireia C.E.

MOLLA MARTINEZ, Pascual
GRANOLLERS (Barcelona)

I.N.B. "Roser Pujadas"

MORA, José Manuel
BARCELONAMORENO ANGULO, Pilar
BARCELONA

I.M.I.P.A.E.

MORENO DIAZ DE LA ESPINA, Ma. Fernanda
BURGOSI.N.B. "Cardenal López de Mendoza"
BURGOS

MORENO, Paco

"Grup Zero"
BARCELONAMORON MARTINEZ, Josefa
BARCELONAI.N.B. "Pau Vila"
SABADELL (Barcelona)MOYANO BENITO, Jesús Ma.
BARCELONAI.N.B. "Luís de Peguera"
MANRESA (Barcelona)

MUJICA AICORTA, Margarita

MUÑOZ LUQUE, Isabel
MADRID

Escuela de Adultos

MUÑOZ FIGUERES, Elena
BARCELONAI.N.B. "Can Tunis"
BARCELONAMUÑOZ GARCIA, José Gabriel
BILBAONUS ESCOLL, José
BARCELONA

Colegio SIL

OLVA PASTORET, Joan
LA TALLADA (Girona)OLIVERA OSUNA, Angeles
ESPLUGUES DE LLOBREGAT (Barcelona)

C.N. "Joan Maragall"

OMS BAJENA, Pilar
VALÈNCIAEscuela Universitària Professorat d'E.G.B.
Universitat Laboral de Cheste
CHESTE (València)ORENGA VARA, José
SAN SEBASTIANI.N.B. "B. Bidebieta"
SAN SEBASTIANORERO CORTES, Juan Carlos
BENICARLO (Castellón)

Instituto de F.P.

ORTIZ CAPILLA, Angeles
MADRID

INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

PALACIOS DE BURGOS, Ma. Jesús
SEGOVIA

PAREDES REGO, José
LUGO

PASCAL LOZANO, Joaquín Ignacio
PAMPLONA

PASCUAL BONIS, José Ramón
PAMPLONA

PASCUAL SAMPERE, Ma. Rosa
BARCELONA

PEREZ JIMENEZ, Ma. Jesús
BARCELONA

PEREZ NAVARRO, Joaquín
MADRID

PEREZ SERRANO
CASTELLON DE LA PLANA

PEREZ ORTEGA, José Enrique
LEON

PERIS CERDA, Asunción
CASTELLON DE LA PLANA

PETIT VILA, Maria
BARCELONA

PONS BALLARIN, Ricard
BARCELONA

PRIMO MARTINEZ, Angel
SALAMANCA

PUEYO MONREAL, Ma. José

PUIG ESPINOSA, Luis
VALÈNCIA

PUJOL CAPDEVILA, Jaume
SABADELL (Barcelona)

PUJADES, Lluís
BARCELONA

PACHES GAUARA, José
BARCELONA

QUINTANA ZAMORA, Alfred
BARCELONA

Colegio Fingoy

Escuela Universitaria Profesorado de E.G.B.
PAMPLONA

Escuela Universitaria Profesorado de E.G.B.
PAMPLONA

Escola "Pere Vergés"
BADALONA (Barcelona)

I.N.B. "Torras i Bages"
L'HOSPITALET DE LLOBREGAT (Barcelona)

Escuela Universitaria Profesorado de E.G.B.
CASTELLON DE LA PLANA

I.N.B. "Juan del Enzina"

Colegio Sagrado Corazón

I.N.B. "Sant Josep de Calasanc
BARCELONA

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.
SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)

I.C.E. Universidad de Salamanca
SALAMANCA

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.
VALÈNCIA

I.N.B. "Egara"
SABADELL (Barcelona)

I.N.B. "Valle de Hebrón"
BARCELONA

I.N.B. "Sant Josep de Calasanc"
BARCELONA

RAJADELL SALVANS, Ma. Carmen
TERRASSA (Barcelona)

Col·legi Tecnos

RAS CLOSA, Montserrat
BADALONA (Barcelona)

RESTA CUEVAS, Antoni
VILAFRANCA DEL PENEDÈS (Barcelona)

"Montagut"

RIBA ROMEVA, Clara
BARCELONA

I.N.B. "Valle de Hebrón"
BARCELONA

RICHART ZAPATA, Manuel
CARTAGENA (Murcia)

C.N.M. "Ntra. Sra. del Mar"
CARTAGENA (Murcia)

RIU CANAMARES, Angela
BARCELONA

I.N.B. nº 2
CORNELLÀ DE LLOBREGAT (Barcelona)

RIVERA BARCINA, Rosa Ma.
BURGOS

I.N.B. "Cardenal López de Mendoza"
BURGOS

RIVIERE GOMEZ, Vicente
MADRID

RIOS CAMACHO, Carmen
BARCELONA

I.N.B. "Sant Andreu-Valldaura"
BARCELONA

RODRIGUEZ GIL, Xavier
SANT BOI DE LLOBREGAT (Barcelona)

I.N.B. nº 3
SANT BOI DE LLOBREGAT (Barcelona)

RODRIGUEZ VELA, Ines
LEON

Escuela Universitaria Profesorado de E.G.B.
LEON

ROSAS RUIZ, Francisco
MADRID

ROMANS SIGUES, Joan
BARCELONA

Colegio Niño Jesús
BARCELONA

ROMERO MORENO, Luisa Ma.
SEVILLA

ROS, Rosa Ma.
BARCELONA

ROVIRA CARBONELL, Maura
BARCELONA

Escola Thau

RUIZ CALDERON, Ma. del Corpus
BARCELONA

RUPEREZ PADRON, José Antonio
LA LAGUNA (Tenerife)

I.N.B. "Teobaldo Power"
SANTA CRUZ DE TENERIFE

RIBERA MARIMON, Ramona
IGUALADA (Barcelona)

I.N.B. "P.V.V."
IGUALADA (Barcelona)

SADURNI CAMPS, Ma. Carmen
BARCELONA

I.N.B. "Maragall"
BARCELONA

SALARA, Angel
VALÈNCIA"Grupo Cero"
VALÈNCIASALAVERT, Maria
BARCELONASALES RUFI, Josep
ESPLUGUES DE LLOBREGAT (Barcelona)Instituto Politécnico de F.P.
CORNELLÀ DE LLOBREGAT (Barcelona)SALINAS GARCIA, José Luis
BARCELONAF.P. "Provençana"
L'HOSPITALET DE LLOBREGAT (Barcelona)SANCHEZ BENITO, Mercedes
LOGROÑOI.N.B. "Estella"
LOGROÑO

SANCHEZ, Aurora

SANCHO BIESA, Anna Ma.
BARCELONAC.N. "Sagrada Família"
LA LLAGOSTA (Barcelona)SANS CIURANA, Jaume
BARCELONA

I.N.B. "Torras i Bages"

SANZ GOMEZ, Maria Jesús
LEONI.N.B. "Legio VII"
LEONSAURI PARDO DE ATIN, Ma. Luisa
BARCELONAColegio Oak House
BARCELONASEARA OJEA, Carlos
BARCELONA

I.N.B. Mixto n.º 4

SEGARRA NEIRA, Lluís
BARCELONA

C. "Anxaneta"

SEGU PADRON, Ma. Nieves
BARCELONA

I.N.B. "Torre Baró"

SEGUI ASIN, Ma. del Pilar
BARCELONAColegio Jesús-Maria
BARCELONASENTIS VILALTA, Pilar
BARCELONAEscuela Municipal "Tramuntana"
BARCELONASERIOL BARCELO, Joaquim
BADALONA (Barcelona)"Grup Zero"
BARCELONASERRA PUIG, Miquel
VALLDEMOSSA (Mallorca)Institut de Formació Professional
LLÚCMAJOR (Mallorca)SIERRA VEGA, Ma. Teresa
LEONI.N.B. "Legio VII"
LEONSOLA ARMENGOL, Xavier
CASTELL D'ARO (Girona)I.N.B. "Blanes"
BLANES (Girona)SOLA RUBIO, Antonio
SALOU (Tarragona)

I.N.B. "Antonio Martí Franqués"

SOLER CALVET, Núria
EL MASNOU (Barcelona)

I.N.B. "Masnou"
EL MASNOU (Barcelona)

TABUENCA MATEO, Jaime Ignacio
MIRANDA DE EBRO (Burgos)

I.N.B. "Miranda"

TANIGUCHI DIETRICH, Pablo
BARCELONA

I.N.B. "Eugeni d'Ors"
BADALONA (Barcelona)

TARRAGO GARI, Joaquim
SANT BOI DE LLOBREGAT (Barcelona)

I.N.B. n° 1
SANT BOI DE LLOBREGAT (Barcelona)

TEJEDOR PEREZ, Roberto
BARCELONA

Escola Tramuntana

TORMO SEVILLA, Ma. del Carmen
VALÈNCIA

I.N.B. "Carlet"
CARLET (València)

TORNERO GOMEZ, Pilar
MURCIA

I.C.E. Universidad de Murcia
MURCIA

TRÍAS CAPELLA, Rosa Ma.
BARCELONA

Col.legi Casp
BARCELONA

TRUJILLO ASCANIO, Pedro Eloy
LA LAGUNA (Tenerife)

C.N. Güimar
GÜIMAR (Tenerife)

UDINA, Manuel
BARCELONA

"Grup Zero"
BARCELONA

URRUTIA COBEAGA, Enrique
BILBAO

Instituto San Ignacio

UTZET CIVIT, Federico
BARCELONA

I.N.B. "Mercè Rodoreda"
L'HOSPITALET DE LLOBREGAT (Barcelona)

VAL·LES FANES, Eulàlia
BARCELONA

I.N.V. "Valldemossa"
BARCELONA

VALLS AUBERT, Xavier
ESPLUGUES DE LLOBREGAT (Barcelona)

Escola Universitària Professorat d'E.G.B.
SANT CUGAT DEL VALLÈS (Barcelona)

VALLS MOLINS, Ma. Núria
SANTA COLOMA DE GRAMENET (Barcelona)

VEIGA FERNANDEZ, Carmen da
MADRID

VERDOY BLANCO, Ana
TARRAGONA

"Companyia de Maria"

VIEDMA MARTINEZ, Mercedes
TERRASSA (Barcelona)

I.N.B. "Egara"
TERRASSA (Barcelona)

VICENTE GONZALEZ, Ma. del Carmen
PLENCIA (Vizcaya)

I.N.B.
PLENCIA (Vizcaya)

VICENTE MATILLA, Ma. del Pilar
LEON

I.N.B. "Ordoño II"

VIGATA BRUFAU, Juan
BARCELONA

Inspección de E.G.B.
BARCELONA

VILANOVA CLE, Concepción
BANYOLES (Girona)

Cultural "Casa Nostra"

XAMDO, Sebastian
BARCELONA

ZAIDIN VILLARRUBIA, Pino
BARCELONA

I.N.B. "Valle de Hebrón"
BARCELONA

jueves - 7

9	RECEPCIÓN - DISTRIBUCIÓN DE DOSSIERS - INAUGURACIÓN			Salón de Actos INB St.Josep
10	Sesión plenaria: Claude JANVIER Conferencia: Les representations graphiques.			Salón de Actos INB St.Josep
11	Pausa			
12	GRUP ZERO Un exemple. de metodo logia per BUP: la funció exponencial	E.RUBIALES Las calculadoras en la enseñanza de las mate- máticas Aula-1	R.CEMELI/J.ACHON Las calculadoras en la segunda etapa de EGB. Aula-3	P.GARCIA TERAN Coordinación entre EGB y BUP. Aula -5
1				
2	Pausa			
3				
4	GRUP ZERO Els nombres enters Aula-1	A.BLANCO Integración numérica con calculadoras Aula-2	GRUPO GAMMA Cálculo de logaritmos en base 2 y 10 con calculadoras	Aula-3
5	Pausa			
6	M.COBARRO El número entero en la EGB Aula-1	A.FABREGA Una introducció al nombre e i a la funció exponencial Aula-2	M.MARTIN Limite de sucesiones	Aula-3
7	Pausa			
8	CONFERENCIA : "150 anys de gènesi topològica : d'Euler a Poincaré" Por M.Castellet - Organitzada por "La secció de matemàtiques-Societat Catalana de Ciències." Lugar : Aula 5 Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona- Pza.Universitat.			

viernes - 8

9	Sesión plenaria: Carmen GOMEZ - IMIPAE		Salón de Actos	
10	Conferencia: Aprendizaje operatorio en matemáticas INB St.Josep			
Pausa				
11	M.A.CANALS Geometria a la 1ª Etapa Aula-1	GRUPO CERO Probabilidad al BUP Aula-2	R.ZAMARREÑO Límites y resolución de ecuaciones. Aula-3	C.D.M.SEVILLA Radicales y logar ritmos. Aula-5
12	Pausa			
1	M.D.BUSQUETS A-1 Aprenentatge de lògica dins una gòbalit.	J.JORBA /R.VILLALBI Experiència interdisciplinar Aula -2	GRUPO GAMMA Límites con la calculadora de bolsillo A-3	C.D.M.SEVILLA A-5 Las calculadoras en la enseñanza a BUP
2	Pausa			
3	Pausa			
4	Sesión plenaria: Gaston MIALARET Conferencia:	Aspects psychopédagogiques de l'enseignement des mathématiques Salón de Actos INB St.Josep		
Pausa				
5	M.R.BORRAS/P.VIADER Las paradojas lógicas A-1	Mesa Redonda: Las calculadoras en la enseñanza de las matemáticas. Coordina: J.M.YABAR		
6	SEMINARI DEL VALLES Prova inicial de ceneixement de 19 de BUP A-1	Salón de Actos INB Sant Josep		
7			M.GONZALEZ/R.HERNANDEZ Reciclaje en geometria del Profesorado E.Medid. A-3 J.AURRECOECHEA Una experiencia sobre probabilidad y combinatoria A-3	
8				

Sábado-9

9	Sesión plenaria : Claude JANVIER			Salón de Actos INB St.Josep		
10	Conferencia: Mathématiques dans des expériences biologiques					
Pausa						
11	C.D.M. SEVILLA Combinatoria	Aula-2	Mesa Redonda: Limites al BUP Coordina:GRUP ZERO	Salón de Actos INB St.Josep	A.LIBORI El signo igual	Aula-
12	Pausa					
1	M.COBARRO Educación personalizada de las matemáticas a la EGB	Aula-3	Mesa Redonda: La formación del profes- rado de Matemáticas de EGB y BUP	Salón de Actos INB St. Josep	J.F.MONTERO Sugerencias para la progra- mación de las matemáticas al BUP	Aula- 2
2						
3	Pausa					
4	C.D.M.SEVILLA Trigonometria	Aula-3	Mesa Redonda: Aplicación didáctica de la historia de las matemáticas	Salón de Actos INB St. Josep	M.Hernandez/M.González Producto escalar y geome- tria métrica	Aula -2
5						
6	Pausa					
CLAUSURA DE LAS JORNADAS				Salón de Actos INB St.Josep		
7						
8						



UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
INSTITUT DE CIÈNCIES DE L'EDUCACIÓ

PRIMERAS JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE
Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Exposición Permanente de material audiovisual
para la enseñanza de las matemáticas

Simultaneando las ponencias que se realizarán durante estas jornadas (días 7, 8 y 9), se desarrollará una exposición de material didáctico en imagen fija y cine a la que podrán asistir cuando lo deseen todas las personas que estén inscritas.

Jueves, 7 de Mayo

Mañana, 11,30 h.: Donald en el país de las Matemáticas,
16 mm. (30 min)

Mañana, 12,30 h.: Ejercicio lógico a propósito de los
coches, 16 mm., (20 min)

Mañana, 13,00 h.: Noción de orden, 16 mm. (20 min)

Tarde, 3,30 h.: Simetría, 16 mm. (15 min)

Tarde, 4,00 h.: A.V. sobre la enseñanza de la estadística (diapositivas), (15 min)

Tarde, 4,30 h.: Introducción a la ley binomial, 16 mm.
(30 min)

Tarde, 5,00 h.: Álgebra y Teoría de conjuntos, S-8,
(30 min)

Tarde, 5,30 h.: Codificaciones y Simetría. 1a. parte.
16 mm. (30 min)

- Todas las películas se pasarán en versión original.

- El viernes, 8 y el sábado, 9 continuarán las proyecciones de películas. El horario se anunciará oportunamente.

- Se proyectará también la colección de diapositivas correspondiente a la exposición "Matemáticas en la realidad" celebrada en la Escuela Normal de Sant Cugat. Las horas y el lugar se darán a conocer previamente.

POSICION DE LIBROS DE TEXTO+EXPOSICION DE CALCULADORAS+PROYECCION DE MATERIAL
AUDIOVISUAL+EXPOSICION DE LIBROS DE TEXTO+EXPOSICION DE CALCULADORAS+ PROYECCION
MATERIAL AUDIOVISUAL+EXPOSICION DE LIBROS DE TEXTO+EXPOSICION DE CALCULADORAS

* Exposicion de libros de texto

Durante los dias 7,8 y 9 de mayo existirá en el
AULA 8 una exposición permanente de libros de
texto de Matemáticas para EGB y BUP.

* Exposición de calculadoras

Durante los dias 7 y 8 de mayo existirá en el
AULA 8 una exposición de calculadoras y micro-
ordenadores.

Hewlett-Packard realizará una explicación de las
posibilidades de las máquinas que expondrá los dias

7- jueves - 3h. 30min. AULA 8

8- viernes - 5h. AULA 8

S. A. E. M.
THALES

* Proyección de material audiovisual

Durante los dias de las jornadas se proyectarán películas
didácticas sobre matemáticas así como proyección de diapo-
sitivas y transparencias. Dentro del apartado de proyección
de diapositivas queremos resaltar la proyección de una
colección sobre la exposición "MATEMATICA NELLA REALTA"
realizada por Emma Castelnuovo en la Escola de Formació
del professorat d'EGB de Sant Cugat del Vallès.

ATENCION- PARA MAYOR INFORMACION SOBRE ESTAS ACTIVIDADES MIRAR EL PROGRAMA
QUE APARECERA EN CARTELES CADA DIA-ATENCION-PARA MAYOR INFORMACION SOBRE ESTAS
ACTIVIDADES MIRAR EL PROGRAMA QUE APARECERA EN CARTELES CADA DIA.- ATENCION

Claude Janvier

Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A
Montréal, H3C 3P8

READING CARTESIAN GRAPHS FOR UNDERSTANDING

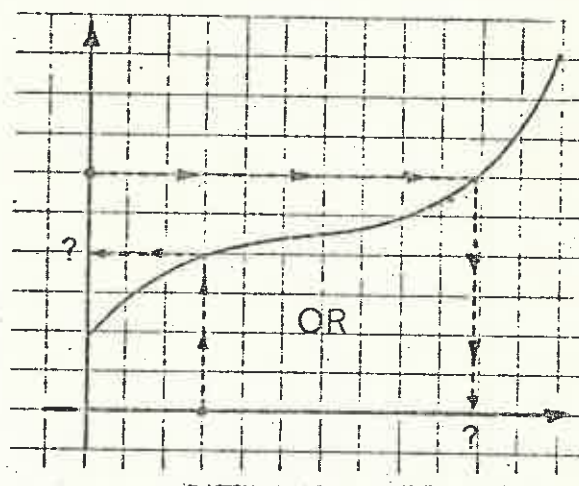
Short Communication
presented at ICME IV
(4th conference of the International
Commission of Mathematical Instruction)
10-16 August 1980

Current programme practices

In a recent research project (JANVIER [1978]), we have studied the process of interpreting cartesian graphs representing situations. This work has revealed a fair number of reading skills and curriculum aspects concerning graphs generally overlooked and to which this paper is devoted.

The gross incompetence of secondary level pupils at reading and understanding graphs is a well known fact from science and mathematics teachers. A recent survey made in England by D. KERSLAKE at the secondary level has unequivocally corroborated teachers' impressions. The questionnaire used in KERSLAKE [1977] involved essentially graphs covered by school programmes. It showed basically that pupils only master the point by point technique of reading and plotting graphs (which is actually emphasised at school).

In other words, they can perform the simple mechanical eye motions (helped by their fingers perhaps!) suggested by the picture appearing on the right



But, as soon as decimals or fractions are involved the facility drops sharply. Clearly questions dealing with rate of change, gradient, density of the real numbers, equations turned out, as expected, to be quite difficult.

In our research project, apart from looking for the skills involved in graphical competence, we equally attempted to find out programme deficiencies responsible for pupils' difficulties. We devised about 12 tasks with which we interviewed twenty pupils: 7 in 1st year, 7 in 3rd year and 6 in 4th year (secondary level). Written versions of the tasks were used as pre- and post-tests in a teaching experiment.

Improvements: Global features on complex graphs

Early in our research, it appeared that complex cartesian graphs, namely: those not made of line segments or obtained from an equation (example on the right) are essentially absent from programmes and consequently, with them a large number of relevant graphical features particularly important in Science.

After a few months of investigation, the notion of graphical global features was defined as a particularity of a graph that is connected or related to an interval, or that has to be apprehended by more than a point-by-point process. Here is the list we used:

1. maximum and minimum
2. intervals over which a function increases (decreases)
3. intervals over which a variable (or the image of a given function) is less than, greater than, or equal to a given constant (plateau)
4. drops and rises of curves between two plateaux or two extreme points (measure and comparison)
5. the family of curves obtained by translating a given curve "upwards", "downwards" or sideways and the consequences of such translations
6. discontinuities
7. patterns giving rise to cycles
8. steady rates of change (involving comparison and measure)
9. the nature of changes in non-steady rates of change (comparison and measure)
10. symmetry
11. extrapolation, interpolation, (asymptotes)
12. dispersion of a graph and differences in shape measured by area
13. many curves on the same graph (in that case the curves may exhibit several global features listed above)

As a matter of fact, a close and recent (1980) examination of several British and Americal series of textbooks revealed that:

- 1) the sketching of graph is rarely asked of the pupils;
- 2) they generally plot a graph from a table and are asked questions which they could as easily tackled from the table;
- 3) from 1) and 2), we see that graphs are used more like tables than for what they are with all the aspects they can display;
- 4) graphs are also plotted from equations but continuous graphs made by recording devices are absent.

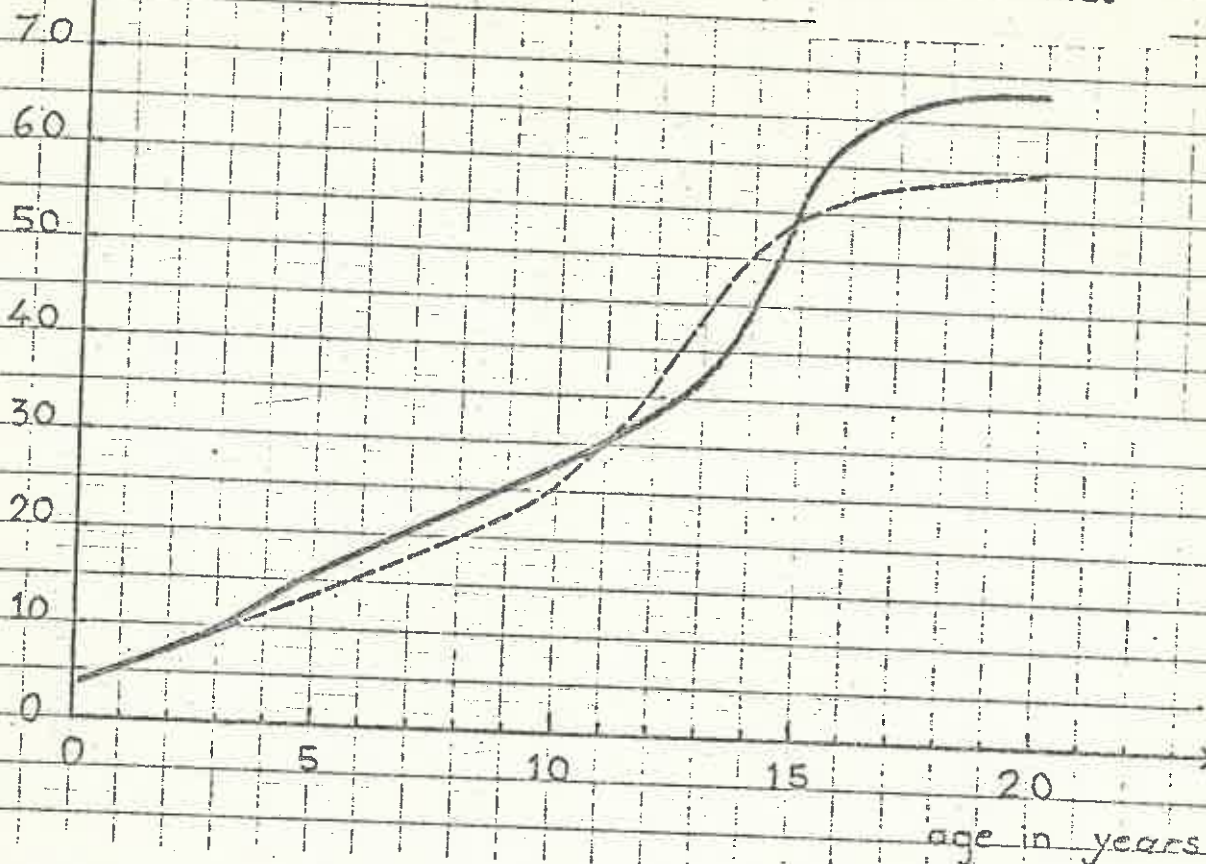
Global
Feature
Invol

- Note:** Evaluate sometimes means compare
ones or more over an interval

42

Weight (average)
in
Kilogrammes

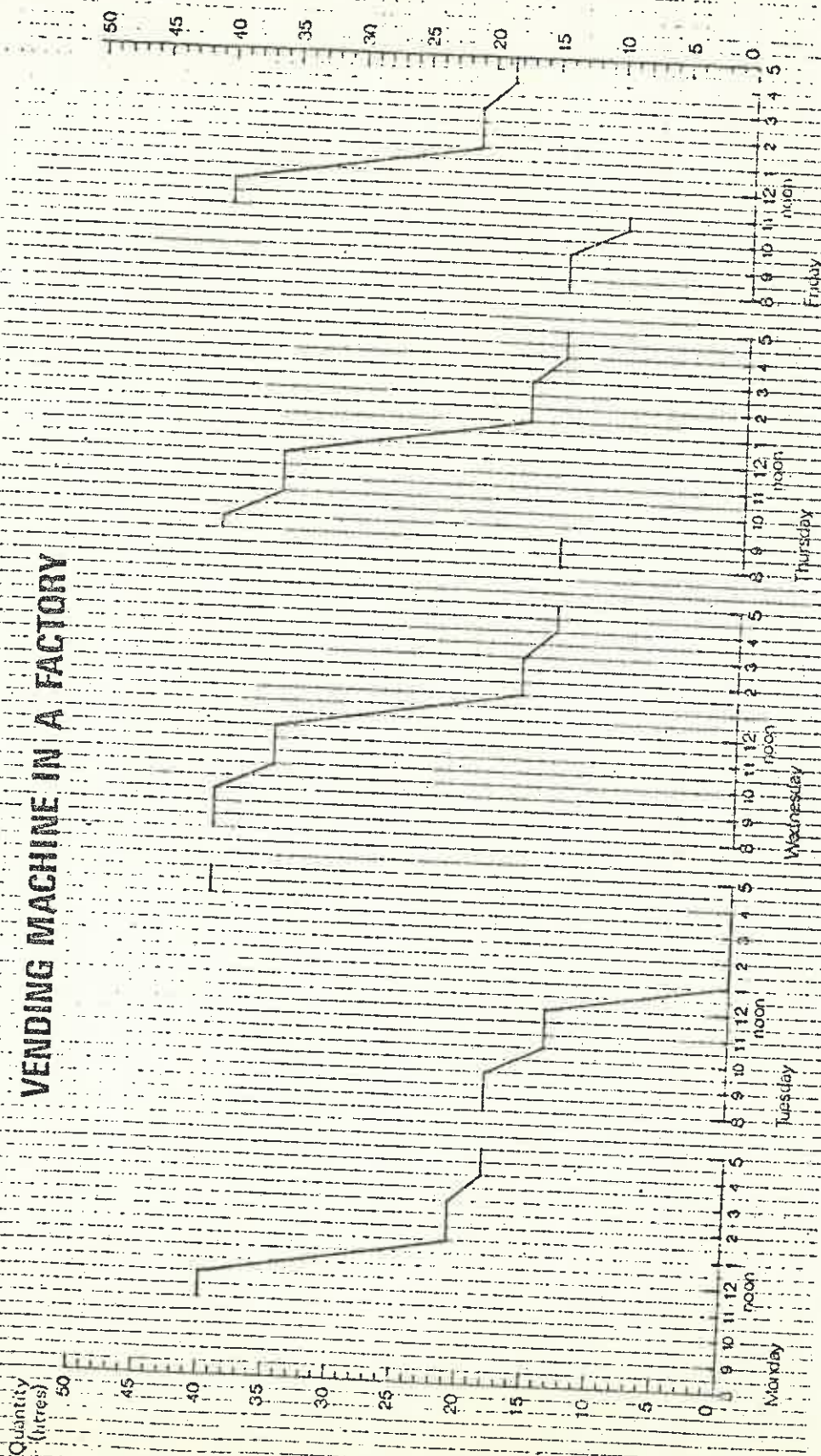
— : BOYS
- - - : GIRLS



1. The average weight of boys at age 9 is
2. The average weight of girls at age 17 is
3. From what age do the boys on average weigh more than 55 kilogrammes?
4. From what age do the girls on average weigh more than 20 kilogrammes?
5. When (at what ages) do the girls weigh more than the boys?
6. By how many kilogrammes does the average weight of girls increase between age 3 and age 8?
7. At what age do the girls put on weight most rapidly?

One more example

VENDING MACHINE IN A FACTORY



4. Vending Machine (Interview)

Presentation

The interviewer starts by making sure that the pupils know that machines selling coffee, cigarettes... are also called vending machines. He then goes on: "Imagine you have a huge vending machine in a factory selling just one sort of mineral and from which the workers take their drinks. Now, a little recording device was put in the machine at the beginning of the week by the man looking after the machine. The device records the quantity of minerals in the machine all the time during the week, and gives a graph. Here it is (graph 4.1 is quickly shown to the pupil and replaced by another one showing only Wednesday). But, since, for a start, this one is a bit complex we are going to have a look first at Wednesday."

Question 1. (on a sheet showing Wednesday's graph) (Wednesday)

"So, this graph shows us the amount of minerals in the machine in litres (pointed to) at any moment on Wednesday. You see (pointing the relevant elements) from 8 in the morning till 5 in the afternoon".

"Can you tell, from the graph, what happened on Wednesday?"

Question 2. (Tuesday)

"Let us look on another day, before going to the entire week"

"This is Tuesday's graph. What happened on Tuesday?"

Question 2* (Refill Tuesday)

"What it refilled on Tuesday?"

Question 3. (Friday)

"What happened on Friday?"

Question 4. (How many times)

"How many times was the machine refilled during that week?"

Question 5. (Lunch time)

"Do they start drinking at the same time for lunchtime each day?"

"Do they drink the same amount every day at lunchtime?"

"What about Wednesday, Tuesday and Friday?"

Question 6

"Do they have their afternoon break at the same time each day?"

"Do they drink the same amount during those breaks?"

Question 7

"Do they drink more in their afternoon break, or more in their morning break?"

Question 8 (Refill time changeable)

"At 9 on Thursday, the machine was refilled as you said. Do you think he could have come later in the morning and the machine would not have sold out? (If hesitation, do you think he could have come at 11.30 for instance?). Do you think he could have come in the afternoon? (If no answer or confusion, one directly goes to question 9).

Question 9

Same question on Friday.

Objectives

This task aims at:

Testing how easily the drops, plateaux and discontinuity can be respectively identified with "man drinking", "no one drinking" or "machine empty" and "machine refilled".

Testing how meaningful graphical features are handled in questions calling for comparisons and measurements.

Probing the nature of the relationships between mental representations and graphical support, relationships entailed by our questions.

We shall now present a few results obtained from the first two graphs we used during the interviews, namely: the two examples we have shown.

Reading strategies and techniques

§

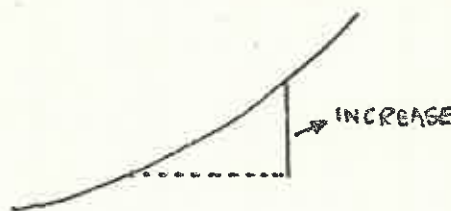
GROWTH CURVES

Grid-reading

To evaluate the increase or drop of a variable over an interval (see question 6 on "weight curves" and most questions in "vending machine" there are several methods available. The pupil, after two readings, can make an arithmetic difference between two weights or he can measure the difference represented by a segment on the weight axis. A third method consists of

measuring the "increase segment" right on the graph using the grid as reference and without going back to the axis.

Obviously we did not teach anyone a method in the explanation.



We observed no signs of anyone availing themselves of the third strategy. Several pupils, using the second one, ran into graduation trouble using the square as one unit.

Relative and non-systematic reading

Interpretation requires that pupils have an overall picture of the situation depicted on a graph. In a few tasks, we asked of the pupils the "story the graph tells". We then observed that relative-reading, more precisely a description provided in relative terms such as: more, less, very much, most... could be achieved by a few. Clearly. School encourages "absolute" reading and also systematic reading which is also due to pupils' personalities. Systematic reading is carried out from left to right and the eyes does not at first scan what appears to be prominent. We did not ask any story on the "growth curves." But the "vending machine" problem has provided us with interesting examples.

Interpolation, scales and types of paper.

Many pupils needed help to subdivide the square into five equal parts in order to read correctly. We noticed in our tasks in general that pupils meet various troubles because of the way the axes are scaled (subdivisions) and graduated (the marking numbers). In both cases, the pupils must fill in a gap using a rule more or less readily available from the scale or the graduation. Although this "mental completion" would perhaps turn out to be relatively simple when the pupils work only on one axis, the situation is

• Grid-reading.

In this task, probably because of the fact that one square is a unit wide, the pupils throughout the answering to the first question learnt either to associate a quantity to a segment on to read the amount of a drop using directly the squares of the grid. In other words, the became what we like to call grid-readers. As you see grid-reading is a technique allowing an exact and quick reading of several global features.

• Relative and non-systematic reading

First, we have an example of a perfect systematic absolute style of reading

BAR *"From 8 till 9.30 there are 40 litres in the machine.
At half-past nine, the workers start to drink. They
drink....er...35.5...4.5 litres. Afterwards they
don't drink till....er 12. And then at 1.30, there is
16.5 litres in the machine. So, they drank (a calculation)
19 litres..."*

Let us give two more examples and ask you to imagine the full double spectrum of the stories.

CRA: (NON-SYSTEMATIC, RELATIVE) *"It drops quite a lot from 12 till 1.30.
But in the morning it does not drop so much..."*

JAM: (SEMI-SYSTEMATIC, ABSOLUTE) *"There is 40 litres in the morning
and there is 14 at the end." (The rest goes on with absolute
values.)*

• Interpolation, scales and types of paper.

Clearly, the "growth curves" single out that we should in class use graphs with a wider variety of scales and graduations on both axes. The "vending machine" problem tells us more. Each horizontal line representing a multiple of five (0,5,10,...) was darker (does not show there), but there were no such dark vertical lines. As a result, pupils experienced difficulties they could not overcome even using their fingers. They asked (most of them) for a ruler and used plastic cassette boxes to keep the "right vertical lines". This observation indicates that we also rarely use (perhaps never) in mathematics graph papers with a variety of darker line patterns which help the reading and even simplify and promote grid reading.

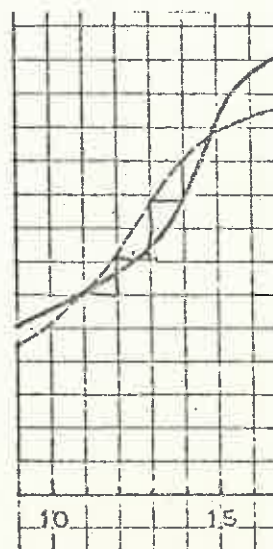
Conclusions

A) Let us summarize firstly the context of this paper.

1. We have seen that ~~complex graphs involving global features~~ are almost absent from today's mathematics programmes.
2. We have attributed this absence to the fact that graphs are too exclusively connected with tables and equations. Some sketching activities should appear more frequently, present programmes do not go beyond plotting exercises.
3. ~~Interpretation~~ reading strategies are not developed early enough at the secondary level, namely: grid-reading and relative reading.
4. Grid reading and relative reading insure a better understanding (or interpretation) of graphs representing situations.
5. Interpolation in reading should be more emphasized and we suggested also the frequent use of various scales and graduations on the same graph.
6. The types of paper with various grids of darker lines which facilitate the reading are frequently used in science and should be utilised more often in mathematics textbooks.

B) Let us go a few steps further.

- 1) As far as teaching methods are concerned, the idea of doing a stair case analysis of complex graphs turned out to be very productive in our teaching experiments. It stresses many details regarding the "fluctuations" of a variable and should be used by teachers.



- 2) Many important mathematical ideas such as: gradient, derivative, differential, rate of change, integral are implicitly contained in cartesian graphs. We believe that an early contact with those ideas in graphical terms establishes a good intuitive background for a future more formal approach.

REFERENCES.

KERSLAKE, D. (1977): The Understanding of Graphs. Mathematics in Schools. Vol. 6-2.

JANVIER*, C. (1978): The interpretation of complex cartesian graphs representing situations - studies and teaching experiments. Ph. D. dissertation. University of Nottingham.

* A few subsidised copies of the dissertation is available from the author for \$10.00

ADDRESS : CLAUDE JANVIER
département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case postale 8888, Succursale "A"
Montréal, Qué. H3C 3P8

TRANSLATION PROCESSES IN MATHEMATICS EDUCATION

Claude Janvier

Dept. of Mathematics, Université du Québec à Montréal, Qué. Canada

In addition to the usual (but too often overlooked) geometrical figures which in many respects are abstract, "the repertoire" of modes of representation is extensive: Venn diagrams, tree diagrams, Cayley tables, arrow graphs, flow diagrams, cartesian graphs... as well as letters, numerals in various positions, brackets,... (Bell, A.W., 1976). Even from a pedagogical point of view, most text-books today make use of a wide (if not wild) variety of diagrams and pictures meant to promote understanding. Everyone certainly agrees that the use of symbolism in mathematics thinking is fundamental.

However, particular uses of symbolism appear generally to be overlooked, namely: the translation processes. By a translation process, we mean the psychological processes involved in going from one mode of representation to another, for example: from an equation to a graph.

In recent years, Lesh (1979) points their importance in real problem solving and Burton, L. (1979) in an inventory of problem-solving skills mentions the notion of translation in her list. Burkhardt, H.* (1977) stresses their crucial role in mathematical modelling. Bell, M. (1979) identifies this fundamental component of mathematical competence. Bessot, A. and Richard, F. (1979) conducted a research on tree diagrams and graphs. It is not easy to repertoriate the literature dealing with translation processes since quite often the idea is tackled indirectly. For instance, researchers concerned with the notions of models, intuitive models (for example, see Fischbein, 1977) implicitly touch upon this question.

We personally got interested in this topic in a recent research project dealing with the "Interpretation of cartesian graphs representing situations" (Janvier, C. 1978).

We have selected seven points on which we shall briefly report our findings in this paper. During our talk, we shall illustrate most points with examples and we invite the participants to share their experience.

* To whom we extend our thanks for the idea.

1. The question of giving names

If we limit the modes of representation of variables to four, namely: verbal description, table, graph and formula (equation), we can represent translation processes in the context of handling variables by a 4X4 table.

TRANSLATION PROCESSES

To From	Situations, Verbal Description	Tables	Graphs	Formulae
Situations Verbal Description		Measuring	Sketching	Modelling
Tables	Reading		Plotting	Fitting
Graphs	Interpretation	Reading Off		Curve Fitting
Formulae	Parameter Recognition	Computing	Sketching	

The reader most probably feels a little uneasy about how a few cells were filled in, or about the names given to a few processes. He is kindly invited to fill those cells from scratch and discover the source of his hesitation. In fact, the quasi-impossibility of defining (at least uniquely) a few processes arises from the ill-defined context in which a particular translation is achieved. Despite this limitation, this array is very useful in that it gives a total picture of the question and helps us to single out and illustrate a variety of its aspects.

The reader has noted that we did not fill the diagonal. In fact, such processes exist which we could call transposition.

2. Direct or indirect?

Let us simply look at a sub-table for the time being (setting aside the verbal description, sometimes of situation).

TRANSLATION PROCESSES

To From	Situations, Verbal Description	Tables	Graphs	Formulae
Situations Verbal Description		Reasoning	Sketching	Formulating
Tables	Formulating		Plotting	Fitting
Graphs	Interpretation	Reading Off		Curve Fitting
Formulae	Reasoning Interpretation	Computing	Sketching	

As you notice, a few arrows are now added to account for alternative ways to achieve translations. More precisely, these arrows indicate that the translation "table $\rightarrow$ formula" is often carried out as "table $\rightarrow$ graph $\rightarrow$ formula" and "formula $\rightarrow$ graph" as "formula $\rightarrow$ table $\rightarrow$ graph". Actually indirect processes are substantially different than direct ones. A study of several mathematics programs has showed that they exclusively develop the indirect version of many processes of the tables. Could we do otherwise? Would it be worthwhile?

3. The source and target paradigm

A translation involves two modes of representation. For the modes equation and graph, for instance, we have the translations: "graph $\rightarrow$ equation" and "equation $\rightarrow$ graph". To achieve directly (and correctly) a given translation, one has to transform the source "target-wise" or, in other words, to look at it from a "target point of view" and derive the results. For instance a graph has to be examined equation-wise (with respect to its equational features). This simple comment suggests teaching strategies as well as points to the importance of the inverse process (which we prefer to call complementary) which is symmetrically located with respect to the diagonal. In fact, our research suggested that processes were best developed in (symmetric) pairs, in our case: "graph $\rightarrow$ verbal description" (interpretation) and "verbal description $\rightarrow$ graph" (sketching). This principle is already applied by those teaching methods of foreign language which stress "listening" and "talking" in language laboratory.

4. The role of language

We have just stated that the source has to be examined "target-wise" but our research results equally show that in the process language or words play a central role. Actually, we noted that verbal tags were given to the relevant elements and the execution of the process was carried out through an efficient handling of those verbal tags. In a way, source and target were verbally simplified. Even in a "graphical context", the speech appeared to be essential.

5. Application to the teaching of music

Clearly, this type of analysis can be applied to other areas of mathematics (proportion, arithmetic operations...) and other domains of education. We shall take very easy examples of a process involved in music, namely some related to a single note. We shall distinguish four modes of representation of a single note: the sound (vibration in the air), the act of playing it (position of finger(s), body...), the name of the note (ex.: A or La) and its written symbol on the staff. We can consider then all the questions posed so far on the following table.

TRANSLATION PROCESSES

To From	Vibrating note	Played note (action)	Name of note	Symbol on staff
Vibrating note		Play by ear	Tell name of a note	
Played note (action)				
Name of note	Sing			
Symbol on staff	Sing		Read music	

- You see that we have not given names to all cells!
- Play by ear: "vibrating note (heard) → played note (action)" is a direct process. For many, the process is often impossible or sometimes achieved

indirectly: "vibrating note → name of a note → played note".

c) Traditional teaching method stresses the process "name of note → played note" while the Suzuki method is based on the process "vibrating (heard) note → played note (action)".

d) Look at how inverse processes are interrelated!

6. More complex thinking processes in mathematics education

This section states opinions rather than research observations.

We believe that the study of generalisation, abstraction, proof, symbolisation... could be made more meaningful if they were considered as made out of basic translation processes.

The study of intuition should equally gain from using the "translation process" framework. We believe with Fischbein that intuition are based on schemas, verbal descriptions... which are implicitly used in action. We think that the development of intuition is often related to the development of processes which are subsumed and later called into play.

7. Translation processes and curriculum designs

Using the idea of translation processes involving variables, we carried out in our Ph.D. dissertation * (Janvier, 1978) a comparison between two mathematics programs which proved most interesting as for the improvements it suggested. Translation processes for other topics could be used fruitfully.

CODA (only to be discussed next year)

Lately, we have been studying the question from different points of view. To answer the question: "Is there anything behind all those modes of representation?", we are inquiring about answers semiology (science of meaning) could give. Also, since each mode has its intrinsic level of complexity, we wonder how the theory of information and the idea of entropy could help out.

* Subsidised copies can be obtained from the author for \$10.00.

REFERENCES

- Bell, A.W. The Learning of General Mathematical Strategies. Ph.D. dissertation. Shell Centre for Math. Education, University of Nottingham, 1976.
- Bell, M. What Most People Need From Mathematics: Teaching Mathematics so as to be useful. Unpublished one page paper, 1979.
- Bessot, A. and Richard, F. Commande des variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement de procédures en vue d'étudier le rôle du schéma. Thèse collective de 3e cycle, Université de Bordeaux I, 1979.
- Burkhardt, H. Seven sevens are fifty? Mathematics for the real world. Inaugural Lecture. Shell Centre for Math. Education Publication, University of Nottingham, 1977.
- Burton, L. The classification of problem-solving skills and procedures - presentation of an inventory. Proceedings of the 3rd International Conference of IGPME, Warwick, 1979.
- Fischbein, E. Image and Concept in Learning Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 1977, 8, 153-165.
- Janvier, C. The interpretation of complex cartesian graph representing situations - studies and teaching experiment, Ph.D. Dissertation, University of Nottingham, 1978.
- Lesh, R. Some Trends in Research and the Acquisition and the Use of Space and Geometry Concepts. Critical Reviews in Mathematics Education, Materialien und Studien, Band 9. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1979.

LES GRAPHIQUES CARTÉSIENS DANS L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES.

Par M. Claude Janvier, professeur de didactique des mathématiques à l'UQAM.

Les enseignants en sciences des niveaux secondaire et collégial dénoncent régulièrement l'incompétence de leurs élèves en mathématiques. Même ceux qui songent à remplacer les équations par les graphiques ne sont guère plus enchantés. « Les étudiants ne savent pas lire les graphiques » entend-on constamment d'enseignants désenchantés. Il convient, tout de même, de souligner que l'utilisation plus généralisée de graphiques cartésiens dans l'enseignement des sciences est une tendance plutôt récente. Qu'on se reporte à un passé encore récent (15 à 20 ans) pour constater l'exclusivité de la formule et de l'équation ou de la description verbale dans l'étude de phénomènes où une « explication » graphique aurait pu simplifier la présentation. Malgré un recours plus systématique aux graphiques cartésiens dans les manuels de science d'aujourd'hui, peut-on affirmer cependant que la situation s'améliore ?

LA RECHERCHE DONNE RAISON AUX ENSEIGNANTS EN SCIENCES.

Une étude, effectuée en Angleterre par D. Kerslake (Voir [1]) auprès d'environ 1 400 élèves des niveaux secondaire* II, III, IV et dont les résultats sont, dans les grandes lignes, confirmées par des travaux personnels, montre à quel point les élèves ont des difficultés avec les graphiques cartésiens. Notons que, dans l'ensemble, les taux de réussite (pourcentage de bonnes réponses) des trois niveaux pour chaque question, diffèrent rarement de plus de 10%, les élèves de secondaire II étant occasionnellement meilleurs.

Lecture point par point

Le seul type d'exercice que les élèves maîtrisent véritablement (taux de réussite 90-95%) est celui qui consiste à lire un graphique point par point, ou bien à porter un point dans un système d'axes. Cependant, il faut que le problème mette en jeu des variables familières ou encore que le graphique représente un phénomène simple, car si le point est donné (ou exigé) sous forme de couple, les inversions peuvent atteindre jusqu'à 33%. Les taux de réussite (t.r.) dans ce type de problème mais

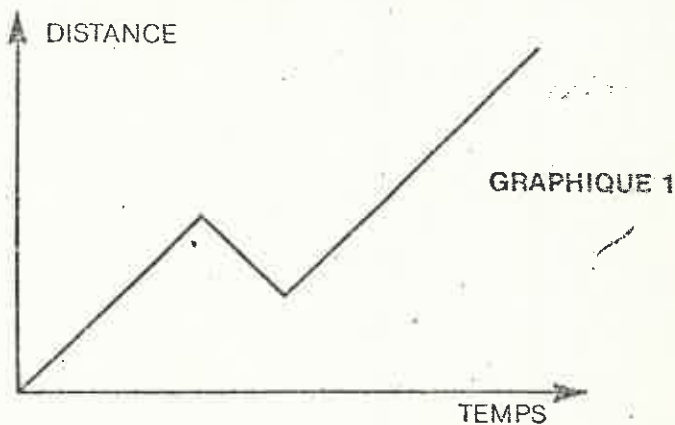
impliquant des nombres décimaux sont aussi de beaucoup inférieurs à 90%.

Équation, pente, droite

Les questions reliées à ces notions ont des t.r. lamentables. Par exemple, porter des points dans le plan cartésien à partir d'une équation telle que $y = 2x + 3$ a un t.r. de 40% (en sec. IV) et 25% (les autres). Trouver des équations simples à partir de graphiques (au programme, en Angleterre) a un t.r. de 5% ($x + y = 2$) à 20% ($y = 2x$). Les relations entre, d'une part, la notion de pente et, d'autre part, les triangles semblables ou le parallélisme donnent des t.r. de 5% à 10%.

