"thales"

sociedad andaluza de profesores de matemàticas

ACTAS IIª JORNADAS MATEMATICAS

TOMO I

ACTAS

# II jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas

tomo I

abril 1982

sevilla

## INDICE


Prólogo ..... 5
Relación de asistentes ..... 7
Conferencias y Comité Organizador ..... 21
Resultados de la Encuesta sobre valoración de las Jornadas ..... 22
Comunicado de clausura ..... 25
Resúmenes de las Conferencias pronunciadas por los Profesores:
E. Castelnuovo ..... 27
M. Glaymann ..... 35
P. Llorente ..... 41
Relación de Ponentes con indicación de las Ponencias presetadas ..... 49
Resúmenes de Ponencias ..... 51
Ponencias; *Estudio de las posibilidades gráficas de los Microordenadores standard*
Agustin Blanco Ruiz, Grupo 2001 ..... 67
*Introducción inductiva a algunos conceptos fundamentales de la Estadistica*
A. Blanco (Grupo 2001) y B. Compostela ..... 93
*Si Arquimedes hubiera tenido calculadora*
R. Aguado, A. Blanco, R. Zamarreño (Grupo 2001) ..... 109
*Las Urnas ¿están predestinadas?*
R. Aguado, A. Blanco, (Grupo 2001) ..... 119
*El Microcomputador para recuperación individual del alumno.- Tema: La Parábola*
E. Rubiales Camino ..... 133
*Una introducción al concepto de Algoritmo y estructura general del ordenador en los niveles de Bachillerato*
Blas Carlos Ruiz Jimenez ..... 143
*Las máquinas de calcular y el aprendizaje del cálculo mental*
J.M. Yábar Madinabeitia ..... 171
*La informática como E.A.T.P. en el Bachillerato*
J. Miguel Molina, J.M. Menendez, M. González ..... 181
*Notas didácticas sobre geometría: una introducción a V² con un apoyo prático*
J. Miguel Molina ..... 197
*Geometría Afín*
Vicens Font, F. Moreno ..... 207
*Una introducción a la geometría Euclidea*
M. González, Carlos Barrios, J.M. Molina ..... 235
*La Geometría Afín del Plano*
M. González, R. Hernández ..... 251
*Ensayo de educación personalizada en Matemáticas*
M. Cobarro (Grupo Indima) ..... 279
*El Seminario de didáctica del I.C.E. como medio de perfeccionamiento didáctico e innovaciones*
M. Cobarro ..... 309
*Recursos Metodológicos*
Grupo Zero.- Barcelona ..... 317
*Fichas Semiprogramadas en la enseñanza del Algebra en primero de B.U.P.*
Pablo Flores Martinez ..... 319
*Las transparencias en clase de Matematicas*
Grupo Zero.- Barcelona ..... 367

*Limite de Sucesiones*
Marti Casadevall, Joan Estafanell (Grupo Zero) ..... 369
*Introducción al número "e" (un ejemplo del uso de la historia)*
J.M. Martinez Blanco ..... 383
*Algunos problemas didacticos de las matematicas en primer ciclo universitario con algunos repetidores*
Eugenio Fedriani Martin ..... 393
*Como hemos trabajado en 1º B.U.P. este curso 81-82 utilizando el material elaborado por el Grupo Zero*
Carlos Llarot Casablanca ..... 407

# P R O L O G O

Las II Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, que se celebraron en Sevilla en abril de 1982 con la asistencia de más de 500 profesores de toda España, pertenecientes a todos los niveles docentes, fueron la continuación del movimiento ya iniciado en las I Jornadas celebradas en Barcelona en Mayo de 1981. Estas reuniones de carácter nacional son promovidas por los grupos y sociedades de profesores que, en muy diferentes puntos del país, trabajan en el mejoramiento de la didáctica de nuestra materia. En su encuentro de octubre de 1981, celebrado en León, dichos grupos acordaron encomendar a la recien nacida Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas la organización de las II Jornadas, fijando las líneas fundamentales de su contenido y desarrollo.

En la sesión de clausura de las II Jornadas se tomó el acuerdo de publicar las actas, recogiendo las ponencias, conferencias y encuestas realizadas. Nuestra Sociedad asumió el compromiso, nada fácil, dada la escasez de medios disponibles, de llevarlo a cabo. Tenemos la satisfacción de presentar su publicación, en dos volúmenes, gracias en buena parte a la colaboración de entidades que se citan al final de este prólogo.