Interprétation

Malheureusement, l'idée de taux de variation d'une variable n'est pas véritablement abordée dans le questionnaire. Lorsque l'on demande d'écrire l'« histoire relatée » par un graphique, il arrive fréquemment que les élèves confondent les variables et se laissent distraire par divers facteurs. Par exemple, les élèves interprètent souvent le graphique suivant, qui donne la distance parcourue en fonction du temps, de la manière suivante : « On monte une montagne, on descend et on remonte ».



Sur cette question en particulier, D. Kerslake conclut : Dans l'ensemble, plus d'élèves ont une conception fautive de ce graphique qu'une bonne.

* L'école primaire en Angleterre commence à 5 ans et dure 6 ans.

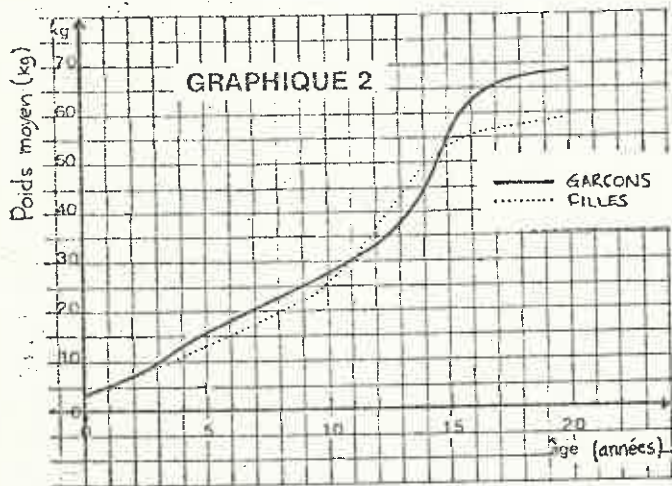
† Lorsqu'un seul pourcentage est fourni, il s'agit du pourcentage médian (arrondi à 5%) lorsque l'écart entre les trois niveaux est moins de 10%.

On peut donc affirmer, à partir de ces résultats, que les critiques formulées par les enseignants sont tout à fait fondées surtout si l'on considère que l'étude, dont on vient de présenter les résultats, se restreint à ce qui appartient aux programmes de mathématiques des niveaux inférieurs à secondaire V. Un travail de recherche, réalisé récemment (voir [2]), nous a permis de constater qu'il existe une inadéquation manifeste entre les programmes de mathématiques (partout à travers le monde) et l'utilisation que l'on fait des graphiques cartésiens en sciences.

LES GRAPHIQUES CARTÉSIENS ET LES SCIENCES

Les types de graphiques.

L'étude des graphiques en mathématiques se résume, en pratique, aux représentations des équations et fonctions : avant secondaire V, équations de la droite et de la parabole ; en secondaire V, fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques (surtout). Bien entendu, on aborde tôt au niveau secondaire les diagrammes circulaires (pie-chart), les diagrammes à bâtons et les diagrammes à lignes brisées (trend graph ou line graph). Cependant, on ignore les représentations de variables continues, comme le graphique suivant qui n'a sa place nulle part au niveau secondaire en mathématiques.



1. Quel est le poids moyen des garçons âgés de 9 ans?
2. Quel est le poids moyen des filles âgées de 17 ans?
3. A quel âge les garçons ont-ils un poids moyen supérieur à 55 kg?
4. A quel âge les filles ont-elles un poids moyen supérieur à 20 kg?
5. Quand les filles pèsent-elles plus que les garçons?
6. De combien de kg le poids moyen des filles augmente-t-il entre 3 et 8 ans?
7. Quand les garçons gagnent-ils du poids le plus rapidement?

Nous avons désigné sous le vocable de *complexe* ces graphiques ne représentant pas une équation simple ou encore n'étant pas constitués de segments de droite.

Caractéristiques globales : habiletés et activités qui y sont rattachées.

Notre étude nous a également permis de constater que, même dans le cas de représentations graphiques de fonctions plus avancées (en secondaire V), les programmes de mathématiques, dans l'ensemble, négligent dans leur contenu ce que nous avons appelé les *caractéristiques graphiques globales*. Nous désignons, par cette expression, ces caractéristiques qui sont rattachées à un intervalle ou bien qui exigent, pour être appréhendées, un processus qui dépasse le « point-par-point » ou, plus précisément, une perception ponctuelle. En voici une liste abrégée :

- intervalle de croissance.
- maximum et minimum
- intervalle où une variable est plus grande qu'une constante donnée
- cycles et périodicité
- taux de variation constant
- changement dans un taux de variations
- interpolation, extrapolation
- plusieurs courbes sur un même graphique

Ces éléments peuvent, occasionnellement, apparaître au programme mais, rarement, donnent-ils lieu à des activités d'ordre graphique.

À chaque caractéristique globale correspond un certain nombre d'habiletés telles : évaluer, « approximer », détecter, comparer.... habiletés couramment utilisées dans l'interprétation de graphiques. Par exemple, dans les courbes de croissance des enfants présentées ci-contre, on compare deux courbes : on peut trouver quand les filles pèsent plus que les garçons en moyenne, quand le poids moyen des garçons augmente de façon constante, quand a lieu la poussée de croissance chez les filles...

De plus, la liste des activités mathématiques (des programmes) rattachées au langage graphique est excessivement limitée. Signalons quelques omissions graves. Tracer directement (et non pas point-par-point, en anglais : sketch) le graphique d'une fonction dont on connaît la formule, ou bien le graphique d'un phénomène décrit verbalement ne fait que très rarement l'objet d'exercices (en général, jamais). Également, on ne demande jamais aux élèves de trouver directement, l'équation correspondant à un graphique fourni, très rarement, de décrire en mots une relation entre variables présentée graphiquement.

Techniques de lecture.

Le genre de graphiques utilisé en sciences comporte des graduations et des échelles auxquelles les cours de mathématiques n'ont pas rendu les élèves familiers. En effet, d'ordinaire en mathématiques, les axes sont gradués simplement (une division égale une unité) et les échelles sur les deux axes sont les mêmes. Les deux axes sont trop souvent présentés sans quadrillage et rarement ce quadrillage, quand il apparaît, comporte-t-il des lignes plus épaisses pour faciliter la lecture. Non seulement, alors, la grande majorité des étudiants que nous avons interrogés (Sec. I, II et IV) utilisent-ils une technique de lecture « point-par-point » mais, de plus, ils doivent revenir aux axes pour évaluer abscisse ou ordonnée plutôt que d'utiliser efficacement le quadrillage (comme pour évaluer les accroissements, par exemple). Rares sont également les étudiants qui lisent d'emblée un graphique en termes relatifs (en utilisant les mots : plus, moins, beaucoup...), l'enseignement les préparant plutôt à lire chaque point et à fournir une valeur.

UN PLAN D'ACTION

Cette énumération de faiblesses chez les élèves se veut plus une mise au point de la situation qu'une récrimination à l'endroit des enseignants de mathématiques. Bien entendu, nous croyons qu'à la fois programmes et méthodes d'enseignement en mathématiques devraient s'ajuster. Cependant, nous sommes d'avis que ce sont les enseignants en sciences qui auront à faire le plus gros pas pour remédier à la situation. Ils ne peuvent, à cet égard, adopter une attitude attentiste face aux enseignants de mathématiques car l'apprentissage d'habiletés graphiques décrites ci-dessus ne peut se faire qu'à partir d'un cadre expérimental *donnant un sens* aux symbolisations graphiques.

Soyons plus explicites avec deux exemples. Il existe, bien sûr, des règles (ou recettes) *pour trouver les échelles à utiliser pour construire un graphique approprié* ou encore *pour faire passer une courbe par une série de points*. Mais, tant et aussi longtemps que l'étudiant n'aura pas *donné un sens* à l'expression « graphique approprié » et à la « courbe moyenne » qu'il trace, la règle risque de s'évanouir. Qui d'entre nous, d'ailleurs, utilise autre chose que son bon sens ? Ces deux bêtes noires de l'utilisation des graphiques en sciences relèvent plus de la compréhension que de l'application aveugle de règles mystérieuses.

UNE APPROCHE « LANGUE PARLÉE ».

La fin de cet article relate quelques expériences d'enseignement que nous avons tentées en 1978, avec des enseignants en sciences de Bingham (Angleterre). Nous travaillons présentement dans le même esprit à l'école Pierre Brosseau de Brossard. Ces expériences se

sont déroulées au niveau secondaire I dans des classes de « Combined Science », un cours multidisciplinaire qui ressemble à « Introduction aux Sciences Physiques » mais auquel se mêlent écologie et technologie. L'approche utilisée est essentiellement expérimentale, comme on le constatera dans la description des expériences.

Fondements théoriques et pédagogiques.

On se rappelle qu'autant l'interprétation de graphiques que le tracé approximatif (sketching) de graphiques représentant une situation reposent fondamentalement sur l'établissement et l'articulation de correspondances entre des caractéristiques graphiques globales et les particularités situationnelles qui leur sont associées. Nous avons précisément retenu une approche à l'enseignement des graphiques qui permet, aux étudiants, d'établir de telles correspondances. Nous avons donc tenté de créer un environnement riche qui leur permette de « parler » un *langage graphique chargé de sens*. Notre tâche consiste donc à imiter le processus d'acquisition d'une langue maternelle qui se déroule en même temps que la découverte par l'enfant de son milieu. Comme le dit le pédagogue Decroly dans [3] :

« La mère, sans avoir recours à aucune méthode consacrée, avec l'aide de l'entourage de l'enfant apprend à celui-ci toutes les difficultés de la langue sans songer à analyser ou à sérier les exercices, elle se fait peu à peu comprendre et imiter. »

Description générale de l'approche

Les leçons se déroulent dans un laboratoire de science équipé de rétroprojecteurs. Les élèves sont divisés par groupes de trois environ. Chaque équipe est munie d'un *acétate spécialement préparé pour chaque expérience*. Plus précisément, on retrouve imprimés sur chaque acétate un quadrillage ainsi que des échelles sur chaque axe qui sont appropriées à l'expérience (*il ne lui manque que la courbe*). Les équipes portent chacune sur l'acétate les résultats de leur expérience (une série de points) avec des *crayons feutres à encre soluble de couleurs différentes*. Quand l'expérience est terminée (et les courbes complétées), il devient alors possible de comparer les courbes obtenues par superposition de 2, 3, 4... acétates selon le cas. C'est ainsi que l'on peut facilement faire ressortir les différences et les ressemblances des courbes qui sont attribuées, soit aux lois scientifiques en cause ou aux conditions initiales différentes, ou encore aux erreurs commises durant l'expérience.

Objectifs

Notre approche fournit aux élèves de nombreuses occasions de saisir les graphiques *dans leur totalité*, de *percevoir leurs caractéristiques globales* en fonction de particularités du phénomène étudié. Elle favorise également ces mouvements d'aller-retour entre le graphique et la situation. On y retrouve donc les conditions appropriées

qui conduisent au développement des habiletés reliées à l'interprétation, au tracé et à la lecture de graphiques représentant des phénomènes. Soulignons également que, sans poser l'épineux problème du choix des échelles, la méthode favorise un travail riche et efficace sur des graphiques significatifs.

Mais, tout comme pour l'apprentissage d'une langue maternelle, l'élève en arrive simultanément à une meilleure connaissance de son milieu au fur et à mesure que ses possibilités d'expression s'affinent. Notre approche vise donc, également, à permettre aux élèves de découvrir et d'approfondir les lois ou faits scientifiques reliés à l'expérience en cours. Comme le souligne le scientifique russe N.M. Berger dans [4] (nous traduisons de l'anglais) :

« L'utilité de la méthode graphique pour l'enseignement de la physique est, en général, bien connue. Grâce à son utilisation, les relations fonctionnelles entre les paramètres physiques peuvent être visualisées, le taux de variation d'une variable en fonction d'une autre peut être estimé et l'essence même de concepts physiques peut être expliquée. »

Bien entendu, pour nous, cet énoncé s'applique aux sciences en général et non seulement à la physique.

Finalement, ces expériences favorisent aussi le développement de nombreuses habiletés de manipulation propres au travail en laboratoire.

TROIS EXEMPLES

Même si le champ apparaît vaste, le choix d'expériences appropriées peut s'avérer délicat car il faut s'assurer qu'elles nous fournissent une bonne variété de graphiques, qu'elles suscitent l'intérêt des élèves et que les raisonnements sous-jacents soient à leur portée.

Il est tout d'abord possible d'utiliser une expérience dans laquelle on demande déjà aux élèves de tracer un graphique. On peut alors y appliquer la technique des acétates après s'être assuré que l'on obtient une « bonne » famille de courbes. C'est un peu le cas pour l'expérience qui consiste à examiner la température de la naphthaline qu'on fait passer de l'état liquide à l'état solide. (2^e exemple) Il est quelquefois possible de regrouper diverses petites activités de manipulation pour faire une expérience sans grande prétention scientifique mais qui s'avère stimulante et rentable pour les élèves. C'est le cas quand on porte l'eau à ébullition (1^{er} exemple). On peut aussi laisser libre cours à son imagination et découvrir comment il est difficile de prévoir l'enthousiasme des élèves en leur proposant d'observer comment varie la hauteur d'un liquide dans un récipient de forme étrange lorsqu'on le remplit. (troisième exemple) Nous avons également, dans nos expériences, proposé aux élèves de faire refroidir de

l'eau bouillante en faisant varier le contenant et ils ont aussi mesuré comment varie la longueur de toutes sortes d'élastiques en y suspendant des masses de 100g.

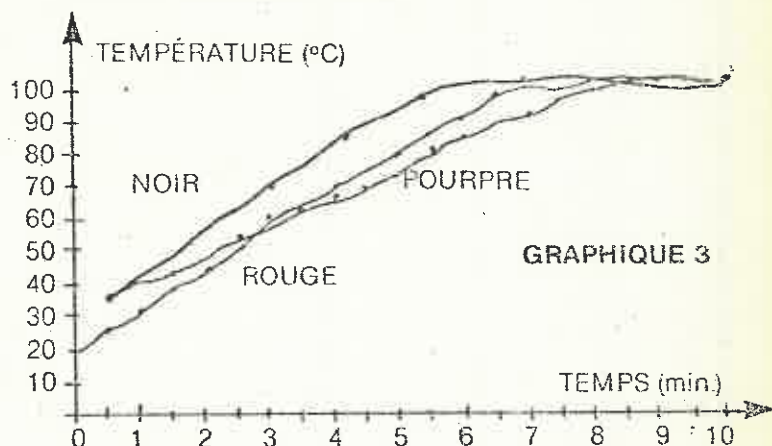
Faire bouillir de l'eau

Description générale

Chaque groupe reçoit un bécher rempli de 250 ml d'eau. On fait chauffer cette eau et on lit le thermomètre à toutes les 30 secondes. Lorsque c'est la première expérience, l'enseignant porte quelques points fictifs sur l'acétate projeté grâce au rétro-projecteur. Quelques élèves sont invités à faire de même. L'enseignant prévient les élèves qu'il faut se préparer avant d'allumer le bec Bunsen, ne pas retirer le thermomètre pour lire et brasser régulièrement.

Discussion et analyse

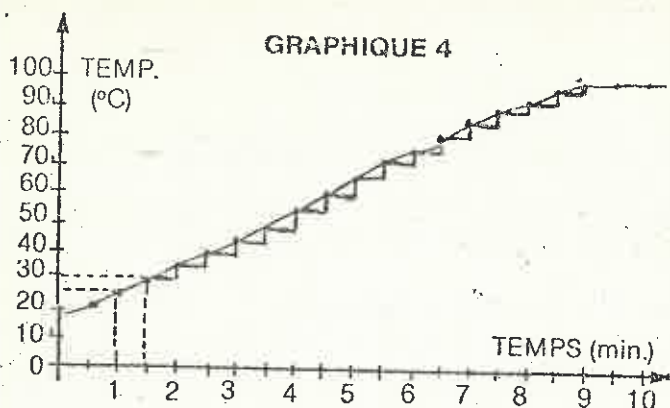
Selon toute vraisemblance, les courbes auront toutes une forme semblable, à savoir elles montent toutes pour, enfin, plafonner progressivement vers 100°. Voici trois des courbes obtenues.



Évidemment, le plateau à environ 100° ne passe pas inaperçu. Ce fait peut entraîner plusieurs sujets de discussions tels que : la vaporisation, le changement d'état, le rôle de la pression atmosphérique (alpinisme, machine à vapeur) calibration des thermomètres... Les quelques « plateaux » qui « oscillent » peuvent être critiqués. À remarquer que plusieurs groupes par « wishful thinking », en inclinant le thermomètre ou autrement, peuvent lire jusqu'à 103° pour finalement se rabattre à 100°, 101°.

L'inclinaison de la montée attire aussi l'attention. Évidemment, on a là un des objets de discussions les plus importants car c'est à ce moment que se construit la notion de taux de variation. Pour mieux faire voir cette idée, on peut « étudier » le graphique à l'aide d'un escalier (technique de l'escalier) en montrant que les marches sont d'abord de la même hauteur et qu'à la fin elles deviennent de plus en plus petites jusqu'au plateau.

GRAPHIQUE 4



Les élèves peuvent découvrir que la pente de la section droite dépend de la chaleur de la flamme utilisée (tous les groupes ont 250 ml). L'utilisation d'une règle en plastique transparente permet de « rectifier » les courbes qui comportent inévitablement quelques bosses. On peut alors mieux comparer les « inclinaisons ».

Il y a toujours les courbes spéciales dont il faut s'occuper : celles qui n'ont pas de plateau, celles qui comportent des erreurs flagrantes de lecture de thermomètre (lecture en retard, thermomètre retiré de l'eau). En général, l'enseignant aura fermé les yeux sur quelques erreurs dans le déroulement pour obtenir quelques courbes « intéressantes ».

Faire refroidir de la naphthaline fondue

Description générale

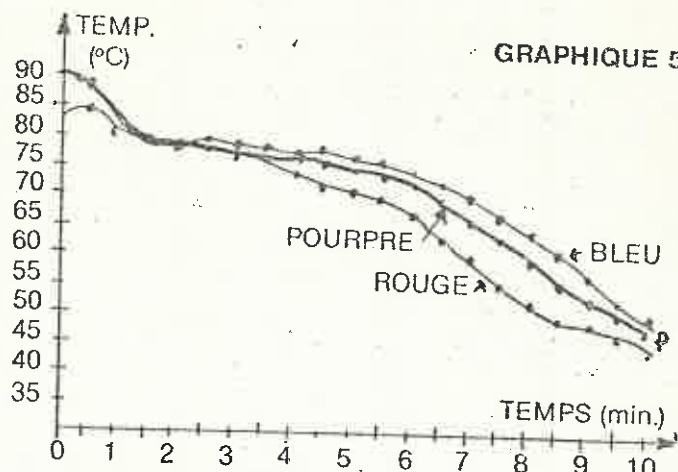
Chaque groupe d'élèves reçoit une éprouvette contenant déjà une quantité de naphthaline (différente pour chaque équipe). Ils font chauffer cette éprouvette dans un bécher contenant de l'eau amenée à ébullition. L'enseignant leur indique, tout d'abord, comment procéder et présente les acétates si nécessaire. Il faut éviter que la naphthaline entre en contact avec la flamme : elle peut s'enflammer. Lorsque la naphthaline est fondue, on retire l'éprouvette et l'on note la température toutes les trente secondes. En plus de porter ces résultats sur l'acétate, on indique, à côté de chaque point : L, S ou L/S, selon que la substance est liquide, solide ou les deux. À la fin de l'expérience, on n'essaie pas de retirer le thermomètre de la naphthaline solide.

Discussions et analyse

La superposition de quelques acétates permet de caractériser chacune des courbes obtenues. Elles descendent toutes pendant un moment, restent au même niveau (ou à peu près) pendant un instant et puis redescendent. Comme l'a dit un élève : « Elles sont toutes

collées les unes sur les autres entre une et trois minutes » (pour un choix particulier de courbes). Voici quelques courbes.

GRAPHIQUE 5



Quelques questions surgissent naturellement. Pourquoi les plateaux sont-ils à la même hauteur ? Pourquoi certains plateaux sont-ils longs, d'autres courts ? Quelles sont les éprouvettes qui se sont refroidies le plus rapidement ? Se refroidissent-elles toutes de la même manière ? Ici, il est possible de faire une étude de quelques courbes en utilisant la technique de l'escalier : les marches deviennent de moins en moins hautes. Parmi les quelques cas spéciaux, il y en aura sans doute qui auront oublié leur « L » et « S ». Evidemment, le professeur trouve ici un cadre idéal pour expliquer la notion de point de fusion. Mais il ne faut pas oublier que cette idée est très abstraite. Les élèves voient plus, dans cette expérience, un « point de solidification ». Cette expérience s'avère très intéressante pour l'enseignant car elle lui permet de constater comment les concepts de chaleur, de température et d'énergie sont abstraits et conflictuels et elle lui permet aussi d'en observer les premiers développements chez les élèves.

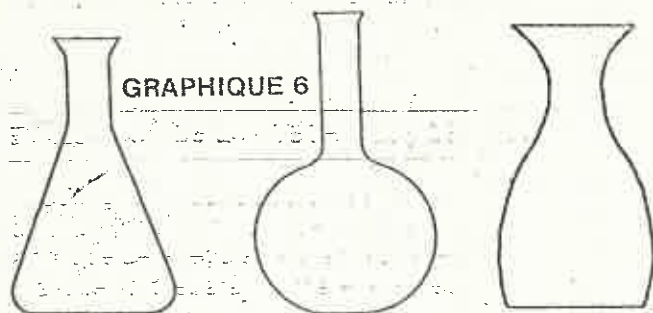
Remplissage de bouteilles*

Description générale

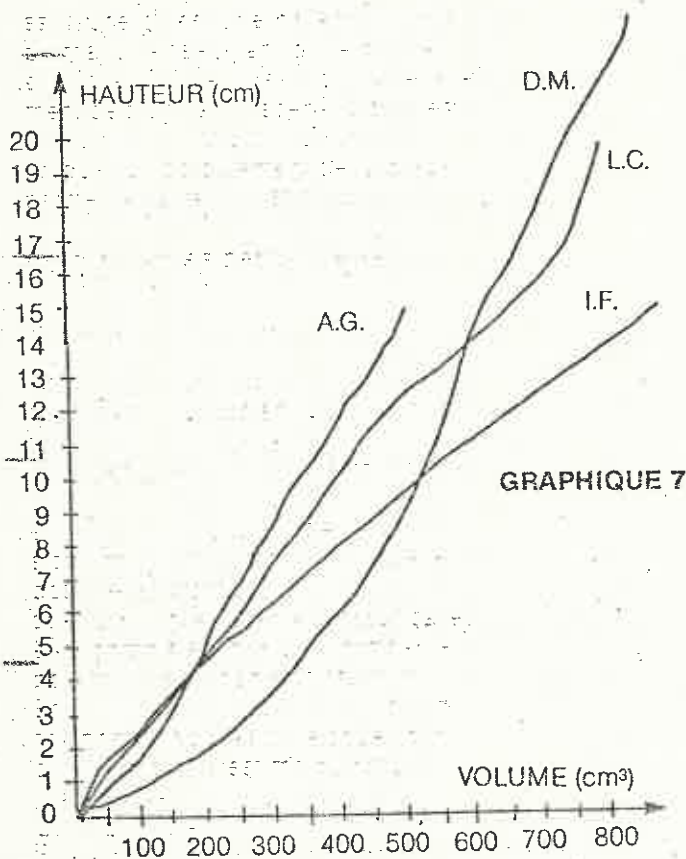
Chaque groupe reçoit différentes bouteilles et deux acétates. Sur un acétate, il prédit la courbe de remplissage et sur le second, il vérifie en remplissant la bouteille de quantités égales de 50 ml d'eau. Pour plus de précision, les élèves utilisent un cylindre gradué et une pipette. Avant de lancer les groupes à l'action, l'enseignant met les élèves sur la bonne piste en traçant la courbe de remplissage d'un bécher. Après avoir porté sur l'acétate quelques points qui sont alignés, tout le monde prévoit que la courbe sera une droite. Quand l'enseignant demande de prédire la courbe de remplissage d'un bécher à section plus grande, les opinions sont alors

* Cette expérience est inspirée du programme I.O.W.O., voir [5].

partagées, « Ça monte plus vite, parce que c'est plus gros » entend-on chez plusieurs. Après quelques commentaires, tout le monde est vite convaincu que le graphique « monte droit » et moins vite que tout à l'heure. C'est alors que chaque équipe démarre l'expérience. Elle a en main différentes bouteilles.



Voici quelques prédictions formulées pour le flacon de forme conique (Erlenmeyer) avec lequel on commence.

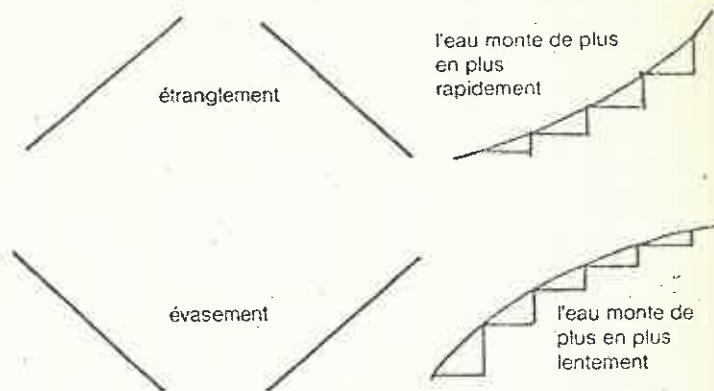


Comme on le constate, plusieurs équipes ne peuvent se départir d'une prédiction linéaire, peu importe la forme de la bouteille. Mais il y a pis, quelques équipes refusent de formuler une prédiction car les élèves ne veulent pas

dessiner de mauvais graphiques ni faire des erreurs. Il faut un certain temps pour les convaincre.

Analyse et comparaison

La technique de l'escalier joue un rôle très important dans l'analyse des graphiques obtenus.



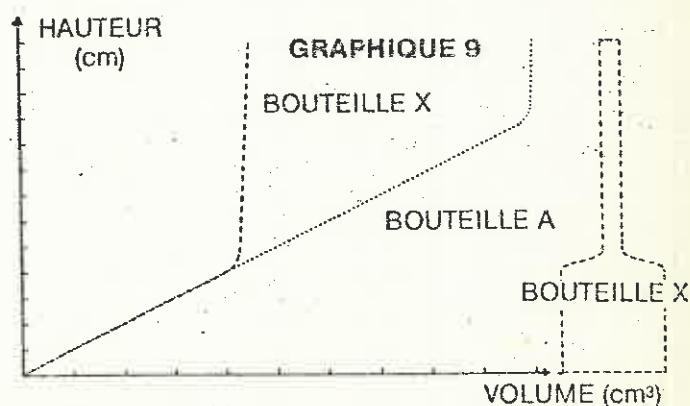
GRAPHIQUE 8

En plus de comparer les prédictions et les graphiques obtenus, on compare les prédictions entre elles. Très rapidement, se dégage l'idée qu'il faut comparer les formes beaucoup plus que la hauteur des graphiques.

Commentaires généraux sur les expériences

Il faut prévoir plus d'une période de 50 minutes pour réaliser ce genre d'expérience. Deux périodes jumelées fournissent assez de temps pour « remplir » les acétates et organiser une discussion fructueuse. Dans certains cas, on peut relancer l'expérience après une première discussion comme avec les bouteilles ou les élastiques qu'on étire. Les élèves peuvent être alors invités à apporter leurs bouteilles et leurs élastiques.

Lors des premiers essais, il est apparu rapidement que, malgré l'intérêt des élèves, il manquait une participation personnelle exigeant un minimum de réflexion; bref, une occasion de faire une synthèse des connaissances acquises dans la discussion. Nous avons donc conçu une série d'exercices de synthèse qui accompa-



gne chaque expérience. Nous croyons que ces exercices sont nécessaires à l'approche décrite précédemment. En voici un très intéressant mais qui s'est avéré trop difficile pour la majorité des élèves de douze ans. (graphique 9) Ce graphique donne la courbe de remplissage de la bouteille X dont la forme est fournie à droite. Il donne aussi la courbe de remplissage d'une autre bouteille : la bouteille A. Trouvez le volume et la hauteur de chaque bouteille. Tracez la forme de la bouteille A par-dessus le dessin de la bouteille X.

ÉVALUATION DE LA « TECHNIQUE DES ACÉTATES »

Soulignons tout d'abord que l'efficacité de la « technique » dépend du niveau de préparation des enseignants ainsi que de la régularité avec laquelle elle est utilisée. En pratique, la préparation matérielle des acétates requiert du temps. Par ailleurs, une gestion efficace des activités des équipes exige une bonne connaissance préalable du genre de graphiques que l'on peut obtenir. En effet, comme toute la discussion porte sur les graphiques obtenus, elle sera d'autant plus rentable que l'on disposera d'une collection « intéressante ». La question est de savoir ce qu'est une collection « intéressante », car elle permet à l'enseignant de fermer les yeux sur certaines erreurs expérimentales typiques et elle lui permet également de planifier un scénario de présentation des acétates lors de la discussion, scénario qui est loin d'être unique. Le déroulement de la présentation peut même permettre de calmer les groupes les plus turbulents, si on recourt au bon moment à leur acétate. La discussion entre collègues permet de se familiariser plus rapidement avec la famille des courbes potentielles et les raisons de leurs bizarreries.

Même si l'approche fut expérimentée par des enseignants qui l'utilisaient pour la première fois et d'une manière ponctuelle (expériences concentrées sur quelques semaines), l'expérimentation fut un succès. D'abord, en ce qui concerne l'utilisation des graphiques, la classe expérimentale à bien des égards a fait des progrès significatifs par rapport à la classe témoin, démontrés par des pré-tests et post-tests. Il nous est apparu cependant que l'approche purement *langue parlée* aurait avantage à être complétée par un « complément grammatical » qui pourrait être présenté dans les cours de mathématiques. En utilisant les graphiques complexes construits en sciences et d'autres développés dans leurs classes (quoique le contexte est moins propice à la construction de graphiques significatifs), les enseignants de mathématiques pourraient insister sur les habiletés de lecture et d'interprétation. Il nous apparaît nécessaire, entre autres, qu'ils développent d'une manière grammaticale le vocabulaire autant français que graphique relié à la croissance et à la variation de variables.

L'évaluation informelle des enseignants fut très positive. Aux dernières nouvelles, les acétates étaient toujours utilisés à Bingham. Les réactions furent à la fois de satisfaction et d'étonnement : satisfaction devant l'intérêt et l'enthousiasme soulevés chez les élèves, et étonnement face à la possibilité dont ils disposent de capter et garder l'attention des élèves. L'enthousiasme s'explique bien car les acétates sont « personnalisés » (en ce sens, ils finissent par porter le nom du chef d'équipe) et les discussions portent sur les faits et gestes des élèves.

Nous avons analysé davantage les conséquences pédagogiques de cette possibilité de capter l'attention des jeunes. Sans rentrer dans les détails des théories psycho-pédagogiques sous-jacentes (consulter [2], chapitre 14), nous indiquerons brièvement en quoi le recours aux acétates favorise énormément le développement de concepts scientifiques. Premièrement, en désignant du doigt ou autrement certaines caractéristiques graphiques, l'enseignant peut ramener dans l'esprit des enfants des actions antérieures, peut leur faire revivre des épisodes importants de l'expérience. Ceci se fait efficacement car le lien existant entre particularités graphiques et épisodes s'est révélé fort. Il peut donc mieux maintenir la réflexion sur ces actions antérieures en « s'accrochant » aux graphiques. Que l'on pense aux plateaux dans l'expérience de la naphthaline. Les bouts plats ramènent à la mémoire ces instants où la température ne bouge pas et maintiennent ces moments à l'esprit. Il nous est apparu clairement qu'aucune référence verbale à cet épisode ne pourrait la rendre aussi présente et stable dans l'esprit des enfants. Deuxièmement, l'étude des ressemblances et différences permet une abstraction graduelle de la situation puisque l'enseignant dispose, en quelque sorte, d'un ensemble varié d'expériences à partir duquel il peut enrichir le support expérimental de chacun. Il est donc à même d'élargir la base *expérimentale* à partir de laquelle chacun des élèves construit ses abstractions.

CONCLUSION

L'analyse de la complexité des habiletés requises pour une utilisation efficace du langage graphique confie donc aux enseignants en sciences un rôle primordial pour son apprentissage qui, chez les enfants, doit se faire parallèlement à la découverte scientifique de leur milieu et au développement de leur pensée.

Certes, plusieurs lecteurs auront eu l'impression qu'à l'occasion les besoins de l'enseignement des sciences ont pu être amplifiés et que l'expression « graphiques utilisés » aurait pu se dire « graphiques utilisables ». Nous espérons, en ce sens, avoir bien mis en relief le fait que les graphiques sont utilisés, non seulement pour transmettre de l'information, mais qu'ils définissent une *façon de connaître* que ni le mot, ni l'équation ne sauraient com-

plètement remplacer. Le rôle des graphiques comme moyen efficace et concis de transmettre de l'information est souvent privilégié, au détriment de son rôle comme *forme particulière de connaissance*. Nous souhaitons que cet article serve à illustrer ce fait chez les enseignants et didacticiens tant en mathématiques qu'en sciences.

Si les graphiques sont une forme particulière de connaissance en sciences, nous croyons que, pour les mathématiques, ils peuvent servir à *construire des concepts* très complexes, comme, par exemple, les notions de fonction, de pente, de dérivée, de taux de variation, de variance... qui, plus tard, seront présentées d'une manière formelle. Tel qu'explicité en [2] (chapitre 14), nous considérons que les graphiques peuvent servir de *supports intuitifs* à une utilisation efficace de concepts mathématiques dans un contexte abstrait relié ou non à la résolution de problèmes.

Nous proposons cette approche aux enseignants en mathématiques et en sciences, sachant qu'elle vise des objectifs complémentaires et les assurant de notre collaboration la plus entière.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Kerslake, D. — The Understanding of Graphs, Mathematics in Schools, Vol. 6-2, 1977.
- [2]. Janvier, C. — The interpretation of complex cartesian graphs representing situations — studies and teaching experiments. Ph. D. dissertation of Nottingham, Oct. 1978.
- [3]. Decroly, O. — La fonction de globalisation et l'enseignement. Éditions Desoer. Bruxelles. 1929. (nouvelles éditions, 1965).
- [4]. Berger, N.M. — Using a graphic method for the study of molecular and heat phenomena in the ninth grade. Soviet Education. No. 1-2, 1973.
- [5]. Five years I.O.W.O. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, 1976.

LE PETIT DÉBROUILLARD LE PETIT DÉBROUILLARD LE PETIT DÉBROUILLARD

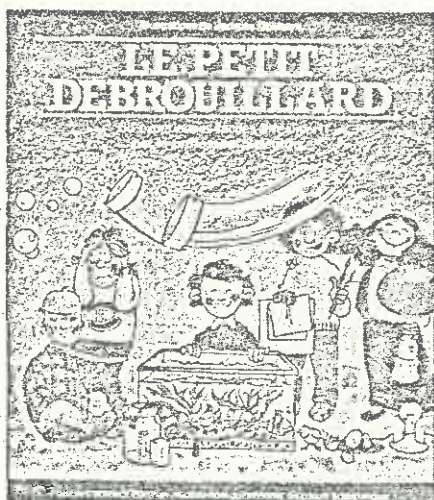
Pour qu'ils jouent avec la science...
...et vous avec eux

*Des expériences faciles et instructives
pour les jeunes et les moins jeunes*

Fabriquer du blanc avec des couleurs. Élever des maringouins. Tours de magie? Non, tours de science!

66 des meilleures expériences du professeur Scientifex, toutes réalisables avec un équipement que l'on peut puiser à même les ressources domestiques, sans explosion ni halo de fumée...

66 façons de développer l'esprit d'observation du jeune, son sens critique et son goût de l'expérimentation.



BON DE COMMANDE

Veuillez me faire parvenir les volumes suivants

	Prix	Quantité	Total
☐ LE PETIT DÉBROUILLARD, par le prof. Scientifex, 120 p.	8.95 \$		
De la Collection FAIRE:			
☐ CHERCHONS NOS ANCÊTRES, par Michel Langlois, 168 p.	8.95 \$		
☐ DEVEZ-VOUS ÊTRE ASTRONOME AMATEUR, par Jean Vallières, 244 p.	10.95 \$		
☐ OBSERVER LES OISEAUX DU QUÉBEC, par N. David et M. Gosselin, 260 p. env.	12.95 \$		

Sous-total

Frais de port et de manutention 1.75 \$

Ci-joint chèque ☐ mandat ☐ au montant de \$

NOM

ADRESSE

TÉLÉPHONE

CODE POSTAL

Québec Science Éditeur, C.P. 250, Sillery, Québec G1T 2R1

Ara, a sistematitzar els resultats obtinguts en els problemes anteriors. Les funcions estudiades aquí són del tipus

$$x \longrightarrow y = a^x$$

que és un nombre real fix per a cada problema, s'anomena base de la potència o a^x , que és la variable independent, també es diu que és l'exponent de la potència a^x .

Per a quins valors de x saps calcular a^x ? Quin és, doncs, el domini per al qual pots definir a^x ?

Donem la definició de a^n , si $n \in \mathbb{N}$. Quin valor té a^0 ?

Partir d'aquesta definició comprova que $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$.

Mostra la propietat fonamental d'aquestes funcions: $a^p \cdot a^m = a^{p+m}$. Mostre anàlogament que si $n > m$

$$\frac{a^p}{a^m} = a^{p-m}$$

és passa amb la propietat anterior si fas $n = m$? Com definiries a^p si p és un nombre racional? Com definiries a^x si x és un nombre real?

Aplicació del domini de la potència

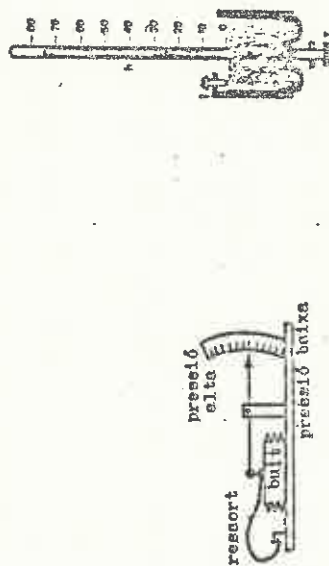
Fins ara, el domini de les funcions estudiades a la part A era el conjunt dels nombres naturals. En molts problemes relatius a diferents situacions, el domini és insuficient i per tant és necessari ampliar-lo.

La pressió atmosfèrica

Vivim en un medi ple d'aire: l'atmosfera. L'aire pesa, per tant qualsevol cos que estigui en l'atmosfera haurà de suportar el pes de la columna d'aire hi ha sobre d'ell, és a dir, una força per cm^2 , que s'anomena la pressió atmosfèrica.

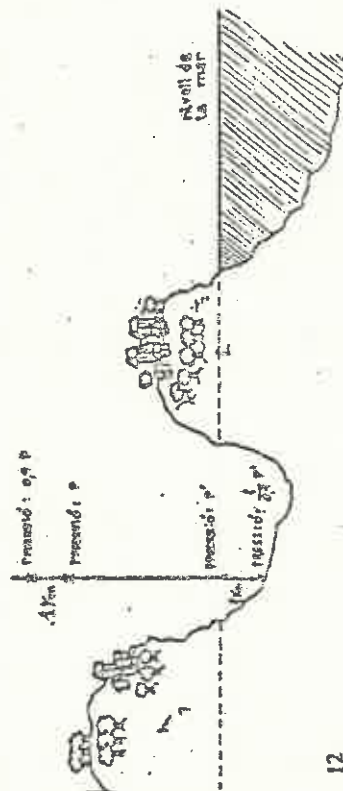
Quant més enlaire estigui el cos respecte al nivell de la mar, menys hi haurà per sobre d'ell i per tant més petita serà la pressió que haurà de suportar. Al revés passa en baixar per sota el nivell de la mar: la pressió augmenta.

Per a mesurar la pressió s'emporten els baròmetres. Com a unitat de pressió s'utilitza entre d'altres l'«atmosfera», la qual equival a 1,033 Kg/cm^2 , i és la pressió a nivell de la mar.



Les diferències de pressió que es produeixen en pujar una muntanya o en baixar a zones de depressió són les causes del «mal de muntanya» i del «mal d'orella» respectivament.

Quan varia l'altura, la pressió en cada punt és aproximadament 0,9 vegades la pressió en un punt d'una altura inferior en un km; aquest fet s'ha comprovat experimentalment i pot deduir-se teòricament a partir de les lleis dels gasos.



Ara estudiarem la funció que ens dona la pressió segons l'altura o profunditat.

Agafarem com a altura 0 la del nivell de la mar.

a) Completa la següent taula

x (altura o profunditat en Km)	y (pressió en atmosferes)
-5	-4
-3	-2
-1	0
1	2
3	4
5	

Aquestes profunditats per sota el nivell de la mar poden semblar-te irreal, però pots imaginar que prenem fer un viatge cap al centre de la Terra (coneixes el llibre de Jules Verne?)

b) Representa la funció corresponent a la taula anterior. Aquesta gràfica la necessitarem durant tot el tema: és per això que convé fer-la bé: agafa sobre l'eix d'abscisses una unitat d'1 cm i sobre l'eix d'ordenades una unitat de 10 cm.

c) Intentarem ara trobar la fórmula d'aquesta funció. Observa els valors de x positius de la taula i veuràs que la funció corresponent és una progressió geomètrica. Quina és la base d'aquesta funció? Escribeu la funció

$$x \longrightarrow f(x) =$$

d) Si uses aquesta mateixa fórmula per als valors negatius de x , i compares amb els valors de la taula, podrem escriure

Lectura a la taula aplicació de la llei $f(x)$

$$0,9^0 = 1$$

$$0,9^{-1}$$

$$0,9^{-2}$$

$$0,9^{-3}$$

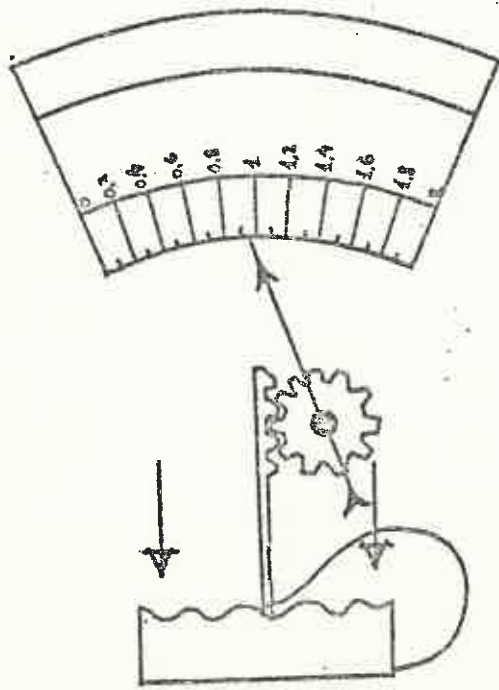
$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = \frac{1}{0,9}$$

$$f(-2) = \frac{1}{0,9^2}$$

$$f(-3) = \frac{1}{0,9^3}$$

- b) Disposem d'un baròmetre, amb una escala graduada en atmosferes, tal com el de la figura. Dibuixa una altra escala amb la graduació corresponent en alçades.



- c) L'exactitud d'un altímetre depèn de la pressió atmosfèrica. De quin ordre són els errors?

- E.3 Un capital de 50.000 pts. ha estat produint interessos a interès compost del 7 % anual. Quants anys han passat quan el saldo és de 105.243 pts.?

- E.4 La població de l'estat espanyol al 1900 era de 18 milions d'habitants. Del 1900 al 1977 s'ha duplicat. Suposant que el creixement demogràfic durant aquest període hagi mantingut una taxa anual constant, es demana a) Quina fórmula de la funció $t \rightarrow p$? (t és el nombre d'anys a partir del 1900 i p és la població de l'estat espanyol corresponent). b) Quina ha estat la taxa de creixement anual (en tant per u) durant aquests anys?

[Nota: aquest valor s'anomena taxa mitjana de creixement durant aquest període, tenint en compte que el creixement real no és el mateix d'un any a l'altre.]

- c) Suposant que el ritme de creixement anual es mantingui, quina serà la població de l'estat espanyol a l'any 2000?
- d) Quant de temps tardarà a haver-hi una població de 50 milions?

E.5

El gas radó és radioactiu i es va desintegrant al ritme donat per la següent taula

dies	0	1	2	3	4	5	6	7
quantitat de Rn	100	84	70	59	49,5	42	34,5	29

- a) Fes una gràfica que reflecteixi les dades de la taula.
- b) Quin és el període de semidesintegració del radó?
- c) Si es tenen 2 decigrams de radó, quant temps passarà fins que només en quedin 0,25 decigrams? Idem 0,58.
- d) En quin % disminueix diàriament la quantitat de Rn?

E.6

Donada la funció

$$y = \frac{9 - 3 \log_2 (3x - 2)}{6 + 2 \log_2 (3x - 2)}$$

determina

- a) el seu domini
- b) la funció inversa (si existeix).

E.7

Suposem que el Govern calcula una pujada dels salaris del 4 % anual. Si en un determinat sector el conveni es fa cada tres anys, en quin percentatge s'haurà d'apujar per tenir el mateix increment en promig?

E.8

Quantes xifres decimals té el número 2^{2217}

2

A l'intestí humà hi ha un tipus de bactèria, anomenada Escherichia Coli, encarregada de sintetitzar la vitamina K (antihemorràgica). Aquesta bactèria, quan està en un cultiu en condicions apropiades, duplica la seva concentració cada 20 minuts.

Suposem que en tenim una suspensió en un líquid amb una concentració d'un milió de bacteris per cm^3 . Al cap d'un període de 20 minuts la concentració podem preveure que serà de 2 milions, i al cap de dos períodes de 4 milions. En canvi, 20 minuts abans la concentració era només de mitjà milió, i dos períodes abans d'un quart de milió.

a) Completa la taula següent considerant els valors negatius de la x com a períodes passats.

x (temps expressat en nombre de períodes)	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y (concentració en milions de bacteris per cm^3)				$\frac{1}{2}$	1	2	

b) Representa la funció corresponent a la taula anterior. Aquest gràfic el necessitarem durant tot el tema; és per això que cal fer-lo bé (millor en paper mil·limetrat): agafa per unitats 4 cm en l'eix d'ordenades i 2 en el d'abscisses.

c) Intentarem trobar ara la fórmula d'aquesta funció. Observa els valors de x positius de la taula i veuràs que la funció corresponent és una progressió geomètrica. Quina és la base d'aquesta funció? Escribeu la seva fórmula:

$$x \longrightarrow f(x) =$$

d) Si observes la taula $f(-1) = \frac{1}{2}$. Si volem mantenir per als

exponents negatius la fórmula $f(x) = 2^x$, haurem de convenir que $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Anàlogament tindrem

x	lectura a la taula	segons la fórmula
0	$f(0) = 1$	$2^0 = 1$
-1	$f(-1) = \frac{1}{2}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
-2	$f(-2) = \frac{1}{4}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-3	$f(-3) = \frac{1}{8}$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
.	.	.
.	.	.

La funció exponencial estudiada al problema B.1 té un gran interès pràctic. En efecte, si construïm la taula que ens dona la pressió y a distintes alçades x , podrem utilitzar-la a l'inrevés.

Així, coneixent la pressió en un punt donat de l'atmosfera (i prescindint d'altres efectes atmosfèrics que també hi poden ^{interferir}) podrem, mitjançant un baròmetre, saber l'alçada del punt considerat, respecte al nivell de la mar.

Els *altímetres* baromètrics són aparells que donen directament l'alçada, respecte al nivell de la mar, basant-se en la pressió. Acompleixen un paper important en la navegació aèria i són molt utilitzats pels excursionistes.

Els altímetres associen, doncs, a cada pressió una alçada. Es tracta de la funció inversa de la funció exponencial. Fixa't que la seva taula és la mateixa que la de la funció exponencial, però llegida a l'inrevés.

Aquesta funció, l'anomenarem *funció logarítmica*. En el cas que estem considerant, la funció exponencial era de base 0,9; la seva inversa serà la funció logarítmica de base 0,9 i s'escriu

$$x \longrightarrow y = \log_{0,9} x$$

i es llegeix: y és el logaritme de base 0,9 de x .

Aquesta funció dona l'alçada y que correspon a cada pressió x .

B.1.

a) Completa la taula i dibuixa ^{el} gràfica corresponent

x (pressió en atmós.)	0,66	0,73	0,81	0,90	1,00	1,11	1,23	1,37
$\log_{0,9} x$ (alçada en km)								

Des de quina alçada serà la pressió inferior a 0,5 atmosferes?

b) En aquest cas, ¿t'és sentit unir els punts de la gràfica mitjançant una línia contínua? Justifica la resposta.

1151

c) Quin és el domini d'aquesta funció?

d) Pot ésser nul·la la pressió atmosfèrica? A quina alçada? És important que remarquis que l'atmosfera no s'ajusta exactament en aquesta descripció, puix que si fos així, no s'acabaria mai, la qual cosa no correspon a la realitat. Això que fem servir no és ~~més~~ ^{només} un model matemàtic aproximat.

Hem dit que la funció logarítmica és la inversa de la funció exponencial, en el sentit que la seva taula és la mateixa, però llegida a l'inrevés. Volem saber si, sempre que llegim la taula d'una funció al revés, s'obté una nova funció, la seva inversa. Per això, veiem primer alguns exemples.

Hem dit que la funció logarítmica és la inversa de la funció exponencial, en el sentit que la seva taula és la mateixa, però llegida a l'inrevés. Volem saber si, sempre que llegim la taula d'una funció al revés, s'obté una nova funció, la seva inversa. Per això, veiem primer alguns exemples.

B.2

Al nostre país mesurem la temperatura en graus centígrads o Celsius (0° per al punt de fusió del glaç i 100° per al punt d'ebullició de l'aigua), però segur que saps que en altres països, com, per exemple, Anglaterra, s'usa una escala diferent, l'escala Fahrenheit, en la qual el punt de fusió del glaç es pren igual a 32 graus i el punt d'ebullició de l'aigua s'agafa igual a 212 graus, i es divideix l'interval comprès entre aquests dos punts en 180 parts iguals; cadascuna d'elles és 1 grau Fahrenheit.

5

- a) Sabries dir quin és el valor de la temperatura normal del cos humà en graus Fahrenheit?
- b) Si les temperatures extremes del dia 23 de Novembre van ser a Girona de 14°C la màxima i de -4°C la mínima, quins són aquests valors a l'escala Fahrenheit?
- c) Dibuixa la gràfica de la funció

$$t: x \longrightarrow y$$

on x és el valor de la temperatura en graus centigrads i y aquest mateix valor en graus Fahrenheit.

- d) Quina és la fórmula d'aquesta funció?
- e) Suposa que tens un amic anglès que t'escriu dient que ha estat malalt amb temperatures de 100°F . Ha estat greu la seva malaltia?
- f) La temperatura necessària per a la combustió del paper és de 451°F (recordes la pel·lícula titulada «Fahrenheit 451»?) Quin és aquest valor expressat en graus centigrads?
- g) T'hauràs adonat que per calcular el valor de la temperatura en graus centigrads des del seu valor en graus Fahrenheit, n'hi ha prou ~~de~~ llegir a l'inrevés la taula de la funció t . Recordant el concepte de funció creus que llegint la taula a l'inrevés ens donarà una funció? Per què? Escribeu la nova taula.
- h) Dibuixa la gràfica d'aquesta nova funció, que anomenarem t^{-1} , i compara-la amb la gràfica feta a l'apartat c). Quina relació hi ha entre els pendents d'ambdues rectes? En quins punts tallen l'eix? Observes alguna simetria?

B.3

- a) Fes una taula de valors per a les funcions reals de variable real:

els gràfics

$$f(x) = 2x + 1 \qquad g(x) = x^2 - 2$$

Dibuixa les ~~seves~~ gràfiques.

- b) Observa si en ambdós casos en llegir la taula a l'inrevés s'obté una funció. Explica-ho.
- c) Quin és el domini de la funció f ? I el de la seva inversa? Quin és el conjunt imatge de f ? I el de la seva inversa?
- d) Què passa amb la funció g ?
- e) Escribeu alguns elements del graf de f i els corresponents del graf de la seva inversa f^{-1} .

Integración numérica

Introducción.—Consideramos solo funciones reales de una variable real y además positivas, ya que en este caso, sin pérdida de generalidad en la validez de los métodos empleados, se puede interpretar la integral como área de un rectángulo mixtilíneo.

Método de los rectángulos.—

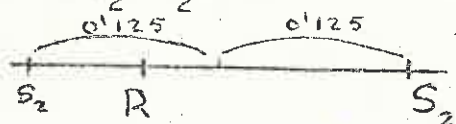
Ejemplo 1.—El caso más simple es aquel en que $f(x)$ es constante. El problema es trivial.

Ejemplo 2.—Sea $f(x)=1/x$. Entonces $\int_2^4 \frac{1}{x} dx$ es el área señalado en fig.1. En este caso se calcula el área del menor rectángulo que contiene totalmente a R y el área del mayor rectángulo totalmente contenido en R ; así pues (fig.2) $s_1=0.5 < R < 1=s_1$

Para lograr mayor precisión podemos dividir $[2,4]$ por la mitad, (fig.3)

$s_2=0.583333333 < R < 0.833333333=s_2$

entonces $s_2 - s_2 = 0.25$

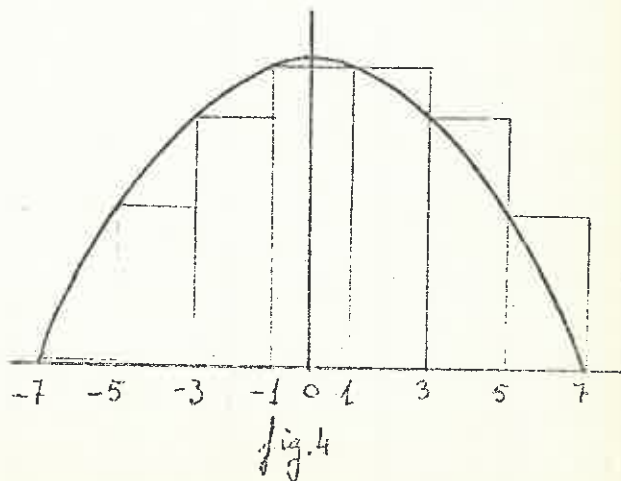
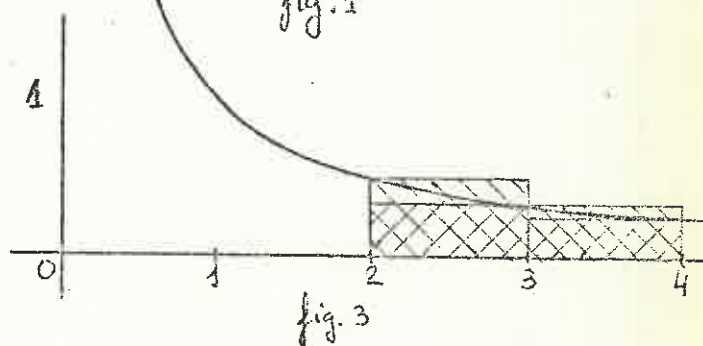
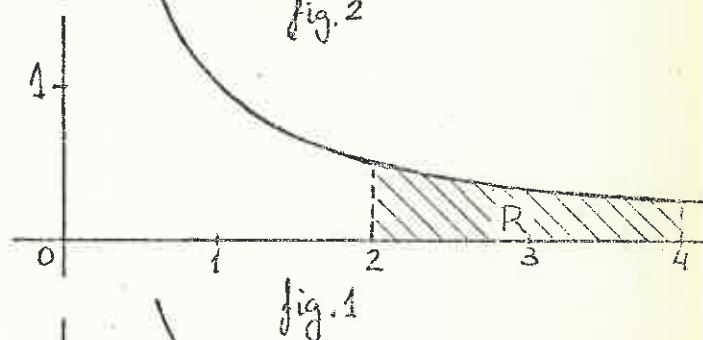
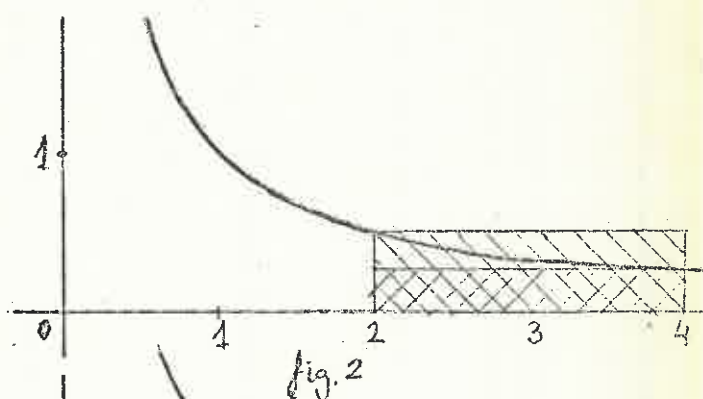


y el máximo error cometido es 0.125 .

Se podría reiterar el proceso para obtener más exactitud.

En la práctica, para abreviar, no se suelen calcular las dos sucesiones; así no se puede acotar el error, pero podemos considerar exactas las cifras que se repiten al pasar de una aproximación a la siguiente.

Ejemplo 3.—Si las sucesiones formadas a partir de los valores máximo y mínimo de la función en cada subintervalo convergen, también lo harán las obtenidas a partir de otros cualesquiera.



Calculamos el área del segmento parabólico $y = 1 - x^2$ en $[-1, 1]$ $\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 8$
 aproximaremos este área mediante la unión de áreas de rectángulos de altura el
 mínimo valor del subintervalo base; así, para 7 y 14 rectángulos, tenemos

$$S_7 = 73.14285712$$

$$S_{14} = 74.28571430$$

a pesar del tamaño, grande, de Δx la aproximación es relativamente buena pues
 hay errores por exceso y por defecto que tienden a compensarse.

El proceso seguido puede resumirse así

a) Tomamos un punto x sobre el eje horizontal

b) Calculamos $f(x)$

c) Sumamos este valor en la memoria

d) Sumamos Δx a x y, si el nuevo valor es menor que el final del intervalo de integración, volvemos al paso a)

e) En caso contrario multiplicamos el contenido de la memoria por Δx . Este es el valor buscado.

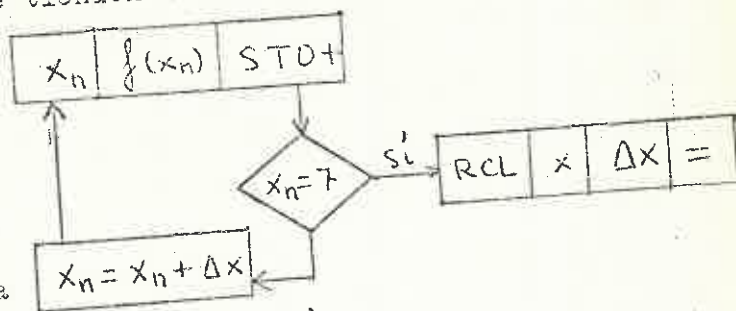


fig. 5

Esta aproximación es por defecto, pues los errores cometidos por exceso son menores que los cometidos por defecto, ya que $f(x)$ es cóncava.

Integración programada.- Ejemplo 4.-

Para mejorar la aproximación hay que aumentar el nº de rectángulos; esto aumenta el tiempo de cálculo. Vamos a evitar esta molestia programando el proceso de la fig 5.

para calcular $A = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$, según el esquema (Organigrama) 1; procedemos incrementando la variable mientras $x < \pi$ pues, por acumulación de errores podría ocurrir que x no fuese nunca π ; en efecto,

$$\pi = 3.141592654 \text{ y } \frac{\pi}{3} = 1.047197551 \text{ pero } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 3.141592653$$

Programando la calculadora (que ha de tener al menos cinco memorias) al dividir $[0, \pi]$ en $n=5$ partes; $A = 1.178097245$ y si $n=50$, entonces $A = 1.178097243$. No siempre interesa aumentar sin más el valor de n .

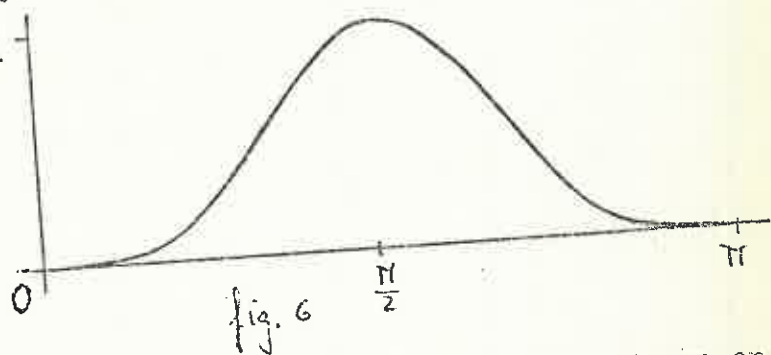


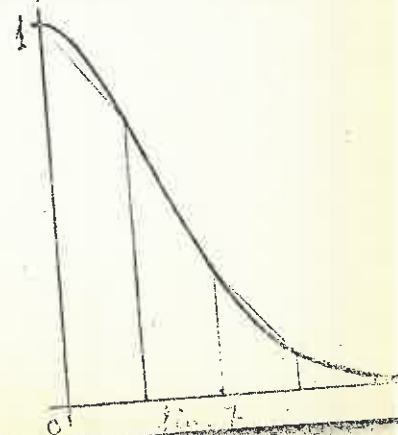
fig. 6

Método de los trapecios.- Ejemplo 5.-

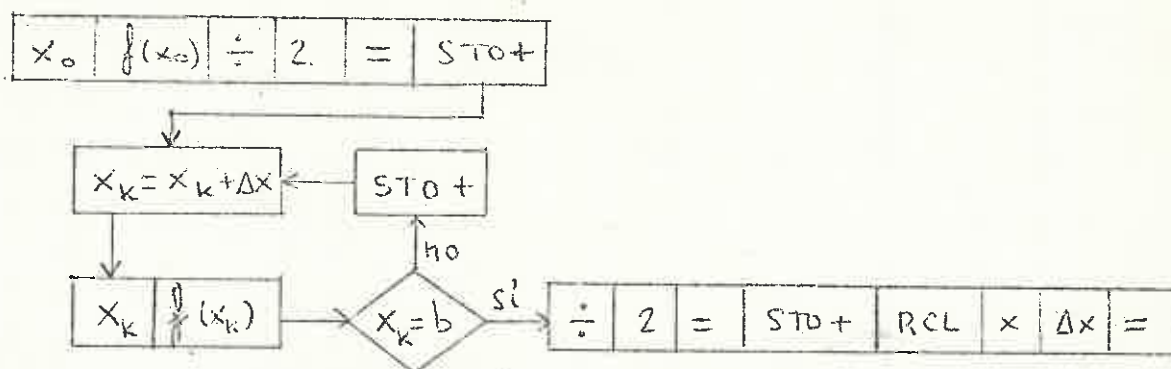
Se a $A = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$
 Si aproximamos el recinto mediante una unión de trapecios

como los de la fig (7)

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right] \Delta x$$



Obtenemos que, para $n=5$, $A=0'328444743$. Para obtener una aproximación análoga por el método de los rectángulos hubiéramos tenido que dar a n un valor superior a cien. En particular, para $n=128$, $A=0'3324355693$ (aproximación por exceso). El organigrama asociado a este proceso sería



Para utilizar este método en una calculadora programable seguimos el Organigrama 2. Necesitamos saber si x está tan cerca de b que se puede identificar, esto es, si

$$\text{ó } x_s = b$$

$$x_s < b \text{ y } x_s + \Delta x > b$$

Generalización. Ejemplo 6.-

Calculamos $A = \int_0^{15} x^x dx$

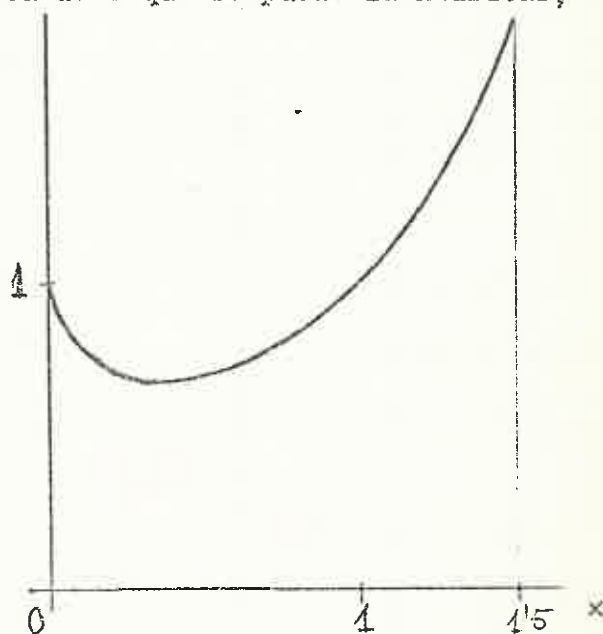
El integrando no está definido en 0

pero con la ayuda de la calculadora es

trivial comprobar que $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$

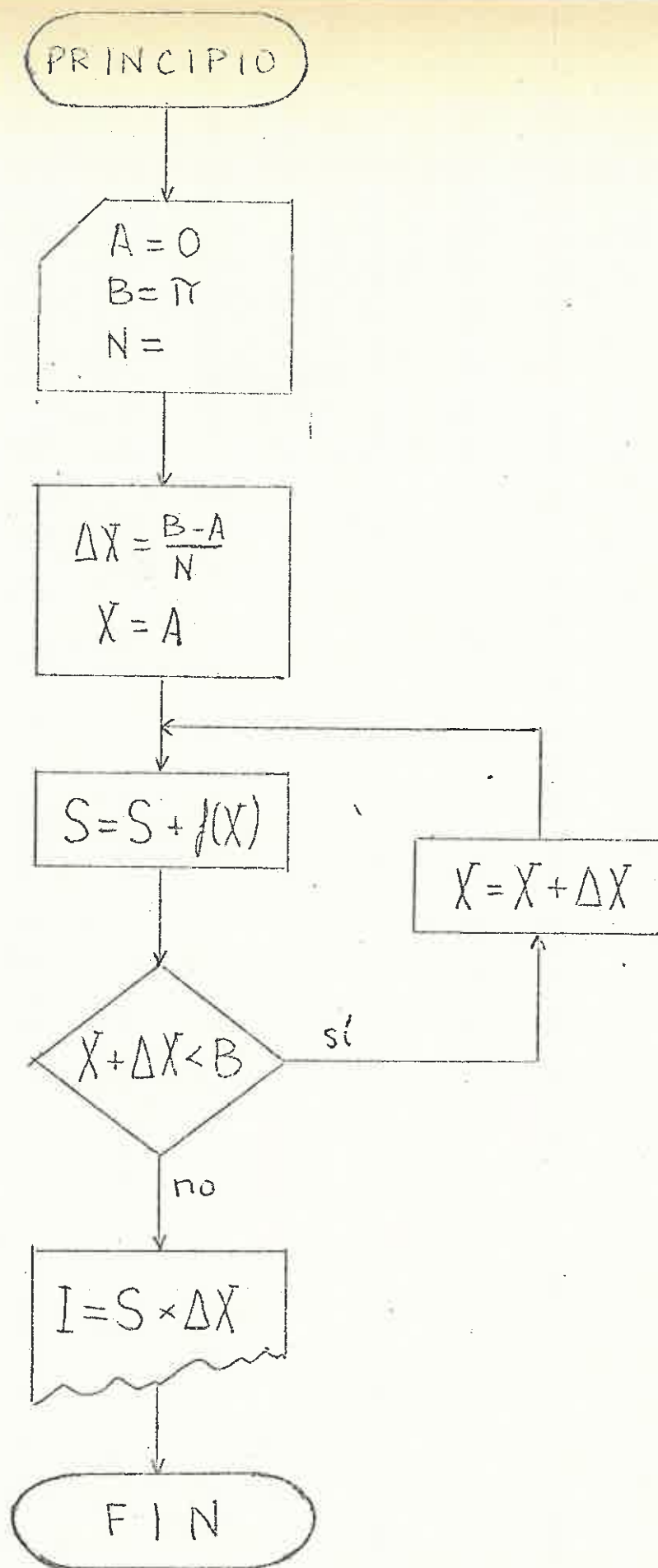
Podemos definir

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x=0 \\ x^x, & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \text{ y } A = \int_0^{15} f(x) dx$$

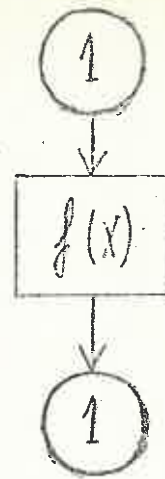
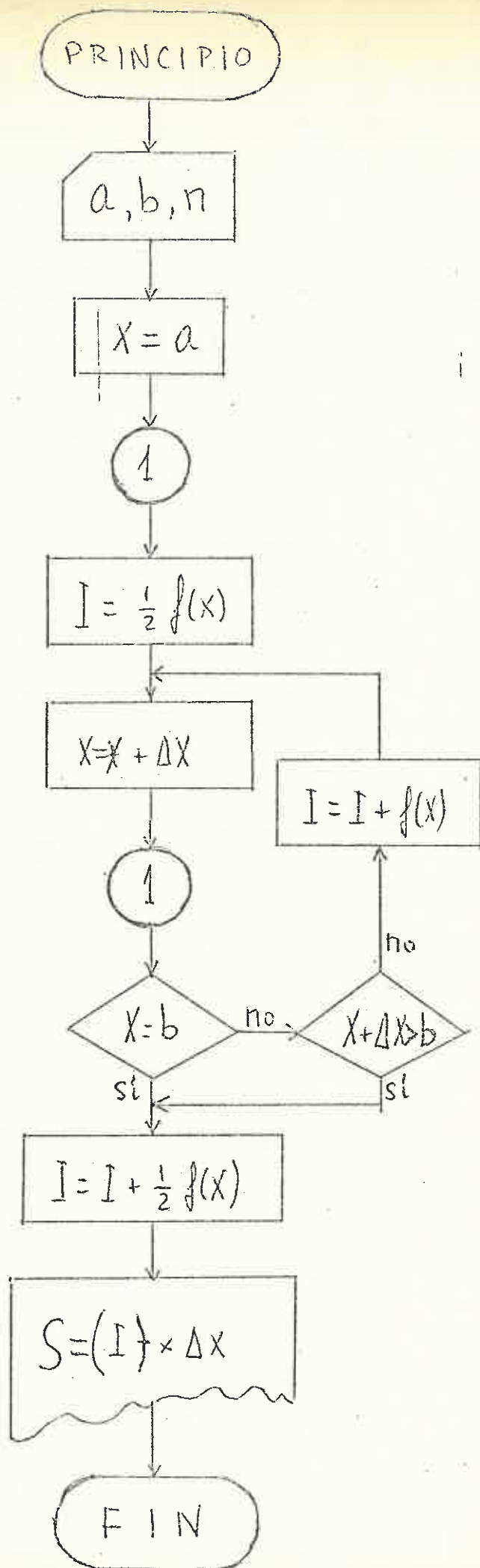


Y mediante cualquiera de los métodos anteriores obtenemos $A \approx 1'465860348$

Nota. A aquellos que tengan conocimientos de programación estructurada les podrá parecer impropio el bucle del Organigrama 2, pero se corresponde con la estructura de control DO - WHILE - DO de la programación estructurada; su extraña apariencia se debe a que no estamos trabajando con lenguajes de alto nivel.



ORGANIGRAMA 1.



ORGANIGRAMA 2

pág-2

- $$\left[\begin{array}{l} 1) 2^n \cdot 2^p = 2^{n+p} \\ 2) (2^n)^p = 2^{n \cdot p} \\ 3) \text{ La función exponencial de base 2 es creciente} \end{array} \right.$$

$$\log_2 H = L \Leftrightarrow 2^L = H$$

x	$y = 2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

$$\log_2 4 = 2 \text{ porque } 2^2 = 4$$

$$\log_2 512 = 9 \quad " \quad 2^9 = 512$$

Procederemos de la siguiente manera, $H > 1$

1º Buscaremos en la tabla p y $p+1$

Tales que: $2^p < H < 2^{p+1}$

2º Será $2^p < 2^{x_0' x_1 x_2 x_3 \dots} < 2^{p+1}$

Luego $x_0 = p$

3º Tendremos $2^{p' x_1 x_2 x_3 \dots} = 2^p \cdot 2^{0' x_1 x_2 x_3 \dots} = H$

Luego $2^{0' x_1 x_2 x_3 \dots} = \frac{H}{2^p}$

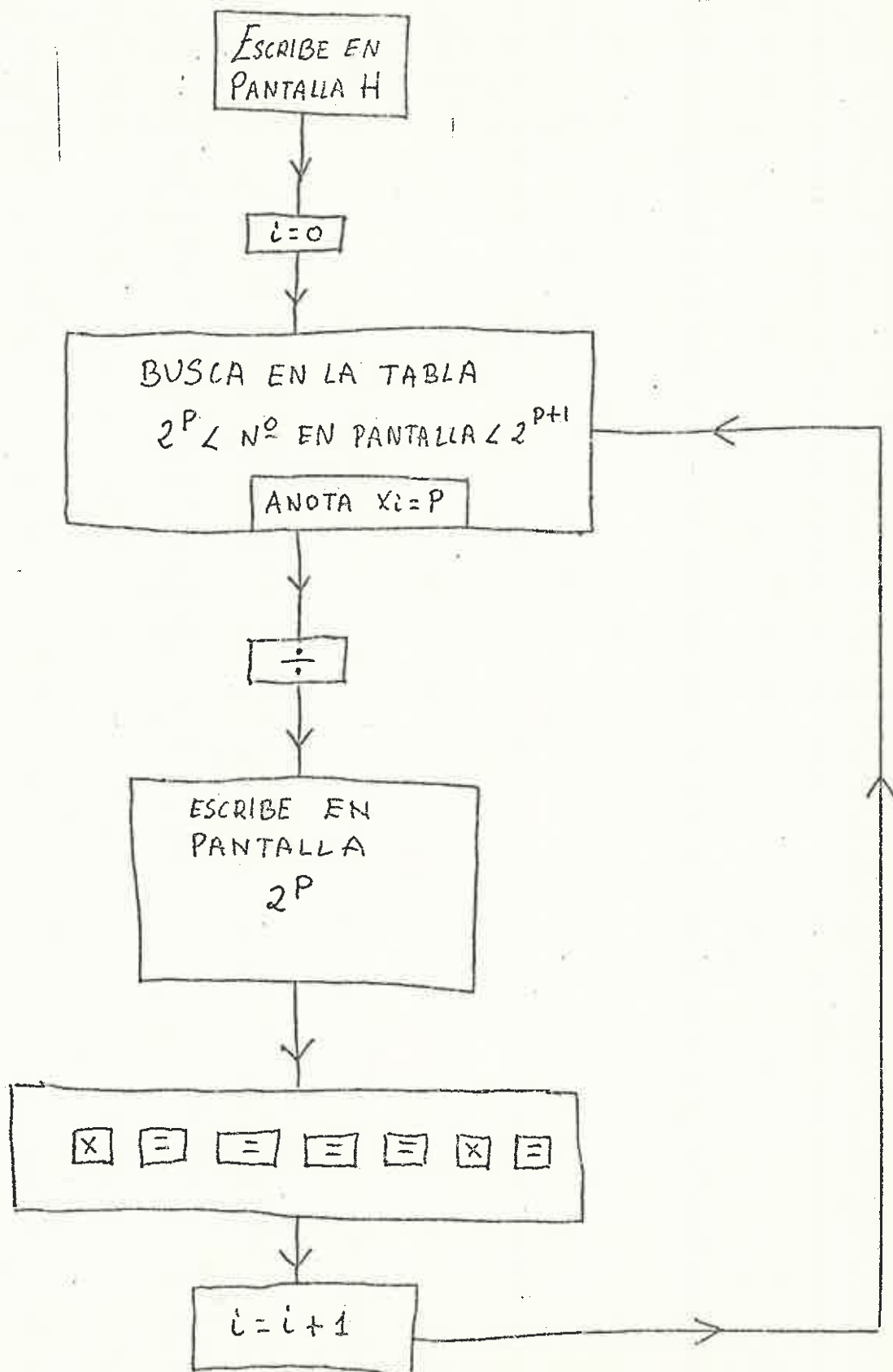
4º $(2^{0' x_1 x_2 x_3 \dots})^{10} = 2^{x_1' x_2 x_3 x_4 \dots} = \left(\frac{H}{2^p}\right)^{10}$

5º Buscamos de nuevo en la tabla q y $q+1$

Tales que $2^q < \left(\frac{H}{2^p}\right)^{10} < 2^{q+1}$

Y VOLVEREMOS A COMENZAR EL PROCESO.

h. x = = = = x = h¹⁰



Calculadora (Pony LC 725). Cuaderno del alumno

Tabla

TECLAS PANTALLA $\log_2 433,26 = x_0'x_1x_2...$

escribe 433,26 $\rightarrow x_0 = 8$

$\div$ escribe 256

$\times = = = = \times =$

192,79069 $\rightarrow x_1 = 7$

$\div$ escribe 128

$\times = = = = \times =$

60,08425 $\rightarrow x_2 = 5$

$\div$ escribe 32

$\times = = = = \times =$

544,63624 $\rightarrow x_3 = 9$

$\div$ escribe 512

$\times = = = = \times =$

1,0550919 $\rightarrow x_4 = 0$

x	2 ^x
0	1
1	2 $\leftarrow x_4$ 1,9550912
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64 $\leftarrow x_2$ 60,08425
7	128 $\leftarrow x_1$ 192,79069
8	256 $\leftarrow x_0$ 433,26
9	512 $\leftarrow x_3$ 544,63624
10	1024

$\log_2 433,26 = 8,7590....$

Con una calculadora científica

(Sharp PC-1211)

OBSERVACIONES:

pág 7 y 8

$$51^a \quad 51H < 1024$$

$$2^P < H < 2^{P+1}$$

Tendremos que

$$1 < \frac{H}{2^P} < 2 \quad \text{por tanto} \quad 1 < \left(\frac{H}{2^P}\right)^{10} < 2^{10} = 1024$$

Y esto mismo ocurrirá en las sucesivas etapas del ciclo.

$$2^a \quad 1 < \frac{H}{2^P} < 2 \quad \text{es decir} \quad 2^P < H < 2^{P+1}$$

Por tanto $X_0 = P$.

$$3^a \quad \text{Busquemos } p \text{ y } p+1 \text{ tales que } 10^P < H < 10^{P+1}$$

y más adelante dividiremos por 10^P quedando

$$1 < \frac{H}{10^P} < 10 \quad \text{pero } \frac{H}{10^P} \text{ puede ser } > 6 \text{ y}$$

$$\left(\frac{H}{10^P}\right)^{10} \text{ supera la capacidad de la máquina.}$$

$$4^a \quad \text{Si } H < 1 \text{ busquemos } 2^n \text{ tal que } 2^n \cdot H > 1$$

Será $\log_2 H = \log_2 2^n \cdot H - n$

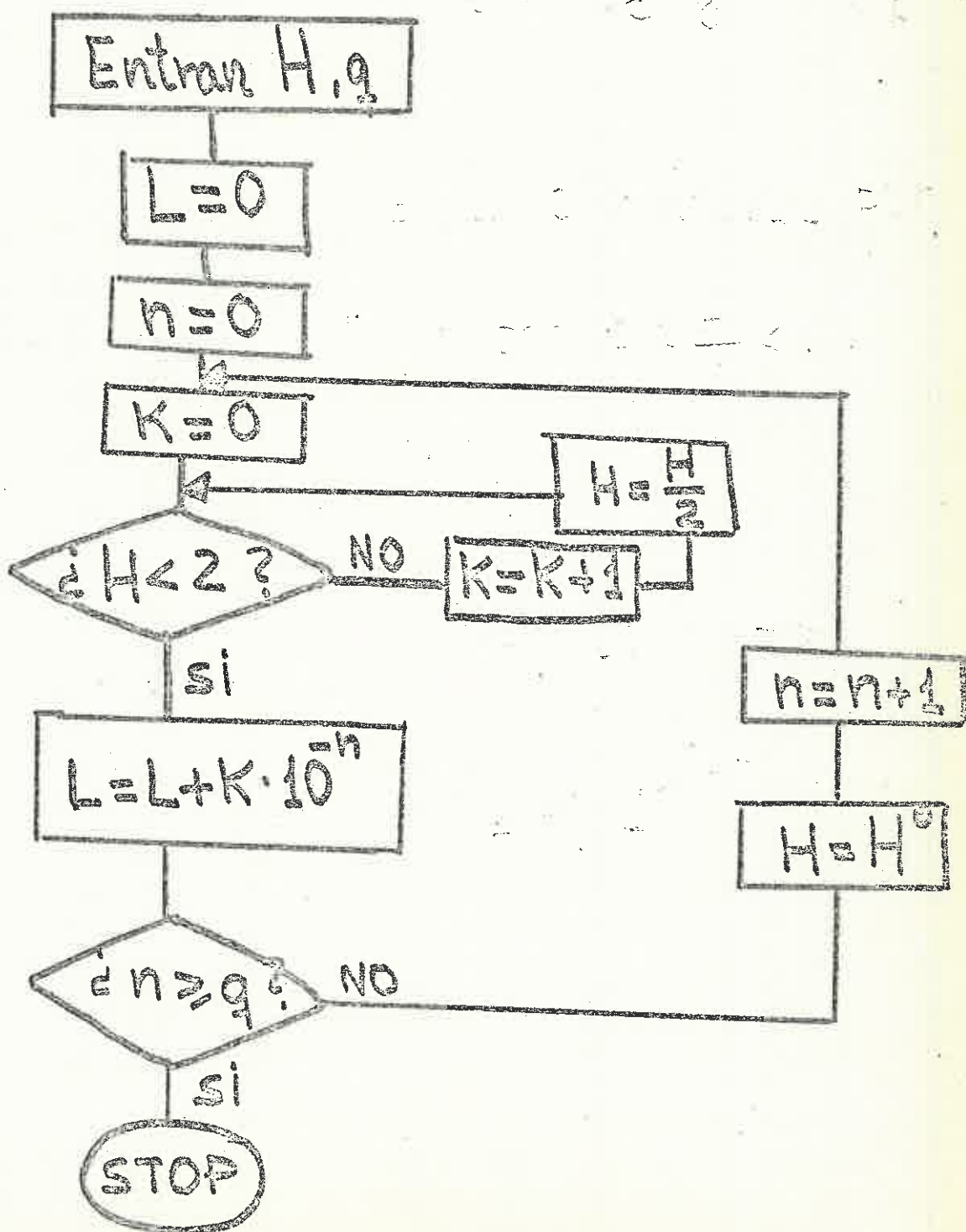
$$5^a \quad \text{Base } a < 1 \quad \log_a H = \frac{1}{\log_{\frac{1}{a}} H} \quad \text{con } \frac{1}{a} > 1.$$

T-6

pág 10

$$X_0 X_1 X_2 X_3 \dots = X_0 \cdot 1 + X_1 \cdot 10^{-1} + X_2 \cdot 10^{-2} + X_3 \cdot 10^{-3} + \dots$$

Sea $\log_2 H = L$ con q cifras decimales en la mantisa



$\log(10^n \cdot H)$ siendo $10^n \cdot H > 1$ con lo que $\log H = \log 10^n \cdot H - n$

$H = 10^n \cdot H_1$ con $1 \leq H_1 < 10$, luego $0 \leq \log H_1 < 1$ y $\log H = n + \log H_1$

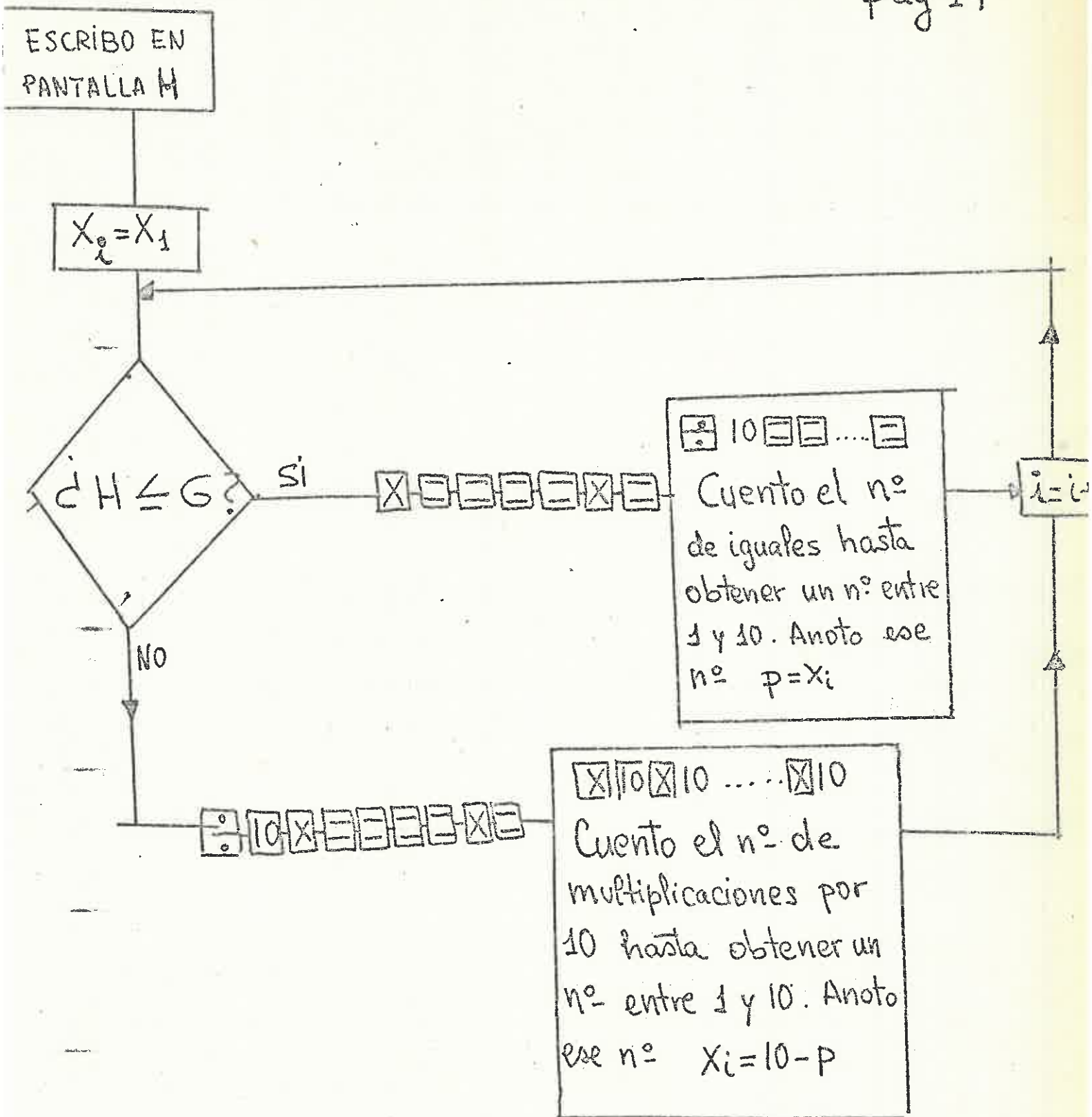
Si $6 < H < 10$, H^{10} bloquea la calculadora, pero s

obtenemos $\left(\frac{H}{10}\right)^{10}$ no ocurrirá al ser $0 < \frac{H}{10} < 1$.

Tendremos $H^{10} = \left(\frac{H}{10}\right)^{10} \cdot 10^{10}$

Elegimos H_1 : $\left(\frac{H}{10}\right)^{10} = \frac{H_1}{10^p}$ con $1 < H_1 < 10$ y $p > 1$

Por tanto: $H^{10} = \left(\frac{H}{10}\right)^{10} \cdot 10^{10} = \frac{H_1}{10^p} \cdot 10^{10} = H_1 \cdot 10^{10-p}$



T-10

pág 18

Cálculo de $A = N^x$

$$A = 22^{2,625}$$

$$A = 22^2 \cdot 22^{0,625}$$

Como $0,625 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$

$$A = 22^2 \cdot 22^{1/2} \cdot 22^{1/2^3} =$$

$$= 22^2 \cdot \sqrt{22} \cdot \sqrt{\sqrt{22}} =$$

$$3340,8694$$

T. 11

pág 19

Otro ejemplo : $A = 22^{0,823}$

$$0,823 = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

$$0,823 = \frac{2 \cdot 0,823}{2} = \frac{1,646}{2} = \dots$$

$$\frac{0,646}{2} = \frac{2 \cdot 0,646}{2 \cdot 2} = \frac{1,292}{2^2} = \dots$$

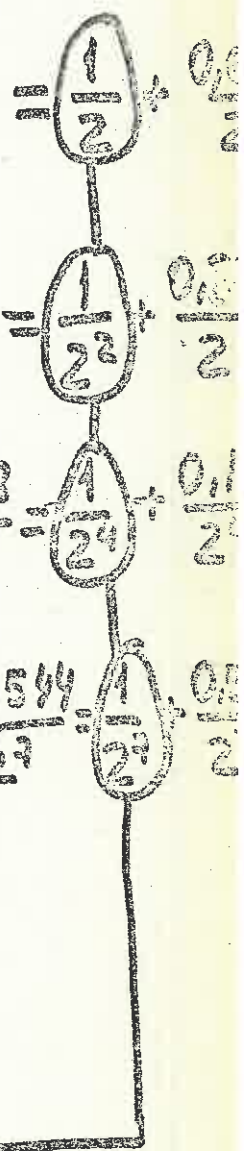
$$\frac{0,292}{2^2} = \frac{2 \cdot 0,292}{2^2 \cdot 2^2} = \frac{0,584}{2^3} = \frac{2 \cdot 0,584}{2 \cdot 2^3} = \frac{1,168}{2^4} = \dots$$

$$\frac{0,168}{2^4} = \frac{2 \cdot 0,168}{2 \cdot 2^4} = \frac{0,336}{2^5} = \frac{2 \cdot 0,336}{2 \cdot 2^5} = \frac{0,672}{2^6} = \frac{1,344}{2^7} = \dots$$

$$\frac{0,544}{2^7} = \dots$$

$$0,823 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \dots$$

Hay que parar cuando $\sqrt{\dots \sqrt{22}} = 1$



T-13

Cálculo de : $22^{0,823}$

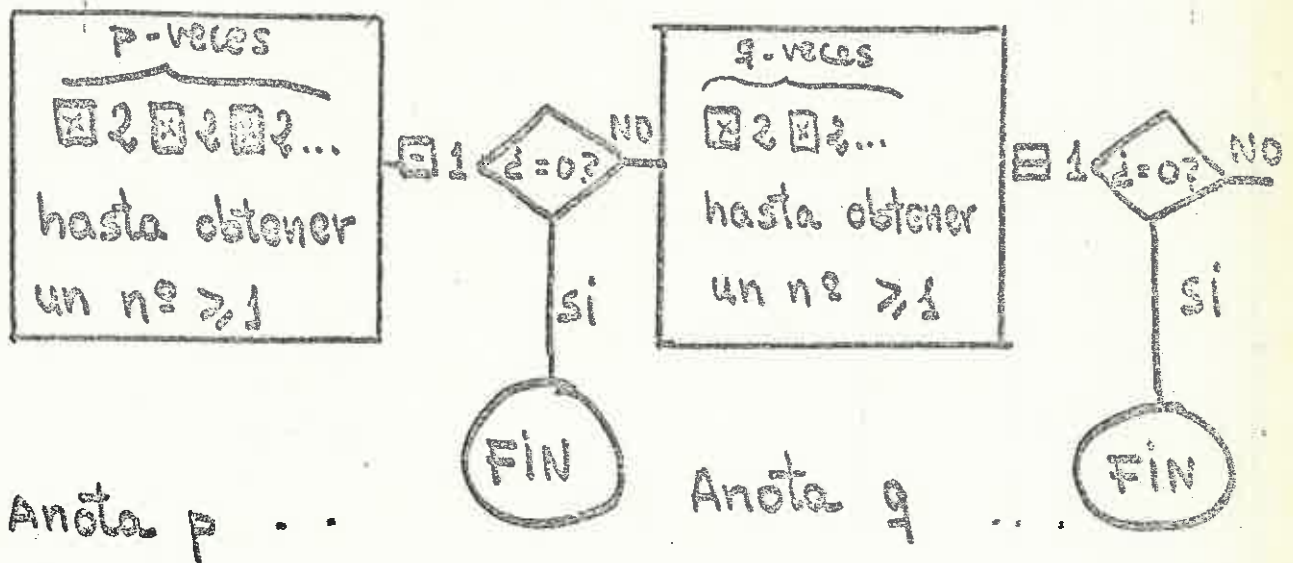
PANTALLA

$$\begin{array}{l}
 \overset{\neq 0}{0,823} \boxed{\times 2} \boxed{= 1,646} \boxed{- 1} \boxed{= 0,646} \boxed{\times 2} \boxed{= 1,292} \boxed{- 1} \boxed{= 0,292} \boxed{\times 2} \boxed{= 0,584} \boxed{\times 2} \boxed{= 1,168} \boxed{- 1} \boxed{= 0,168} \boxed{\times 2} \boxed{= 0,336} \boxed{\times 2} \boxed{= 0,672} \boxed{\times 2} \boxed{= 1,344} \boxed{- 1} \boxed{= 0,344} \boxed{\times 2} \boxed{= 0,688} \boxed{\times 2} \boxed{= 1,376} \boxed{- 1} \boxed{= 0,376} \boxed{\times 2} \boxed{= 0,752} \boxed{\times 2} \boxed{= 1,504} \boxed{- 1} \boxed{= 0,504} \boxed{\times 2} \boxed{= 1,008} \boxed{- 1} \boxed{= 0,008} \dots
 \end{array}$$

$p=1$ $q=1$ $r=2$ $s=3$ $t=2$

$$22^{0,823} = \sqrt[p]{22} \cdot \sqrt[q]{\sqrt[p]{22}} \cdot \sqrt[r]{\sqrt[q]{\sqrt[p]{22}}} \cdot \dots$$

hasta obtener $p+q+r+s+\dots \geq 24$



$$N^0, x_1 x_2 x_3 \dots = \underbrace{\sqrt{\dots \sqrt{N}}}_{p\text{-veces}} \cdot \underbrace{\sqrt{\dots \sqrt{N}}}_{p+q\text{ veces}} \cdot \dots$$

EL NÚMERO e I LA FUNCIÓ EXPONENCIAL

Tema: L'expansió del Univers.

Referència: "Investigación y Ciencia" .- Octubre del 1976.

Problema: Llei de Hubble.

"Hubble demostró que la velocidad con que una galaxia se aleja es proporcional a su distancia de nosotros,...."

Hipòtesi d'estudi (Model teòric simplificat):

- a) Les galaxies son punts.
- b) La nostra galaxia està fixa i es pren de referència.
(En realitat això és igual. L'expansió no té centre)
- c) La galaxia A s'allunya de nosaltres en línia recta i sempre en la mateixa direcció.
- d) No tenim en compte cap altra influència sobre el moviment de A. (p.e. forces gravitatories).

↓
e) La constant de proporcionalitat entre la distància (d) i la velocitat (v) es 1. Per tant, $d = v$. Vegem la nota.

↓
f) En l'instant de posar el rellotge en marxa ($t=0$), la galaxia A està a 1 m. de nosaltres i la seva velocitat és de 1 m/seg. $d(0) = v(0) = 1$

Nota: En realitat la raó és la següent: Una galaxia a 10 milions d'anys-llum, s'allunya a 170 km/seg., que en termes de metres foren:

1 any-llum són aprox. $94608 \cdot 10^{11}$ metres

170 km/seg = $17 \cdot 10^4$ m/seg

10 milions d'anys-llum són aprox. $94608 \cdot 10^{16}$ metres,

per tant, a 1 m. de distància (si aquesta situació fos

possible) la velocitat a que s'allunyaria fora de

$17 \cdot 10^4 / 94608 \cdot 10^{16} = (17/94608) \cdot 10^{-14}$ que és aprox.

$18 \cdot 10^{-19}$ m/seg = 0,00000000000000000018 m/seg.

La relació que es fa servir a la pràctica és de 17km/seg
per cada milió d'anys-llum.

Material:

Paper milimetrat.

Regla.

Calculadora. (En tots els càlculs que hi han al tema -
s'ha fet servir la calculadora TI-59 de Texas.)

PRIMERA FASE (F-1).--(SUCCESIONS; LIMITS I EL NÚMERO 2)

- Volem saber a quina distància es trobarà A a la fi del 1^{er} segon.

Recorda: D'acord amb el model $d = v$ i en l'instant inicial ($t=0$),

$$d = 1 \text{ m. i } v = 1 \text{ m/seg.}$$

Mètode: Aproximacions successives.

Suposem que el canvi de velocitat no es fa de forma contínua, sinó que durant intervals de temps regulars -cada cop més curts- la velocitat es manté constant i al passar al següent interval es produeix un salt i la velocitat es reajusta i pren el valor igual al de la distància a la que es troba en aquell instant.

Primera aproximació (A-1).--

Durant el primer segon la velocitat (v) és constant i val 1 M/SEG.

Per tant, l'espai recorregut (s) durant aquest temps serà :

$$1 \text{ m/seg} \cdot 1 \text{ seg} = 1 \text{ m}$$

La distància (d) a la que es trobarà serà doncs de 2 m.

t	s	d	v
0	0	1 m	1 m/seg
(de 0 seg a 1 seg)	1	$d+s=1+1=2 \text{ m}$	2 m/seg

Veieu la figura 1, per $n=1$.

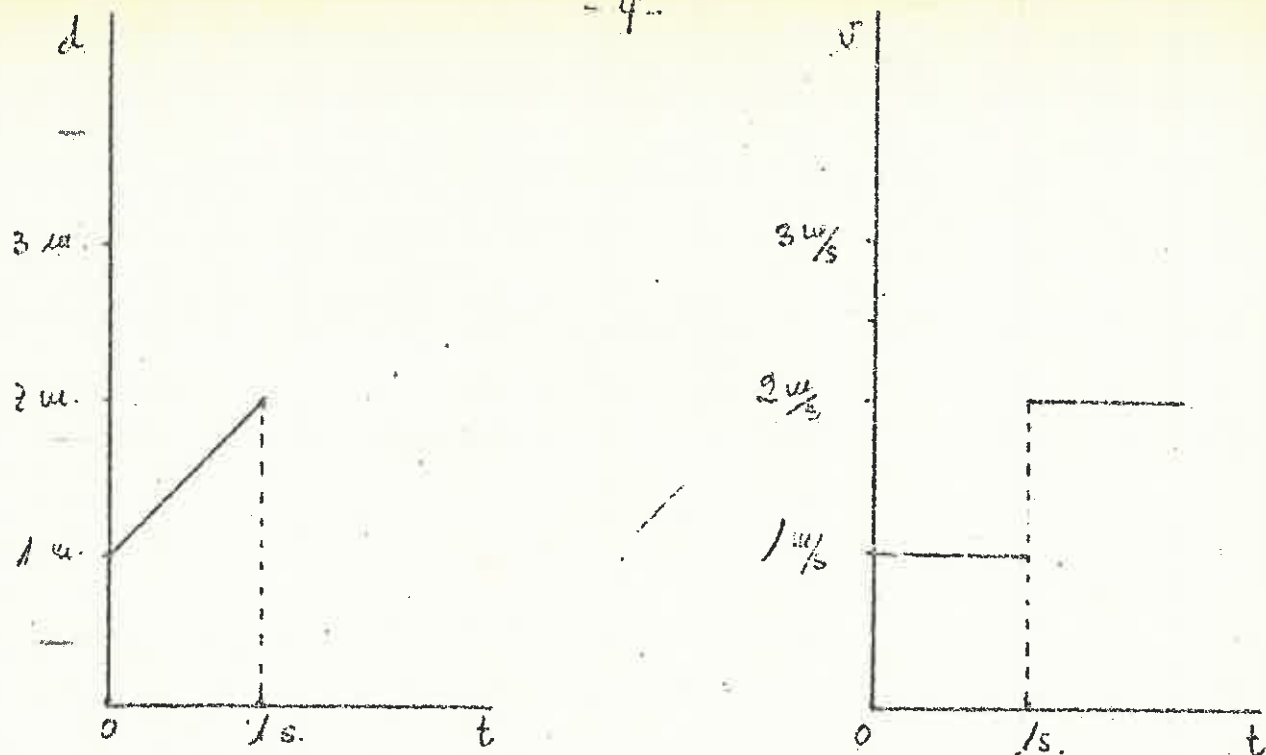


Figura 1. $n=1$.

Segona aproximació (A-2).

Durant el primer mig segon v és constant i val 1 m/seg .

Durant el següent mig segon v és constant i el seu valor és igual a la distància a la que es troba A al acabar el primer mig segon.

t	s	d	v
0	0	1 m	1 m/seg
(de 0 a $1/2$ seg)	$1 \cdot 1/2 = 1/2$	$1\text{ m} + 1/2\text{ m} = 1 + 1/2$	$1 + 1/2$
(de $1/2$ a 1 seg)	$(1 + 1/2) \cdot 1/2$	$1 + 1/2 + (1 + 1/2) \cdot 1/2 =$ $= \underline{\underline{(1 + 1/2)^2}}$ (veieu *)	$(1 + 1/2)^2$

*) $1 + 1/2 + (1 + 1/2) \cdot 1/2 = 1 \cdot (1 + 1/2) + 1/2 \cdot (1 + 1/2) = (1 + 1/2) \cdot (1 + 1/2) =$
 $= (1 + 1/2)^2$ (es treu $(1 + 1/2)$ factor comú)

Veieu figura 2. $n=2$.

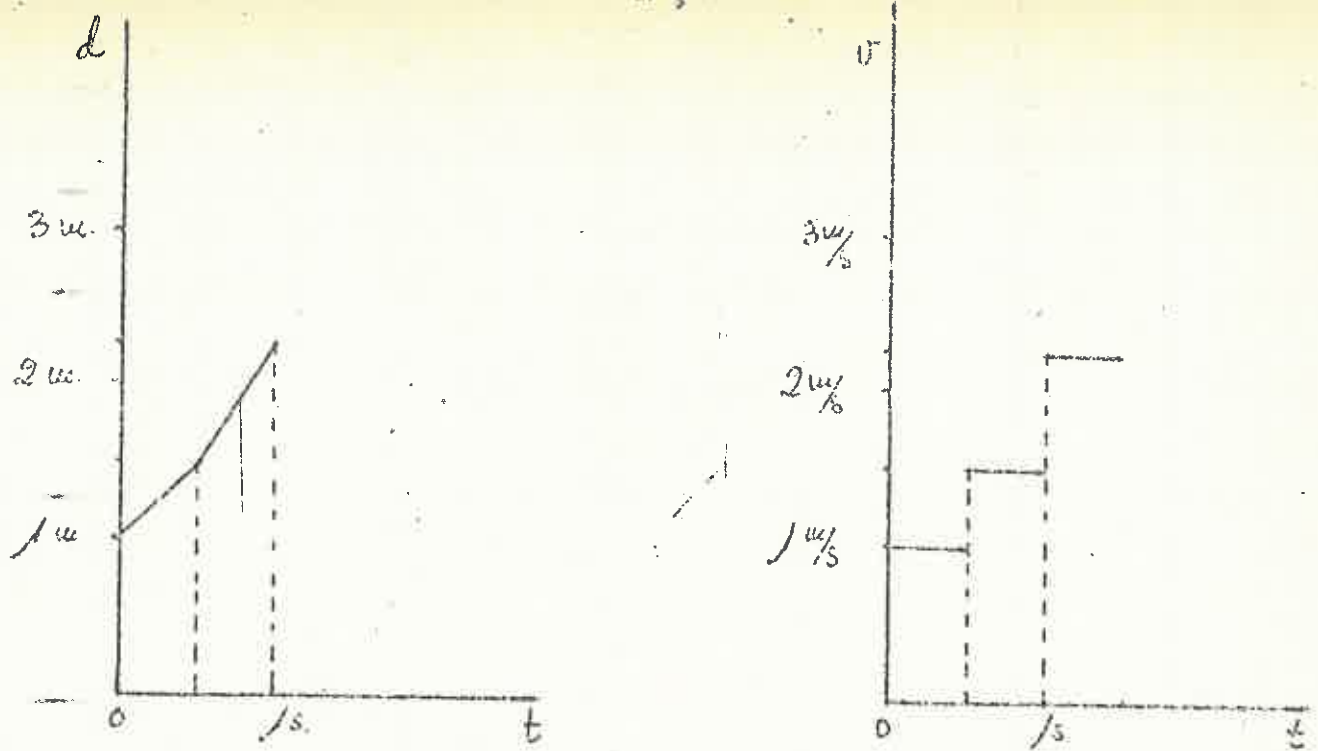


Figura 2. n=2.

Tercera aproximació (A-3).

Durant el primer terç de segon v és constant i val 1 m/seg .

Durant el 2^{on} terç de segon v és constant i el seu valor es reajusta i es fa igual a la distància a que es troba A a la fi del primer terç de segon.

Durant el tercer terç de segon v és constant i el seu valor és igual a la distància a la que es troba A a la fi del 2^{on} terç de segon.

t	s	d	v
0	0	0	1
(de 0 a 1/3) 1/3	$1 \cdot 1/3 = 1/3$	$1 + 1/3$	$1 + 1/3$
(de 1/3 a 2/3) 2/3	$(1 + 1/3) \cdot 1/3 = 1 + 1/3 + (1 + 1/3) \cdot 1/3 =$ $= (1 + 1/3)^2 \quad (1)$		$(1 + 1/3)^2$
(de 2/3 a 1) 1	$(1 + 1/3)^2 \cdot 1/3 = (1 + 1/3)^2 + (1 + 1/3)^2 \cdot 1/3 =$ $= (1 + 1/3)^3 \quad (2)$		$(1 + 1/3)^3$

(1): $1 + 1/3 + (1 + 1/3) \cdot 1/3 = 1 \cdot (1 + 1/3) + 1/3 \cdot (1 + 1/3) = (1 + 1/3) \cdot (1 + 1/3) =$
 $= (1 + 1/3)^2$
(es treu $(1 + 1/3)$ factor comú)

$$(2): (1+1/3)^2 + 1/3 \cdot (1+1/3)^2 = (1+1/3)^2 \cdot (1+1/3) = (1+1/3)^3$$

↑
(es treu $(1+1/3)^2$ factor comú)

Fes la gràfica.

Quarta aproximació (A-4). - Exercici.

Seguint els models anteriors, ara has d'estar en condicions de fer la taula corresponent. Fes també la gràfica.

Quinta aproximació (A-5). - Exercici. Veieu figura 5. $n=5$.

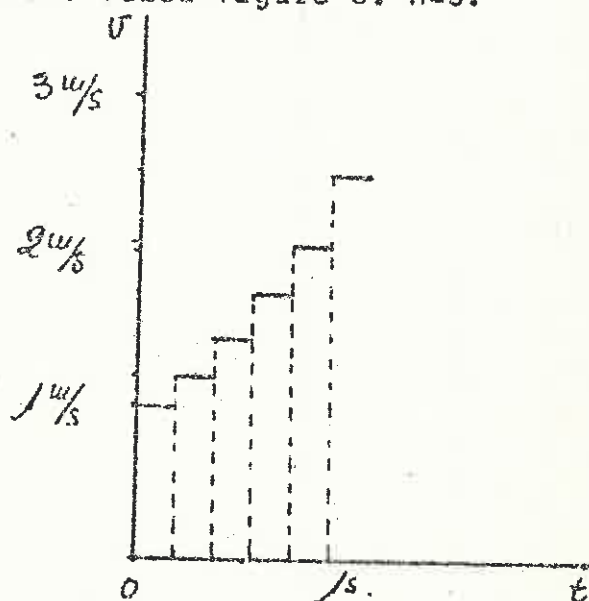
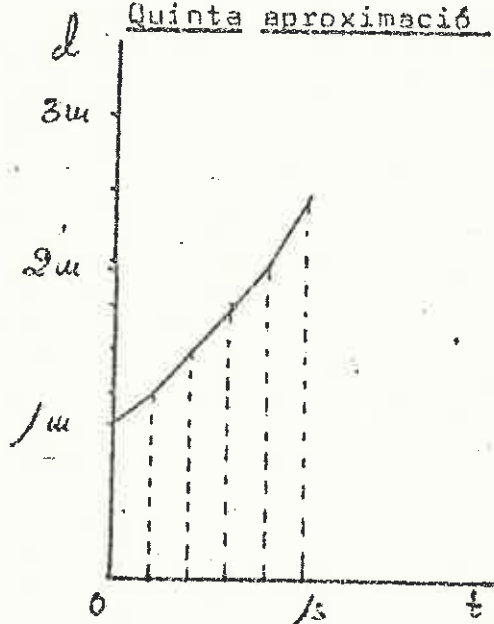


Figura 5. $n = 5$.

Generalització:

En l'estadi A-50 del procés, quines foren la distància i la velocitat aproximades, al terme de 1 segon? (Figura $n=50$).

I en l'estadi A-100?

I en els estadis A-1000, A-10,000, A-100,000 i A-1,000,000?

En general en l'estadi A-n del procés (n és un nombre enter qualsevol), quines són la distància i la velocitat aproximades?

(La resposta és $(1+1/n)^n$).

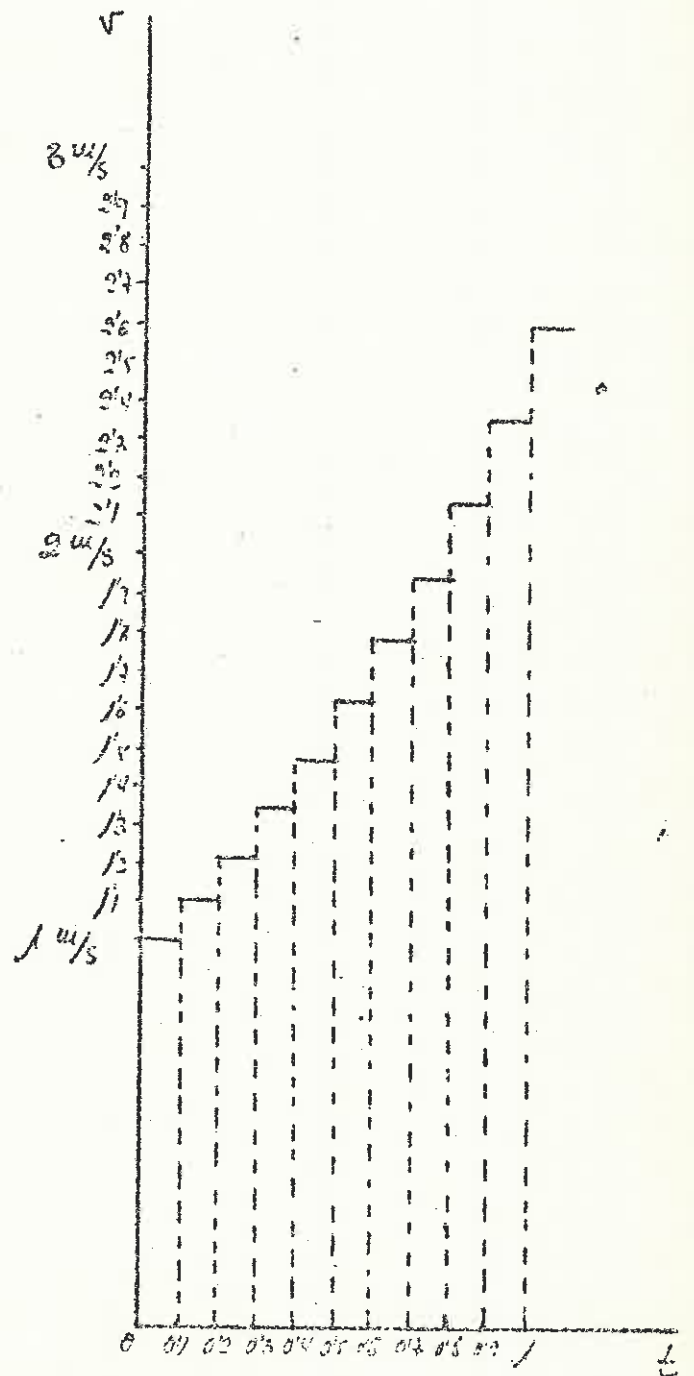
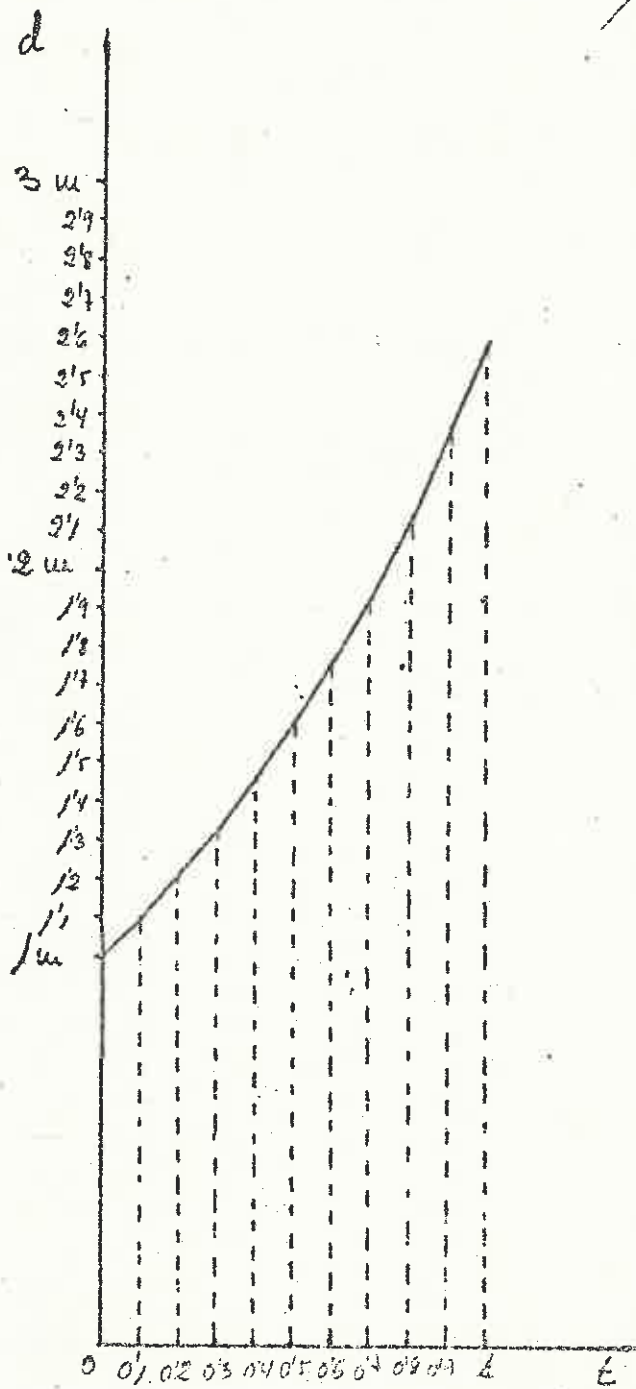


Figura per $n = 10$

(Aproximació A-1D)

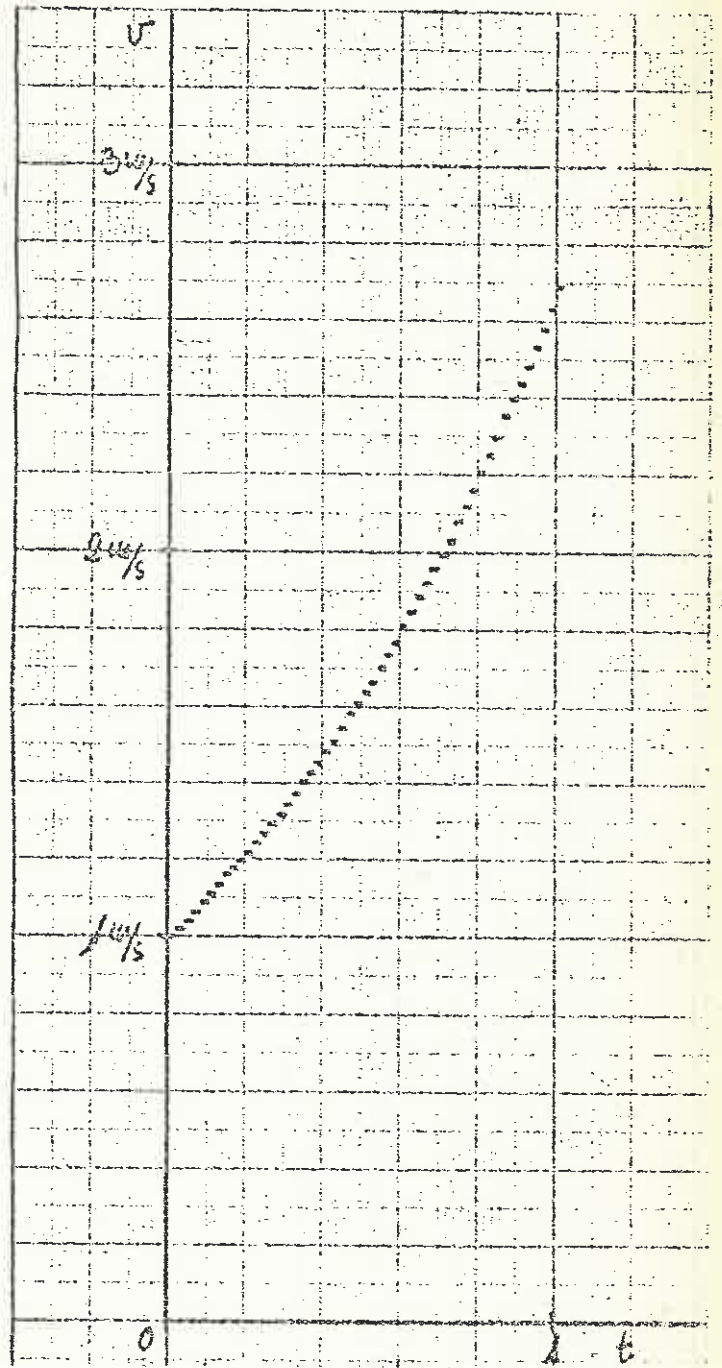
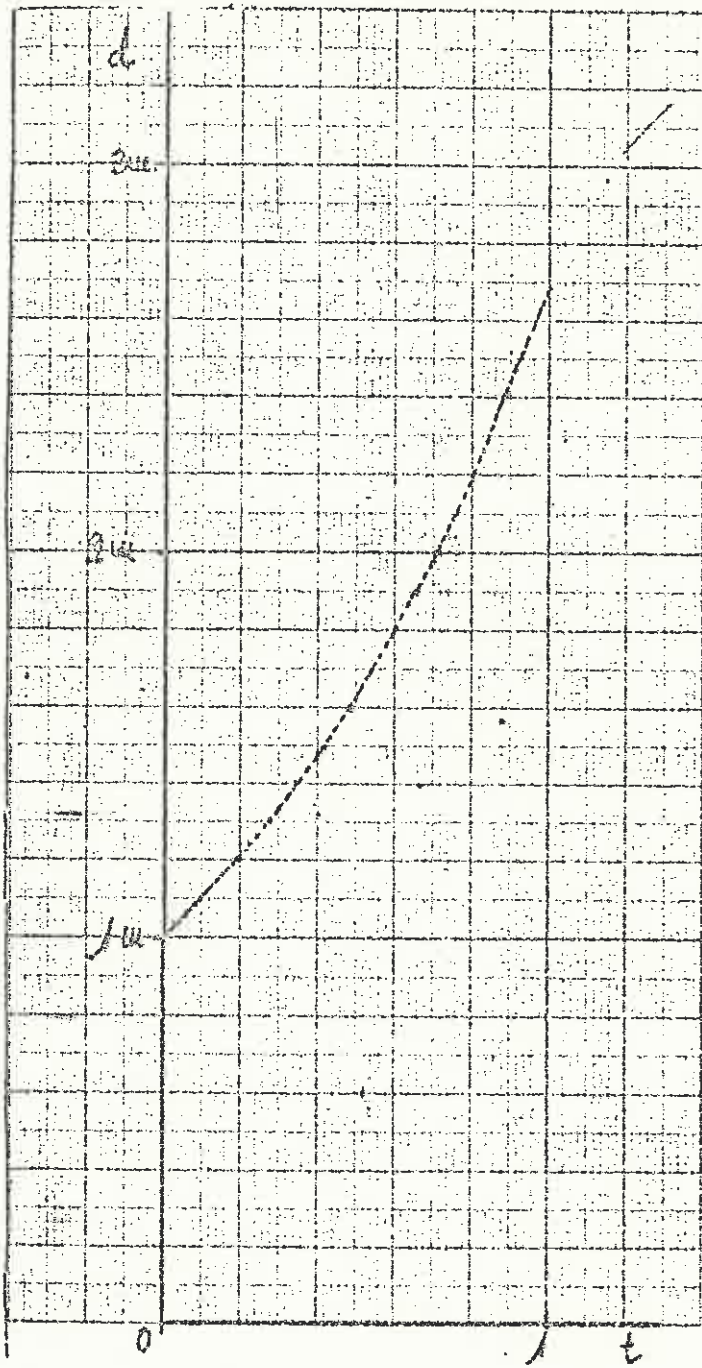


Figura per $n=50$

(Aproximació A-50)

Càlcul:

Amb l'ajut de la calculadora fes una recopilació de les dades obtingudes semblant a la següent. (Recorda que volem saber la distància a la que es trobarà A el terme de 1 segon).

Distància aproximada al cap de 1 segon:

Estadi (n)	1	2	3		100,000		1,000,000	
Distància (metres)	2	2,25	2,37		2,718268		2,7182804	

Anàlisi:

Calcula tants valors successius de la distància com et siguin

necessaris per poder contestar amb certa seguretat les següents --
qüestions:

1) La successió de distàncies, és creixent?. És dir, cada terme és més gran o igual que l'anterior?).

2) Es posa de manifest alguna mena d'estabilitat en els dígit dels termes de la successió?

3) Diries que el procés realitzat per calcular les distàncies és finit (o sigui que arriba un moment en que no es pot seguir) o bé que pel contrari pot continuar indefinidament?. (Prescindeix de les dificultats pràctiques, es tracta només de si en teoria es possible seguir indefinidament).

4) És evident que en principi podem calcular d per qualsevol enter n, i, per tant, per tots els enters, i ja que hi han infinits enters tindrem una successió infinita de distàncies (formada per una quantitat infinita de nombres). Estàs d'acord amb aquesta afirmació?. Intenta explicar-la més bé.

problema a l'hora de fer la taula amb la calculadora, calgués anar a e, d'altra, a partir de 100.000 ja donaven el mateix valor per e, etc.

Intentat de qüestió a la finititud amb que convergència la successió $(1 + \frac{1}{n})^n$

5) Prova de posar en evidència la tendència de la successió. És a dir, els nombres de la successió, s'acosten a un valor determinat?. Creus que en algun moment passaràn de 3?.

6) Si creus que la successió s'acosta a un nombre concret, -- proposa un nom per aquest nombre. (És a dir, un símbol per representar-lo, de la mateixa manera que el nom de 3,14159... es π).

7) Com et sembla més convenient nomenar a la relació entre -- aquest nombre i la successió?. Per exemple, es podria dir que és el resultat de la successió, o el límit de la successió, o la -- tendència, o la seva frontera, o el seu confí

*intanta que
deixar que
de limit*
8) Procura precisar al màxim en que consisteix exactament la relació entre aquest nombre i la successió. Recorda per això el títol del nostre mètode: aproximacions successives.

9) Quin serà finalment el resultat del nostre problema?. O sigui, a quina distància es troba A el cap de 1 segon?.

SEGONA FASE (F-2).-- LA FUNCIO EXPONENCIAL

- Volem saber a quina distància es trobarà A a la fi de t segons.

(t és un valor dels temps arbitrari).

Repasa la part anterior F-1, per adonar-te de que si en lloc de 1 segon hi posem t segons, obtenim les següents taules:

(si cal completa el que segueix amb les teves notes i observacions).

A-1 .-

t	s	d	v
0	0	1	1
(de 0 a t) t	$1 \cdot t = t$	$\underline{1+t}$	$1+t$

A-2 .-

t	s	d	v
0	0	1	1
(de 0 a t/2) t/2	$1 \cdot t/2 = t/2$	$1+t/2$	$1+t/2$
(de t/2 a t) t	$(1+t/2) \cdot t/2$	$1+t/2 + (1+t/2) \cdot t/2 =$ $\underline{=(1+t/2)^2}$	$(1+t/2)^2$

A-3 .-

t	s	d	v
0	0	1	1
(de 0 a t/3) t/3	t/3	$1+t/3$	$1+t/3$
(de t/3 a 2t/3) 2t/3	$(1+t/3) \cdot t/3$	$1+t/3 + (1+t/3) \cdot t/3 =$ $\underline{=(1+t/3)^2}$	$(1+t/3)^2$
(de 2t/3 a t) t	$(1+t/3)^2 \cdot t/3$	$(1+t/3)^2 + (1+t/3)^2 \cdot t/3 =$ $\underline{=(1+t/3)^3}$	$(1+t/3)^3$

- Torna a fer ara la generalització que hem fet a la 1ª fase.

Resposta: $(1+t/n)^n$

- En la primera fase s'haurà establert amb precisió el significat

de l'expressió: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n = e$

- Fent ús de la calculadora, i per $t=10$, assegura't de que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+t/n)^n \neq e$$

Observe la següent taula per $d = (1+10/n)^n$

n	1	2	3		100,000		1,000,000	
d	11	36	81,37		22015,4559		22025,3649	

- De la mateixa manera comprova que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n/t})^{n/t} = e$$

Observe la següent taula per $d = (1 + \frac{1}{n/10})^{n/10}$

n	1	2	3		100,000		1,000,000	
B	1,2709	1,43	1,5525		2,718145		2,718268	

- Adona't de que:

$$(1+t/n)^n = ((1 + \frac{1}{n/t})^{n/t})^t$$

i de que, per tant:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+t/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 + \frac{1}{n/t})^{n/t})^t$$

i ja que t és un valor constant que no varia quan n varia, resulta que en aquest cas la nostra successió s'acosta al valor:

$$e^t$$

Per tant, la distància a la que es troba la galaxia A a la fi de t segons és $d = e^t$ i la seva velocitat és també $v = e^t$.

A continuació s'indica el procés a seguir -igual al anterior- per obtenir l'expressió d'una altra llei física.

Repeteix, seguint les indicacions i els càlculs fets abans, tot el camí i desenvolupa'l amb detall.

Llei de desintegració radioactiva.-

La velocitat de desintegració d'una substància radioactiva és proporcional al nombre d'àtoms presents en la substància a cada instant determinat.

S'intenta trobar el nombre d'àtoms que queden a la fi d'un temps t . Fes-ho en dues etapes. Cerca primer (F-1) els àtoms que resten a la fi de 1 segon, i després (F-2) el cas general, és a dir, els àtoms que resten a la fi de t segons.

Notació:

N_0 és el nombre inicial d'àtoms.

N és el nombre d'àtoms que resten a la fi de t segons.

$N_0 - N$ el nombre d'àtoms desintegrats en el temps t .

k és la constant de proporcionalitat.

v és la velocitat de desintegració (nombre d'àtoms desintegrats per segon).

F-1 .- Àtoms que resten a la fi de 1 segon.

De la mateixa manera que abans, considera successivament aquest segon dividit en instants de temps cada cop més petits.

temps	Àtoms presents instant anterior	Àtoms desintegrats ($v \cdot t$)	Àtoms que resten
0	N_0	0	N_0
1	N_0	$k \cdot N_0$	$N_0 - k \cdot N_0 = N_0 \cdot (1 - k)$

temps	Àtoms presents instant anterior	Àtoms desintegrats (v.t)	Àtoms que resten
0	N_0	0	N_0
1/2	N_0	$1/2 \cdot k \cdot N_0$	$N_0 \cdot (1-k/2)$
1	$N_0 \cdot (1-k/2)$	$1/2 \cdot k \cdot N_0 \cdot (1-k/2)$	$N_0 \cdot (1-k/2)^2$

En general, obtindràs que els Àtoms que resten a la fi de 1 segon (el dividir en intervals de temps de longitud $1/n$) són:

$$N_0 \cdot (1-k/n)^n$$

i per tant:

$$N = \lim_{n \rightarrow \infty} N_0 \cdot (1-k/n)^n$$

Reposa la part final anterior i veuràs que:

$$N = N_0 \cdot e^{-k}$$

F-2.- Àtoms que resten a la fi de t segons.

Torna a fer el mateix amb un temps t. Arribaràs a que:

$$N = \lim_{n \rightarrow \infty} N_0 \cdot (1-k \cdot t/n)^n$$

i per tant obtindràs la llei de desintegració cercada que és:

$$N = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Observacions finals:

En els dos problemes hem obtingut:

$$1) d = e^t$$

$$2) N = N_0 \cdot e^{-kt} \quad (N_0 \text{ i } k \text{ constants}).$$

Normalment en Física la variable independent sol ser el temps, i es representa per t . En matemàtiques, una notació usual per aquesta variable és la lletra x .

Així, les anteriors expressions es converteixen en:

$$1) d = e^x$$

$$2) N = N_0 \cdot e^{-kx}$$

De forma semblant, l'altra variable (distància (d) i nombre d'àtoms (N)), en Física se sol escriure amb diverses lletres segons el fenomen que s'estigui estudiant. En matemàtiques es corrent designar-la per la lletra y .

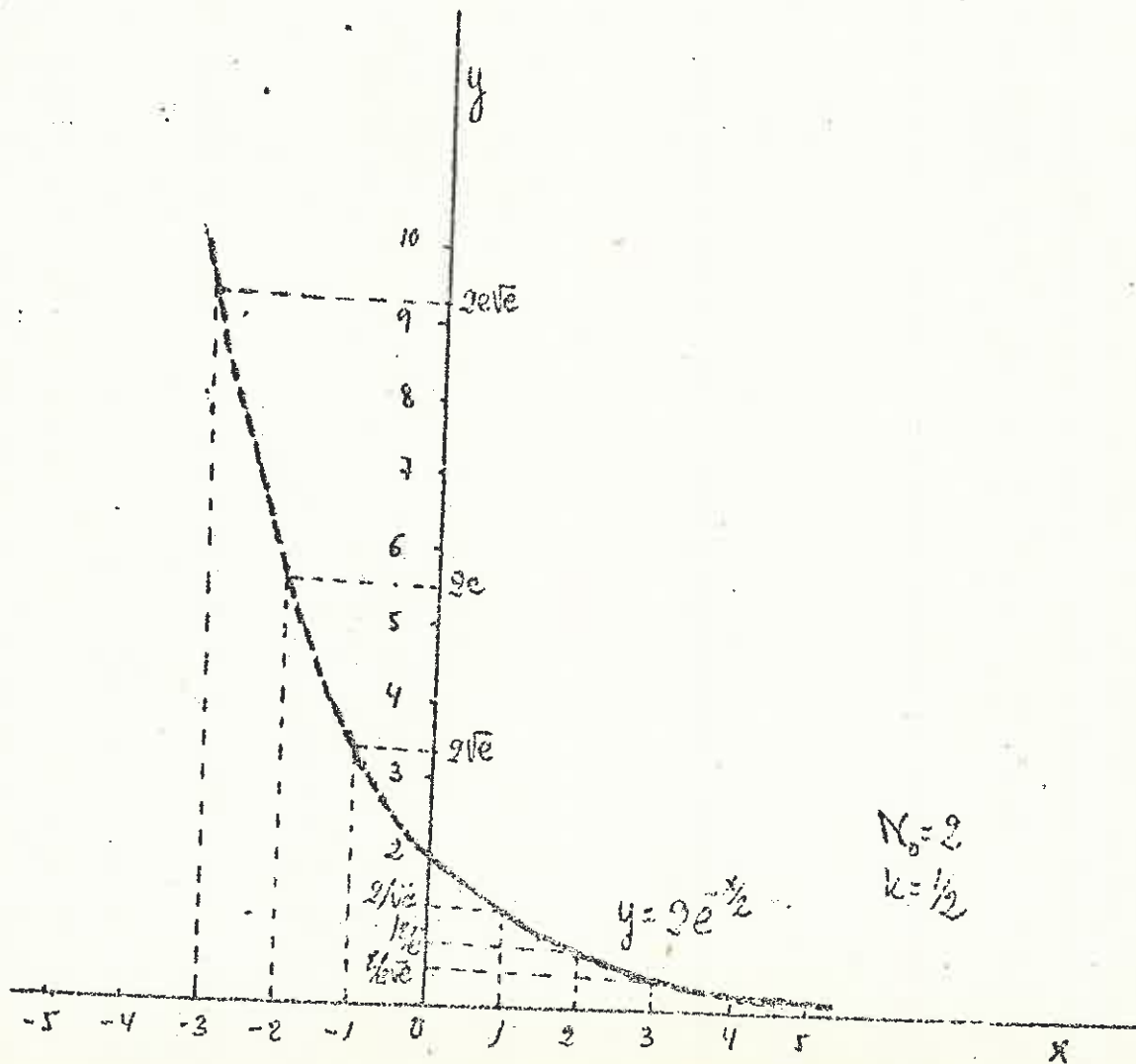
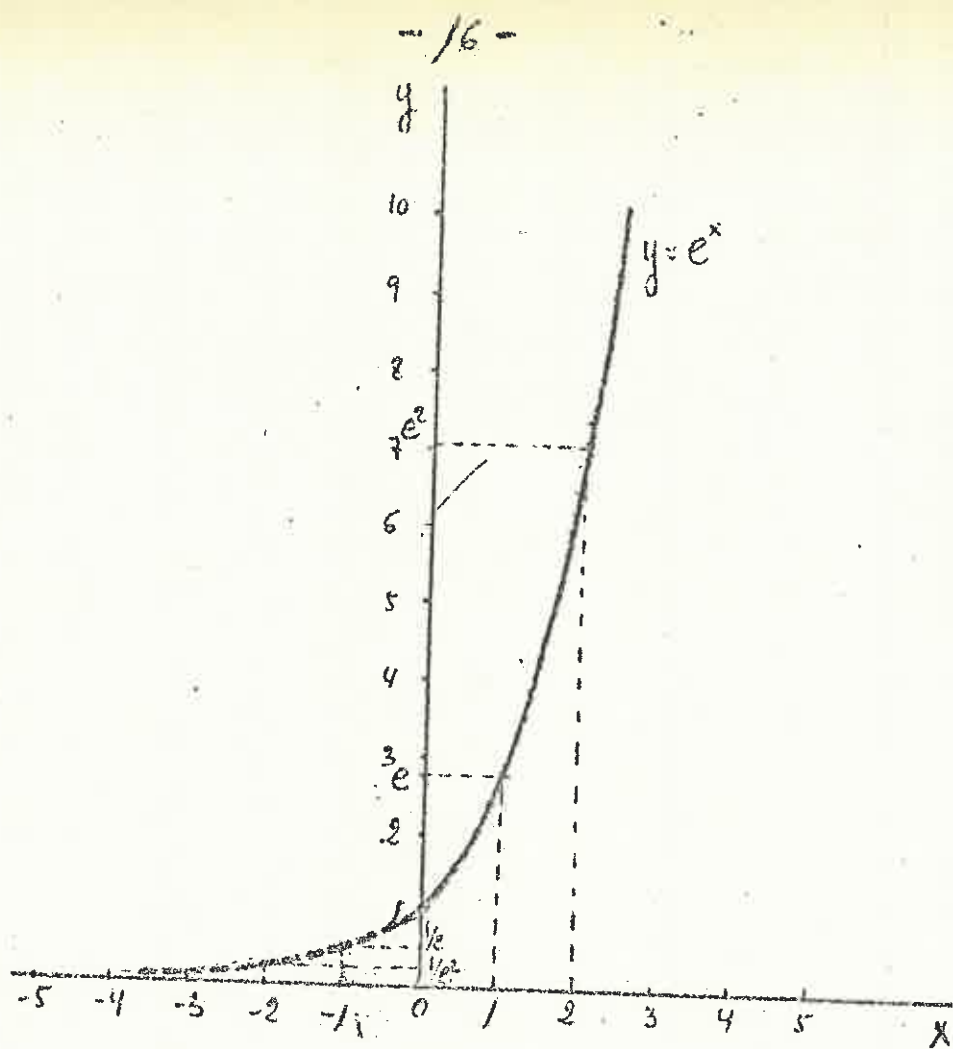
Tenim finalment:

$$1) y = e^x$$

$$2) y = N_0 \cdot e^{-kx}$$

Acabem amb dues gràfiques d'aquestes funcions, fent notar el següent:

En els nostres exemples, la x era el temps t . Ja que el temps no pot ser negatiu, les gràfiques en els nostres problemes estan a la part positiva de la x (línia contínua). Ara bé, la x pot representar altres variables -apart del temps- que poden ser negatives i per tant en general, les gràfiques de la part negativa de la x (línea a traços) també serà vàlida.



LÍMITES DE SUCESIONES.-

1.-Aproximación al concepto intuitivo de límite de una sucesión mediante la utilización de la calculadora de bolsillo.

2.-Formalización del concepto intuitivo.

1.- La necesidad del uso de calculadoras para una introducción intuitiva del concepto de límite de una sucesión, obedece al nivel concreto en que se encuentran la mayoría de los alumnos de 2º de BUP. El método riguroso(formal) de entrada, la mayoría no lo captan, según nos consta por nuestra experiencia.

Se comenzaría con ejemplos elementales usuales, y a continuación, como consecuencia del uso de calculadoras, se aborderían problemas del cálculo de límites que en un desarrollo riguroso(formal) serían muy complejos, por ej.:

n	$\sqrt[n]{n}$
1	1
2	1,4142136
3	1,4422495
4	1,4142136
10	1,2589254
31	1,1171419
84	1,0541635
154	1,0332000
3698	1,0022410
10^6	1,0000138
10^7	1,0000016
10^8	1,0000002
$3 \cdot 10^8$	1,0000001
$3,9 \cdot 10^8$	1,0000001
$4 \cdot 10^8$	1
...	...
...	...
...	1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(Se ha utilizado la calculadora Casio f-29))

-las teclas usadas han sido: $n \times^y n \frac{1}{n} =$

-se ha utilizado la tecla EXP para introducir valores como $3,9 \cdot 10^8$.

- es de señalar la poca información que se tiene con valores de n pequeños, y el hecho de que la calculadora a partir de un cierto valor de n toma como valor de $\sqrt[n]{n}$ uno.

Con estos ejercicios prácticos el alumno adquiere la idea de límite como número al que se aproximan los términos de la sucesión y además pierde el miedo a abordar un problema de cálculo de límites, sea cual sea su complejidad, por ejemplo:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\sqrt[3]{8 + \frac{2}{n}} - 2 \right] = \frac{1}{6}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{n^3 + 4} + \sqrt[3]{8n^3 + 4n^2 - 3n} \right] = \frac{1}{3}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n! e^n} = 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(4n^2 + 2n + 1)}{\ln n} = 2$$

Los problemas (2) y (4) son buenos ejemplos para aprovechar la memoria de la calculadora(memoria sumativa). Previamente al problema(3); se introduciría el número e mediante la calculadora: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281...$

Con estas prácticas mejoraremos el aprendizaje del uso de las calculadoras. Es interesante trabajar cuestiones acerca de errores de redondeo (sólo admite ocho cifras), Así como a la vista de las tablas de valores, hacer comparaciones entre distintas sucesiones en cuanto a rapidez de aproximación.

También es importante hacer ejemplos de sucesiones que no son convergentes, para evitar la idea confusa de que toda sucesión es convergente.

Ej. $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen } n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cos } m$

Para finalizar este apartado veamos un ejemplo interesante:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - \cos \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$$

(Casio fx-20, $\pi=3,1416$)

n	1/n	(grados)	cos 1/n	1 - cos 1/n	$n^2(1-\cos \frac{1}{n})$
1	1	57,295645	0,540304	0,459696	0,459696
2	0,5	28,647822	0,877583	0,122417	0,489668
3	0,333..	19,098546	0,944957	0,055043	0,495387
4	0,25	14,323911	0,968913	0,031087	0,497392
5	0,2	11,459129	0,980067	0,019933	0,498325
6	0,166..	9,549270	0,986143	0,013857	0,498852
7	0,1428.	8,185089	0,989813	0,010187	0,499163
8	0,125	7,161955	0,992198	0,007802	0,499328
9	0,111..	6,366182	0,993834	0,006165	0,499365
10	0,1	5,729564	0,995004	0,004996	0,499600
11	0,0909.	5,208689	0,995871	0,004125	0,499609
12	0,0833.	4,7746352	0,996530	0,003470	0,499680
13	0,0769.	4,407352	0,997043	0,002957	0,499733
14	0,0714.	4,092542	0,997450	0,002550	0,499800
15	0,0666.	3,819705	0,997779	0,002221	0,499725
16	0,0625	3,580977	0,998048	0,001952	0,499712
17	0,0588.	3,370330	0,998270	0,001730	0,499970
18	0,055..	3,183088	0,998457	0,001543	0,499932
19	0,0526.	3,015555	0,998615	0,001385	0,499985
20	0,05	2,864782	0,998750	0,001250	0,5 ←--
..					
25	0,04	2,2918258	0,999200	0,000800	0,5 ←--
..					
..					

Nota.-Es importante en este ejemplo usar valores de n pequeños, pues para valores grandes, cos 1/n, la calculadora tomaría como 1 (error de redondeo) y por tanto 1-cos 1/n=0, así como $n^2(1-\cos \frac{1}{n})=0$ y parecería erróneamente que el límite es cero.

2.- Es una buena ocasión ahora para explicar al alumno la cuestión de la "formalización" en Matemáticas. La necesidad de formalizar la definición intuitiva de límite de una sucesión, como número al que se aproximan los términos de la sucesión. Es decir, que el alumno no sólo sepa una definición formal, sino que comprenda que significa la formalización en Matemáticas.

En el curso de 2º de BUP sólo se puede intentar una primera aproximación a esta idea. Se sugiere la lectura de: N. Bourbaki, Elementos de historia de las Matemáticas. AU 18; págs. 24-33 (noción de verdad en Matemáticas).

Se pretende conseguir que los alumnos comprendan y trabajen la siguiente definición de límite de sucesiones:

" $\lim(a_n) = l$ " si "Cada entorno de l posee todos los términos de la sucesión excepto un número finito"

O bien: "En cada entorno de l están todos los términos de la sucesión a partir de uno dado"

Para introducir esta definición habría que definir antes el concepto de entorno de un n^o l . Esto se puede hacer simplemente como un intervalo abierto que contiene a l . Si se va a trabajar la definición clásica $\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \dots$ etc., es mejor utilizar en vez de entornos, entornos simétricos de centro l y radio ϵ , definiéndolos como intervalos del tipo $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ $\epsilon > 0$. Es decir: $E(l, \epsilon) = (l - \epsilon, l + \epsilon)$ $\epsilon > 0$.

Por supuesto, se aconseja la representación de todo lo que se hace en la recta real. Conviene insistir en la idea básica de que no hay ningún entorno más pequeño que todos los demás. Si lo hubiera, bastaría comprobar la definición con él y no con todo entorno.

Para introducir la definición dada anteriormente se aconseja trabajar con un ejemplo de sucesión $\frac{1}{n}$ convergente $(-1)^n$ y otro de sucesión convergente $(\frac{1}{n})$ y hacer observar que LA DIFERENCIA entre ellas se puede formalizar a través del instrumento del entorno. La sucesión $1/n$ cumple esa definición con $l=0$ y $(-1)^n$ no la cumple con ningún número. Se aconseja repetir este tipo de ejemplos formados por pares de sucesiones, una convergente y la otra no.

La primera dirección para trabajar con la definición dada sería demostrar las propiedades elementales del concepto introducido, esto es:

- (1) unicidad del límite.
- (2) Acotación de las sucesiones convergentes.
- (3) una sucesión convergente con infinitos términos positivos e infinitos negativos tiene límite cero.
- (4) Si una sucesión converge a un n^o positivo entonces todos los términos de la sucesión son positivos excepto un número finito.
- (5) Si $a_n \leq b_n$ y convergen, entonces $\lim(a_n) \leq \lim(b_n)$.
- (6) Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ convergen y $\lim a_n = \lim c_n$, entonces $\lim(a_n) = \lim(b_n) = \lim(c_n)$.
- (7) toda sucesión creciente y acotada tiene límite.

Las propiedades 1, 5 y 6 son una buena ocasión para introducir el concepto de demostración por reducción al absurdo. Las demostraciones de todas estas propiedades son mucho más claras con la definición dada que con la clásica, y en cursos buenos se pueden demostrar una o dos como ejemplos y dejar el resto a los alumnos, o bien esperar a que ellos mismos las demuestren y desarrollen.

Se aconseja formular estas propiedades bajo el título de TEOREMAS y habitar de esta forma al alumno a la idea de teorema como "algo" que se necesita demostrar y a la idea de DEFINICION como "algo" que se necesita precisar.

La segunda dirección en que se puede trabajar con esta definición pretenda como objetivo que el alumno comprenda la importancia de la definición dada, analizando los resultados que se obtendrían si en esa definición se suprimieran o modificaran algunos términos. Estas cuestiones se pueden plantear en forma de ejercicios para los alumnos, Eja:

1) Supongamos que aceptamos la siguiente definición de límite: $\lim(a_n) = a$ si cualquier intervalo abierto que contenga al número a , contiene infinitos términos de la sucesión. Demostrar que con esta definición el límite de una sucesión podría no ser único y que habría sucesiones convergentes que no estarían acotadas. ¿Se cumpliría con esta definición la propiedad (3)?

2) ¿Qué sucesiones tendrían límite con la siguiente definición: $\lim(a_n) = L$ si cualquier intervalo (abierto o cerrado) que contenga a L contiene a todos los puntos de la sucesión excepto un n^o finito.

3) ¿Qué sucesiones serían convergentes si suprimimos en la definición de límite la expresión "excepto un número finito" o "a partir de uno dado"?

4) ¿Qué sucesiones tendrían límite con la siguiente definición: $\lim(a_n) = L$ si EXISTE un entorno de L que contiene a todos los puntos de la sucesión excepto un número finito? Considerese el entorno $R = (-\infty, +\infty)$.

Se trata ahora de llegar a la formulación clásica, para ello es necesario en primer lugar trabajar con entornos simétricos. Si en la definición dada se ha hablado simplemente de entornos, es necesario demostrar primeramente que la definición que se obtiene al escribir entorno simétrico en lugar de entorno es equivalente a la dada. Ello se hará en la idea de que todo entorno de L contiene un entorno simétrico de L . Si se quiere obviar esto, lo único que hay que hacer es poner directamente en la definición dada entornos simétricos. A continuación establecer (por ejemplo, mediante dibujos) la igualdad:

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon) = \{x \mid |x - L| < \varepsilon\}$$

y explicar la definición:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \left| \quad |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \right.$$

como abreviatura de :

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty) \quad \exists a_{n_0} \quad \left| \quad a_n \in E(L, \varepsilon) \quad \forall n \geq n_0 \right.$$

que es una reformulación de la definición dada.

Esta es una ocasión para hablar del concepto de distancia entre números reales como: $d(a, b) = |a - b|$.

De todas formas somos partidarios de la ELIMINACION TOTAL de este lenguaje en 2º de BUP y limitarse a la definición por entornos. Es preciso hacer notar que la definición de límite de sucesiones es una definición TOPOLOGICA (y que por tanto no necesita el concepto de distancia). Al introducir la distancia lo único que se hace es reformular la definición para el caso de espacios METRICOS, pero NO SE AÑADE NADA NUEVO RESPECTO A LA IDEA DE LIMITE y para el alumno resulta más difícil.

NOTAS

- 1)). Somos partidarios de introducir el concepto de límite de sucesiones en 2º de BUP y dejar toda la teoría de funciones para 3º de BUP.
- 2)). No es necesario introducir para la definición por entornos ningún estudio de desigualdades que son, generalmente, difíciles de manejar para el alumno.
- 3)). Las únicas propiedades que se pueden demostrar con la definición por entornos son las algebraicas: $\lim(a + b) = \lim(a) + \lim(b)$ etc, ... Somos partidarios de razonarlas de una forma intuitiva a partir de las propiedades de $\mathbb{R}$ y no realizar ninguna demostración rigurosa, que de hecho, si se hacen, casi nadie entiende.
- 4)). Existe la posibilidad para cursos o alumnos buenos, de desarrollar una investigación a través del concepto de límite de sucesiones. Por ejemplo: definir punto de adherencia de A , como punto que es límite de una sucesión formada por elementos de A y demostrar propiedades relativas a la adherencia.
- 5)). No hemos tratado intensamente el problema de los límites infinitos, pero surge naturalmente con la calculadora en casos como: $\lim(n)$, $\lim \sqrt[n]{n!}$, etc, ...
La definición dada, en el caso $l = \infty$, sigue siendo válida sin más que definir previamente:

Entorno de $+\infty$ = Intervalo del tipo $(a, +\infty)$
Entorno de $-\infty$ = " " " $(-\infty, a)$.

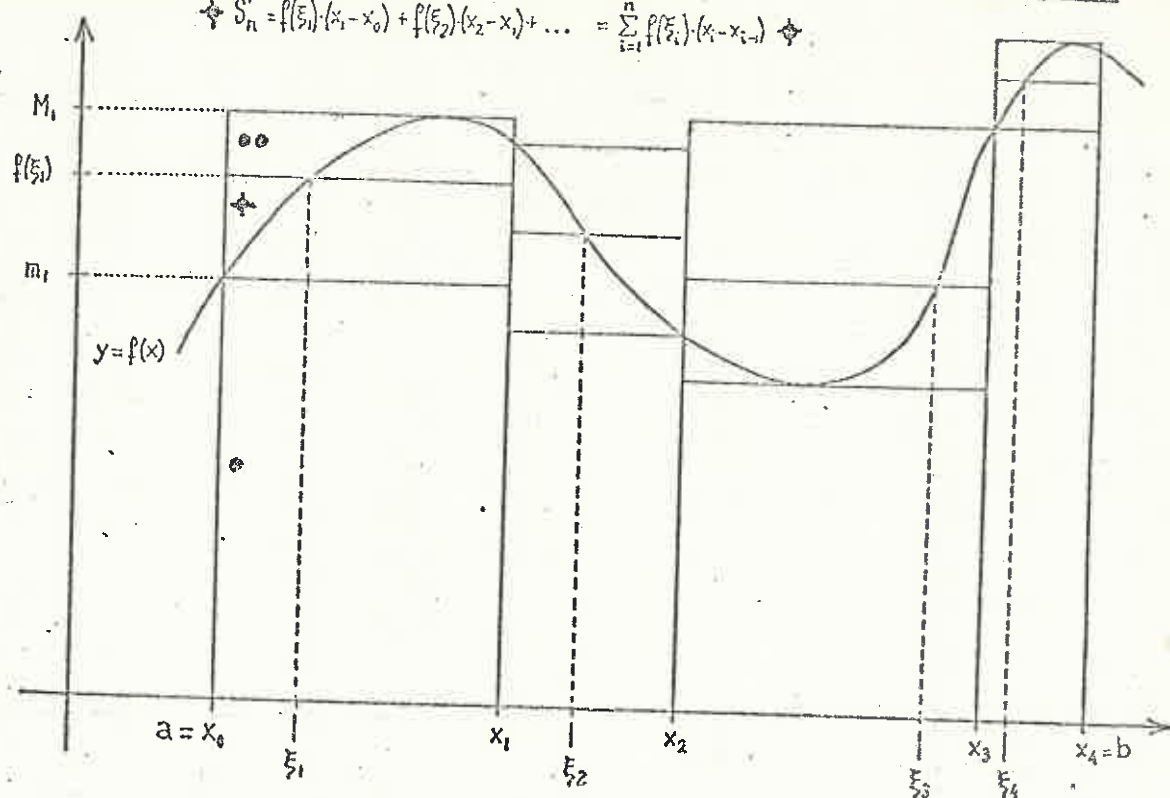
Bastaría, si no se quiere introducir estas definiciones, con la idea intuitiva que se obtiene con la calculadora.

- 6) Todo este proceso ha sido ensayado con resultados positivos, excepto la dirección 2ª (pg. 4) de la cual los alumnos deducen que solo hay una noción de convergencia en $\mathbb{R}$, y no que cada "tipo de entornos" produce una. Para evitar esto se aconseja observar que el hecho de que los entornos sean intervalos abiertos no es lo determinante e investigar, por tanto, que ocurriría si en lugar de ellos se tomara otra familia de conjuntos que conviene tomar con unas mínimas condiciones de regularidad, parecidas a las que cumplen los intervalos. Por ejemplo: 1) Que la intersección de dos elementos de la familia esté en ella. (Técnicamente esto significa que la familia es una base de una cierta topología y por tanto la convergencia es la misma tomando como entornos los elementos de la familia y no todos los de la topología, como ocurre con los intervalos respecto a la topología natural de $\mathbb{R}$). 2) Que dados $a \neq b$, exista A, B de la familia tales que $A \cap B = \emptyset$ y $a \in A, b \in B$. Esta es la condición utilizada en la mayoría de las demostraciones enunciadas en la página 3, e implica que el espacio es de HAUSDORFF. Es interesante también trabajar con familias que no cumplan 2) para observar que ocurre entonces con la unicidad del límite.

Se trata de que el alumno comprenda que la noción de convergencia es una noción topológica, es decir que depende directamente de la familia de entornos con que se trabaje y no de las propiedades algebraicas del conjunto base. Esto no se consigue si directamente se trabaja con la distancia que utiliza propiedades algebraicas, de hecho, es mucho más fácil trabajar con entornos que con la distancia. Algunas de las nociones de convergencia de los ejercicios de la pg. 4, se obtienen con determinadas topologías: discreta, indiscreta. Se pueden plantear otras: cofinita, etc. Quizás con todo esto se podría intentar lograr que el alumno tuviera una comprensión más profunda de $\mathbb{R}$. Se puede también continuar en la línea de la nota 4) estudiando por ejemplo los compactos en cada topología. Tanto compactos como otro concepto deberían definirse a través de sucesiones.

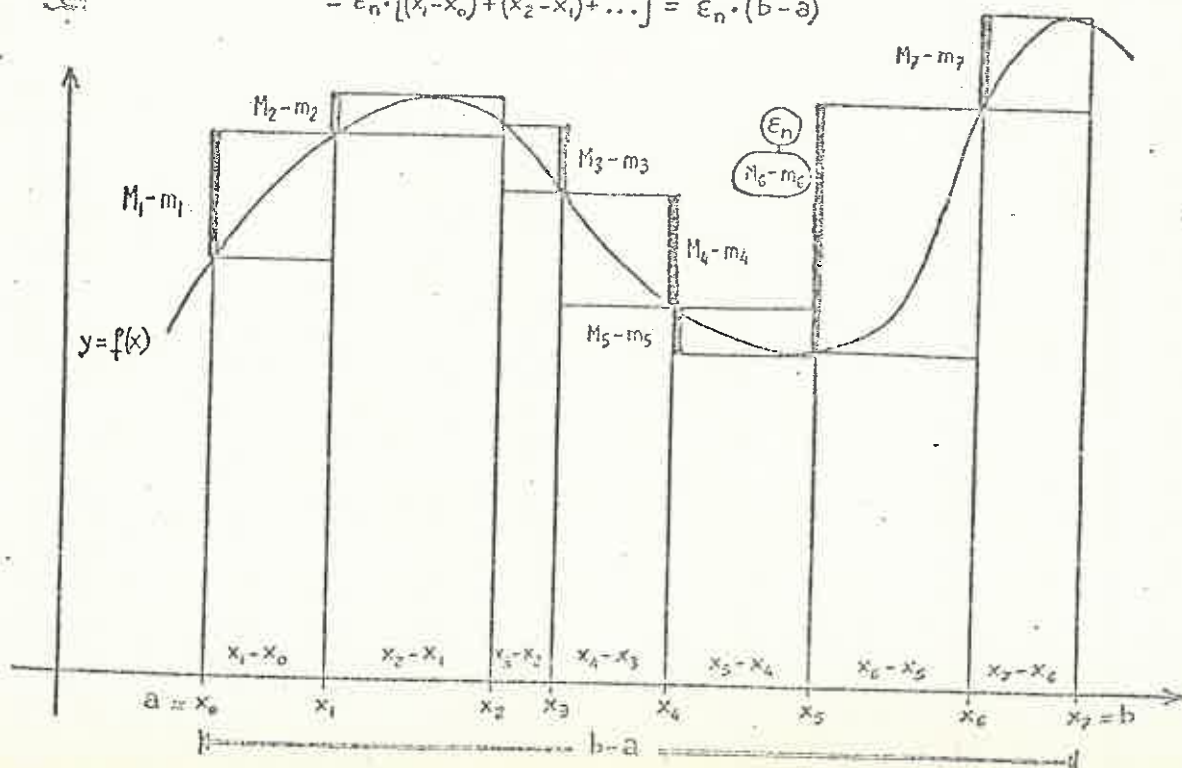
$$\begin{aligned} \bullet S_n &= m_1 \cdot (x_1 - x_0) + m_2 \cdot (x_2 - x_1) + \dots = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \bullet \\ \bullet \bullet S_n &= M_1 \cdot (x_1 - x_0) + M_2 \cdot (x_2 - x_1) + \dots = \sum_{i=1}^n M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \bullet \bullet \\ \diamond S'_n &= f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) + f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) + \dots = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \diamond \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &\leq \boxed{S'_n} \leq S_n \\ S_n &\leq S'_n \leq S_n \end{aligned}$$

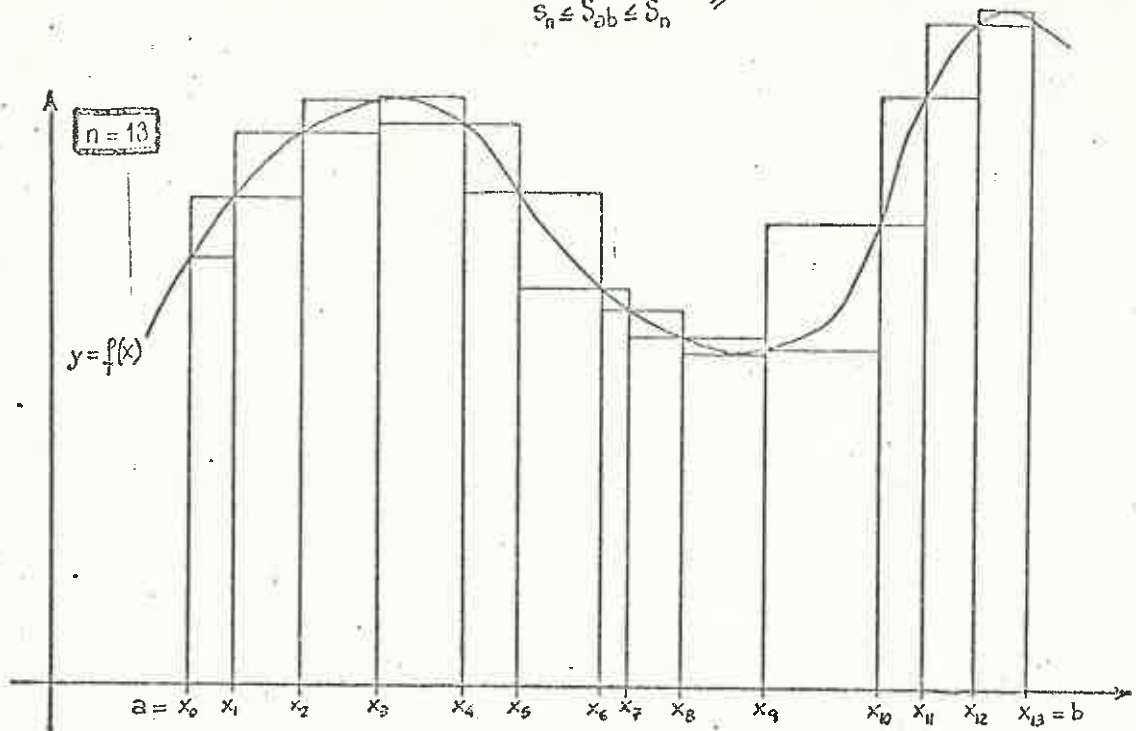


$$\begin{aligned} S_n - s_n &= (M_1 - m_1) \cdot (x_1 - x_0) + (M_2 - m_2) \cdot (x_2 - x_1) + \dots \leq \\ &\leq \epsilon_n \cdot (x_1 - x_0) + \epsilon_n \cdot (x_2 - x_1) + \dots = \\ &= \epsilon_n \cdot [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots] = \epsilon_n \cdot (b - a) \end{aligned}$$

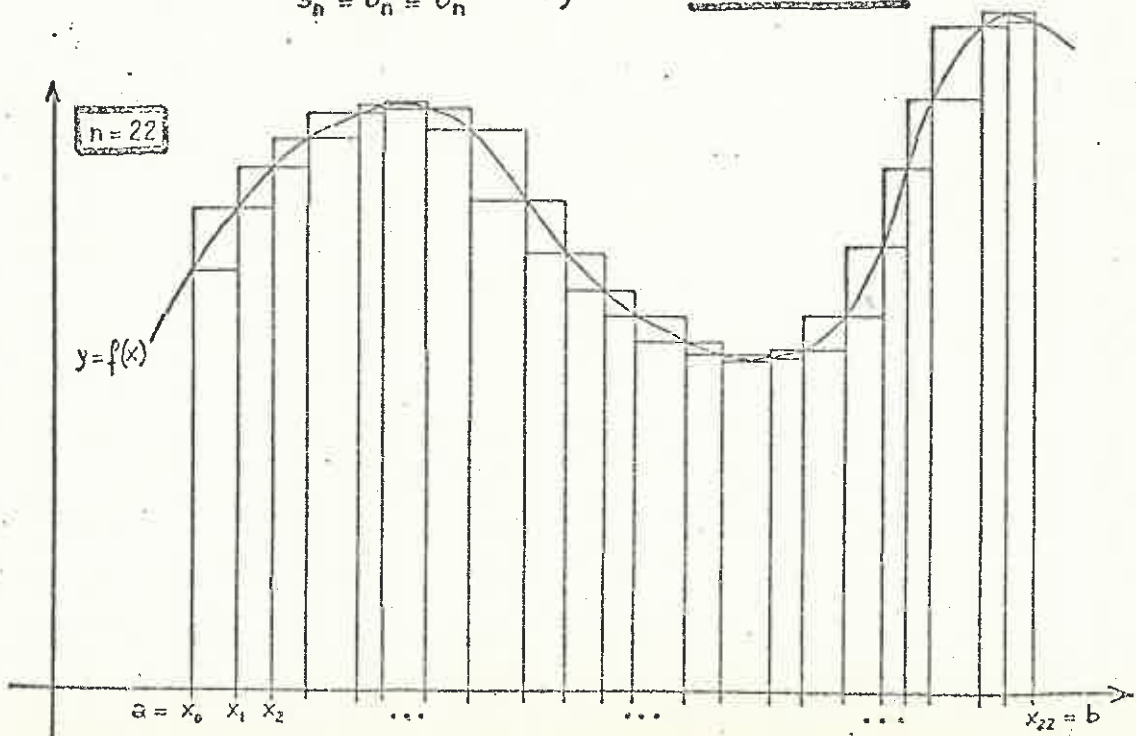
$$0 \leq S_n - s_n \leq \epsilon_n \cdot (b - a)$$

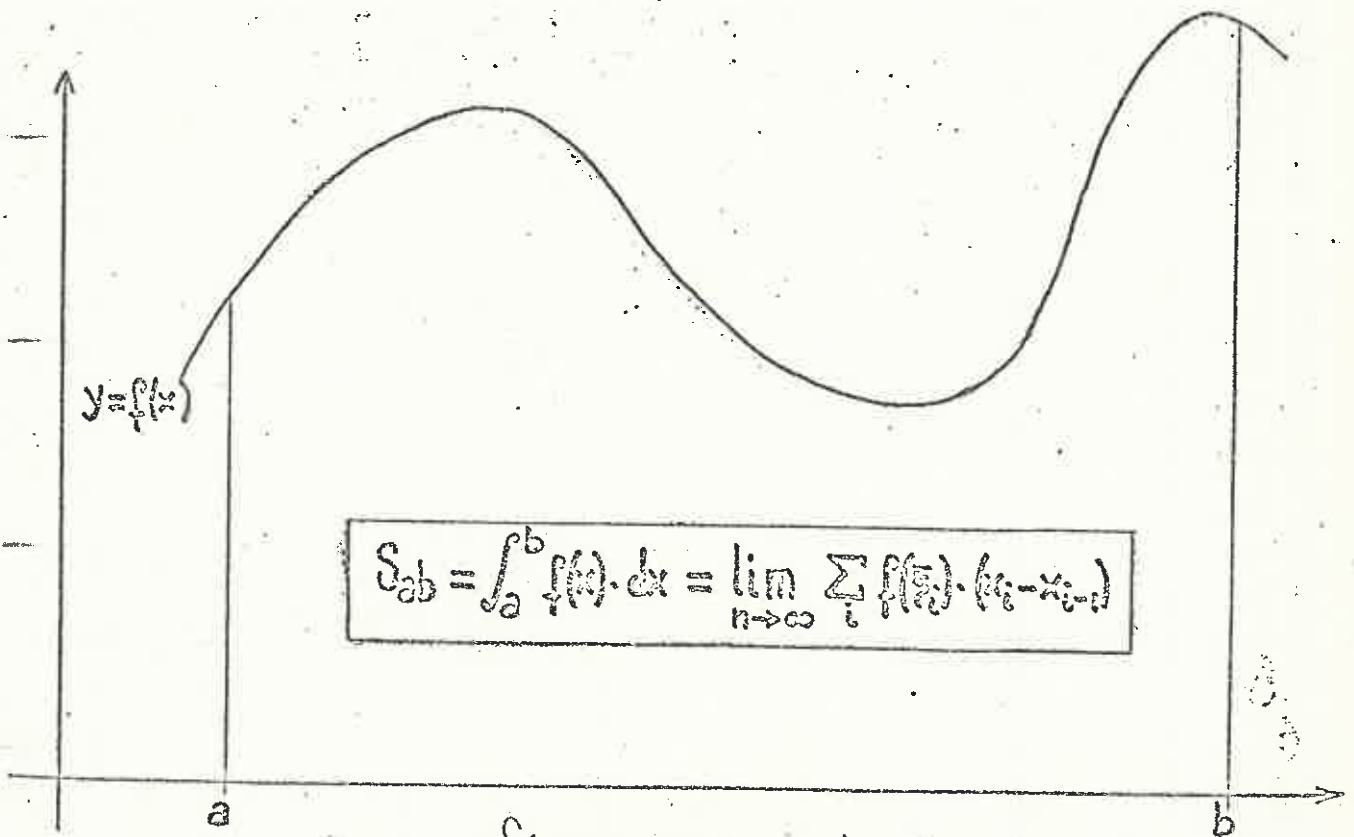
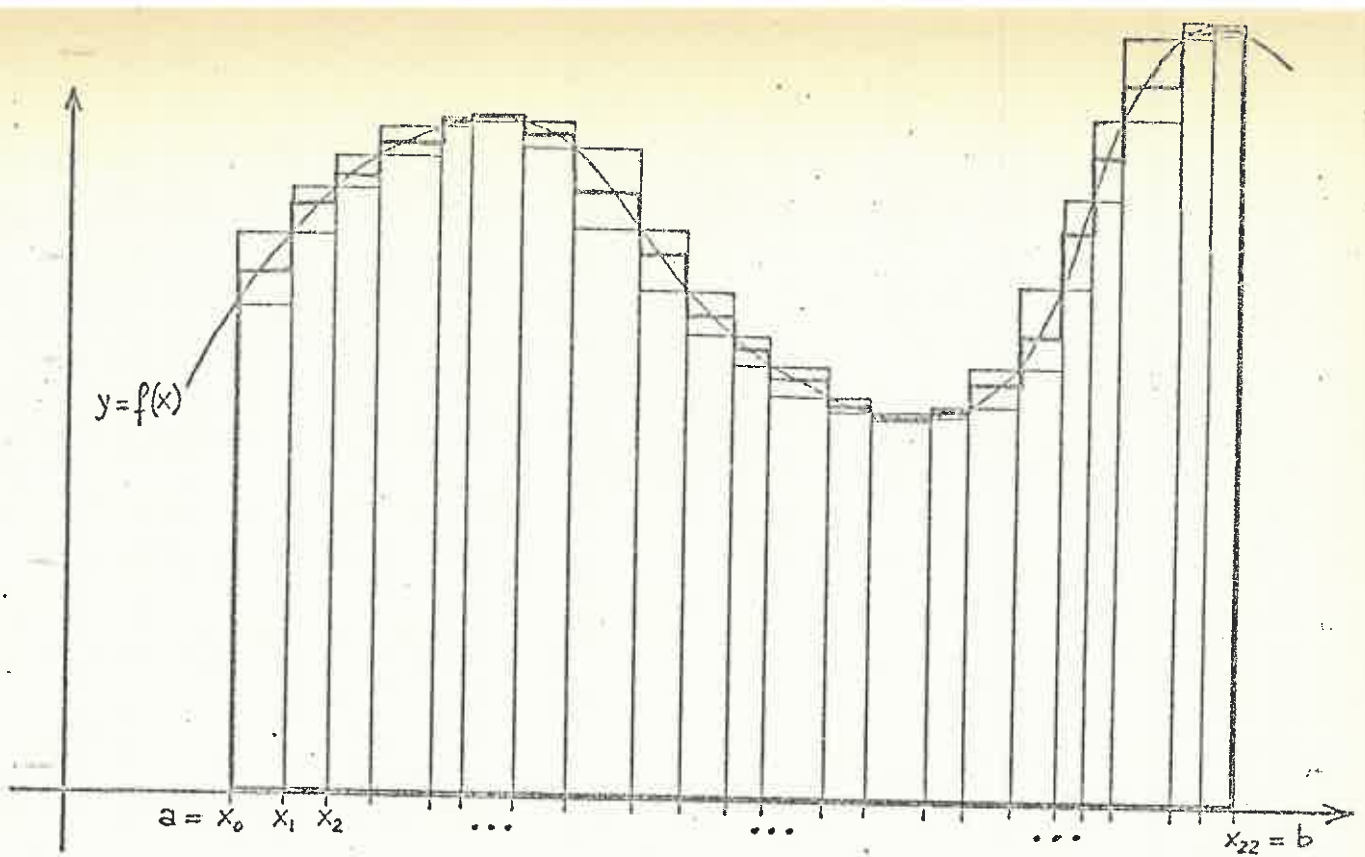


$$\left. \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon_n \rightarrow 0 \\ 0 \leq S_n - s_n \leq \varepsilon_n \cdot (b-a) \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_n - s_n \rightarrow 0 \\ s_n \leq S_{ab} \leq S_n \end{array} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S_{ab}$$



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S_{ab} \\ s_n \leq S'_n \leq S_n \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S_{ab}$$

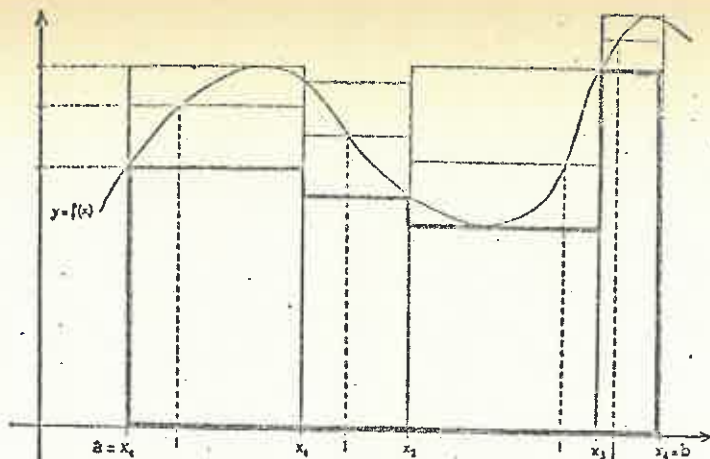




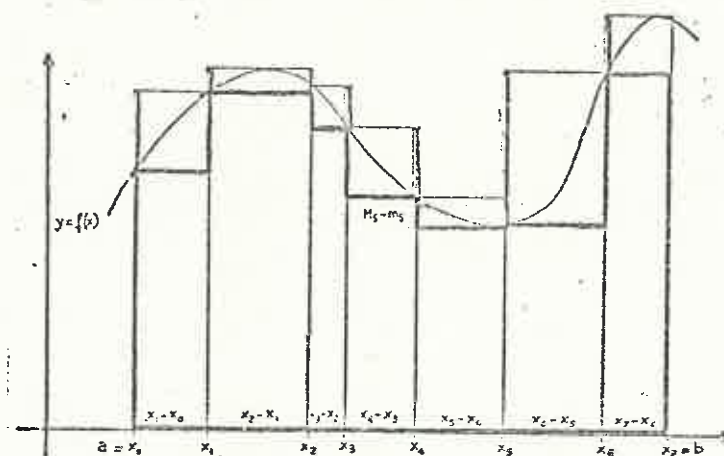
Ejercicios 1 y 2..

Elección de ξ_i "adecuados" y
división del intervalo en puntos equidistantes

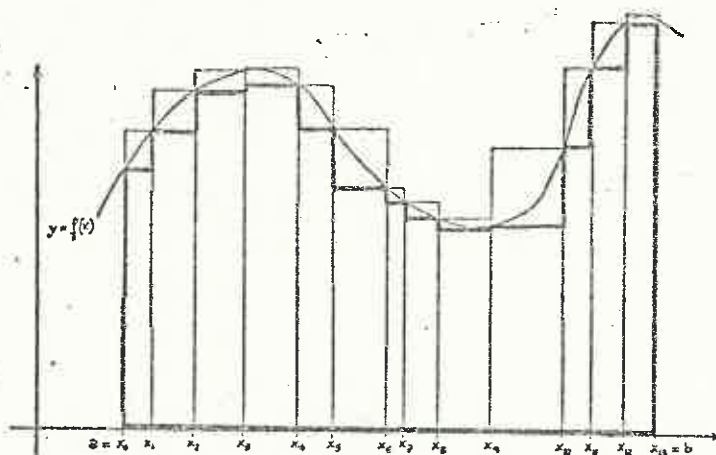
$n=4$



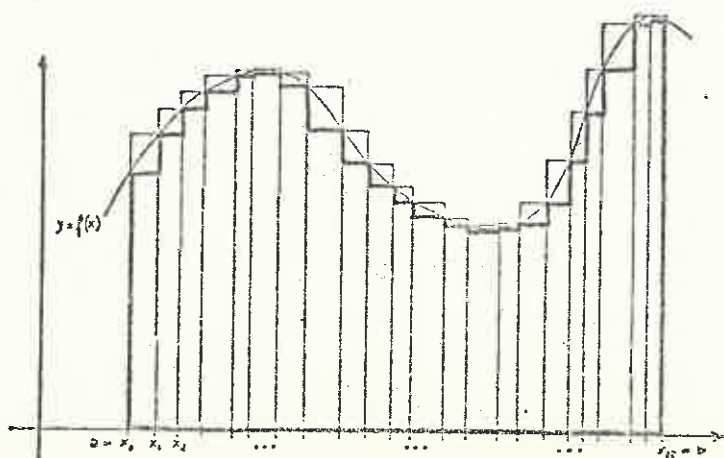
$n=7$



$n=13$



$n=22$



LIMITES CON CALCULADORA

(GAMA)

I : INTRODUCCIÓN

El uso adecuado de la calculadora en el tema de límites puede tener dos consecuencias beneficiosas: ampliar el abanico de límites calculables y modificar la metodología de su cálculo en el sentido de dar mayor cabida a la experimentación y a la elaboración de conjeturas.

Un curso "corriente" sobre límites suele discurrir así: se explica a los alumnos el concepto de límite, más o menos formalizado, con ayuda de algunos ejemplos fáciles. Después se abordan los casos más difíciles valiéndose de determinados procedimientos teóricos (dividir por algo arriba y abajo, multiplicar y dividir por el conjugado, etc.) dando lugar a una especie de archivo de trucos que el alumno memorizará. Su actitud ante el cálculo de un límite dado suele ser después recurrir a su "archivo" en busca del truco apropiado para la ocasión. Este archivo se constituye así en un caparazón que le separa del concepto inmediato de límite y que le dificulta enfrentarse directamente al cálculo de un límite pedido, cuando éste no figura en su archivo. Es así ^{grande} excesivamente ~~numeroso~~ el número de alumnos que tienen grandes dificultades, no ya para demostrar, sino siquiera conjeturar, límites como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x}$ (en 2º curso) o $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \sin x}{e^x + \cos x}$ (en 1ºU).

El uso sistemático (no omnipresente) de la calculadora, creemos que acostumbraría al alumno a buscar directamente el límite en estos casos.

Aquí son razonables tres objeciones:

1ª) La calculadora puede crear en el alumno la aberración de confiar ciegamente en ella y la aberración de sustituir la rutina antes mencionada por la rutina de apretar teclas

2ª) Los errores de redondeo y las limitaciones de expresión de la calculadora hacen que se obtengan a veces límites falsos y que otras veces no se vean claros

3ª) No es necesaria la calculadora para conseguir el objetivo, basta y es más económico experimentar mentalmente.

La 1ª objeción queda descalificada por la 2ª.

La 2ª es correcta y será preciso cierto esfuerzo para convivir con ella e incluso volverla a nuestro favor

La 3ª tiene razón en parte, pero hay casos en que el cálculo mental es insuficiente

Lo que sigue es un esbozo de ese intento de hacer útil la calculadora en nuestro tema.

Es una sistematización de su uso en las diferentes indeterminaciones, no organizada por niveles de dificultad o de cursos

Los ^{cálculos} ~~ejemplos~~ están hechos con una CASIO FX-110

II : USO DE LA CALCULADORA EN LA RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

$$1^o) \frac{\infty}{\infty}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{q(x)}$$

Calculamos $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1000}{100x + 1000}$

y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1000}{2x^2 + 9x + 3}$

TRANSPARENCIA II: I

x	$x^2 - 1000$	$100x + 1000$	$\frac{x^2 - 1000}{100x + 1000}$	$2x^2 + 9x + 3$	$\frac{x^2 - 1000}{2x^2 + 9x + 3}$
10^1	-900	2000	-0'45	293	-3'071 672 354
10^2	9000	11000	0'818 181 818	20903	0'430 560 206
10^3	999000	101000	9'891 039 108	2009003	0'497 261 577
10^4	9999000	1001000	99'899 100 89	200090003	0'499 770 095
10^5	999999000	10001000	999'899 1	2'000 09 · 10^{10}	0'499 977 451
10^6	9'999 999 9 · 10^{11}	100001000	9999'899 991	2'000 009 · 10^{12}	0'499 997 749
10^7	$1 \cdot 10^{14}$	1000001000	99999'9	2'000 0009 · 10^{14}	0'499 999 775
10^8	$1 \cdot 10^{16}$	1'000 0001 · 10^{10}	999999'9	$2 \cdot 10^{16}$	0'499 999 977
10^9	$1 \cdot 10^{18}$	$1 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{18}$	0'499 999 997
10^{10}	$1 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{20}$	0'5
10^n	$1 \cdot 10^{2n}$	$1 \cdot 10^{n+2}$	$1 \cdot 10^{n-2}$	$2 \cdot 10^{2n}$	0'5

∇
 CONJETURA
 $\lim = +\infty$

$\downarrow$
 CONJETURA
 $\lim = \frac{1}{2}$

Estos límites no ofrecen, como se ve, problemas de redondeo. Así ocurrirá con todos los del tipo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{q(x)}$. Es más, los errores obran a nuestra favor pues cuando n se hace suficientemente grande, la máquina identifica

el valor del polinomio con el valor de su monomio de mayor grado.

Estos y otros ejemplos ayudarán al alumno a observar como x^2 es "más fuerte" que $100x$, como las constantes se hacen insignificantes, como el término $9x$ se hace insignificante junto al $2x^2$ que le acompaña, como, en fin, lo que importa son los sumandos de mayor grado.

Es ésta quizá su primera comparación no trivial de dos infinitamente grandes.

Y este es el momento de validar los resultados de la máquina con el procedimiento teórico de dividir arriba y abajo por x elevado al exponente adecuado.

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{p(x)}}{\sqrt[m]{q(x)}}$$

Sean los ejemplos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+9}}{\sqrt[4]{x^3-x^2-5}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[8]{x^6+x^5}}{\sqrt[4]{x^2-1}}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{4x^2+12x+1}}{\sqrt{x-2}}$

x	$\frac{\sqrt{2x+9}}{\sqrt[4]{x^3-x^2-5}}$	$\frac{\sqrt[8]{x^6+x^5}}{\sqrt[4]{x^2-1}}$	$\frac{\sqrt[4]{4x^2+12x+1}}{\sqrt{x-2}}$
10^1	0'954 562 356	1'012 235 174	1'672 686 061
10^2	0'458 315 866	1'001 244 799	1'437 426 255
10^3	0'252 114 948	1'000 124 952	1'416 513 929
10^4	0'141 456 708	1'000 012 5	1'414 443 394
10^5	0'079 529 061	1'000 001 244	1'414 236 543
10^6	0'044 721 471	1'000 000 158	1'414 215 859
10^7	0'025 148 674	1	1'414 213 792
10^8	0'014 142 135	1	1'414 213 584
10^9	7'952 707 $3 \cdot 10^{-3}$	1	1'414 213 564
10^{10}	4'472 135 $7 \cdot 10^{-3}$	1	1'414 213 562
10^8	2'514 866 $8 \cdot 10^{-3}$	>>	>>

$\downarrow$ CONJETURA $\downarrow$ CONJETURA $\downarrow$ CONJETURA
 $\lim = 0$ $\lim = 1$ $\lim = 1'414 213 562$

TRANS. 11-1

El 1º ejemplo nos invita a conjeturar $\lim = 0$,
el 2º nos da claramente $\lim = 4$, y el 3º nos obliga
a decir $\lim = 1'414\ 213\ 562$.

El 1º y 2º ejemplos nos sirven para hacer observar
que el dato relevante no es ni el mayor exponente
de los polinomios, ni el índice, sino el cociente entre
ambos.

Dividiendo numerador y denominador por x elevada
a un exponente apropiado confirmaremos teóricamente
la validez de los dos primeros límites.

Aplicado el método al 3º ejemplo obtendremos
como límite $\sqrt{2}$, del cual el límite conjeturado
no es más que el segmento inicial de 10 dígitos.

Es la 1ª limitación que encontramos a la calcula-
dora, no conoce más que números "finitos".

c) Vamos a considerar ya los infinitos trascendentes

Comencemos con los más sencillos y típicos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L^x}{x}$$

x	$\frac{e^x}{x}$	x	$\frac{L^x}{x}$
10	2 202'646 6	10	0'230 258 51
20	24 258 260	10 ²	0'046 051 702
30	3'562 158 3 · 10 ¹¹	10 ³	6'907 755 3 · 10 ⁻³
40	5'884 631 7 · 10 ¹⁵	10 ⁴	9'210 340 4 · 10 ⁻⁴
50	1'036 941 1 · 10 ²⁰	10 ⁵	1'151 292 5 · 10 ⁻⁴
100	2'688 117 2 · 10 ⁴¹	10 ⁶	1'381 551 1 · 10 ⁻⁵
200	3'612 987 · 10 ⁸⁴	10 ⁷	1'611 809 6 · 10 ⁻⁶
300	ERROR (EXCESO CAPACIDAD)		
↓ CONJETURA $\lim = +\infty$		↓ CONJETURA $\lim = 0$	

Los dos límites anteriores exigen una inspección directa, salvo que se disponga de L'Hopital, si bien la calculadora apenas el mecánico.

No plantean problemas para conjeturar su límite aunque en el primer ejemplo hemos empleado, por primera vez, una sucesión de abscisas distinta en el fin de que el exceso de capacidad no apareciera demasiado pronto.

Pueden ser, sin embargo, menos evidentes los siguientes límites, en lo que hemos fortalecido los infinitos más débiles y debilitado los más fuertes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{10x^5 + x^3 + 9} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(Lx)^5}{\sqrt{x}}$$

TRANS. 11-2

X	$\frac{e^x}{10x^5 + x^3 + 9}$
10	0'022 004 263
20	15'157 618 83
30	43 972' 375 92
40	229 854 060
50	1'659 039 3 . 10 ¹²
100	2'688 090 3 . 10 ³²
200	1'129 044 3 . 10 ⁷⁵
300	ERROR (EXC. CAPACIDAD)

↓
CONJETURA
 $\lim = +\infty$

X	$\frac{(Lx)^5}{\sqrt{x}}$
10	40' 839 314 59
10 ²	824' 571 691 4
10 ³	3950' 796 967
10 ⁴	10504' 572 93
10 ⁵	20 226' 856
10 ⁶	31 756' 6559
10 ⁷	43 308' 057 24
10 ⁸	53 275' 606 66
10 ¹⁰	64 725' 952
10 ¹⁵	49 151' 266
10 ²⁰	20 712' 305
10 ³⁰	1 572' 840 6
10 ⁵⁰	2' 022 685 6
10 ⁷⁰	1' 057 849 2 . 10 ⁻³
10 ⁹⁰	3' 822 002 9 . 10 ⁻⁷

↓
CONJETURA
 $\lim = 0$

El 1^{er} ejemplo no ha presentado problemas salvo el exacto de capacidad.

En el 2^o ejemplo hemos estado a punto de conjeturar $\lim = +\infty$ y al final hemos conjeturado $\lim = 0$, lo que no deja de resultar amigable ~~tras~~ después de lo ocurrido. Creemos que este ejemplo enseña a no confiar ciegamente en la calculadora y estimula a intentar superarla razonando.

Los ejemplos siguientes, cuyo tratamiento técnico es muy fácil, ponen de manifiesto la grave limitación de la calculadora que es su limitada capacidad.

TRANS. 11-3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{0.1x}}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{e^{x^2}}$$

x	$\frac{x^{0.1x}}{e^x}$
10	4'539 992 9.10 ⁻⁴
50	6'027 343 3.10 ⁻¹⁴
100	3'720 075 8.10 ⁻²⁴
200	1'451 120 6.10 ⁻⁴¹
300	ERROR (EXC. CAPACIDAD)

x	$\frac{x^x}{e^{x^2}}$
10	3'720 075 8.10 ⁻³⁴
20	ERROR (EXC. CAPAC.)

El 1^o invita a conjeturar $\lim = 0$ y sin embargo sabemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{0.1x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{0.1})^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{0.1}}{e}\right)^x = +\infty$.

Del 2^o la calculadora no nos facilita suficientes datos para elaborar una conjetura, pero sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{(e^x)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^x = 0$$

Dos ejemplos finales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

$$; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \sin x}{e^x + \cos x}$$

TRANS. 11-3

X	$\frac{x + \sin x}{x}$
	$\frac{x}{x}$ DIRECTAMENTE RESTANDO $2\pi K$ PARA UN K ADECUADO
10	0'945 547 558
20	1'045 647 263
30	ERROR (EXC. CAPACIDAD SENS) 0'967 065 613
10^2	ERROR >> 0'994 936 344
10^3	" 1'000 826 88
10^4	" 0'999 969 439

↓
CONJETURA
 $\lim = 1$

X	$\frac{e^x - \sin x}{e^x + \cos x}$
	$\frac{e^x}{e^x}$ DIRECTAMENTE RESTANDO A x , $2\pi K$ PARA UN K ADECUADO
10	1'000 062 744
20	0'999 999 997
30	ERROR (EXC. CAPACIDAD SENS) $\frac{1}{1}$
10^2	" (>>) $\frac{1}{1}$

↓
CONJETURA
 $\lim = 1$

En ambos ejemplos, nos encontramos con una nueva limitación de mi calculadora (no de otras) y es que $\sin x$ no está definido para $x > 817$, por lo que hemos tenido que restar 2π un n entre K de veces a^x hasta llevarlo dentro del rango.

En el 1º ejemplo L'Hospital no es aplicable y en el 2º no es útil para el cálculo del límite.

Lo visto en la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ nos pone en las puertas de un tema importante: los órdenes fundamentales de infinitud; y casi nos ayuda a conjeturar:

$$\begin{array}{cccccc}
 \text{LOGARITMICO} & & \text{POTENCIAL} & & \text{EXPONENCIAL} & \text{POTENCIAL-EXPONENCIAL} \\
 (Lx)^p & < & (x)^{1/n} & < & x^m & < & a^x & < & x^{bx} \\
 \text{PEN} & & \text{nen} & & \text{men} & & a > 1 & & b > 0
 \end{array}$$

2º) $\infty - \infty$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{p(x)} - \sqrt[m]{q(x)})$$

Seau $\lim_{x \rightarrow +\infty} (100x^2 + 1000x^3 - x^5)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^3 x^2} - \sqrt{x})$

x	$100x^2 + 1000x^3 - x^5$
10	-999 899 0000
10^3	-9'989 999 · 10^{14}
10^5	-9'999 999 · 10^{24}
10^7	-1 · 10^{35} ($= -x^5$)
10^{10}	-1 · 10^{50}
10^n	-1 · 10^{5n}

CONJETURA

$$\lim = -\infty$$

x	$x - \sqrt{x}$
10	2'928 932 19
10^3	929'289 322
10^5	99292'893 3
10^7	9992 928'94
10^{10}	9999 776 400
10^{14}	9'999 997 7 · 10^{13}
10^{18}	9'999 999 9 · 10^{17}
10^{19}	1 · 10^{19} ($= x$)
10^n	1 · 10^n

CONJETURA

$$\lim = +\infty$$

x	$\sqrt[4]{x^3 x^2} - \sqrt{x}$
10	2'314 947 915
10^3	146'160 690 7
10^5	5307'171 426
10^7	174 665'6589
10^9	5591 790'473
10^{10}	31522 776'6 ($= \sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x}$)
10^{20}	9'999 9 · 10^4
10^{30}	3'162 277 5 · 10^{22}
10^{40}	$10^{129/4}$ ($= \sqrt[4]{x^3}$)
10^n	$10^{3n/4}$

CONJETURA

$$\lim = +\infty$$

Estos ejemplos no han ofrecido problemas de conjeturación. En los tres observamos, como a partir de un determinado valor de x , diferencia y minuendo (o sustraendo en el 1er ejemplo) coinciden, los que nos invita a reflexionar sobre los errores que introduce la calculadora debidos a su aritmética especial, la aritmética del punto flotante.

No olvidemos que la calculadora maneja una simulación muy imperfecta de IR. Baste ahora decir que dicha simulación sólo tiene un número finito de elementos y que dos elementos consecutivos están más separados entre sí cuanto mayores son.

Por ejemplo, en una calculadora con 10 dígitos, $10^{10} + 1 = 10^{10}$ pues el consecutivo de 10^{10} es $10^{10} + 10^{-9}$. Igualmente, el consecutivo de 10^n es $10^n + 10^{n-9}$.

No olvidemos tampoco que esta es una limitación profunda, que afecta también a los ordenadores.

Los anteriores ejemplos permiten conjeturar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{a_p x^p + \dots + a_0} - \sqrt[m]{b_q x^q + \dots + b_0} \right) \text{ será } +\infty \text{ si } \frac{p}{n} > \frac{q}{m}$$

y $-\infty$ si $\frac{p}{n} < \frac{q}{m}$.

Queda la posibilidad $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ que discutimos a continuación a través de los tres ejemplos siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x^4 + x} - x \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x} - 2x \right)$$

x	$\sqrt{x^2+x} - x$	$\sqrt[4]{x^4+x} - x$	$\sqrt[3]{9x^3+2x}$	$3x$	$\sqrt[3]{9x^3+2x} - 3x$
10	0'488 088 48	0'002 499 06	30'331 501 77	30	0'331 501 77
10^2	0'498 756 2	0'000 024 9	300'333 148 3	300	0'333 148 3
10^3	0'499 875	0	3000'333 314	3000	0'333 314
10^4	0'499 9	0	30000'333 33	30000	0'333 33
10^5	0'499	0	300000'333 3	300000	0'333 3
10^6	0'49	0	3000000'333	3000000	0'333
10^7	0'4	0	30000000'33	30000000	0'33
10^8	0	0	300000000'3	300000000	0'3
10^9	0	0	3000000000	3000000000	0
10^n	0	0	$3 \cdot 10^n$	$3 \cdot 10^n$	0
	↓ CONJETURA $\lim = 0$?	↓ CONJETURA $\lim = 0$			↓ CONJETURA $\lim = 0$?

Nos encontramos aquí con una situación seria: las tres tablas animan a conjeturar $\lim = 0$ y sin embargo sabemos que los límites verdaderos son $\frac{1}{2}$, 0 y $\frac{1}{3}$ respectivamente.

En el 2º ejemplo la conjetura es aplastante, y de hecho es correcta.

En el 1º y 3º se observa una intuición inicial de acercarse a algo ($\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente), que después de parece acercándose a 0 y alcanzándolo.

Pero en estos dos ejemplos basta multiplicar y dividir por el conjugado para obtener el verdadero límite. Es en un momento en que se ve claramente la superioridad de la teoría frente a los cálculos de la máquina.

Pero es preciso explicar la razón de esta discordancia. Esta razón nos la da una inspección cuidadosa de las tres columnas de la derecha (el 1º ejemplo, aparte de ser análogo, tiene menos interés pues debe su aspecto al 2º

tipo de máquina que ya he usado, que trunca en vez de redondear). Como se ve en las dos penúltimas columnas el minuendo es siempre igual al sustraendo como algo y ese algo tiende a hacerse una sucesión de cifras 3 cada vez más larga. Ahora bien, como el sustraendo ^{parte entera} es cada vez mayor, quedan desplazados de la pantalla cada vez más dígitos 3 por la derecha, con lo que el número de cifras 3 de la diferencia disminuye hasta desaparecer para $x=10^9$, cuando la expresión en pantalla del minuendo queda monopolizada por su parte entera que es 3 000 000 000.

No se trata, pues, en este caso, de que la máquina acumule errores (como puede ocurrir en otras ocasiones) sino de las limitaciones de su aritmética de n dígitos. Conforme el valor real de $\sqrt[n]{9x^{n-1}+2x}$ se hace grande, cae entre dos números-máquina más separados entre sí. Al escoger uno de ellos, en este caso el más pequeño, comete un error absoluto cada vez mayor aunque el error relativo permanezca estable. Y en nuestro problema es el error absoluto el que nos interesa.

Los anteriores ejemplos permiten una conjetura arriesgada:

$$\lim \left(\sqrt[n]{x^n + ax^p} - x \right) \begin{cases} \neq 0 & \text{si } p = n-1 \\ = 0 & \text{si } p < n-1 \end{cases}$$

Pongamos a prueba esta conjetura con los siguientes ejemplos:

$$\lim \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x \right); \quad \lim \left(\sqrt[5]{x^5 + x^3} - x \right); \quad \lim \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \right).$$

x	$\sqrt[3]{x^3+3x^2} - x$	$\sqrt[5]{x^5+x^3} - x$	$\sqrt[3]{x^3+x^2} - x$
10	$0'913\ 929$	$0'019\ 92$	$0'322\ 801$
10^2	$0'990\ 16$	$0'002$	$0'332\ 23$
10^3	$0'999$	$0'0002$	$0'333\ 2$
10^4	1	0	$0'333$
10^5	1	0	$0'33$
10^6	1	0	$0'3$
10^7	1	0	0
10^8	$0 \quad (= \sqrt[3]{x^3} - x)$	0	0
10^n	0	0	0
	↓ CONJETURA $\lim = 1$	↓ CONJETURA $\lim = 0$	↓ CONJETURA $\lim = \frac{1}{3}$

El 2º ejemplo está claro. El 1º y 3º lo están menos, aunque lo aprendido en los ejemplos anteriores ya nos invita a conjeturar $\lim = 1$ y $\lim = \frac{1}{3}$ respectivamente. El problema que tenemos ahora es que la consolidación teórica de estos resultados es más difícil, aunque elemental.

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}}$$

Aceptado lo anterior, nuestra conjetura ha quedado fortalecida, e incluso nos ayuda a elaborar otra más concreta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{x^n + ax^{n-1}} - x \right) = \frac{a}{n}$$

Concluiremos diciendo que el cálculo de indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$ con la máquina no ofrece problemas de rebordes cuando el límite es 0 ó ∞ pero sí cuando es finito y no nulo (salvo manipulaciones previas al cálculo)

$$3^o) \frac{0}{0}$$

Se trata del importante tema de la comparación de infinitesimos y, en particular, del cálculo de derivadas en un punto

a) Ejemplos iniciales

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x-3} - 1}{7x-7}$$

x	$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6}$	
	HÖRNER	NORMAL
$2+10^{-1}$	-0'176 470 588	→ igual
$2+10^{-2}$	-0'197 604 79	→ igual
$2+10^{-3}$	-0'199 760 047	→ igual
$2+10^{-4}$	-0'199 976	→ igual
$2+10^{-5}$	-0'199 98	-0'2
$2+10^{-6}$	-0'199 8	-0'2
$2+10^{-7}$	-0'198	-0'2
$2+10^{-8}$	-0'18	-0'2
$2+10^{-9}$	0	-0'2
$2+10^{-10}$	ERROR (%)	ERROR (%)
$2+10^{-n}$	ERROR	ERROR

x	$\frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$	
	(HÖRNER)	NORMAL
$4+10^{-1}$	0'080 147 332	→ igual
$4+10^{-2}$	0'083 004 617	→ igual
$4+10^{-3}$	0'083 300 233	→ igual
$4+10^{-4}$	0'083 327 222	→ igual
$4+10^{-5}$	0'083 297 223	0'0833
$4+10^{-6}$	0'082 972 342	0'083
$4+10^{-7}$	0'079 734 219	0'08
$4+10^{-8}$	0'064 516 129	0'06666666
$4+10^{-9}$	0	
$4+10^{-10}$	ERROR (%)	
$4+10^{-n}$	ERROR	

x	$\frac{\sqrt[4]{4x-3} - 1}{7x-7}$
$1+10^{-1}$	0'125 367 578
$1+10^{-2}$	0'140 762 942
$1+10^{-3}$	0'142 643 142
$1+10^{-4}$	0'142 835 714
$1+10^{-5}$	0'142 842 857
$1+10^{-6}$	0'142 714 285
$1+10^{-7}$	0'141 428 571
$1+10^{-8}$	0'128 571 428
$1+10^{-9}$	0
$\vdots$	$\vdots$
$1+10^{-n}$	0

$$\lim = -0'2$$

$$\lim = \frac{1}{12}$$

$$\lim = \frac{1}{7}$$

En el 1er ejemplo observamos distintos resultados según que utilizemos o no el algoritmo de Hörner para calcular el valor numérico de los polinomios

La razón por la cual $x^2 - 5x + 6 \neq_{\text{MAR}} (x-5)x + 6$ está en que la aritmética de la máquina no tiene la propiedad distributiva.

La descomposición HÖRNER de un polinomio es la expresión más cómoda y rápida para calcular el valor numérico de éste.

Sin embargo ¿Cuál es el método más preciso? Veamos dos ejemplos en mi máquina:

$$\begin{aligned} 2'00001^2 - 5 \cdot 2'00001 &= -6'000\ 009\ 999\ 9 \\ 2'000\ 01^2 - 5 \cdot 2'000\ 01 &=_{\text{M}} -6'000\ 01 \\ (2'000\ 01 - 5) 2'000\ 01 &=_{\text{M}} -6'000\ 009\ 999 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A favor del} \\ \text{método normal} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 1'000\ 01^2 - 1'000\ 01 &= 0'000\ 010\ 0001 \\ 1'000\ 01^2 - 1'000\ 01 &=_{\text{M}} 0'000\ 01 \\ (1'000\ 01 - 1) 1'000\ 01 &=_{\text{M}} 1'00001 \cdot 10^{-5} \text{ (CORRECTO)} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A favor} \\ \text{de Hörner} \end{array} \right.$$

Parece ser que para una máquina que redondee, Hörner es el método más preciso, pero para una que trunque (como la mía) lo será en ocasiones y en otras no.

Los ejemplos 2° y 3° nos muestran una nueva dificultad en la conjeturación del límite, debida que ambos límites $\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{7}$, no son fácilmente reconocibles en su expresión decimal.

Los procedimientos técnicos para calcular estos límites son muy fáciles en el 1° ejemplo (dividir numerador y denominador por $x-2$), conocido así en el 2° (multiplicar y dividir por el conjugado de $\sqrt{x}-2$) y algo más difícil en el 3°.

b) Derivadas

b1) $f(x) = x^n$

- Sea $f(x) = x^3$

Calculemos $f'(2)$; $f'(5)$; $f'(0.1)$; $f'(-4)$

h	$\frac{(2+h)^3 - 2^3}{h}$	$\frac{(5+h)^3 - 5^3}{h}$	$\frac{(0.1+h)^3 - 0.1^3}{h}$	$\frac{(-4+h)^3 - (-4)^3}{h}$
10^{-1}	12'61	76'51	0'07	46'81
10^{-2}	12'0601	75'1501	0'0331	47'8801
10^{-3}	12'006001	75'015	0'030301	47'98801
10^{-4}	12'0006	75'001	0'03003	47'9989
10^{-5}	12	75	0'03	48
10^{-6}	12	75	0'03	48
10^{-7}	12	75	0'03	48
10^{-8}	12	70	0'03	48
10^{-9}	12	0	0	60
10^{-10}	0	0	0	0
10^{-n}	0	0	0	0
	↓ CONJETURA $\lim = 12$	↓ CONJETURA $\lim = 75$	↓ CONJETURA $\lim = 0.03$	↓ CONJETURA $\lim = 48$

Obsérvese que, sea cual sea el límite, hay un momento en que la expresión se hace 0. Esto es inevitable en el cálculo de cualquier derivada no trivial (como $f(x) = kx$), salvo que la expresión de arriba sea un infinitésimo del mismo orden que h y derivemos en el punto 0 (este sería el caso de $\sec x$ y $\tan x$), o bien hagamos alguna manipulación técnica.

~~En los anteriores ejemplos esto no causa grandes problemas puesto que el verdadero límite se alcanza.~~

Esto se debe a que, para h suficientemente pequeño, $a+h = a$ por

ANEXO

Si derivamos $f(x)=x^3$ en el punto de abscisa $\frac{1}{3}$
(donde la derivada es $\frac{1}{3}$) obtenemos una secuencia
típica que va perdiendo dígitos 3 hasta hacerse 0.

En los anteriores ejemplos, esto no causa grandes problemas, puesto que el verdadero límite se alcanza.

A partir de los anteriores ejemplos se puede conjeturar $f'(a) = 3a^2$ para $f(x) = x^3$

Esta se puede generalizar a $f'(a) = n \cdot a^{n-1}$ para $f(x) = x^n$ y ponerla a prueba en nuevos ejemplos. Las tablas resultantes corroborarían esta conjetura sin nuevas dificultades.

No obstante, en este caso, la justificación teórica es lo suficientemente sencilla como para que no sea necesario extenderse excesivamente en los cálculos.

$$b_2) \quad f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

$$f_1(x) = \sqrt{x}$$

$$f'_1(2.25) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2.25+h} - \sqrt{2.25}}{h}$$

$$f_2(x) = \sqrt[5]{x}$$

$$f'_2(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+h} - 1}{h}$$

$$f_3(x) = \sqrt[4]{x^3}$$

$$f'_3(81) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{81+h} - 27}{h}$$

h	$\frac{\sqrt{2.25+h} - 1.5}{h}$	h	$\frac{\sqrt{2.25+h} - 1.5}{h}$	$\frac{\sqrt[5]{1+h} - 1}{h}$	$\frac{\sqrt[4]{81+h} - 27}{h}$
-10^{-1}	0'337 121 71	10^{-1}	0'329 709 71	0'192 449	0'249 96
-10^{-2}	0'333 704 6	10^{-2}	0'332 963 7	0'199 2	0'25
-10^{-3}	0'333 371	10^{-3}	0'333 296	0'199 9	0'25
-10^{-4}	0'333 34	10^{-4}	0'333 32	0'2	0'25
-10^{-5}	0'333 4	10^{-5}	0'333 3	0'2	0'3
-10^{-6}	0'334	10^{-6}	0'333	0'2	0
-10^{-7}	0'34	10^{-7}	0'33	0	0
-10^{-8}	0'4	10^{-8}	0'3	0	0
-10^{-9}	1	10^{-9}	0	0	0
-10^{-10}	0	10^{-10}	0	0	0

CONJETURA

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 0'3$$

CONJETURA

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 0'2$$

CONJETURA

$$\lim_{h \rightarrow 0} = 0'25$$

Hemos utilizado en el 1er ejemplo, y por primera vez en la exposición, valores negativos de h . Creemos que estos ayudarán a conjeturar el límite en caso de que haya problemas de redondeo, pues es plausible que el límite buscado estará entre los números obtenidos para ~~$x=1$~~ $h=10^{-n}$ y $h=-10^{-n}$ (excepto en máximos y mínimos en que por ser 0 el límite no habrá problemas de redondeo).

Dejando aparte los problemas de redondeo, los ejemplos anteriores, aunque se ampliaran, son en nuestra opinión insuficientes para conjeturar $f'(a)$ siendo $f(x)=x^{m/n}$, por lo que sería preferible generalizar la conjetura obtenida para $f(x)=x^n$ a $f(x)=x^a$ y ~~comprobar~~ ^{utilizar} estos ejemplos para corroborarla. $a \in \mathbb{R}$

Respecto al redondeo, parece claro que a igual índice en la raíz $\sqrt[n]{x}$, el cociente incremental se hará nulo tanto antes cuanto mayor sea la abscisa del punto en que derivamos (pues la pendiente es menor y la cantidad de dígitos que ocupa dicha abscisa, mayor). Igualmente, para $a \geq 1$, el cociente incremental se anulará tanto antes cuanto mayor sea el índice n . (Para $a < 1$ ocurriría al contrario, ~~siempre que~~ parece)

Pag. 19

b3) $f(x) = Lx$

	$f'(1)$	$f'(0.1)$	$f'(100)$	$f'(450)$
h	$\frac{L(1+h) - L(1)}{h}$	$\frac{L(0.1+h) - L(0.1)}{h}$	$\frac{L(100+h) - L(100)}{h}$	$\frac{L(450+h) - L(450)}{h}$
10^{-1}	0'953 101 8	6'931 472	0'009 995	$2'222 \cdot 10^{-3}$
10^{-2}	0'995 033 09	9'531 02	0'01	$2'22 \cdot 10^{-3}$
10^{-3}	0'999 500 33	9'950 3	0'01	$2'2 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	0'999 95	9'995	0'01	2
10^{-5}	0'999 995	10	0	0
10^{-6}	0'999 9995	10	0	0
10^{-7}	0'999 99995	10	0	0
10^{-8}	1	10	0	0
10^{-9}	1	0	0	0
10^{-10}	0	0	0	0
10^{-n}	0	0	0	0
	↓ CONJETURA $\lim = 1$	↓ CONJETURA $\lim = 10$	↓ CONJETURA $\lim = \frac{1}{100}$	↓ CONJETURA MÁS DIFÍCIL $\lim = 2'2 \cdot 10^{-3}$

Como se ve, los problemas de redondeos para la función Lx son análogos a los de $\sqrt[n]{x}$, siendo la 4ª la conjetura más difícil.

Los cocientes incrementales se hacen nulos tanto antes cuanto mayor sea la abscisa del punto en que se deriva, o, simétricamente ($L \frac{1}{a} = -La$) cuanto más se aproxime ésta a 0.

(No obstante, no obstante, por qué en el 3º ejemplo se alcanzó el límite 0'01 en vez de desplazar dígitos ?.)

Los ejemplos anteriores permiten conjeturar fácilmente que $f'(a) = \frac{1}{a}$ para $f(x) = Lx$.

b4)

$$f(x) = e^x$$

	$f'(0)$	$f'(1)$	$f'(5)$	$f'(-10)$
h	$\frac{e^h - e^0}{h}$	$\frac{e^{1+h} - e^1}{h}$	$\frac{e^{5+h} - e^5}{h}$	$\frac{e^{-10+h} - e^{-10}}{h}$
10^{-1}	1'051 709	2'858 842	156'087 5	4'774 752 · 10 ⁻⁵
10^{-2}	1'005 02	2'731 92	149'158	4'562 76 · 10 ⁻⁵
10^{-3}	1'000 5	2'719 7	148'49	4'542 2 · 10 ⁻⁵
10^{-4}	1	2'719	148'4	4'54 · 10 ⁻⁵
10^{-5}	1	2'72	148	4'54 · 10 ⁻⁵
10^{-6}	1	2'7	150	4'5 · 10 ⁻⁵
10^{-7}	1	3	100	4 · 10 ⁻⁵
10^{-8}	0	1	0	0
10^{-9}	0	0	0	0
10^{-10}	0	0	0	0
	↓	↓	↓	↓
	CONJETURA	CONJETURA	CONJETURA DIFÍCIL	CONJETURA DIFÍCIL
	$\lim = 1$	$\lim = e$	$\lim = e^5$	$\lim = e^{-10}$

Como es obvio, salvo en el 1^{er} ejemplo las conjeturas son muy difíciles, si bien hay algo que nos puede ayudar un poco, el límite coincide con el sustracendo del numerador, con lo que los números que se van obteniendo pueden "sonar" un poco. También ayudaría algo el utilizar además valores negativos de h , pero, con todo, la máquina nos ayuda muy poco a conjeturar el límite exacto debido a la naturaleza irrazanal de éste.

Pag. 21

b5) $f(x) = \sin x$

	$f'(0)$	$f'(\frac{\pi}{2})$	$f'(\pi)$	$f'(\frac{3\pi}{2})$
h	$\frac{\sin h}{h}$	$\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+h)-1}{h}$	$\frac{\sin(\pi+h)}{h}$	$\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+h)+1}{h}$
10^{-1}	0'998 334 17	$-4'995 83 \cdot 10^{-2}$	$-0'998 334 17$	$4'995 83 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	0'999 983 33	$-5 \cdot 10^{-3}$	$-0'999 983 33$	$5 \cdot 10^{-3}$
10^{-3}	0'999 999 84	$-5 \cdot 10^{-4}$	$-0'999 999 84$	0
10^{-4}	1	0	-1	0
10^{-5}	1	0	-1	0
10^{-6}	1	0	-1	0
10^{-7}	1	0	-1	0
10^{-8}	1	0	-1	0
10^{-9}	1	0	-1	0
10^{-10}	1	0	0	0
10^{-n}	1	0	0	0
	↓	↓	↓	↓
CONJETURA:	$\lim = 1$	$\lim = 0$	$\lim = -1$	$\lim = 0$

No aparece, salvo en el 3º ejemplo, ningún problema de redondeo. Observando que estas cuatro derivadas nos dan el valor del coseno en los puntos $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3\pi}{2}$ respectivamente, podemos conjeturar (muy arriesgadamente, es verdad), que $\sin'(x) = \cos x$, y poner a prueba la conjetura para otros ~~valores~~ puntos, corroborándola sin problemas.

Para la función $f(x) = \cos x$, obtenemos resultados igualmente claros

Pag. 22

c) Otros ejemplos de comparación de infinitésimos

Sea $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^5}$

x			
0'5	0'036 631 278	0'073 262 556	0'586 100 448
0'3	4'981 779 6.10 ⁻⁵	1'660 593 2.10 ⁻⁴	6'150 345 2.10 ⁻³
0'1	3'720 075 9.10 ⁻⁴³	3'720 075 9.10 ⁻⁴²	3'720 075 9.10 ⁻³⁹
0'05	0	0	0
10 ⁻²	0	0	0
10 ⁻ⁿ	0	0	0

CONJETURA: $\lim = 0$

$\lim = 0$

$\lim = 0$

Los anteriores resultados nos permiten conjeturar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Obsérvese que el 1º ejemplo nos da la derivada de $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ en el punto de abscisa 0, y que este último resultado nos permite deducir fácilmente que las derivadas sucesivas de esta función en 0, son nulas, con lo que obtenemos un primer ejemplo de función infinitamente derivable en 0, pero no analítica; ejemplo muy instructivo en el estudio de los Polinomios de Taylor.

4:) 1^∞

Sean los límites siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$	x	$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$	x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
10^1	2'593 742 5	2'704 813 9	10^2	2'593 742 5	-10	2'186 797 2
10^2	2'704 813 9	2'718 145 9	10^4	2'704 813 9	-10^2	2'731 999
10^3	2'716 924	2'718 280 5	10^6	2'716 924	-10^3	2'719 642 2
10^4	2'718 145 9	2'718 281 8	10^8	2'718 145 9	$\vdots$	$\vdots$
10^5	2'718 268 2	1 ($= 1^{(10^{10})}$)	10^{10}	2'718 268 2	-10^8	2'718 281 8 ($= e_{1442}$)
10^6	2'718 280 5	1	10^{12}	2'718 280 5	-10^9	2'718 281 8
10^7	2'718 281 7	1	10^{14}	2'718 281 7	-10^{10}	1 ($= 1^{(-10^{10})}$)
10^8	2'718 281 8 ($= e_{MA22}$)	$\vdots$	10^{16}	2'718 281 8	$\vdots$	$\vdots$
10^9	2'718 281 8	$\vdots$	10^{18}	2'718 281 8	-10^{11}	1
10^{10}	$1^{(10^{10})} = 1$	1	10^{20}	1	$\vdots$	$\vdots$
10^n	1	1	10^{2n}	1	$\vdots$	$\vdots$

CONJETURA: $\lim = e$

$\lim = e$

$\lim = e$

$\lim = e$

Estos y otros ejemplos (como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}+3}\right)^{\sqrt{x}+3}$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{Lx}\right)^{Lx}$),

no permiten conjeturar:

$$\lim_{u(x) \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e$$

Los límites resolubles por medio de manipulaciones de la expresión $\left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}$, por ejemplo $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$; $\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x-2}$, $\left(1 - \frac{2}{x-1}\right)^{3x}$, etc, y cuyos resultados son e^2 son difíciles de conjeturar, excepto los que dan $\lim = e$, al obtener una expresión decimal del límite en cuestión, por lo que la calculadora es poco eficaz en su cálculo.

Si sería útil, sin embargo, la calculadora, para expresiones que tienen límite 1 ó $+\infty$.

Consideremos los ejemplos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{Lx}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^x$$

x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{Lx}$	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$	$\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^x$
10^1	13 780'612	1'245 403 8	1'351 746 2	1'000 454 1
10^2	1'635 828 7.10 ⁴³	1'046 889 1	1'104 622 1	1
10^3	ERROR (EXCESS CAPACIDAD)	1'006 928 2	1'032 111 8	1
10^4		1'000 921 4	1'010 049 7	1
10^5		1'000 115 1	1'003 167 3	1
10^6		1'000 013 8	1'001 000 5	1
10^7		1'000 001 6	1'000 316 3	1
10^8		1'000 000 2	1'000 1	1
10^9		1	1'000 031 6	1
10^{10}		1	1	1
10^{11}		1	1	1

$\downarrow$ CONJETURA: $\lim = +\infty$
 $\downarrow$ $\lim = 1$
 $\downarrow$ $\lim = 1$
 $\downarrow$ $\lim = 1$

Los anteriores ejemplos nos permiten conjeturar que la expresión $\left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{v(x)}$, donde $u(x)$ y $v(x)$ son infinitamente grandes, tendrá límite 1, e^a ó $+\infty$ si $u(x)$ es, respectivamente, de mayor, de igual o de menor orden que $v(x)$.

No obstante, la utilidad de la calculadora es aquí relativa ya que el tratamiento técnico de estos límites es muy sencillo, y en cualquier caso se estudia para obtener los límites que dan e^a .

Otros ejemplos

Sea $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

x	$(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$
$\frac{\pi}{2} + 10^{-1}$	1'051 183 3
$\frac{\pi}{2} + 10^{-2}$	1'005 012 5
$\frac{\pi}{2} + 10^{-3}$	1'000 500 1
$\frac{\pi}{2} + 10^{-4}$	1 ($= 1^{\operatorname{tg} x}$)
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{\pi}{2} + 10^{-n}$	1
	$\downarrow$
	CONJETURA
	$\lim = 1$

Los límites de tipo 1^∞ tienen un problema de redondeo análogo a los del tipo $\frac{0}{0}$: A partir de un cierto valor de la obara, la función toma el valor 1 debido a que la base se identifica con 1.

5.) 0^0

Consideremos $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

x	x^x
10^{-1}	0'794 328 23
10^{-2}	0'954 992 59
10^{-3}	0'993 116 05
10^{-4}	0'999 079 39
10^{-5}	0'999 884 88
10^{-6}	0'999 986 19
10^{-7}	0'999 998 39
10^{-8}	0'999 999 82
10^{-9}	0'999 999 98
10^{-10}	1
10^{-20}	1
10^{-50}	1
10^{-90}	1

↓
CONJETURA
 $\lim = 1$

Seu. agora $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x-1)}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x^x)^x$

x	$x^{(x-1)}$
10^{-1}	1'605 727 2
10^{-2}	1'230 310 8
10^{-3}	1'048 701 4
10^{-4}	1'008 515 2
10^{-5}	1'001 326 2
10^{-6}	1'000 190 8
10^{-7}	1'000 026
10^{-8}	1'000 003 3
10^{-9}	1'000 000 4
10^{-10}	1 ($= x^0$)
10^{-n}	1

↓
 $\lim = 1$

$(1-x^x)^x$
0'853 723 96
0'969 466 57
0'995 033 81
0'999 909 31
0'999 999 85
0'999 999 98
0 ($= 0^{(10^{-10})}$)

0
↓
 $\lim = 0$

Los dos anteriores límites tienen la particularidad de que son bastante intratables teóricamente, incluso con L'Hopital.

Esta indeterminación no ofrece graves problemas de redondeo (en algunas ocasiones el valor caerá a 0 aunque el límite no sea nulo. Por ejemplo $(x - \sin x)^{1/6}$ se hará nulo cuando $x = 10^{-4}$ a pesar de que el límite es 1, creyendo ya que $x - \sin x \sim x^3/6$), aunque sí de conjeturación cuando el límite es e^u , como en $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x^{3/x}$, donde $\lim = e^3$.

6-) ∞^0

Sean los ejemplos

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/e^x}$;
 ~~$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$~~
 ~~$x = 5.2$~~

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/\sqrt{x}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/Lx}$;

x	$x^{1/e^x} (= x e^{-x})$	$x^{1/x}$	$x^{1/\sqrt{x}}$	$x^{1/Lx}$
10	1'000 10 45	1'258 925 4	2'071 227 3	2'718 281 8
10^2	1	1'047 128 5	1'584 893 2	"
10^3	1	1'006 931 7	1'244 137 4	"
10^4	1	1'000 921 5	1'096 478 2	"
10^5	1	1'000 115 1	1	1
10^6	1	1'000 013 8	1	1
10^7	1	1'000 001 6	1	1
10^8	1	1'000 000 2	1'001 843 8	"
10^9	1	1	1'000 655 5	" (= e_{MAR})
1	1	1	1'000 001 1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
10^n	1	1	1	1

CONJETURAS $\lim = 1$

$\lim = 1$

$\lim = 1$

$\lim = e$

A partir de los anteriores ejemplos podríamos conjeturar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{u(x)}}$ (siendo $u(x)$ infinitamente grande) es igual a 1 si $u(x)$ tiene orden mayor que Lx , y es e^α con $\alpha \neq 0$ si $u(x)$ tiene el mismo orden que Lx , y será e si $u(x)$ es equivalente a Lx .

La comprobación teórica de lo anterior es muy fácil, tomando logaritmos.

No parece haber problemas de redondeo en esta indeterminación aunque sí habrá problemas de conjeturación si el límite resulta e^α .

El uso de las calculadoras en clase puede suponer un cambio sustancial en el enfoque de algunos temas del B.U.P. .

El objeto de nuestra ponencia es:

1.- Ver las posibilidades didácticas que ofrece una calculadora de bolsillo, ciñendonos solo a un aspecto concreto: "la capacidad de conjetura que puede inducir el manejo de calculadoras".

2.- Relatar la experiencia y proyectos que actualmente llevamos a cabo con calculadoras programables.

1.- Las calculadoras de bolsillo, pensamos que pueden y deben utilizarse, entre otros, en los siguientes temas:

- El número real.
- Estadística y probabilidad.
- Funciones exponencial y logarítmica.
- Estudio de sucesiones(sobre todo de recurrencia), funciones y cálculo de límites. En particular, cálculo del número e y del número π .
- Integrales definidas.
- Cálculo aproximado de raíces.

Cuestiones como: obtener la raíz séptima de 34, $\log 13$, resolver una ecuación cúbica etc. no son fáciles de abordar en B.U.P.. Sin embargo resulta relativamente sencillo con el empleo de una calculadora. Nuestro objetivo no es el tratar los aspectos anteriormente enumerados, sino que centraremos nuestra atención en un aspecto: "con la calculadora se pueden realizar conjeturas".

Veremos a continuación un ejemplo tal y como se experimentó en clase.

A los alumnos se les pidió calcular:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

la respuesta fué rápida: es imposible, hay infinitos sumandos!, infinitas raíces no se puede hacer...

Vamos a calcular aproximaciones cada vez mejores, escribimos en la pizarra:

$$A_1 = \sqrt{2} ; A_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} ; A_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} ; A_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} , \dots$$

¿Cuántos radicales tendrá A_n ? tendrá n radicales, responden sin dificultad.

Calcular A_4 , A_2 empleando la calculadora. Calcular, ahora A_7 :

Vamos a organizar el trabajo:

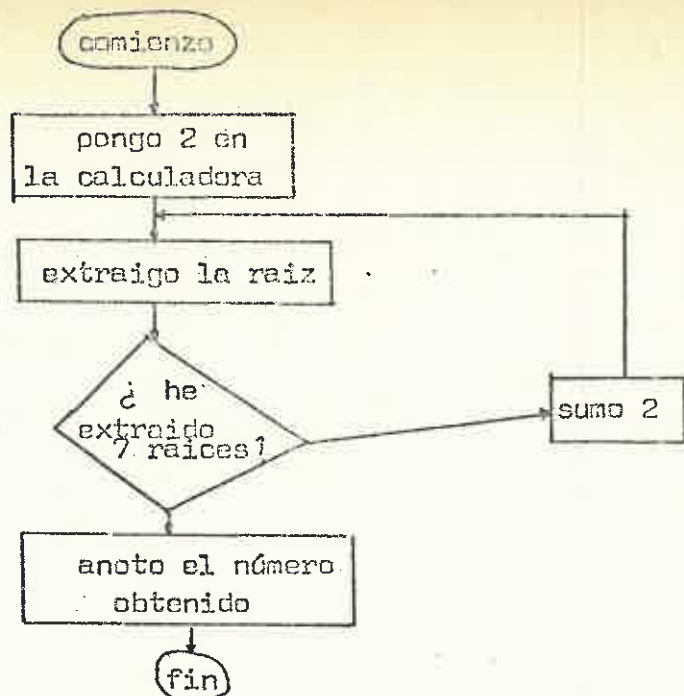
Sugerimos que escriban en su cuaderno las teclas que han de pulsar, con el fin de hacerlo de forma sistemática.

Los alumnos habrán escrito

$$2 \sqrt{2} + 2 = \sqrt{2} + 2 = \sqrt{2}$$

ponemos en la pizarra el organigrama:

(*) se repite hasta obtener siete raíces



Calcular, ahora A_{40} . ¿Sabeis ya cuanto vale $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}$? La respuesta

no se hace esperar, unos responden que es 2 y otros que 1,9. Tras ver que $2 = 1,9$ se les hace saber que la respuesta es correcta y que lo que acaban de decir es una CONJETURA acerca del valor de la expresión pedida.

Veamoslo, ahora de otra manera: llamemos $m = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}$

Observar que nuestro número se puede escribir así: $m = \sqrt{2+m}$

si resolvemos la ecuación obtendremos $m^2 = 2+m \Rightarrow m^2 - m + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=2}$

el resultado obtenido coincide con lo que habíamos supuesto. Lo anterior prueba la conjetura.

Proponemos a continuación que se cacule: $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}}$

se les deja hacer a los alumnos y despues de usar su calculadora responden que vale 3. Probarlo ahora.

Se les propone: $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\dots}}}} = 4$

Al poner: $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\dots}}}}$ algunos alumnos sin usar la calculadora responden que debe de valer 5.

Parece que los alumnos han descubierto algo, comprobemoslo ¿Qué deberemos poner para obtener 7? y para obtener 10? Respuesta obtenida:

$$8 = \sqrt{56+\sqrt{56+\sqrt{56+\sqrt{56+\dots}}}}, \quad 10 = \sqrt{90+\sqrt{90+\sqrt{90+\sqrt{90+\dots}}}}$$

los alumnos, en efecto, han descubierto una ley. Les pedimos, por último que enuncien la ley descubierta. Será: $\sqrt{p(p-1)+\sqrt{p(p-1)+\sqrt{p(p-1)+\dots}}} = p$

Se acaba de hacer una segunda conjetura aún más compleja que la primera. Probarla

Se podría, ahora especular acerca de expresiones como:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}, \quad \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\dots}}}}, \quad \sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\dots}}}}, \quad \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\dots}}}}, \dots$$

los valores que deberan obtenerse son:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} = 1'618033, \dots$$

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\dots}}}} = 2'302775 \dots$$

$$\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\dots}}}} = 2'561552 \dots$$

$$\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\dots}}}} = 2'791287 \dots$$

¿Los números obtenidos como son? Parece que son irracionales

¿Encontrais, ahora, la ley general? . A simple vista no se vé, como en los casos anteriores. Pero , precisamente lo realizado anteriormente nos dá pié para escribir:

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}} = x \quad \text{siendo } a \text{ natural}$$

$$\sqrt{a+x} = x \Rightarrow a+x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - a = 0 ; \text{ luego } x = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

Hemos, pues , encontrado una ley general: $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}} = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$

Podemos analizar este resultado:

1.- Si $1 + 4a$ es cuadrado perfecto e impar obtenemos valores naturales: 2, 3,

4, 5 etc. Veamoslo:

$1+4a$	a	$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}$
9	2	2
25	6	3
49	12	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(2p-1)^2$	$p(p-1)$	p

2.- Si $1 + 4a$ es cuadrado perfecto par obtenemos valores fraccionarios:

etc. Veamoslo:

$1+4a$	a	$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}$
4	$3/4$	$3/2$
16	$15/4$	$5/2$
36	$35/4$	$7/2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(2p)^2$	$\frac{4p^2-1}{4}$	$\frac{2p+1}{2}$

3.- Si $1 + 4a$ no es cuadrado perfecto obtenemos números irracionales.

El ejemplo expuesto tiene por objetivo fundamental llevar al alumno a situaciones que le permitan inducir fórmulas (hacer conjeturas), que el intuye y que después deben ser probadas. Este hecho creemos que es importante, porque, entre otras cosas, hace ver un aspecto de la Matemática que además se ha repetido a lo largo de la Historia: Se está trabajando en un determinado problema. Se intuye una ley. Se hacen más comprobaciones que refuerzan o rechazan la conjetura. Se prueba o refuta esa ley que la convierten en un teorema o punto de partida de una nueva conjetura.

2. CALCULADORAS PROGRAMABLES

Actualmente (Curso 80-81), el Seminario de Matemáticas del I.B. de Dos Hermanas (Sevilla), imparte, como EATP de 2º, un curso sobre programación con una calculadora programable, con intención de continuar el próximo curso en 3º. El programa establecido (en estudio) contiene esencialmente los siguientes puntos:

1ª parte: MANEJO DE LA CALCULADORA

2ª parte: PROGRAMACION:

- Idea de programa (organigrama, algoritmo)
- Programas sencillos
- Programas con bucles
- Programas con condicionantes
- Subrutinas
- Programas con indicadores
- Programación de algunos juegos

Pensamos que las calculadoras programables poseen, entre otras, las siguientes posibilidades:

- La calculadora como objeto. Introducción a la programación
- Revalorización de los métodos aproximativos.
- Necesidad de encontrar el algoritmo (o fórmula) adecuado para el programa. Lo cual requiere una profundización en el problema a programar.
- Necesidad del rigor lógico y secuencial en la elaboración de un programa
- Simulación de situaciones (Probabilidades, juegos)

Otras posibilidades:

- Utilización por el profesor (preparar y corregir ejercicios)
- Utilización por el centro (estudio estadístico de las evaluaciones)

Proyectos: El mundo de la computación forma parte de la cultura actual y cada vez con más implicaciones. Pensamos que la enseñanza no debe ser ajena a este hecho. Por ello, y por lo expuesto anteriormente, un grupo de profesores nos hemos reunidos (13.3.81) y hemos llegado al acuerdo de realizar en algunos institutos de la provincia de Sevilla, y para el próximo curso, una serie de experiencias con calculadoras programables (de distintos tipos) o miniordenadores, que nos permite obtener una fundamentada opinión sobre el tema.

Las experiencias, que serán coordinadas por la inspección, podrían realizarse según los siguientes puntos:

- 1.-Información de otras experiencias y trabajos, así como bibliografía sobre el tema.
- 2.-Elaboración y estudio de un programa o programas concretos a partir de unas hipótesis previas.
- 3.-La puesta en práctica de esos programas se podrían realizar:
 - a) mediante cursillos
 - b) como programa integrado en EATP
 - c) como cuña metodológica dentro de los programas
- 4.-Análisis de dichas experiencias y verificación de las hipótesis.

	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i
Q	655	0,2657	1234	0,2778	2484	0,2550	4542	0,2656	5902	0,2679	7358	0,2655
Q	746	0,3108	1951	0,2965	3435	0,2435	4966	0,2409	6398	0,2301	7879	0,2280
L	357	0,1487	958	0,1451	1724	0,1558	2601	0,1521	3385	0,1535	4149	0,1519
O	454	0,1891	1234	0,1869	2219	0,1896	3338	0,1950	4328	0,1962	5399	0,1977
U	210	0,0875	617	0,0934	1232	0,1057	1853	0,0966	2531	0,0921	3215	0,0921
	2.400	0,9998	6600	0,9997	11.700	0,9997	17.100	0,9999	22.050	0,9998	27.300	0,9998
x_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i
C	645	0,4964	1342	0,4971	2220	0,5010	3146	0,4954	4002	0,4971	4901	0,5001
X	705	0,5035	1408	0,5022	2270	0,4989	3204	0,5045	4048	0,5028	4894	0,4990
	1400	0,9999	2.800	0,9999	4550	0,9999	6350	0,9999	8.050	0,9999	9.800	0,9999
x_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i
1	242	0,1728	426	0,1735	770	0,1730	1015	0,1747	1365	0,1738	1646	0,1714
2	254	0,1814	431	0,1717	727	0,1623	1003	0,1624	1258	0,1615	1558	0,1622
3	213	0,1521	445	0,1592	730	0,1640	993	0,1614	1279	0,1629	1527	0,1554
4	206	0,1471	430	0,1535	716	0,1608	1012	0,1645	1271	0,1619	1546	0,1631
5	235	0,1678	458	0,1635	734	0,1649	1006	0,1635	1317	0,1677	1616	0,1683
6	250	0,1725	497	0,1732	773	0,1731	1063	0,1726	1350	0,1719	1627	0,1694
	1.400	0,9997	2.800	0,9996	4.450	0,9997	6.150	0,9996	7.850	0,9997	9.600	0,9997
x_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i
CC	260	0,2000	654	0,2422	1145	0,2573	1636	0,2617	2063	0,2611	2477	0,2542
CX	611	0,5161	1344	0,4977	2094	0,4705	2977	0,4702	3758	0,4756	4560	0,4774
XX	369	0,2834	702	0,1600	1211	0,2721	1634	0,2619	2079	0,2631	2513	0,2631
	1.300	0,9999	2700	0,9999	4450	0,9999	6250	0,9999	8400	0,9999	9550	0,9999
x_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i	μ_i	σ_i
2	62	0,0459	115	0,0412	197	0,0437	253	0,0401	319	0,0376	387	0,0374
3	84	0,0622	172	0,0647	285	0,0633	402	0,0638	495	0,0614	572	0,0604
4	104	0,0770	226	0,0821	375	0,0833	523	0,0830	662	0,0820	803	0,0819
5	157	0,1162	317	0,1150	513	0,1137	691	0,1096	954	0,1185	1116	0,1137
6	183	0,1355	360	0,1307	566	0,1257	830	0,1317	1050	0,1304	1222	0,1314
7	135	0,1370	420	0,1527	650	0,1444	953	0,1511	1232	0,1530	1528	0,1503
8	147	0,1082	341	0,1240	548	0,1217	863	0,1274	1018	0,1264	1226	0,1302
9	141	0,1044	282	0,1012	473	0,1051	665	0,1055	835	0,1034	1044	0,1025
10	130	0,0952	231	0,0940	396	0,0921	528	0,0838	680	0,0844	866	0,0822
11	89	0,0653	160	0,0614	281	0,0646	380	0,0603	498	0,0606	593	0,0605
12	68	0,0503	117	0,0470	207	0,0460	273	0,0433	317	0,0393	367	0,0374
	1350	0,9994	2750	0,9995	4500	0,9995	6500	0,9996	8650	0,9995	9800	0,9995

COMBINATORIA

La presente comunicación es un resumen del documento de trabajo elaborado por nuestro grupo (Didáctica de la Matemática, de Sevilla) en el que analizamos los principales aspectos de la Combinatoria a nivel de Bachillerato, expresamos nuestras opiniones sobre contenidos, métodos y objetivos y las concretamos en los problemas comentados que aparecen en el mismo.

Contenidos.-

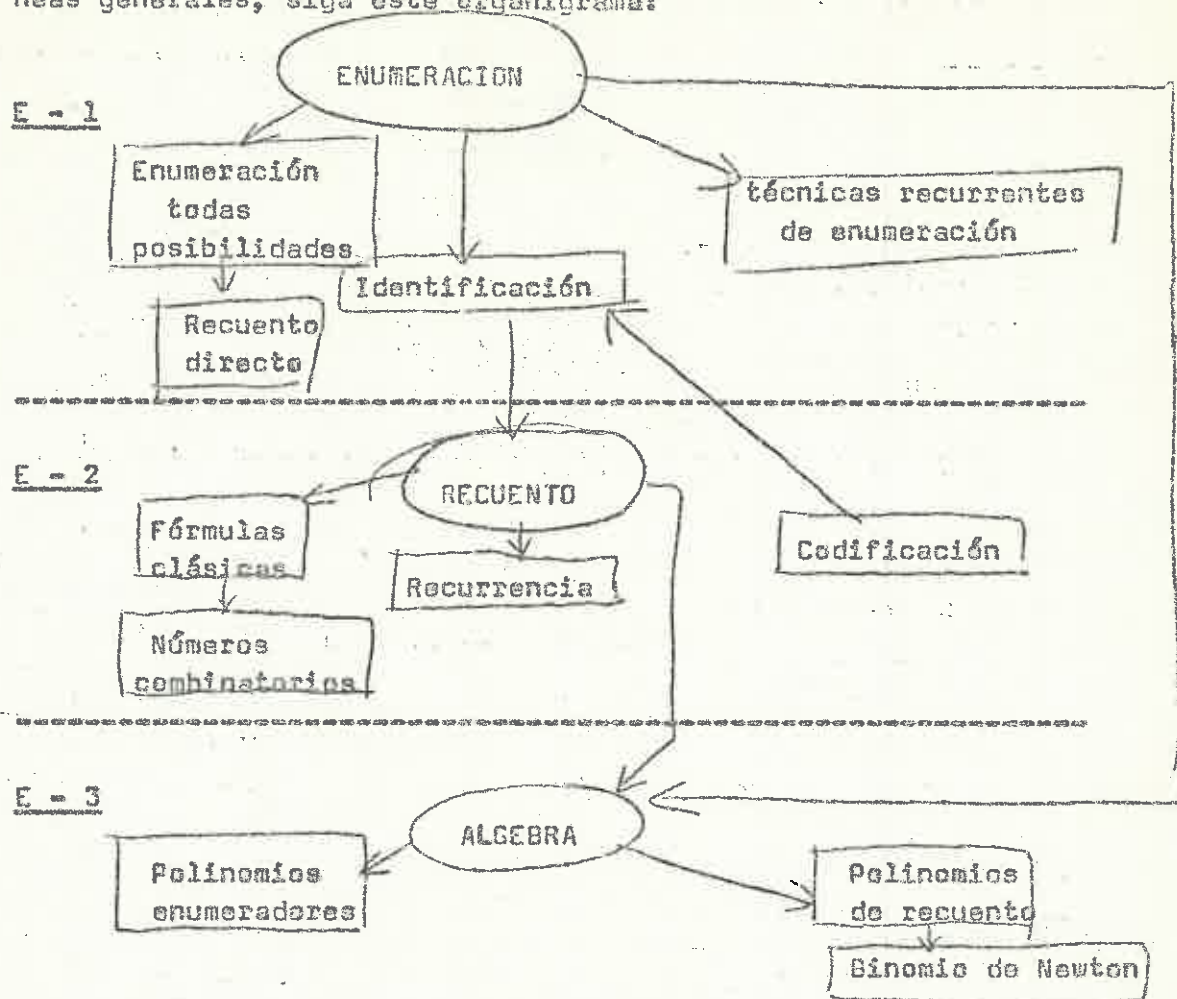
Creemos conveniente cambiar el enfoque que se le viene dando al tema de Combinatoria, no sólo en el método sino también en los contenidos: éstos caen, como gran parte de la Matemática de nuestro Bachillerato, dentro de un esquematismo que es necesario romper. Reducir la teoría a las variaciones, permutaciones y combinaciones es conducir al alumno por un camino estrecho y limitado por el formulismo. Este es lo que se hace en los planteamientos clásicos, incluyendo la formulación conjuntista, donde los problemas giran en torno a situaciones estereotipadas. Nosotros incluimos problemas como el 1.1, que son problemas de combinatoria pero que no obedecen a ninguna de las recetas usuales.

El contenido del tema lo desarrollamos en estos cuatro puntos:

- 1.- Problemas generales de enumeración, no necesariamente típicos, con los que se rompe el estereotipo y se sientan las bases sobre las que enmarcamos directamente el tema.
- 2.- Problemas de recuento por recurrencia, con los que queremos explicitar que la recurrencia es una técnica más de recuento, y uno de los objetivos centrales del tema.
- 3.- Codificación, que siempre está implícita en la combinatoria, bien de una manera simbólica o como una verdadera "traducción" del problema a un lenguaje cifrado cuyas "palabras" lo identifican dentro de la teoría. Este segundo aspecto proporciona enormes posibilidades de desarrollar métodos muy sencillos de recuento e incluso de obtener algunas fórmulas.
- 4.- Algebraización de la enumeración, obteniendo polinomios enumeradores de subconjuntos, para concluir con el Binomio de Newton.

Metodología.-

Proponemos un desarrollo de la Combinatoria que, en líneas generales, siga este organigrama:



Distinguimos tres etapas claramente diferenciadas en el proceso de aprendizaje: una etapa en la que predomina la enumeración (E-1); una segunda etapa en la que el aspecto central son las técnicas de recuento (E-2) y una tercera etapa (E-3) en la que se introducen técnicas algebraicas.

Creemos que hay que partir de la enumeración, esto es, de la organización y obtención de todas las posibilidades. A continuación se irán proponiendo problemas cada vez más sistemáticos y en los que el número de posibilidades sea ya lo suficientemente elevado como para que los alumnos vean la posibilidad de explicitar un método a partir del cual se obtengan todas las enumeraciones. Se concretará entonces la técnica de fijación de elementos.

Al mismo tiempo que se realizan estos problemas se llevará a los alumnos a distinguir casos dentro de la enumeración (identificación): repetición o no de los elementos, si se tiene en cuenta o no el orden, si se toman o no todos los elementos.

La etapa E-2 establece en un momento, parte de la sistemática del cálculo combinatorio: problemas análogos a los de la última fase llevan a definir mediante un proceso recurrente, las fórmulas de las variaciones con repetición, las variaciones ordinarias, las permutaciones ordinarias y las combinaciones. Así por ejemplo, con problemas como el 2.1 se pone en evidencia que $V_{6,3} = 6 V_{5,2}$ llegando así a inducir de forma empírica la expresión de $V_{m,n}$.

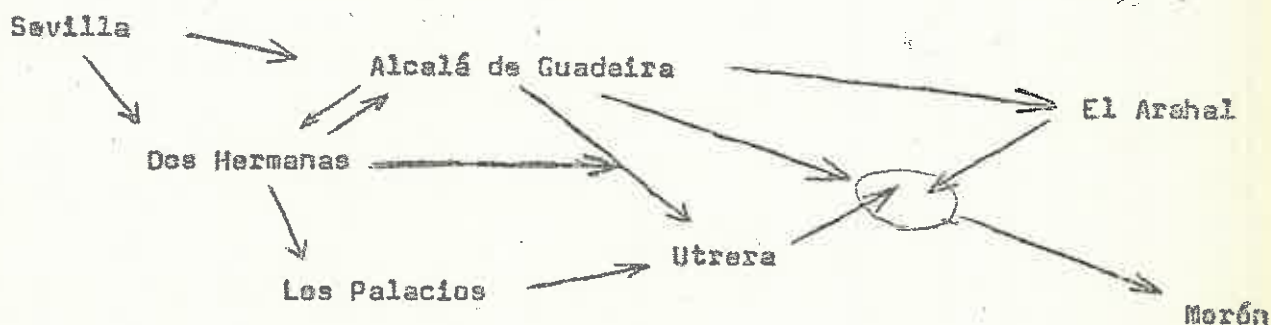
Tras estos problemas, en los que ya se debe haber comenzado a hablar de codificación, se pasa a un bloque en el que se trata ésta de forma directa. Los Problemas 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 son buenos ejemplos de la utilización de distintos códigos, los cuales permiten obtener las fórmulas de las permutaciones y combinaciones con repetición.

En cuanto a la etapa E-3, antes de obtener el desarrollo del Binomio de Newton, proponemos la utilización de polinomios enumeradores, como se indica en los problemas del bloque 3.

Objetivos.— Es objetivo didáctico central la utilización de métodos recurrentes, que se unen a las técnicas de enumeración y de recuento. Así mismo se favorece la adquisición de una cierta destreza en procesos de identificación y codificación.

Problemas

1.1.— Un camionero quiere ir de Sevilla a Morón siguiendo siempre el sentido que indican las flechas en el plano adjunto. Describe todas las rutas que puede hacer el camionero.



1.2.— Se quiere formar un dominó de colores con fichas triangulares (triángulos equiláteros). Se dispone de tres colores. Forma todas las fichas posibles.

2.1.- Un grupo de trabajo pretende organizar un sistema de señales con banderas tricolores (tres franjas horizontales del mismo tamaño). Disponen de seis colores: verde, azul, rojo, amarillo, negro y blanco.

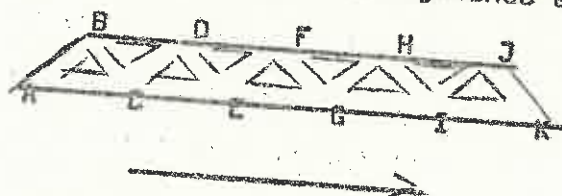
a) ¿Cuántas banderas tendrán en la primera franja el color verde?

b) ¿Cuántas banderas habrá en total?

c) ¿Cuántas banderas no tendrán el color amarillo?

2.2.- Un grupo de 11 personas quiere ir de excursión. Como medio de transporte tienen una moto (dos personas), un coche pequeño (cuatro personas) y un coche grande (cinco personas). ¿De cuántas maneras se pueden distribuir todas las personas en los vehículos?

2.3.- En el laberinto de la figura, ¿de cuántas maneras distintas se puede ir desde A hasta K, siguiendo el sentido de la flecha?



2.4.- El resultado final de un partido es de 5 goles a 3 a favor del equipo local. ¿De cuántas maneras distintas se pudo producir este resultado?

2.5.- Se tiene 9 monedas y 5 alcancías distintas. ¿De cuántas maneras podrían distribuirse las monedas en las alcancías considerando que algunas alcancías pudieran quedar vacías?

3.1.- Desarrollar el producto $(x+a_1) \cdot (x+a_2) \cdot (x+a_3) \cdot (x+a_4)$

El coeficiente de x^p nos enumera los subconjuntos de $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de orden $4-p$.

3.2.- Hacer $a_1 = a$ en el ejercicio anterior.

Ahora el coeficiente de x^p nos da el número de subconjuntos de B con $4-p$ elementos.

INTRODUCCION DEL CONCEPTO DE DISTANCIA Y PRODUCTO ESCALAR MEDIANTE LA FORMA CUADRATICA LONGITUD DE UN VECTOR.

Uno de los problemas centrales de la enseñanza de la Geometría elemental es el paso de la Geometría Vectorial o Afín a la Geometría Euclídea, es decir la introducción del concepto de distancia en el Plano.

El método usualmente empleado para desarrollar la Geometría Afín, consiste en la construcción del Espacio Vectorial W de los vectores fijos del plano y después el plano Afín sobre él. Sin entrar a discutirlo ahora, lo que no cabe duda es que la mayoría de las definiciones y conceptos que allí se introducen son aceptados por el alumno como "naturales", bien por su utilización en Física (Operaciones entre vectores...) bien por su visualización gráfica sencilla (bases, coordenadas, ecuaciones de la recta,...). De este modo la Geometría aparece como lo que es; como algo "natural" y hasta cierto punto experimental. En una palabra: Se ven las razones de todas las reglas del juego.

Por el contrario, para introducir el concepto de distancia el método usualmente empleado es hablar primero del Producto escalar: Un concepto que no cumple ninguno de los requisitos anteriores: Es una operación "extraña" ($v \cdot w$ es un número real) con algunas propiedades difíciles de aceptar o visualizar ($v \cdot v > 0$) y sobre todo, se pierde el "tono" llevado hasta ese momento, pues para el alumno "ya empiezan a aparecer cosas raras". No se pueden negar las enormes ventajas de este enfoque, pero hay que eliminar sus inconvenientes pedagógicos. Lo que debemos pretender es construir toda la Geometría elemental a base de saltos lo más pequeños posible y tratando siempre de justificarlos al máximo. Lo que creemos es que hay que evitar las definiciones por "Real decreto" y "porque ya se verá en el futuro lo útil que es", y por otra parte los engaños con premeditación y alevosía "porque los muchachos no lo entenderían de otra forma". Si como decía H. Lebesgue: "La única enseñanza que un profesor puede dar es pensar delante de los alumnos", no nos queda mas remedio que hacerlo BIEN, delante de ellos, lo que implica su participación con claridad y rigor (rigor de pensamiento, no necesariamente de exposición). En definitiva, con respeto a su capacidad intelectual en formación.

El método que proponemos pretende solucionar estos inconvenientes, llegando al producto escalar y a la distancia, sin que aparezcan cosas (excesivamente) raras. Suponemos que el alumno opera mínimamente en el Plano Vectorial, (básicamente el concepto de base y coordenadas)

Lo que se pretende ahora es encontrar una fórmula de MEDIR longitudes de vectores. Es decir definir $L(v)$ (longitud de un vector). Es "natural" que $L(v)$ cumpla 3 propiedades: 1) $L(v) \in \mathbb{R}^+$; 2) $L(v) > 0 \quad \forall v \neq 0$ 3) $L(\lambda v) = |\lambda| L(v)$.

Por 1) debemos asociar a un vector v un número real, la única relación que hay hasta ahora entre W y $\mathbb{R}$ es el empleo de coordenadas. Supongamos que v tiene de coordenadas (x, y) respecto de la base $\{v_1, v_2\}$. Se trata entonces de definir $L(x, y)$. Naturalmente buscamos la función más sencilla que cumpla las propiedades y para ello buscamos con polinomios. Los polinomios ctes no sirven por 1); de 2) se deduce que $L(-v) = L(v)$ y por ello tampoco sirven los de primer grado. Probamos con un polinomio de grado 2 (sin términos lineales por lo mismo de antes). $L(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

$L(v_1) = L(1, 0) = a > 0$; igualmente $c > 0$. Además si $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces $L(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 > 0 \Leftrightarrow \text{Discriminate} < 0 \Leftrightarrow 4ac - b^2 > 0$.

Por tanto a, b, c deben cumplir $a > 0, 4ac - b^2 > 0$ (esto implica $c > 0$).

Solo falta comprobar 3). $L(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 ax^2 + \lambda^2 bxy + \lambda^2 cy^2$

$$|\lambda| L(x, y) = |\lambda| (ax^2 + bxy + cy^2) \quad . \text{ Por tanto}$$

como longitud de un vector sirve la función:

$$L(v) = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2} \quad . \quad L(v) \text{ se suele denotar } \|\vec{v}\|$$

Nótese que también serviría:

$$L(v) = a\sqrt{x^2} + b\sqrt{xy} + c\sqrt{y^2} = a|x| + b\sqrt{xy} + c|y|$$

Si se quiere tratar esto, la forma sería dibujar circunferencias: $\{\vec{v} \mid L(\vec{v}) = 1\}$.

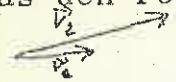
En el caso primero aparecen cónicas, en el segundo cuadrados (rombos).

Por tanto, dada una base $\{v_1, v_2\}$: una norma es una función: $\|\cdot\|: W \rightarrow \mathbb{R}$ tal

$$\text{que si } v = (x, y) \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2} \quad (1)$$

El ejemplo más sencillo es $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ que es una norma que se puede definir en

Es preciso insistir, cara al alumno, en que hay infinitas normas (infinitas formas de medir longitudes) y que desde el punto de vista matemático no hay ninguna privilegiada. (En efecto todas las definidas cumplen la desigualdad triangular y son por tanto normas en sentido topológico), aunque algunas den resultados que chocan a la "intuición física", por ejemplo:

 $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces $\|\vec{v}_1\| = 1$ y $\|\vec{v}_2\| = 1$ (Por esto es preferible llamar norma en lugar de longitud).

Precisamente comprender que la aparente "anormalidad" de estos resultados, se debe a que se tiene una forma prefijada de medir (que se podría representar como $\uparrow \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$) es distinguir lo que es accesorio de lo que es esencial, es decir COMPRENDER. Hay que tener en cuenta que al decir que los dos vectores no pueden medir igual, se está implícitamente diciendo "respecto a la medida física). Pero es que esta es una más y no tiene nada de especial desde el punto de vista matemático. En general la unidad de medida que resulta no es una unidad de longitud física. O dicho de otra forma, no hay manera de decir que la unidad de longitud de un eje es igual a la unidad de longitud del otro. Además el hecho de que haya infinitas "longitudes" plantea una diferencia clara con lo Afín donde solo hay una forma de sumar vectores, etc. Es decir solo hay una geometría afín del plano y hay infinitas euclídeas aunque todas ellas las estudiemos conjuntamente. Cada concepto introducido depende pues, de la norma (o del producto escalar) introducida. La métrica no es algo inherente al plano sino algo que añadimos para estudiarlo. Con la noción de ortogonalidad ocurre igual: hay infinitas, y la noción natural de $+$ es solo un ejemplo de ellas. El alumno debe comparar esta situación con la noción de paralelismo en el Plano Afín.

El problema que se plantea ahora es la introducción del concepto de producto escalar a partir de lo hecho. Pero es preciso insistir en que el producto escalar no es una idea natural sino un concepto algebraico que simplifica enormemente los cálculos. Por tanto es a la hora de operar, donde deberá aparecer. En general, las consideraciones geométricas deben servir para colocar el problema en una buena situación y los cálculos para acabar de resolverlo.

Indicamos a continuación varios métodos posibles con algunas de sus ventajas e inconvenientes. Estos métodos se pueden clasificar en dos tipos; unos, conducen, sin hablar antes de producto escalar, a la existencia de bases donde la norma se expresa como $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Métodos últimos) y por otra, los que introducen antes el producto escalar, a partir del cual se puede continuar con el desarrollo típico de estas cuestiones.

METODO MATRICIAL.

Se observa que: $\|\vec{v}\|^2 = ax^2 + bxy + cy^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Esto justifica el estudio de funciones del tipo: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \leadsto \vec{v} \cdot \vec{w} = (x, y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{Con } a > 0 \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &\leadsto (x, y) \\ \vec{w} &\leadsto (x', y') \end{aligned} \quad \left| \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \right| = ac - \frac{1}{4}b^2 > 0 \Leftrightarrow 4ac - b^2 > 0.$$

En este momento deben introducirse las operaciones con matrices (que se justifican como instrumento de cálculo que facilita las operaciones) y ver entonces que se ha construido una función con una serie de propiedades y que, por ellas, se le llama Producto escalar. Recíprocamente, si se conoce una función de este tipo, se puede construir una norma mediante:

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$. Aplicando las propiedades de bilinealidad y simetría se obtiene inmediatamente la expresión del producto escalar y la norma respecto a cualquier base. (Cosa que es más difícil hacer solo con la norma). Se puede plantear también el problema de qué condiciones tiene que cumplir una matriz para ser la matriz de un producto escalar respecto a una base y análogamente a lo hecho antes se obtiene que la matriz debe cumplir lo mismo que:

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

Es decir ser simétrica, con $a_{11} > 0$ y determinante positivo.

Ahora se continúa con el desarrollo típico.

Este método tiene el inconveniente de que no se ve claro, la razón de la introducción del producto escalar y tampoco se justifican suficientemente posteriores definiciones: Por ejemplo, la definición de vectores ortogonales como $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

METODO DE LA NORMA DE LA SUMA.

Consiste en estudiar que ocurre con $\|\vec{v} + \vec{w}\|$ respecto a $\|\vec{v}\|$ y $\|\vec{w}\|$.

Se observa que:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2 \left(ax_1x_2 + \frac{b}{2} (y_1x_2 + x_1y_2) + cy_1y_2 \right) \quad \begin{aligned} \vec{v} &\leadsto (x_1, y_1) \\ \vec{w} &\leadsto (x_2, y_2) \end{aligned}$$

Por definición, a lo situado dentro del paréntesis se le denomina Producto escalar (respecto a esa norma y esa base). Se estudian sus propiedades y se desarrolla el concepto introducido, análogamente al método anterior.

Este método tiene los mismos inconvenientes que el anterior. Se podría pensar que, en este caso, la definición de ortogonalidad queda justificada, pues si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, entonces: $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$ es decir se cumple el Teorema de Pitágoras. El grave inconveniente de esto es que para hablar del Teorema de Pitágoras se necesita saber ya lo que es la distancia y la norma. Las ventajas de claridad conseguidas se pierden por completo.

METODO DE LA DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Se puede intentar resolver el problema de calcular la distancia de un punto P a una recta r como: $d(P, r) = \inf \{ d(P, Q) \mid Q \in r \}$

y observar que se cumple que $d(P, r) = d(P, Q)$ donde Q cumple una ecuación que se puede formular como $\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0$; $\vec{PQ} \cdot \vec{v}$ se llama entonces producto escalar de $\vec{PQ}$ por $\vec{v}$.

De este modo aparecería de una forma sencilla y natural el concepto de producto escalar y sobre todo el de ortogonalidad. El problema es que aparece un problema de mínimos bastante farragoso de resolver.

METODO DEL CAMBIO DE BASE.

Definida la norma respecto a una base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, surge naturalmente el problema de como calcular $\|\vec{v}\|$ si sus coordenadas vienen dadas respecto a otra base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, conociendo las coordenadas de estos últimos respecto a la base inicial. Sean $\vec{v} = (x, y)$, $\vec{w}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{w}_2 = (x_2, y_2)$, respecto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Expresando el vector $\vec{v}$ en función de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ y aplicando (1) y operando, sale

$$\|\vec{v}\|^2 = \bar{x}^2 \|\vec{w}_1\|^2 + \bar{y}^2 \|\vec{w}_2\|^2 + 2\bar{x}\bar{y} [a(x_1x_2) + \frac{b}{2}(y_1x_2 + x_1y_2) + cy_1y_2]$$

y para simplificar se llama a la expresión del corchete $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2$ (que por supuesto también está definido cuando $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ no son base)

Este método tiene la ventaja de que aparecen directamente las fórmulas del cambio de base para la norma, y de que dada una base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, la norma se expresa como: $\|\vec{v}\|^2 = \bar{x}^2 \|\vec{w}_1\|^2 + \bar{y}^2 \|\vec{w}_2\|^2 + 2\bar{x}\bar{y} \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2$.

La condición $\|\vec{v}\| > 0$ (0 sea $4ac - b^2 > 0$) se escribe ahora: $4\|\vec{w}_1\|^2\|\vec{w}_2\|^2 - 4(\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2)^2 > 0$ es decir $|\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2| \leq \|\vec{w}_1\| \|\vec{w}_2\|$ que es la desigualdad de SCHWARTZ (Si $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ no son base se demuestra aparte).

A continuación se estudiarían las propiedades del producto escalar y se vería que, reciprocamente, un producto escalar define una norma.

Este método tiene la ventaja de que permite ver la importancia del concepto de ortogonalidad. Una base será "buena" cuando la norma venga expresada de una forma sencilla, es decir cuando $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$. Una base ortogonal diagonaliza la forma cuadrática al anular el factor x, y y una ortonormal la convierte en $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Surge naturalmente, la cuestión de existencia de bases ortonormales, que se traduce en las ecuaciones:

$$ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 = 1 \quad (\|\vec{w}_1\| = 1)$$

$$ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 = 1 \quad (\|\vec{w}_2\| = 1)$$

$$ax_1x_2 + \frac{b}{2}(x_1y_2 + y_1x_2) + cy_1y_2 = 0 \quad (\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0)$$

Se comprueba que estas ecuaciones siempre tienen solución y por tanto una norma se puede siempre expresar en cierta base de la forma más sencilla. Nótese la importancia de este resultado, que dice que todos los productos escalares se pueden tratar de la misma forma (con las mismas fórmulas), aunque los resultados "físicos" sean distintos.

METODO DE LA FORMA POLAR DE LA FORMA CUADRATICA.

Se sabe que en un espacio euclídeo se puede obtener $\vec{v} \cdot \vec{w}$ a partir de la norma mediante: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2)$

Esto es el proceso de polarización de la forma cuadrática y su traducción en geometría clásica es el Teorema del coseno. Pero por supuesto la fórmula anterior sigue sin tener nada de "natural" y no puede justificarse como definición de producto escalar. Este método pretende ser una justificación de tal fórmula.

Hasta ahora se tiene: $\|\vec{v}\|^2 = \|\alpha, \gamma\|^2 = ax^2 + bxy + cy^2$ con $a = \|\vec{v}_1\|^2$, $c = \|\vec{v}_2\|^2$.

Es decir a y c están estrechamente relacionados con $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$; conocidas sus normas se conocen a y c . ¿Ocurre algo parecido con b ?

$$\|(1,1)\|^2 = \|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\|^2 = a + b + c \Rightarrow b = \|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\|^2 - \|\vec{v}_1\|^2 - \|\vec{v}_2\|^2$$

Esta expresión aparece en muchos cálculos y por eso se simplifica dándole el nombre de producto escalar a $\vec{v} \cdot \vec{w} = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2)$

Por supuesto, esta definición vale si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son base.

A partir de aquí se puede hacer un desarrollo parecido al del método anterior, encontrando la expresión del producto escalar y de la norma respecto a una base cualquiera, justificando el concepto de ortogonalidad como antes y planteando la existencia de bases ortonormales.

METODO DE DIAGONALIZACION DIRECTA.

Este método conduce directamente a la expresión $\|\vec{v}\|^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si los alumnos conocen y manejan las "fórmulas del cambio de base", se puede intentar directamente diagonalizar la forma cuadrática, es decir buscar una expresión más sencilla de $\|\vec{v}\|^2 = ax^2 + bxy + cy^2$ tratando

de completar cuadrados. (Recuérdese que $a > 0$ y $4ac - b^2 > 0$):

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2$$

y con el cambio de base $\vec{v} \rightarrow \vec{x} = x + \frac{b}{2a}y, \vec{y} = y$ resulta que: $\|\vec{v}\|^2 = a\vec{x}^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)\vec{y}^2$

Una base (o un sistema de ejes) se dice ortogonal cuando la forma cuadrática $\|\vec{v}\|^2$ se expresa de esta forma (sin término xy), es decir cuando es "diagonal". Queda probada la existencia de bases ortogonales, y naturalmente se ve después que una base es ortogonal cuando su producto escalar es 0.

Se puede obtener también la existencia de bases ortonormales, escribiendo

$$\|\vec{v}\|^2 = (\sqrt{a}\vec{x})^2 + \left(\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}\vec{y}\right)^2 \text{ y tomando } \bar{x} = \sqrt{a}\vec{x}, \bar{y} = \sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}\vec{y} \text{ con lo cual se llega a que para estas bases (que existen) } \|\vec{v}\|^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2.$$

Este método justifica el estudio de aplicaciones del tipo:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

es decir, el estudio somero de las matrices y las aplicaciones lineales que se necesita si se quiere introducir el producto escalar como en el método siguiente, aunque ahora se podría hacer por otro método llegándose a

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1x_2 + y_1y_2 \quad \vec{v} = (x_1, y_1) \quad \vec{w} = (x_2, y_2)$$

No parece muy útil en este método, hablar de la matriz de la forma cuadrática respecto a una base y quizás sea muy complicado.

METODO DE LA SIMETRIA

Este método pretende justificar directamente la introducción de la norma como $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Matemáticamente, esto está justificado pues sabemos que siempre existen bases ortonormales; ahora se trata de justificar, mediante consideraciones geométricas de simetría bastante sencillas, su introducción directa que ahorra mucho tiempo.

Para desarrollar este método se comienza como en la introducción buscando una función polinómica que sirva como "longitud de un vector". Los términos lineales se eliminan como allí y entonces $L(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Se trata ahora de justificar la eliminación del término bxy .

Parece natural que entre los cuadrantes que define la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ no haya ninguno privilegiado. Si un punto del primero es (x,y) , entonces sus puntos simétricos en los otros tres son $(-x,y)$, $(-x,-y)$ y $(x,-y)$. Por la propiedad 3) se cumple que $L(x,y) = L(-x,-y)$ y $L(-x,y) = L(x,-y)$. Para que los cuatro cuadrantes sean iguales "exigimos" $L(x,y) = L(-x,y)$. Es decir que la simetría $(x,y) \rightarrow (-x,y)$ sea una isometría.

Dicho de otra forma, que al cambiar x por $-x$, se obtiene un vector de igual longitud que el primero, quiere decir que los cuatro cuadrantes son "iguales" para nosotros, y esa es precisamente la definición que da Euclides de perpendicularidad: "cuando una línea recta colocada sobre una línea recta forma ángulos adyacentes e iguales el uno al otro, cada uno de los ángulos iguales es recto y la línea recta colocada sobre la otra se llama perpendicular a aquella sobre la que está colocada". Es decir, en el proceso se introduce la ortogonalidad directamente, pues la simetría $L(x,y) = L(-x,y)$ lleva en cierto sentido implícita la idea de que los ejes son ortogonales (pues esta simetría solo se "ve dibujándola" cuando se pintan los ejes perpendiculares). Dos rectas o dos vectores serán ortogonales cuando se encuentren en la misma posición relativa entre ellos que la que se encuentran los ejes dados.

Entonces resulta $ax^2 + bxy + cy^2 = ax^2 - bxy + cy^2 \Rightarrow b=0$, y queda $L(x,y) = ax^2 + cy^2$ como $L(x,y) > 0$ ($x,y \neq (0,0)$), la única condición que deben cumplir a y c es ser > 0 . Luego se puede tomar $a = c = 1$. Nótese que esta elección supone tomar $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 1$ aunque $\vec{v}_1 \nperp \vec{v}_2$. Pero nótese que el problema de encontrar vectores que aparentemente no "miden" lo mismo y tienen la misma longitud algebraica (o ángulos que aparentemente no son iguales y son algebraicamente el mismo) aparece con cualquier forma cuadrática (excepto $\sqrt{x^2 + y^2}$) aunque con este método

en lugar de "aparecer", se afirma su existencia desde el comienzo, y se enfrenta antes al alumno con la aparente incongruencia de que uno puede elegir unidades arbitrarias de longitud sobre los ejes (al escoger a y c) y de ángulos (al escoger la base $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$) cuando se está definiendo una distancia en el plano.

Se llega definitivamente a $\|(\lambda, \gamma)\| = \sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}$ utilizando la propiedad 3) como en la introducción. ($L(\lambda, \gamma) = |L(\vec{v})|$).

Se plantea ahora la cuestión de desarrollar lo introducido y de que aparezca el producto escalar. (El desarrollo que sigue sirve también para el método anterior). Esto se podría hacer por alguno de los métodos anteriores y se llegaría a la expresión: $\vec{v} \cdot \vec{w} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Aquí se va a indicar otro método que tiene importantes ventajas, y que con ligeras variantes sirve también para cualquiera de los otros métodos indicados y resuelve (aún en el caso de que se introduzca el producto escalar directamente) DE FORMA MUY SENCILLA LOS PROBLEMAS DIDÁCTICOS PLANTEADOS CON LA DEFINICIÓN RIGUROSA DE ÁNGULO, LA DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO, EL ESTUDIO Y CLASIFICACIÓN DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO, SUS ECUACIONES Y RESULTADOS ELEMENTALES ("El producto de dos simetrías es una rotación", "Toda rotación es producto de dos simetrías", etc), LAS FÓRMULAS DE LA TRIGONOMETRÍA PLANA, etc...

Se trata de estudiar las transformaciones del plano que conservan la estructura introducida. Así el alumno se encuentra con la primera idea de conservación y el conocimiento que se alcanza de una estructura, estudiando sus transformaciones.

Se definen las isometrías como aplicaciones biyectivas de W en W que conservan la norma ($\|f(v)\| = \|v\|$) y las operaciones (son lineales).

Cualquier punto de la circunferencia unidad $\{\vec{v} / \|\vec{v}\| = 1\}$ tiene como imagen otro punto de la circunferencia unidad (es decir la circunferencia unidad es una órbita para las isometrías). Se observa que dada la imagen (a, b) del punto (1, 0), la imagen (x', y') de otro punto cualquiera (x, y) sobre la circunferencia unidad, solo puede tener dos valores. En efecto $\|(x', y') - (a, b)\| = \|(x, y) - (1, 0)\|$ y, de aquí, operando resulta $ax' + by' = x$ que con $(x')^2 + (y')^2 = 1$ implica:

$$\begin{aligned} x' &= ax - by & x' &= ax + by \\ y' &= bx + ay & y' &= bx - ay \end{aligned} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Recíprocamente toda aplicación definida por matrices de estos tipos es una isometría. Estas ecuaciones valen para todo v (Tómese $\vec{v}/\|\vec{v}\|$). ¿Cómo distinguir un caso de otro? La simetría tiene dos puntos fijos en la circunferencia unidad y la rotación ninguno. Es decir hay que resolver:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Resulta que (1) es una rotación y (2) una simetría.

Si se define base ortonormada como aquella en que la forma cuadrática se expresa como $\sqrt{x^2 + y^2}$ (definición equivalente a la normal) resulta que toda isometría de matriz (1) en una base ortonormada, tiene una matriz de este tipo en cualquier otra base ortonormada y los números a y |b| no dependen de la base ortonormada y solo de la rotación. Se llama a "a", coseno de la rotación. Si el plano está orientado, entonces b tampoco depende de la base ortonormal escogida que tenga el mismo sentido que la inicial. Se llama a "b", seno de la rotación.

Despejando a en las ecuaciones de la rotación, se obtiene $a = xx' + yy'$. A lo último se le llama Producto escalar y así resulta que $a = (x, y) \cdot (x', y')$.

A partir de aquí se puede desarrollar toda la Trigonometría y el resto de las cuestiones enunciadas antes. Para un desarrollo concreto puede verse: "GEOMETRÍA" Queysanne-Revuz. CECSA. (Con la mayoría de las cuestiones muy simplificadas si se hace lo indicado arriba), o bien

"ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA". Dieudonné. SELECCIONES CIENTÍFICAS.

Con todo este bagaje es posible estudiar todas las cuestiones de la Geometría euclídea clásica o "moderna". Se pueden estudiar todas las cuestiones de la geometría del triángulo o del círculo, rigORIZANDO las demostraciones sencillamente mediante los grupos de transformaciones adecuados y sus invariantes. 158

RADICALES Y LOGARITMOS: UNA INTRODUCCIÓN CON CALCULADORAS.

Colectivo de Didáctica de las Matemáticas de Sevilla.

El logaritmo se ha estudiado en el Bachillerato de dos formas distintas: (1) como medio de cálculo, (2) como un isomorfismo.

La forma que proponemos difiere de la anterior: el logaritmo es un número real más, al igual que la raíz. Nos interesa que los alumnos:

- trabajen con potencias;
- vean la necesidad de organizarse cuando trabajan con muchos números (utilidad de las tablas);
- manejen las propiedades de los logaritmos de una forma numérica para llegar a su generalización y demostración;
- construyan números reales (raíces y logaritmos) como límites de sucesiones;

En 1º de BUP, comenzamos estudiando las potencias, definiendo la raíz y el logaritmo como operaciones inversas de la potencia y un limitamos al estudio de radicales y cálculo aproximado de raíces (por ejemplo, calcular con cinco decimales $\sqrt[3]{29}$), aprovechando el cálculo aproximado para hablar de errores (por defecto y por exceso), redondeo, sucesión, límite, intervalo encajado, etc.

En 2º de BUP se estudia el logaritmo. Empezamos con 1º proponiendo los siguientes problemas:

Problema 1: Calcula $\sqrt[10]{10}$, por defecto y por exceso y con un error menor que una cienmilésima. ¿Qué valor es más conveniente tomar como $\sqrt[10]{10}$?

Problema 2: Calcula con cinco cifras decimales $\sqrt[100]{10}$, $\sqrt[1000]{10}$, $\sqrt[10000]{10}$.

A continuación indicamos la forma de resolverlos.

En el problema 1 se trata de hallar un número "x" tal que x^{10} se aproxime a 10. (i.e. $\sqrt[10]{10} = x \Leftrightarrow x^{10} = 10$). Lo hacemos por aproximaciones sucesivas.

$$\left. \begin{array}{l} 1^{10} = 1 \\ 2^{10} = 1024 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 < \sqrt[10]{10} < 2 \Rightarrow \sqrt[10]{10} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ por defecto con } E < 1 \\ 2, \text{ por exceso con } E < 1 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^2 = 6'19 \\ 1^3 = 13'78 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^2 < \sqrt[10]{10} < 1^3 ; \quad \left. \begin{array}{l} 1^{25} = 9'31 \\ 1^{26} = 10'08 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^25 < \sqrt[10]{10} < 1^26 ;$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^{258} = 9'926 \\ 1^{259} = 10'005 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^{258} < \sqrt[10]{10} < 1^{259} ; \quad \left. \begin{array}{l} 1^{2589} = 9'997 \\ 1^{2590} = 10'005 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^{2589} < \sqrt[10]{10} < 1^{2590} ;$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^{25892} = 9'9995 \\ 1^{25893} = 10'0003 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^{25892} < \sqrt[10]{10} < 1^{25893} \Rightarrow \sqrt[10]{10} = \left\{ \begin{array}{l} 1^{25892}, \text{ por defecto } E < 0'00001 \\ 1^{25893}, \text{ por exceso } E < 0'00001 \end{array} \right.$$

El valor que conviene tomar es $\sqrt[10]{10} = 1^{25893}$ porque 10'0003 es el más próximo a 10.

El problema 2 se hace como el 1 teniendo en cuenta que

$$\sqrt[100]{10} = \sqrt[10]{\sqrt[10]{10}} = \sqrt[10]{1^{25893}} = 1^{02329}$$

$$\sqrt[1000]{10} = \sqrt[10]{\sqrt[100]{10}} = \sqrt[10]{1^{02329}} = 1^{00230}$$

$$\sqrt[10000]{10} = \sqrt[10]{\sqrt[1000]{10}} = \sqrt[10]{1^{00230}} = 1^{00023}$$

Problema 3: Calcular con cuatro decimales $\log 2$, por defecto y por exceso.

Por definición, $\log 2 = x \Leftrightarrow 10^x = 2$.

$$1) \left. \begin{array}{l} 10^0 = 1 \\ 10^1 = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < \log 2 < 1 \Rightarrow \log 2 = \begin{cases} 0, & \text{por defecto con } \epsilon < 1 \\ 1, & \text{por exceso con } \epsilon < 1 \end{cases}$$

$$2) 10^{0.1} = \sqrt[10]{10} = 1.25893 \quad (\text{calculado anteriormente})$$

$$10^{0.2} = (10^{0.1})^2 = 1.58490$$

$$10^{0.3} = (10^{0.1})^3 = 1.99528$$

$$10^{0.4} = (10^{0.1})^4 = 2.51192$$

$$\Rightarrow 0.3 < \log 2 < 0.4 \Rightarrow \log 2 = \begin{cases} 0.3, & \text{por defecto con } \epsilon < 1 \\ 0.4, & \text{por exceso con } \epsilon < 1 \end{cases}$$

$$3) 10^{0.31} = 10^{0.3+0.01} = 10^{0.3} \cdot 10^{0.01} = 1.99528 \cdot 1.02329 = 2.04171$$

$$10^{0.30} = 1.99528$$

$$\text{siendo } 10^{0.01} = \sqrt[100]{10} = 1.02329 \quad (\text{calculado anteriormente}). \text{ Por tanto,}$$

$$4) 10^{0.301} = 10^{0.3+0.001} = 10^{0.3} \cdot 10^{0.001} = 1.99528 \cdot 1.00230 = 1.99982$$

$$10^{0.302} = 10^{0.3+0.002} = 10^{0.3} \cdot 10^{0.002} = 1.99528 \cdot 1.00460 = 2.00028$$

$$\text{siendo } 10^{0.002} = (10^{0.001})^2 = (1.00230)^2 = 1.00460$$

$$10^{0.001} = \sqrt[1000]{10} = 1.00230 \quad (\text{calculado anteriormente})$$

Por tanto, $0.301 < \log 2 < 0.302$

$$5) 10^{0.3011} = 10^{0.301+0.0001} = 10^{0.301} \cdot 10^{0.0001} = 1.99983 \cdot 1.00023 = 2.00028$$

$$10^{0.3010} = 1.99983$$

$$\text{siendo } 10^{0.0001} = \sqrt[10000]{10} = 1.00023$$

Por tanto, $0.3010 < \log 2 < 0.3011$

$$\log 2 = \begin{cases} 0.3010, & \text{por defecto con } \epsilon < 0.0001 \\ 0.3011, & \text{por exceso con } \epsilon < 0.0001 \end{cases}$$

Puesto que 1.99983 está más próximo a 2 que 2.00028, se toma

$$\log 2 = 0.3010.$$

A continuación se propone a la clase que calculen $\log 3$, $\log 4$ y $\log 5$, haciéndoles ver que $\log 4$ y $\log 5$ pueden calcularse sin necesidad de aproximaciones sucesivas. Así,

$$\log 4 = x \Leftrightarrow 10^x = 4 = 2^2$$

para comparar 10^x con 2^2 hemos de poner 2^2 en forma de potencia de 10.

$$\log 2 = 0.3010 \quad (\text{ya calculado}) \Rightarrow 2 = 10^{0.3010}$$

$$2^2 = (10^{0.3010})^2 = 10^{0.6020}$$

$$10^x = 10^{0.6020}$$

$$x = 0.6020$$

$$\log 4 = 0.6020$$

Igualmente,

$$\log 5 = x \Leftrightarrow 10^x = 5 = \frac{10}{2} = \frac{10}{10^{0.3010}} = 10^{1-0.3010} = 10^{0.6990}$$

$$x = 0.6990$$

$$\log 5 = 0.6990.$$

Después de resolver estos problemas, se divide la clase en grupos (dependiendo) del número de calculadoras) para calcular con cuatro decimales los logaritmos del 1 al 100. Antes de comenzar a calcular los logaritmos, se les hace ver que en los cálculos van a aparecer potencias de la forma $10^{0.3}$, $10^{0.09}$, $10^{0.005}$, etc; por tanto, conviene calcular las potencias sucesivas de $10^{0.1}$, $10^{0.01}$, $10^{0.001}$ y $10^{0.0001}$. Como son muchos números, se les indica que conviene colocarlos en una tabla de forma que sea fácil su manejo. La tabla es la siguiente:

TABLA PARA CALCULAR $(10^a)^n$

$\begin{matrix} a \\ n \end{matrix}$	0.1	0.01	0.001	0.0001
1	1.25893	1.02329	1.00230	1.00023
2	1.58490	1.04712	1.00460	1.00046
3	1.99528	1.07151	1.00692	1.00069
4	2.51192	1.09646	1.00923	1.00092
5	3.16233	1.12200	1.01155	1.00115
6	3.98116	1.14813	1.01388	1.00135
7	5.01200	1.17487	1.01621	1.00161
8	6.30976	1.20224	1.01855	1.00184
9	7.94354	1.23024	1.02089	1.00207

Siendo $a = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$

$n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$.

Para saber cuánto es $10^{0.007} = (10^{0.001})^7$ se observa el número que se encuentra en la columna del 0.001 y en la fila 7, resultando $10^{0.007} = 1.01621$.

Teniendo en cuenta que del 1 al 100 sólo hay 25 números primos, empleando el segundo método el trabajo se simplifica bastante. La tabla que se obtiene es la siguiente (sólo figura la parte decimal):

2ª cifra

1ª cifra	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0000	3010	4771	6020	6990	7781	8451	9030	9542
1	0000	0414	0791	1140	1461	1761	2040	2305	2552	2788
2	03010	3222	3424	3617	3801	3980	4150	4313	4471	4624
3	4771	4914	5050	5185	5315	5441	5562	5682	5798	5911
4	6020	6128	6232	6335	6434	6532	6627	6721	6811	6902
5	6990	7076	7160	7243	7323	7404	7481	7559	7634	7709
6	7781	7853	7924	7993	8060	8130	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8572	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9030	9084	9138	9191	9242	9295	9345	9395	9444	9494
9	9542	9591	9637	9688	9731	9778	9821	9868	9912	9950

TABLA DE LOGARITMOS DECIMALES DEL 1 AL 100

La finalidad de la construcción de esta tabla es:

- 1º) Que los alumnos vean que una tabla de logaritmos la pueden construir ellos, dejando de ser algo
- 2º) Manejar las propiedades de las potencias en ambos sentidos.
- 3º) Descubrir y manejar las propiedades de los logaritmos.

Las propiedades de los logaritmos han aparecido espontáneamente en la confección de la tabla. Se deben ahora enunciar y demostrar.

Gráfica de la función exponencial: (Ejemplo $y = 10^x$)

La gráfica se hará dibujando con cuidado unos cuantos puntos. Los valores que siguen se obtienen mirando la tabla $(10^a)^n$.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	1.26	1.58	1.99	2.51	3.16	3.98	5.01	6.31	7.94	10

Los siguientes valores se obtienen de los anteriores: $10^{-n} = 1/10^n$

x	0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1
y	1	0.79	0.63	0.50	0.40	0.32	0.25	0.20	0.16	0.13	0.10

Dibujados estos puntos, vemos que convendría obtener algunos más:

x	0'05	0'15	0'25	0'35	0'45	0'55	0'65	0'75	0'85	0'95	-1'1	-1'2
y	1'12	1'41	1'78	2'24	2'82	3'55	4'47	5'62	7'08	8'91	0'08	0'06

Todos estos valores se han calculado utilizando la tabla $(10^a)^n$. Por ejemplo: $10^{0'35} = 10^{0'3} \cdot 10^{0'05} = 1'99528 \cdot 1'12200 = 2'23870 \approx 2'24$.

(Dibujo al final).

Gráfica de la función logarítmica (Ejemplo $y = \log x$).

Se hará dibujando con cuidado uno cuantos puntos en papel milimetrado. Los valores que siguen se obtienen mirando la tabla de logaritmos.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	-	0	0'30	0'48	0'60	0'70	0'78	0'85	0'90	0'95	1

Los valores que siguen se pueden calcular directamente o empleando las propiedades de los logaritmos (Por ejemplo, directamente

$$\left. \begin{aligned} \log 0'2 = x &\Leftrightarrow 10^x = 0'2 = \frac{2}{10} \\ \log 2 = 0'3010 &\Leftrightarrow 2 = 10^{0'3010} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 10^x = \frac{10^{0'3010}}{10} = 10^{0'3010-1} = 10^{-0'6990} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -0'6990 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 0'2 = -0'6990 \approx -0'70$$

o empleando las propiedades de los logaritmos

$$\log 0'2 = \log \left(\frac{2}{10} \right) = \log 2 + \log 10 = 0'3010 - 1 = -0'6990 \approx -0'70$$

x	0'1	0'2	0'3	0'4	0'5	0'6	0'7	0'8	0'9
y	-1	-0'70	-0'52	-0'40	-0'30	-0'22	-0'15	-0'097	-0'05

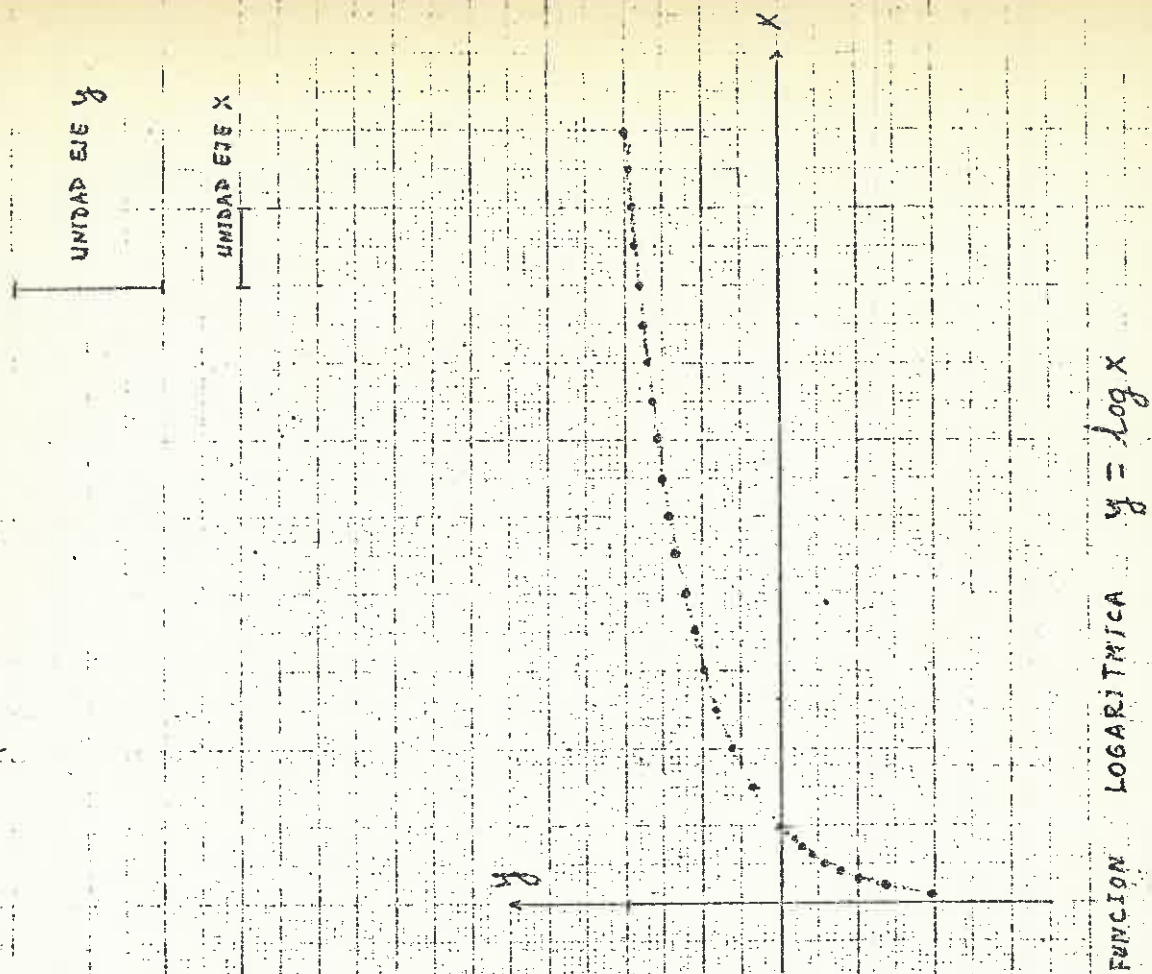
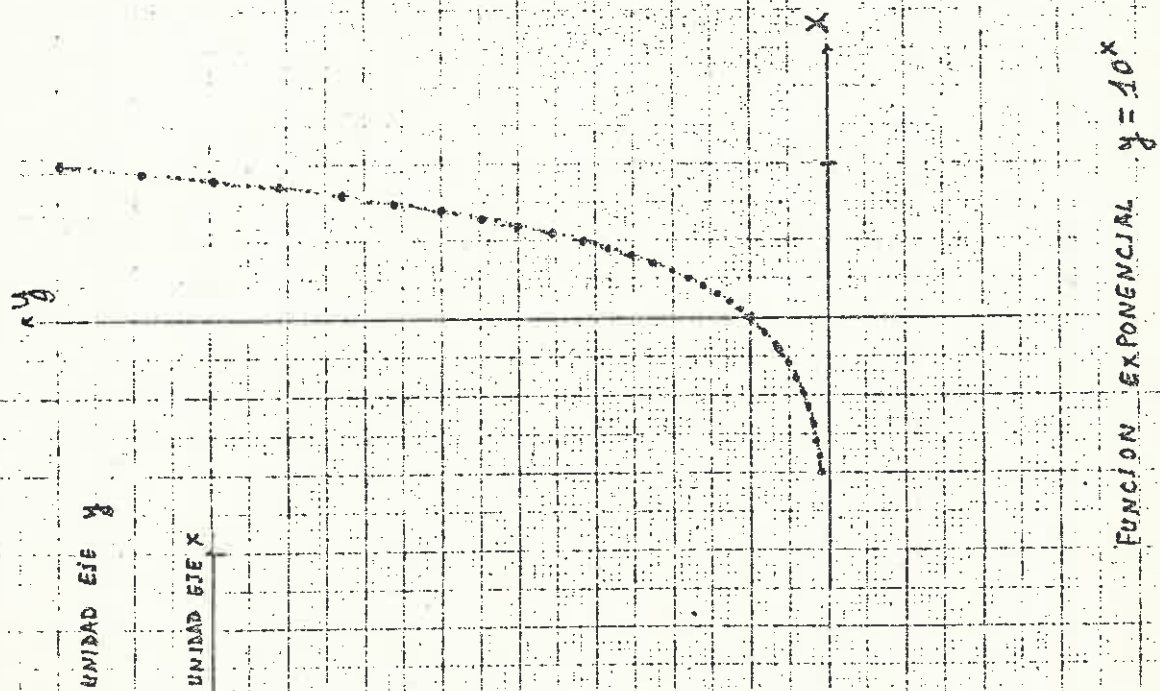
(Dibujados estos puntos, vemos que convendría obtener algunos más:

x	1'5	2'5	3'5	4'5	5'5	7'5	8'5	9'5
y	0'15	0'40	0'54	0'65	0'74	0'87	0'93	0'98

(Dibujo al final)

Función inversa:

Dibujadas las gráficas se debe insistir en que una función es inversa de la otra, se observa que relación tiene sus gráficas y se habla en general de la relación existente entre gráficas de funciones inversas.



TRIGONOMETRIA.

Las presentes notas resumen el trabajo sobre Trigonometria, realizado por el COlectivo de Didáctica de las Matemáticas de Sevilla.

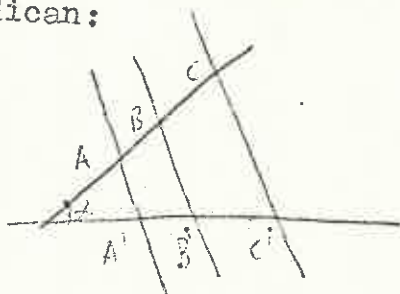
La idea que preside el tema consiste en plasmar el método científico en su desarrollo. Se comienza con el teorema de Thales, dado como axioma previa justificación. Se introducen las razones trigonométricas y se construyen tablas con dos decimales, distinguiéndose entre valores aproximados (obtenidos por medición) y valores exactos (obtenidos teóricamente). Mediante extensión de las razones trigonométricas se introducen las funciones circulares. El tema continua con el estudio de la trigonometria plana, para acabar con los principales desarrollos trigonométricos y ecuaciones. Finalmente, se confrontan los resultados obtenidos teóricamente con los obtenidos por medición.

Vamos a señalar los puntos centrales del tema.

Los alumnos dispondrán de los instrumentos elementales de dibujo: regla, compás, semicírculo graduado, etc.

Teorema de Thales.

Tras el planteamiento de situaciones concretas (cálculo de altura de puntos inaccesibles), propondremos el siguiente ejercicio: Dibujar dos rectas y un haz de paralelas que las corte, midiendo los segmentos que se obtienen y efectuando las razones que se indican:



$$\frac{A'B'}{AB} =$$

$$\frac{A'C'}{AC} =$$

$$\frac{B'C'}{BC} =$$

Los alumnos observarán que las razones obtenidas por cada uno de ellos son aproximadamente iguales. Tras analizar dicha observación,

concluiremos que "las proporciones son iguales", insistiendo en que dicha afirmación es verdadera dentro de un marco teórico. A continuación discutiremos la dependencia de los distintos valores de las constantes que han obtenido los alumnos, hasta concluir que dependen de α y de la inclinación de las paralelas.



Tras fijar la inclinación de las paralelas perpendicularmente, definiremos el coseno de α como la constante de proporcionalidad: $\cos \alpha = k$

Podemos señalar ahora la definición clásica del coseno, insistiendo en que no depende del triángulo rectángulo que se tome sino sólo del ángulo. Definiremos el seno como el coseno del complementario, etc.

Construcción de tablas.

Pasaremos a construir tablas, por ejemplo la del coseno. Previamente, haremos ejercicios en los que pediremos el coseno de un ángulo dado, por medición. Observaremos que, al utilizar la regla, es interesante tomar como unidad 10 cm. pues ello nos permite obtener hasta dos decimales de aproximación. Observaremos también, que si se toma la hipotenusa como unidad, basta con medir el cateto contiguo para obtener el coseno pedido. Por último, observaremos que para construir una tabla de 10 en 10 grados, por ejemplo, es conveniente acudir, por economía de trabajo, a la "circunferencia goniométrica":



Es interesante utilizar papel milimetrado.

A partir de las nociones teóricas elementales de geometría, calcularemos los valores exactos de las razones trigonométricas de algunos ángulos (30° , 60° , 45° , $22^\circ 30'$), que confrontaremos con los valores obtenidos por medición.

Acabaremos, redefiniendo las razones trigonométricas sobre el primer

cuadrante de la circunferencia goniométrica.

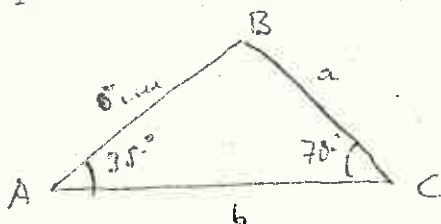
Funciones circulares.

Definiremos, por ampliación, las razones trigonométricas en los demás cuadrantes. Ampliaremos las tablas, dibujaremos las funciones trigonométricas y señalaremos sus principales propiedades. Sobre la gráfica podremos obtener otros valores no dados en las tablas.

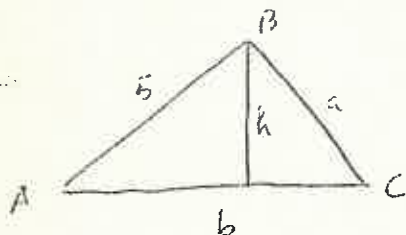
Trigonometría plana.

Al construir las tablas habíamos trabajado con triángulos rectángulos. Pasaremos ahora a trabajar con triángulos cualesquiera.

Resolveremos primeramente triángulos con datos numéricos (a partir de problemas concretos). Ejemplo:



Resolución: trazaremos la altura desde B



$$\sin 35 = \frac{h}{5} \quad , \quad h = 5 \cdot \sin 35$$

$$\sin 70 = \frac{h}{a} \quad , \quad h = a \cdot \sin 70$$

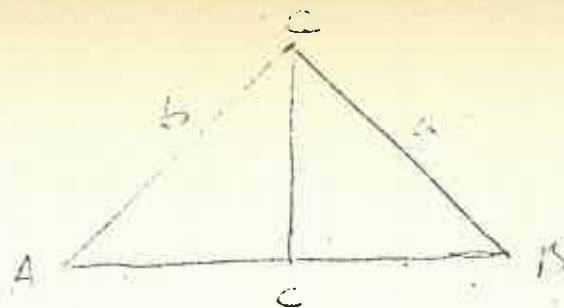
$$5 \cdot \sin 35 = a \cdot \sin 70$$

Reiterando este tipo de ejercicios se obtiene un método que lleva al alumno fácilmente al teorema del seno.

Procederemos análogamente para obtener el teorema del coseno.

Fórmulas trigonométricas.

Aprovechamos ejercicios del apartado anterior para obtener la fórmula que desarrolla $\sin(A+B)$.



$$c = a \cos B + b \cos A$$

aplicando el teorema del seno:

$$c = \frac{c \sin B}{\sin C} \sin A + \frac{c \sin A}{\sin C} \sin B \quad \sin C = \sin(A+B)$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

A partir del $\sin(A+B)$ obtendremos las demás formulas trigonométricas.

Aprovecharemos las fórmulas trigonométricas para obtener valores exactos.

Por último, volveremos a hacer una tabla a partir de la teoría.

Podemos proceder así:

$$\sin 30 = 3 \sin 10 - 4 \sin^3 10$$

$$\frac{1}{2} = 3 \sin 10 - 4 \sin^3 10$$

$$8 \sin^3 10 - 6 \sin 10 + 1 = 0$$

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

$$x = \sin 10$$

mediante aproximaciones sucesivas (Bolzano) y con una calculadora de bolsillo obtendremos una aproximación de $\sin 10^\circ$ y a partir de ella una tabla de, por ejemplo, 10 en 10 grados. Destacaremos el grado de aproximación que podemos conseguir así, frente al conseguido por medición.

=====

Antonio Pérez Jiménez.

(Colectivo de Didáctica de las Matemáticas.
Sevilla.)

0. Introduccion.-

Hasta ahora para calcular el limite de una sucesion hemos necesitado conocer unos cuantos terminos de la misma, que nos daban directamente o, lo mas frecuente, calculabamos a partir del termino general a_n . Este proceso puede ser latoso cuando

a) la expresion de a_n es complicada, p.ej. $a_n = \frac{(-1)^n + \frac{3}{n}}{1,2^n}$

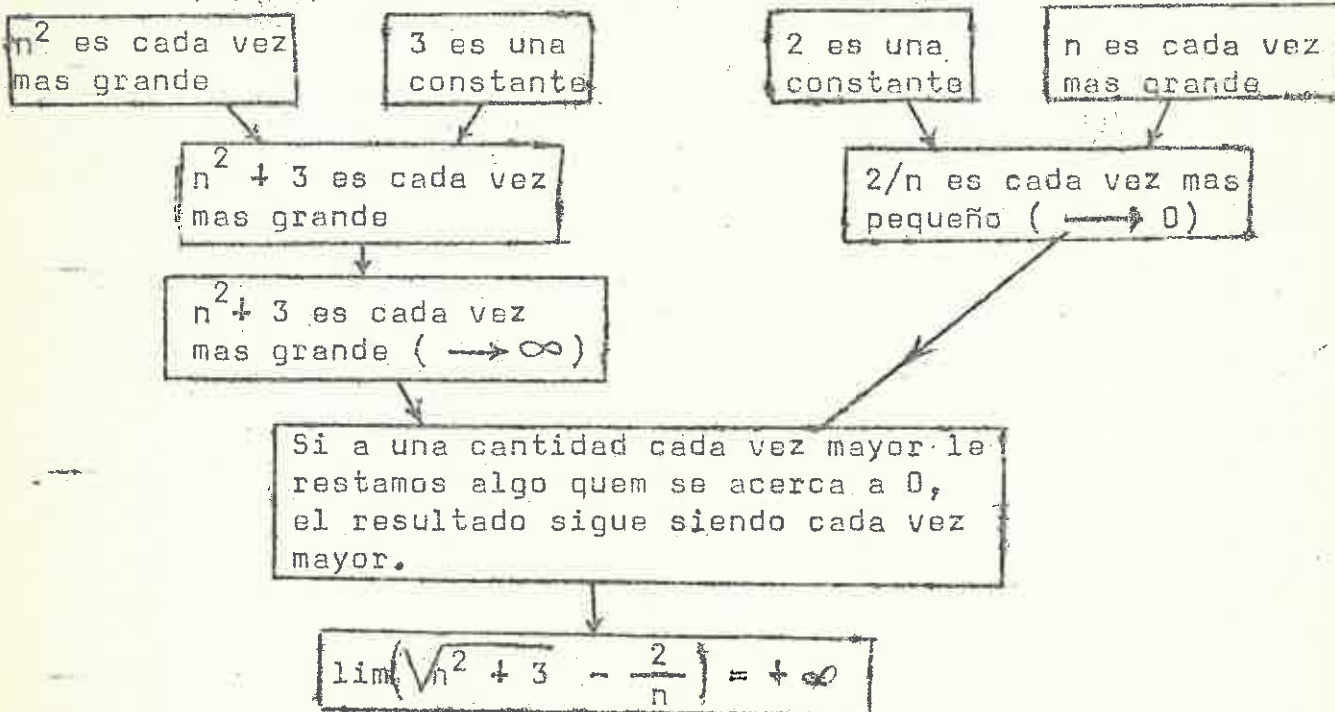
b) la sucesion es tal que hace falta conocer muchos terminos para darse cuenta de cual es el limite, p. ej. $a_n = \frac{2n+3}{4n-10}$

0.1. Ejercicio: escribe los 10 primeros terminos de la sucesion b). Primero en forma fraccionaria y despues (con la calculadora) pasalos a forma decimal. ¿Puedes decir cual es su limite? ¿Seria 0? Calcula $a_{1.000}$ y $a_{10.000}$. ¿Corroboran la suposicion anterior?

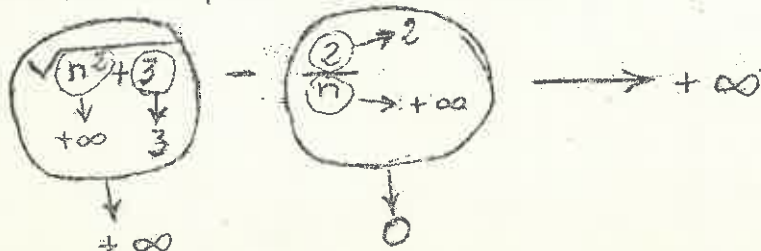
Vamos a estudiar en este epigrafe como se puede conocer el limite de una sucesion sin mas que observar cuidadosamente la forma del termino general a_n .

1. Calculo de limites.-

Fijate en el siguiente ejemplo: $a_n = \sqrt{n^2 + 3} - \frac{2}{n}$. Vamos a tratar de descomponer a_n en sucesiones mas sencillas de las que conozcamos el limite, y a partir de ellas el limite total.



Abreviadamente podriamos escribir



1.1. Ejercicio: Reproduce el razonamiento anterior (en la forma "Abreviada") para los siguientes casos:

$$a_n = \frac{2}{n^3} ; b_n = 2 + \frac{3}{n} ; c_n = \sqrt[3]{n-1} ; d_n = (-2)^n ; e_n = (0,3)^{3n} ;$$

$$f_n = (-0,4)^{n^2} ; g_n = 3^n ; h_n = n^3 + 2n^2 + 1 ; i_n = -7,3^{n+1} ;$$

$$j_n = -n^2 + \frac{4}{n} ; k_n = (5 - \frac{1}{n})^{n^3} ; r_n = 4^{1/n} ; s_n = (-1)^{2n} ; t_n = (-1)^{2n+1} ;$$

$$u_n = (-2)^{1/n}$$

1.2. Idem para los siguientes casos (observa que de muchas sucesiones parciales ya conoces el limite).

$$a_n = \frac{3 + \frac{4}{n}}{-2 + \frac{(-1)^n}{n}} ; b_n = (-2 + \frac{3}{n}) \cdot \frac{2}{n^2} ; c_n = (-\frac{1}{n} + 3)^{2 + \frac{8}{n}}$$

$$d_n = (0,5)^n (4 - \frac{3}{n^2 + 1}) ; e_n = (\frac{-5}{4n} - 3) \cdot 7n^2 ; f_n = (10 + 0,1^n)(\frac{2}{n} - 4)$$

1.3. Idem para los siguientes casos:

$$a_n = \frac{-\frac{2}{n} - 1}{(-0,2)^n} ; b_n = \frac{7 - \frac{3}{2n}}{-0,3^n} ; c_n = \frac{(-2)^n}{(0,7)^n} ; d_n = \frac{(-1)^n + 5}{4,1^n}$$

$$e_n = \frac{3 + \frac{2}{n+1}}{(-7,5)^n} ; f_n = \frac{\frac{4}{n^2} - 1}{-2,4^n} ; g_n = \frac{\frac{2}{n^3}}{(-1)^n + \frac{4}{2n+5}}$$

$$h_n = \frac{4n}{(-1)^n - \frac{1}{n}} ; k_n = \frac{-\frac{5}{n} + 1}{0,1^n}$$

1.4. De los ejercicios anteriores puedes sacar unas cuantas reglas sencillas:

a). $a_n \rightarrow 1$

$b_n \rightarrow 1 \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow ; a_n - b_n \rightarrow ; a_n \cdot b_n \rightarrow$

b). El cociente requiere un poco mas de cuidado:

$a_n \rightarrow 1$

$b_n \rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow a_n / b_n \rightarrow$

$a_n \rightarrow 1 \neq 0$

$b_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n / b_n \rightarrow$ (hay varios casos; recopila los ejemplos de este tipo y estudialos).

c). Para los casos en que una es divergente:

$a_n \rightarrow +\infty$

$a_n + b_n \rightarrow$

$b_n \rightarrow 1 \neq 0$

$a_n \cdot b_n \rightarrow$ (varios casos segun el signo de 1)

$a_n / b_n \rightarrow$ (idem)

$b_n / a_n \rightarrow$ (idem)

d). Para los casos en que las dos son divergentes:

$a_n \rightarrow +\infty$

$b_n \rightarrow +\infty$

$a_n + b_n \rightarrow$

$a_n \cdot b_n \rightarrow$

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow -\infty \\ b_n &\rightarrow -\infty \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_n + b_n &\rightarrow -\infty \\ a_n \cdot b_n &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow +\infty \\ b_n &\rightarrow -\infty \end{aligned} \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$$

Habrás notado que falta algún caso; por ejemplo si $a_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow 0$ $a_n/b_n \rightarrow ?$. Algunos de ellos los trataremos en los apartados siguientes.

1.5. Para los casos de la forma $a_n^{b_n}$ tampoco hay reglas generales. Busca entre los ejemplos anteriores las que sean de esa forma, y comprueba que los resultados dependen de a_n y b_n . En particular, si $\lim a_n$ es positivo ¿cuál es $\lim a_n^{b_n}$?

1.6. Ejercicio. Hemos encontrado algunos ejemplos curiosos: alguna (o ninguna) de las sucesiones parciales no tenía límite y sin embargo la total sí. ¿Puedes señalar cuáles en los ejercicios anteriores?

2. Indeterminaciones en sumas.-

2.1. Ejercicio. En 1º de BUP has visto la palabrea "indeterminacion". ¿En que parte de la asignatura? ¿A que se refiere? Revisa este concepto y apuntalo en el cuaderno.

2.2. Ejercicio. Escribe los 10 primeros terminos de la sucesion $a_n = 2^n$ y de la $b_n = n$. A partir de ellos escribe los 10 primeros terminos de la sucesion $a_n - b_n$. ¿Cuál es el limite de a_n , b_n y $a_n - b_n$?

2.3. Ejercicio. Idem con las sucesiones $a_n = 2n$ y $b_n = n^2$.

2.4. Ejercicio. Idem con las sucesiones $a_n = 2n+1$ y $b_n = 2n-1$.

2.5. Ejercicio. Idem con las sucesiones $a_n = n$ y $b_n = (-1)^n + n$.

A la vista de los resultados de los cuatro ultimos ejercicios: ¿puedes dar una regla general para el caso $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow +\infty$, $\Rightarrow a_n - b_n \rightarrow ?$.

Cuando se nos presenta una situacion como las anteriores, se dice que tenemos una "indeterminacion del tipo $+\infty - \infty$ ". Esto significa que del analisis del limite de los sumandos no podemos saber el limite del total: hace falta estudiar cada caso en concreto. (Observa que todo depende del sumando que diverja mas deprisa).

A veces podemos ayudarnos de una serie de trucos matematicos para "resolver la indeterminacion" sin necesidad de escribir los terminos de las sucesiones. se trata de transformar el termino general en otro (equivalente, por supuesto) en el que se vea facilmente el limite.

2.6. Ejercicio. $a_n = 2n^3 - 5n$. Comprueba que es del tipo anterior. Escribe a_n de otra manera. ¿Puedes calcular asi el limite?

2.7. Ejercicio. $a_n = -3n^2 + 2n - 5$. Idem.

2.8. Ejercicio. $a_n = -2n^5 + 100n^4 + 3.000n^3 + 5$. Idem.

2.9. Ejercicio. Es una generalizacion de los anteriores. Si el termino general es $a_n = c_p n^p + c_{p-1} n^{p-1} + \dots + c_1 n + c_0$ ¿cuál es el limite de a_n ?

Otro truco que se emplea para resolver los casos del tipo $a_n = \sqrt[n]{b_n} - \sqrt[n]{c_n}$, con b_n y $c_n \rightarrow +\infty$ es el del siguiente ejemplo:

$$a_n = \sqrt[n]{n^2 + 2} - \sqrt[n]{n^2 - 1} \quad \text{que, multiplicando y dividiendo por } \sqrt[n]{n^2 + 2} + \sqrt[n]{n^2 - 1},$$

$$\text{se transforma asi } a_n = \frac{(\sqrt[n]{n^2 + 2} - \sqrt[n]{n^2 - 1})(\sqrt[n]{n^2 + 2} + \sqrt[n]{n^2 - 1})}{\sqrt[n]{n^2 + 2} + \sqrt[n]{n^2 - 1}} =$$

$$\frac{n^2 + 2 - (n^2 - 1)}{\sqrt[n]{n^2 + 2} + \sqrt[n]{n^2 - 1}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n^2 + 2} + \sqrt[n]{n^2 - 1}}$$

$$\frac{n^2 + 2 - (n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{3}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}} \text{ y así } \lim a_n = \lim \frac{3}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}} = 0$$

2.10. Ejercicio. ¿Como se llama la expresion que hemos utilizado para multiplicar y dividir? Aparecia en 1º. ¿Para que se utilizaba entonces? Revisalo y apuntalo en el cuaderno.

3. Indeterminaciones en cocientes.-

3.1. Ejercicio. Escribe los 10 primeros terminos de las sucesiones $a_n = 3n$ y $b_n = 2n$. Escribe los 10 primeros terminos de la sucesion a_n/b_n . ¿Cuales son los limites de a_n , b_n y a_n/b_n ?

3.2. Ejercicio. Con los datos anteriores escribe los 10 primeros terminos de la sucesion b_n/a_n y di cual es su limite.

3.3. Ejercicio. Escribe 10 terminos de $a_n = 2n$, $b_n = n+1$ y a_n/b_n . ¿Cuales son los limites de a_n , b_n y a_n/b_n ?

3.4. Ejercicio. Idem con $a_n = 2n + (-1)^n \cdot n$ y $b_n = n$.

A la vista de los ejercicios anteriores ¿podrias dar una regla para calcular limites del tipo $\frac{a_n}{b_n}$ cuando a_n y $b_n \rightarrow +\infty$?

Vuelve a aparecer una indeterminacion que llamaremos " del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ".

3.5. Ejercicio. Comprueba que las expresiones " $\frac{\infty}{\infty}$ " y " $\frac{+\infty}{-\infty}$ " tambien son indeterminaciones, poniendo los ejemplos oportunos.

3.6. Ejercicio. Idem la " $0 \cdot (\pm\infty)$ " y " $\frac{0}{0}$ ".

Hay un tipo de sucesiones que aparecen con frecuencia y que dan lugar, al calcular su limite, a una indeterminacion " $\frac{\infty}{\infty}$ ". Son de la forma siguiente:

$$a_n = \frac{3n^3 - 2n + 1}{-5n^2 + 3}$$

$$b_n = \frac{7n^2 + 5}{n^4 - 2n^2 - 1}$$

$$c_n = \frac{2n^3 - 4n - 1}{-3n^3 + n^2 + 3}$$

3.7. Ejercicio. Compruebe que el limite de las anteriores sucesiones es una indeterminacion del tipo " $\frac{\infty}{\infty}$ ", especificando en cada caso de cual se trata.

3.8. Ejercicio. ¿Podrias escribir una "formula general" para las sucesiones del tipo de las anteriores? Observa que expresiones aparecen en el numerador y el denominador.

Veamos un artificio util para resolver estas indeterminaciones.

$a_n = \frac{3n^3 - 2n + 1}{-5n^2 + 3}$ grado de $3n^3 - 2n + 1 = 3$ Estogemos el menor de ellos 2 y dividimos numerador y denominador por n^2

$$a_n = \frac{\frac{3n^3 - 2n + 1}{n^2}}{\frac{-5n^2 + 3}{n^2}} = \frac{\frac{3n^3}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{-5n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}} = \frac{3n - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-5 + \frac{3}{n^2}} \text{ y así}$$

$$\lim a_n = \lim \frac{3n - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-5 + \frac{3}{n^2}} = -\infty$$

Diagram showing the limit process: $3n \rightarrow +\infty$, $-\frac{2}{n} \rightarrow 0$, $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, $-5 \rightarrow -5$, $\frac{3}{n^2} \rightarrow 0$.

- 3.9. Ejercicio. Utiliza este método para calcular los límites de las sucesiones b_n y c_n .
- 3.10. Ejercicio. Inventa tres expresiones del tipo anterior, y calcula su límite.
- 3.11. Ejercicio. ¿Observas alguna relación entre el límite que tienen estas sucesiones y los grados de los polinomios numerador y denominador? Haz un esquema con los resultados.
- 3.12. Ejercicio. Calcula $\lim (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})$ con las reglas estudiadas en el apartado 2. Observa que al final, sigue apareciendo una indeterminación $\frac{+\infty}{+\infty}$. Resuélvela dividiendo numerador y denominador por n .
- 3.13. Ejercicio. Idem. con $\lim (\sqrt{2n^2} - n)$

4.- Indeterminaciones en potencias.

- 4.1. Ejercicio. Sea $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Escribe los diez primeros términos de esta sucesión, efectuando previamente la operación del paréntesis. Con la calculadora, pásalos a expresión decimal.
- 4.2. Ejercicio. Idem con $b_n = (1 - 1/n)^n$.
- 4.3. Ejercicio. " " $c_n = (1 + 1/n)^{n^2}$.
- 4.4. Ejercicio. ¿ Pueden tener el mismo límite las sucesiones de los ejercicios anteriores? Razona por qué. Sin embargo, comprueba que las tres b_n y los tres exponentes tienen el mismo límite. ¿ Cuáles son ?

Estamos ante otro importante tipo de indeterminación, de la forma " 1^∞ ". Para resolverlas en algunos casos, podemos ayudarnos de una sucesión muy importante, que es la que aparece en el ejercicio 4.1, cuyo límite se conoce desde hace mucho tiempo, y es el famoso número " e ". Es un número irracional, y vale:

$$e = 2,718281828459045 \dots$$

- 4.5. Ejercicio. Explica por qué aparecen puntos suspensivos después de la última cifra decimal.
- 4.6. Ejercicio. Los términos que has calculado en el ejercicio 4.1 no parece que se acerquen demasiado a e . Calcula términos muy avanzados, por ejemplo el a_{1000} , $a_{50.000}$, a_{10^6} , a_{10^9} . ¿ Se van acercando a e ?

Partiendo de que $e = \lim (1 + 1/n)^n$, podemos resolver muchas indeterminaciones del tipo " 1^∞ ", transformando previamente las expresiones del término general.

- 4.7. Ejercicio. Calcula $\lim (1 + 1/n)^{2n}$. Previamente, transforma la expresión del término general en otra en la que aparezca la sucesión "fundamental" (la del número e).

8. Ejercicio. Idem. $\lim (1 + 1/n)^{-n}$.
9. Ejercicio. " $\lim (1 + 1/n)^{7n}$; $\lim (1 + 1/n)^{-3n}$
10. Ejercicio. Como resumen de lo anterior, calcula $\lim (1 + 1/n)^{an}$, siendo a una constante.
11. Ejercicio. Calcula $\lim (1 + 1/n)^{n^2}$.
12. Ejercicio. Calcula $\lim (1 + 1/n)^{n+3}$ y $\lim (1 + 1/n)^{n-4}$, transformando previamente las sucesiones en otras en las que aparezca la fundamental.
13. Idem. $\lim (1 + 1/n)^{3n+5}$; $\lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-4n+7}$
14. Ejercicio. Como resumen de los ejercicios anteriores, calcula $\lim (1 + 1/n)^{an+b}$, siendo a y b constantes.
15. Ejercicio. Escribe 5 términos de la sucesión $b_n = (1 + \frac{1}{n+2})^{n+2}$. Comparalos con la $a_n = (1 + 1/n)^n$. ¿Tienen el mismo límite?
16. Ejercicio. Razona la relación que hay entre la sucesión $(1 + \frac{1}{n+k})^{n+k}$ y la $(1 + 1/n)^n$. ¿Tienen el mismo límite?

Utilizamos el ejercicio anterior para calcular límites del siguiente tipo:

$$\lim (1 + \frac{1}{n+3})^n = \lim (1 + \frac{1}{n+3})^{n+3-3} = \lim (1 + \frac{1}{n+3})^{n+3} \cdot (1 + \frac{1}{n+3})^{-3}$$

$$e \cdot 1 = e.$$

17. Ejercicio. Repite el truco anterior para calcular $\lim (1 + \frac{1}{n-2})^n$

18. Ejercicio. Idem para $(\frac{n+3}{n+2})^n$.

19. Ejercicio. Como resumen de los ejercicios anteriores, calcula $\lim (1 + \frac{1}{n+a})^n$, siendo a una constante.

Estamos en condiciones de estudiar el límite de otra sucesión importante, de la cual conocemos algunos términos (ejemplo 4.2): $a_n = (1 - 1/n)^n$.

Fíjate en las siguientes transformaciones:

$$(1 - 1/n)^n = \left(\frac{n-1}{n} \right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}} \right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1} \right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1} \right)^n} =$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n}.$$

Entonces, según lo visto antes,

$$\lim (1 - 1/n)^n = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n} = 1/e = e^{-1} = 0,367879441 \dots$$

- Ejercicio. Calcula $\lim \left(\frac{n-1}{n} \right)^{3n}$

21. Ejercicio. " $\lim (1 - 1/n)^{-2n}$

22. Ejercicio. " $\lim (1 - 1/n)^{n^2}$

23. Ejercicio. " $\lim \left(\frac{n-3}{n-2} \right)^n$

Veamos otros casos importantes que pueden resolverse a partir de la sucesión fundamental.

4.24. Ejercicio. Escribe cinco términos de la sucesión $(1 + 1/2n)^{2n}$.
 Compara los con la sucesión fundamental. ¿Tendrán el mismo límite ambas sucesiones?

4.25. Ejercicio. Idem con la $(1 + 2/n)^{n/2} = \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}$

4.26. Ejercicio. ¿Qué límite tienen las sucesiones de la forma $(1 + 1/hn)^{hn}$.
 A partir de esto, podemos calcular límites del siguiente tipo:

$$\lim (1 + 1/3n)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n \cdot 1/3} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{1/3} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$$

$$\lim (1 + 5/n)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n/5}\right)^{n/5 \cdot 5} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n/5}\right)^{n/5}\right]^5 = e^5$$

4.27. Ejercicio. Calcula $\lim (1 + 3/n)^{2n}$

4.28. Ejercicio. " $\lim (1 + 7/n)^{3n}$

4.29. Ejercicio. " $\lim (1 + 1/n^2)^{2n}$

4.30. Ejercicio. " $\lim (1 + 3/4n)^n$

De todos los ejemplos anteriores podemos sacar una conclusión:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{cuando } a_n \longrightarrow +\infty$$

Esto nos permite calcular rápidamente límites del tipo " $1^{+\infty}$ " como el siguiente:

$$\begin{aligned} \lim \left(1 + \frac{3}{2n-5}\right)^{\frac{4n-2}{3}} &= \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{2n-5}{3}}\right)^{\frac{4n-2}{3}} = \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{2n-5}{3} \cdot \frac{3}{2n-5}}\right)^{\frac{4n-2}{3} \cdot \frac{3}{2n-5}} \\ &= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n-5}{3}}\right)^{\frac{2n-5}{3}}\right]^{\frac{3}{2n-5} \cdot \frac{4n-2}{3}} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n-5}{3}}\right)^{\frac{2n-5}{3}}\right]^{\frac{4n-2}{2n-5}} \\ &= e^2 \end{aligned}$$

4.31. Ejercicio. Calcula $\lim \left(1 + \frac{12}{n^2 - 1}\right)^{3n+2}$

4.32. Ejercicio. " $\lim \left(1 - \frac{4n}{2n^3 + 3}\right)^{n^2}$

A. CONCEPTE DE NOMBRE ENTER

A.1. El nombre enter com a expressió d'una variació

Uns problemes massa fàcils?

1. A l'hora del pati en Joan i en Pere juguen a bales:

- a) En Joan en tenia 5 en iniciar el joc i al final de les partides en té 8. Què ha passat?
- b) En Pere al començament en tenia 7 i quan acaben de jugar en té 4. Com ho expliques?

2. En un dia de tardor hem trobat les següents informacions meteorològiques referents a Barcelona ciutat:

Temperatura a les 6 hores: 80 °C.

Temperatura a les 17 hores: 15 °C.

Temperatura a les 22 hores: 10 °C.

a) Què ha succeït entre les 6 hores i les 17 hores?

b) I entre les 17 hores i les 22 hores?

3. El cinc de gener la Maria compta els diners que té a la seva guardiola, en total: 345 ptes.

a) El dia de Reis els seus avis li posen diners a la guardiola. Torna a comptar los i té 845 ptes. Quants diners li han regalat?

b) El dia següent, el 7 de gener, la Maria compra uns llaips de còlors amb els seus estalvis. Després només li queden 460 ptes. Quant li ha costat la capsa de llaips?

4. L'Ajuntament de Barcelona té un edifici molt alt que dona a la plaça Sant Miquel, molt a prop de la plaça Sant Jaume. Mira un mapa de Barcelona si no saps on està situat.

El senyor Puig vol saber si pot traslladar el seu taller a un terreny que té al Guinardó. Per això va a l'Ajuntament i puja al 2on pis on hi ha la Delegació d'Informació. Allà li diuen que ha d'anar al 8è pis i consultar el Servei d'Indústries Particulars.

a) Quants pisos haurà de pujar?

Finalment l'envien al 5è pis a consultar el mapa de la Ciutat.

b) Quants pisos haurà baixat?

Problema de Recapitulació:

Completa les frases següents, tenint en compte que es refereixen als problemes que ja has fet:

Problema 1:

a) La variació de bales d'en Joan ha estat de: + 3

b) La variació de bales d'en Pere ha estat de:

Problema 2:

a) Entre les 6 i les 17 hores la variació de temperatura ha estat de:

b) Entre les 17 i ...

Problema 3:

a) El dia 6 de gener ...

b) El dia 7 de gener ...

Problema 4:

a) Quan el senyor Puig ...

b) Quan el senyor Puig ...

5. Un problema sobre l'avió Concorde.

El Concorde, del qual tornarem a parlar una mica més endavant, és un avió supersònic. Digue's què en saps.

Ens referitem ara a la velocitat d'aquest avió, que segons el moment de vol pot ser:

1.000 km/h quan va en règim subsònic.

2.150 km/h quan va en règim supersònic.

Sabent que la velocitat de transmissió del so és 1.220 km/h:

a) Calculeu la variació de velocitat d'un Concorde que passa de la velocitat supersònica a la velocitat subsònica.

b) La mateixa pregunta quan passa de la velocitat subsònica a la velocitat del so.

A.3. El nombre enter com a expressió d'un estat

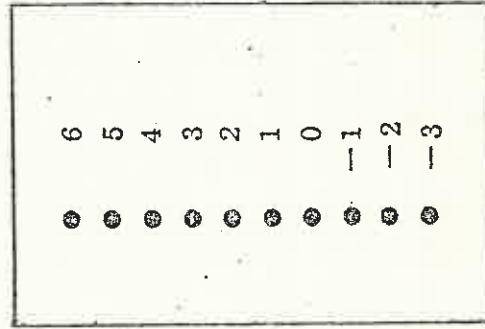
Problemes d'abans i després de zero

7. Vet aquí dos tipus de termòmetres que segurament coneixes:

- Saps per què serveix cada un d'ells?
- Saps com funcionen?
- Quina és la temperatura normal del cos humà? I la temperatura aproximada d'un tros de gel?
- Explica la diferència que veus entre aquests dos termòmetres.
- Què significa si veiem en el termòmetre ~~X~~ les temperatures: -5° , -10° , -15° ?

- a) Dibuixa termòmetre mèdic.
b) Dibuixa termòmetre meteorològic.

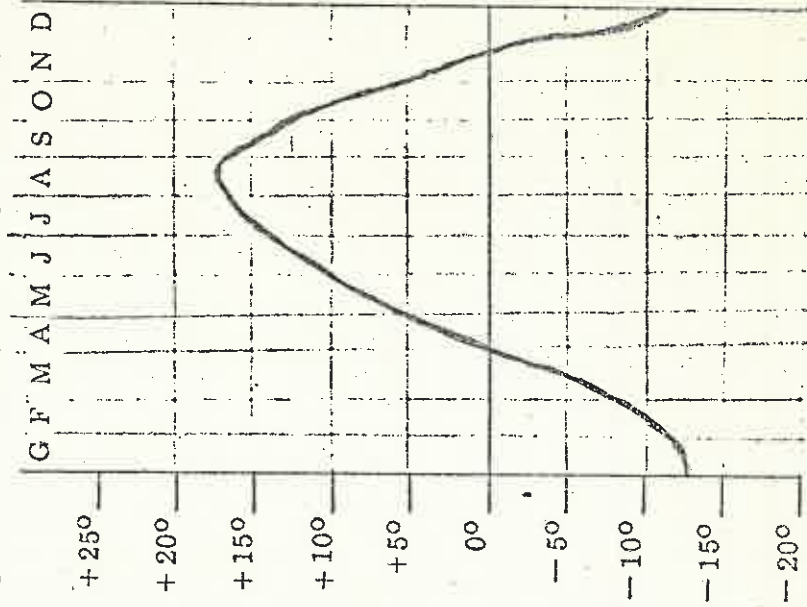
9. Aquesta és la reproducció de la placa d'un ascensor d'uns grans magatzems. Què signifiquen cada un dels nombres que hi veus?



8. Hem trobat la gràfica següent en un atlas. Ens descriu la temperatura anual a la ciutat de Quebec (Canada). Mira en un mapa on es troba Quebec.

Digues quines temperatures corresponen als moments següents (aproximadament)

- al mes de gener
- a primers del mes d'abril
- a primers del mes de juny
- a finals del mes de setembre
- què pots dir de la temperatura a partir de mitg novembre?



Quan la temperatura està per sobre de 0° es diu que és positiva i quan està per sota de zero graus es diu que és negativa. Digues en quins mesos és positiva i en quins és negativa.

B.1. Addició de nombres enters

Els problemes treballats fins ara no tenen gaire dificultat, però de vegades poden plantejar-se situacions més complexes com la següent:

En un anunci d'una revista hem pogut llegir:

“QUANVIAR TEMPS AJ. TEMPS VOLANT AMB EL CONCORDE”

“Sortint de París a les 10 hores del matí arribi a Nova York a les 7 hores del matí del mateix dia”.

El que ja no diu l'anunci és que a la tornada, surt de Nova York a les 19 hores i no arriba a París fins a les 4 hores de la matinada de l'endemà. Si en realitat triga el mateix temps a l'anada que a la tornada, quina és la duració del vol?

Per poder resoldre aquest problema caldrà estudiar abans les operacions que es poden fer amb els nombres enters. Començarem per l'addició.

20. a) Aquest matí el termòmetre marcava 17° i a continuació la temperatura ha pujat 4°. Què marca ara el termòmetre?

b) Abans de la partida tenia 6 bales. En guanyo 3. Quantes en tinc?

c) Érem al segon pis de l'Ajuntament i hem pujat 6 pisos. A quin pis hem anat?

Observa: En aquestes tres preguntes teníem un estat inicial (el del començament) i s'ha produït una variació. Hem calculat l'estat final. Recollim el que hem fet en el quadre següent:

	Estat inicial	a continuació	variació	estat final
a)	+17°	+	+4°	=+21°
b)	+6 bales	+	+3 bales	=+9 bales
c)	+2 (pis)	+	+6 pisos	=+8 (pis)

Observa que aquestes tres sumes es fan de la mateixa manera que amb nombres naturals. Ara veuràs uns casos de sumes molt estranys:

21. Ara la variació és negativa.

a) Tinc 7 bales i en perdo 4. Quantes me'n queden?

b) Aquest migdia feia 23° i la temperatura ha baixat 5° durant la tarda. Quina temperatura fa al vespre? Representa gràficament aquest problema.

c) Som al 8è pis d'uns grans magatzems mirant joguines i baixem 1 pisos per comprar uns mitjons. A quina planta anem? Representa gràficament aquest problema.

d) Seguim en els grans magatzems: ôrem a la 2ª planta i baixem 4 pisos. A quina planta som? Representa-ho gràficament.

e) Aquesta nit ha fet molt fred: ahir el termòmetre marcava 3° i baixat 5°. Què marca ara? Representa-ho gràficament.

f) En un compte-corrent el saldo és de 2.000 ptes i arriba una retura de 3.000 ptes. Quin serà el saldo?

	Estat inicial	a continuació	variació	Estat final
a	+7	+	-4	=+3
b				
c				
d	+2	+	-4	=
e				
f				

Totes les operacions que has fet són ADDICIONS de nombres enters.

23. Ara l'estat inicial és negatiu:

a) Som a la planta -1 d'un magatzem comprant un retrovisor per al cotxe; baixem 2 pisos per arribar al pàrking; a quina planta teníem el cotxe?

b) A la Seu d'Urgell feia -7° el dia de Nadal i la temperatura va pujar 3° l'endemà. Quina va ser la temperatura per Sant Esteve?

c) En Carles deu 25 ptes. a en Ramon i com que no troba la targeta d'abonament de l'autobús li demana 15 ptes. més. Quants diners podem dir que té en Carles?

d) Fes un quadre semblant als que vam fer en els problemes 20 i 21:

B.2. Substracció de nombres enters

Abans d'estudiar la substracció de nombres enters val la pena recordar que l'operació substracció de nombres naturals molt sovint no es pot fer. Efectivament, no hi ha cap nombre natural que sigui solució d'una substracció del tipus: $5 - 7$. En aquest capítol veuràs que els nombres enters tenen un avantatge sobre els nombres naturals: sempre es poden sostreure.

31. Al barri de Manhattan de Nova York hi ha un edifici molt famós, l'"Empire State Building" (construït l'any 1931), que té una altura de 448 metres. Té 102 pisos i està enterament dedicat a oficines.

- a) Quan una persona que treballa al pis 46^è ha d'anar al 89^è, quants pisos puja? Escriu l'operació que fas.
- b) Imagina ara que un senyor va del 95^è pis al 37^è, Quants pisos baixa? Escriu l'operació que has fet.

Observa: Tant en la pregunta a) com en la b) el que has fet ha estat calcular una pujada o una baixada, o sigui una variació. Els pisos són estats positius que podem representar en la forma:

- pis 46^è = + 46
- pis 89^è = + 89
- pis 95^è = + 95
- pis 37^è = + 37

Aleshores, quan calculem una variació, el que farem d'ara endavant serà:

Estat final - Estat inicial = Variació

i d'això se'n diu SUBTRACCIÓ de nombres enters.

En el cas del problema:

	Estat final = pis on arriba	Estat inicial = pis d'on surt	Variació
a	(+89)	(+46)	= (+43) ha pujat, o sigui que la variació es positiva
b	(+37)	(+95)	= (-58) ha baixat, per tant la variació és negativa

36. L'any 465 a.C. va caure a Egos Potamos un gran meteorit i l'any 1809 en va caure un altre a Orne (França). Informa't de què és un meteorit.

- a) Posa aquests anys i l'actual en forma de nombres enters.
- b) Calcula quants anys van transcórrer entre aquests dos meteorits i escriu el resultat en forma:

variació = estat final - estat inicial

- c) Fes el mateix per calcular quants anys han passat entre el primer meteorit i l'any actual.

37. Tothom sap que els tres estats de la matèria són: el sòlid, el líquid i el gasós. També deus saber que la temperatura de 0° és la temperatura de fusió del gel o sigui la temperatura a la qual passa d'estat sòlid a estat líquid (aigua). La temperatura de 100° és la temperatura d'ebullició de l'aigua o sigui la temperatura a la qual l'aigua passa de l'estat líquid a l'estat gasós (vapor d'aigua). Doncs bé, totes les substàncies tenen una temperatura de fusió i una temperatura d'ebullició característiques. Hem recollit tres casos interessants:

substàncies	temperatura de fusió	temperatura d'ebullició
Mercuri	-39°	+357°
Alcohol	-114°	+78°
Oxigen	-219°	-183°

- a) Mercuri: què li passarà a un termòmetre de mercuri si l'exposem a una temperatura menor de (-39°)? Calcula quants graus ha de pujar la temperatura d'una mostra de mercuri en estat sòlid a -39°, si volem que arribi a la temperatura d'ebullició?
- b) Alcohol: tenim alcohol a la temperatura normal (20°) i el volem solidificar a base de refredar-lo. Quants graus ha de baixar la temperatura? (pensa quins són els estats final i inicial).
- c) Oxigen: Quant ha de pujar la temperatura d'una mostra d'oxigen en estat sòlid a -225° si volem que recuperi l'estat normal?

Treballarem amb un exemple que ens permetrà fer un repàs de tots els casos de multiplicació de nombres enters.

El nostre exemple es basa en el paral·lelisme que hi ha entre la navegació aèria d'una avioneta i la navegació marítima d'un submarí.

Cal recordar que:

—L'avioneta es mou per sobre el nivell del mar, en dirèm alçada,(+)

—El submarí es mou per sota el nivell del mar, en dirèm fondària(—)

ambdós podenguanyar(+), o perdre (—) alçada/fondària.

Descripció de la situació:

1.ª fase: —L'avioneta surt per fer un vol de reconeixement visual, perquè sap que hi ha un submarí que està costejant i vol mirar de localitzar-ho. Aixeca el vol i guanya alçada durant 20 segons; sabem que a cada segon puja 30 metres.

A quina alçada es col·locarà?

— El submarí inicia la navegació inspeccionant amb el seu periscopi, guanya fondària durant 2 minuts, sabem que a cada minut baixa 3 metres.

A quina fondària es col·locarà?

2.ª fase: — L'avioneta no obté cap resultat de la seva inspecció ocular : decideix treballar amb el sonar; durant 80 segons guanya alçada.

Quanta alçada guanyarà?

A quina alçada es situarà?

— El submarí ha vist la maniobra de l'avioneta i, per evitar esser detectat, guanya fondària durant 8 minuts.

Quanta fondària guanya?

A quina fondària es situarà?

3.ª fase: — L'avioneta troba un clot en l'aire i de sobte perd alçada durant 3 segons, a una mitja de 50 m cada segon.

Quanta alçada ha perdut?

A quina alçada es situarà?

— Mentre el submarí, per una distracció dels homes que comanden els aparells de navegació, afluixa llast i, de sobte, perd fondària durant 3 minuts, a una mitjana de 5 m cada minut. Què vol dir perdre fondària?

Quanta fondària perd?

A quina fondària es situarà? Què has fet per calcular-la?

1. Un termòmetre de màxima-mínima, assenyalà a Girona, el dia 7 de gener, 11º C. de màxima i -- 5º C. de mínima.

a) Quina diferència de temperatura es va registrar aquell dia? La variació va ser positiva o negativa?

b) Si un altre dia la màxima va ser la mateixa, i la diferència va ser de 14º, quina va ser la temperatura mínima?

2. Un pintor es troba al mig d'una escala. Baixa 4 barrots, després en puja 3 i després en baixa encara 5 més; així arriba a l'últim barrot de l'escala. Quants barrots té aquesta escala? (Resol el problema gràficament i numèricament explicant les operacions que fas).

3. L'estat de comptes d'un compte corrent d'un Banc o d'una Caixa d'estalvis és un full de paper on s'identifiquen els pagaments i els cobraments que s'han efectuat. Aquest n'és un exemple:

DATA	CONCEPTE	IMPOSICIO	REEMBOSSAMENT	SALDO
17 — 11	Electricitat		2.930	93.672
20 — 11	Reembossament		104.550	— 10.878
21 — 11	Op. Bancària	20.000		
24 — 11	Aigua		753	8.369
29 — 11	Op. Bancària			48.369

Busca el significat de les paraules d'aquest estat de comptes.

- a) Calcula el saldo anterior al dia 17 de novembre.
- b) Què succeeix després del reembossament del dia 20 de novembre?
- c) Quin serà el saldo de l'endemà, després de l'operació bancària feta aquell dia?
- d) Quina ha estat la imposició feta el dia 29 de Novembre?
- e) Si volguessis posar les columnes "imposició, reembossament" en una única columna, com distingiries les quantitats de cada columna?

4 unidades

Matemática 7º Nivel.Toma 2:ADICION en Z
=====1.- Adición en Z.

Vamos a considerar tres posibilidades:

- 1º) Adición de dos enteros positivos.
- 2º) Adición de dos enteros negativos.
- 3º) Adición un positivo y un negativo (o viceversa).

1.1) Adición de dos enteros positivos.

1.1.1) Juanita tiene + 600 ptas. consigue un obsequio de + 100 ptas.

¿Qué dinero tendrá ahora?

Dinero =

Luego: $(+ 600) + (+ 100) =$ O abreviadamente: $600 + 100 =$

1.1.2) El termómetro marcaba hace unas horas + 12º C; si ha habido desde entonces una variación de + 3º C. ¿Cuál será la temperatura actual?

t =

Luego: $(+ 12) + (+ 3) =$ O abreviadamente: $12 + 3 =$

1.1.3) No es necesario seguir pensando para afirmar que:

La suma de dos números enteros positivos se obtiene de forma que si fuesen naturales.

Dicho de otra forma:

La suma de dos enteros positivos es otro entero
 cuyo valor absoluto es la suma de valores absolutos.

Ej.: $(+ 6) + (+ 18) = + 24$

6 6 + 18 = 24

1.2) Adición de dos enteros negativos.

& 1.2.1) Araceli tiene en su cuenta corriente un saldo de - 2.000 ptas.

Le cargan un recibo de quinientas ptas. (- 500 ptas). ¿Cuál será su saldo actual?

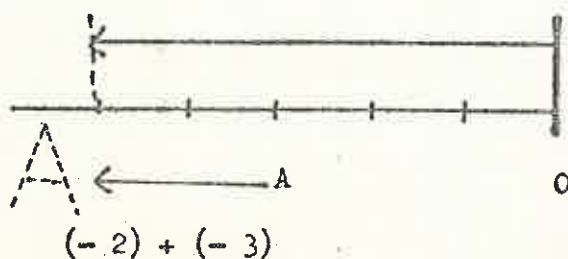
Saldo =

$(- 2.000) + (- 500) = \dots \dots \dots$ ptas.

& 1.2.2) Un móvil A se encuentra en el punto - 3; se desplaza - 2

(dos a la). ¿En qué punto se encontrará?

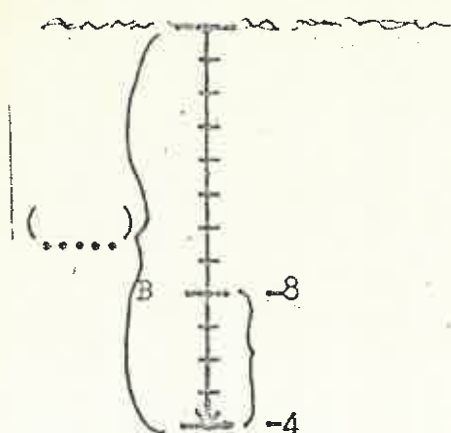
(.....)



Luego:

$(- 2) + (- 3) = \dots \dots \dots$

- & 1.2.3) Un submarinista B se encuentra a ocho metros bajo la superficie del mar (- 8 m). Desciende cuatro metros más (- 4 m). ¿Cuál será su posición ahora con respecto a la superficie?

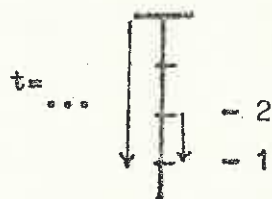


Posición = $(- 8 \text{ m}) + (- 4 \text{ m}) = \dots\dots\dots$

Luego:

$(- 8 \text{ m}) + (- 4 \text{ m}) = \dots\dots\dots$

- & 1.2.4) Un termómetro marcaba hace 4 horas - 2º C. Si la temperatura ha sufrido desde entonces una variación de - 1º C. ¿Cuál será la temperatura actual? $t = \dots\dots\dots$



Luego: $(- 2) + (- 1) = \dots\dots\dots$

- 1.2.5) Observando los cuatro ejercicios precedentes, y otros muchos similares en los que tú podrías pensar, trata de dar una regla de cálculo para hallar la suma de dos enteros negativos.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- & 1.2.6) En la puesta en común comentaremos la regla que tú has dado;
a mí se me ocurre ésta:

La suma de dos negativos es otro
cuyo valor absoluto es la suma de los valores absolutos
de los sumandos.

Ejemplo:

$$(-4) + (-5) = -9$$

$$(-250) + (-50) = -300$$

Nota: Para evitar confusión los sumandos negativos los
pondremos entre paréntesis por ahora.

- & 1.2.7) Realiza las siguientes adiciones:

$$\begin{array}{ll} (-9) + (-2) = \dots\dots\dots, & (-1) + (-1) = \dots\dots\dots \\ (-38) + (-45) = \dots\dots\dots, & (-3) + (-7) = \dots\dots\dots \end{array}$$

- & 1.2.8) Calcula: $[(-32) + (-19)] + (-8) = \dots\dots\dots$

- & 1.2.9) Halla la siguiente suma:

$$\begin{array}{l} [(-3.956) + (2.706)] + (-319) = \\ = \dots\dots\dots + (-319) = \dots\dots\dots \end{array}$$

- & 1.2.10) Calcula: $(-235) + (-806) + (-34) + (-16) = \dots\dots\dots$

1.3) Adición de dos enteros de distinto signo. (Positivo más negativo, o negativo más positivo).

& 1.3.1) Andrés tenía en su cuenta corriente un saldo de - 500 ptas. Recibe un ingreso de setecientas (+ 700) pesetas. ¿Cuál será ahora su saldo?

Luego:

$$(- 500) + (+ 700) =$$

& 1.3.2) Mariela tenía en su c. c. (cuenta corriente) un saldo positivo de seis mil ptas. cuando le fue cargada una factura de ocho mil pesetas. ¿Cuál será ahora su saldo?

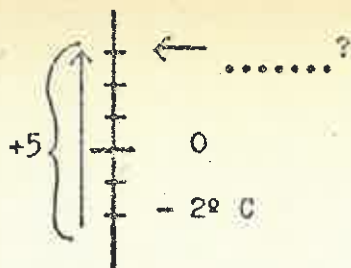
Luego:

$$(.) + (.) =$$

& 1.3.3) Pensando que los sumandos positivos son ingresos y que los negativos son deducciones, calcula las variaciones que tendrían lugar en cada una de las siguientes operaciones:

$(+ 3.000) + (- 2.000) =$
$(+ 5.000) + (- 6.000) =$
$(- 4.900) + (+ 5.000) =$
$(-10.000) + (7.000) =$
$(+ 6.000) + (- 6.000) =$

& 1.3.4)



Si desde que el termómetro marcaba dos grados bajo cero ha experimentado una variación de + 5° C. ¿Qué temperatura marcará ahora?

Luego:

$$(-2) + (+5) = \dots\dots\dots$$

& 1.3.5)

Observando los ejercicios precedentes muy bien dime qué regla de cálculo darías tú para hallar rápidamente la suma de dos números enteros de distinto signo. PIENSALO y FIJATE MUY BIEN; puedes hacerlo en equipo.

.....

En la puesta en común la comentaremos. Ahora te pido que tú completes la regla que a mí se me ocurre:

& 1.3.6)

Regla: La SUMA de dos números ENTEROS de DISTINTO SIGNO es otro número ENTERO, cuyo SIGNO es el que corresponde al SUMANDO MAYOR en VALOR ABSOLUTO y cuyo VALOR ABSOLUTO es la de los VALORES ABSOLUTOS.

Ejemplos: Calculemos: $(-12) + (+10) =$

En valor absoluto: $|-12| > |10| \implies$ tomemos signo -

La diferencia $|-12| - |10| = 12 - 10 = 2$

Por tanto: $(-12) + (+10) = -2$

Ejemplos: $(-30) + (+40) = +10$

$(+50) + (-70) = -20$

Nota: Por supuesto que para calcular la diferencia de valores absolutos, el mayor valor absoluto siempre es el minuendo.

Ejemplo: $(-30) + (+50) = +20$

$$\begin{array}{r} 50 \\ - 30 \\ \hline 20 \end{array}$$

$(+10) + (-35) = -25$

$$\begin{array}{r} 35 \\ - 10 \\ \hline 25 \end{array}$$

& 1.3.7) Teniendo en cuenta la regla anterior efectúa rápidamente las siguientes adiciones:

$(+350) + (-300) = \dots\dots\dots$

$(-350) + (+300) = \dots\dots\dots$

& 1.3.8) Halla las siguientes sumas:

$(+38) + (-40) = \dots\dots\dots$

$(+52) + (-50) = \dots\dots\dots$

$(-15) + (+6) = \dots\dots\dots$

$(-100) + (+150) = \dots\dots\dots$

& 1.3.9) Calcula:

$(+12.716) + (-30.144) = \dots\dots\dots$

$(-687.139) + (+199.586) = \dots\dots\dots$

1.3.10) ESTUDIA todo lo ya trabajado hasta aquí de este tema.

& 1.3.11) Completa la siguiente

C

R E G L A

• La SUMA de dos ENTEROS del MISMO SIGNO es un

ENTERO con

Signo: el mismo de los sumandos.

y

Valor absoluto: suma de valores absolutos

Ejemplos:

$$(+ 20) + (+ 5) = + 25$$

$$(- 30) + (- 6) = - 36$$

• La SUMA de dos ENTEROS de DISTINTO SIGNO es un

ENTERO con

Signo: el correspondiente al sumando
de mayor

y

Valor absoluto: la
de valores absolutos.

Ejemplos:

$$(- 38) + (+ 30) =$$

$$(+ 10) + (- 8) =$$

1.3.12) ESTUDIA la regla anterior.

& 1.3.13) Teniendo presente la regla anterior efectúa las siguientes adiciones:

$$(+ 12) + (+ 30) = \dots\dots\dots$$

$$(- 43) + (- 7) = \dots\dots\dots$$

$$(- 50) + (+ 40) = \dots\dots\dots$$

$$(+100) + (- 93) = \dots\dots\dots$$

& 1.3.14) Efectúa:

$$(+ 34.186) + (+ 50.194) = \dots\dots\dots$$

$$(- 80.159) + (- 38.100) = \dots\dots\dots$$

$$(+500.000) + (-609.381) = \dots\dots\dots$$

$$(-406.111) + (-35.184) = \dots\dots\dots$$

$$(-1.609.300) + (+2.050.380) = \dots\dots\dots$$

& 1.3.15) Efectúa "paso a paso":

$$[(+ 5) + (+ 6)] + (- 11) = \dots\dots\dots$$

$$(- 17) + [(- 5) + (+ 20)] = \dots\dots\dots$$

& 1.3.16) Calcula "paso a paso":

(Nota: Suprimimos los signos + de positivo).

$$[8 + (- 20)] + [(- 50) + 4] = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$(0 + 15 + 3) + (- 18) = \dots\dots\dots$$