En el índice adjunto, se verá que se ha respetado la estructura de las Jornadas, desarrolladas en los Seminarios de Programas, Informática, Geometría y Metodología, bajo la forma de ponencias, que se han incluido con el mismo número de orden con que se expusieron y discutieron en las reuniones. Asimismo se celebraron debates sobre la problemática de la conexión E.G.B.- Enseñanzas Medias y la conexión E. Medias - Universidad, así como sobre la enseñanza de la Estadística y la tan preocupante cuestión del fracaso escolar en Matemáticas. Hay que hacer constar, de paso, que los trabajos se publican textualmente, como se nos han entregado, y que los posibles errores u omisiones que pudieran observarse son de la exclusiva responsabilidad de sus autores.

La publicación de las ponencias va precedida de las conferencias pronunciadas por los profesores Emma Castelnuovo, Maurice Glayman y Pascual Llorente, invitados por la organización, y a los cuales testimoniamos una vez más nuestro agradecimiento por su valiosa colaboración.

Sin la pretensión de hacer una valoración exhaustiva, que corresponde más bien a los profesores asistentes, deben destacarse como aspectos notables de estas Jornadas los siguientes :

1º La gran participación del profesorado y el alto número de ponencias presentadas. Las Jornadas han sentado los fundamentos para dar cauce a un extenso movimiento de profesores de matemáticas, surgido de la base con una gran fuerza y sin estímulos oficiales.

2º La inquietud existente entre los profesores de matemáticas de todos los niveles, en torno a una revisión de los programas y de los métodos de enseñanza, así como la preocupación general de coordinar los diferentes niveles docentes con una mayor conexión entre ellos, tanto entre los profesores como en sus contenidos, para llegar a una Matemática que se enseñe sin discontinuidades ni traumas desde la preescolar hasta los estudios superiores.

3º La necesidad de recuperar para la enseñanza general básica una mayor atención al cálculo numérico y a las nociones geométricas, así como de incluir en los programas de las enseñanzas medias a la rama olvidada en los últimos años : la geometría desde un punto de vista métrico y gráfico.

4º La introducción y utilización de las calculadoras como medio para hacer la matemática más atractiva y adaptada a las exigencias actuales. Resulta ya inaplazable la implantación de la Informática como materia, al menos optativa, en el plan de los estudios medios, y como paso inmediato su inclusión en lasE.A.T.P. (enseñanzas y actividades técnico-profesionales) en la programación vigente, como ya existe en varios países.

La Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales" quiere hacer constar finalmente su gratitud a las entidades que facilitaron la organización y realización de las II Jornadas : El ICE de la Universidad de Sevilla, el Colectivo Andaluz de Pedagogía Popular, la Consejería de Cultura de la Junta de Andalucía, la Diputación Provincial de Sevilla, el Ayuntamiento de esta capital y las Facultades de Matemáticas y Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Sevilla, así como el Monte de Piedad y Caja de Ahorros de Sevilla, que ha colaborado para la publicación de las presentes actas.

## II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

### Relación de asistentes:

1.- Acosta Casado, Manola.
2.- Adell, Antonia.
3.- Admetllà Maseras, Francisco.
4.- Aguayo Maldonado, Pedro.
5.- Aguilar González, Juan B.
6.- Aguilera Avalos, Luis.
7.- Alba Baut., José Vicente.
8.- Alda Eade, Mª Luz de.
9.- Alfèrez Mejias, Antonio Juan.
10.- Almansa de las Heras, Isabel.
11.- Alonso Fernàndez, Juan.
12.- Alonso Molina, Fernando.
13.- Alpresa Gutiérrez, Carmen.
14.- Alvarez Carrascosa, Mª Isabel.
15.- Alvarez Hernández, Pedro.
16.- Alvarez Pastor, Mª Angeles.
17.- Alvarez Rocha, Mª Teresa.
18.- Alvarez Sotomayor, Joaquin.
19.- Alvaro Calvache, María.
20.- Amil Redondo, Josefa.
21.- Amo Arias, Francisco del.
22.- Amorena Erdozain, Concepción.
23.- Amorena Erdozain, José Mª.
24.- Antiñolo López, Pilar.
25.- Aranda Doncel, Josefa.
26.- Arana Pérez, Juan.
27.- Aranda Plata, Antonio.
28.- Areces Fernández, Beatriz.
29.- Arnal Gil, Mª Teresa.
30.- Arrabal de Pablos, Mª Carmen.

31.- Arribas de Costa, Antonio.
32.- Arroyo Lanzas, Fuensanta.
33.- Arroyo Lanzas, Mª José.
34.- Arroyo Simón, Mª Jesús.
35.- Asprón G., Maximiliano.
36.- Aurrecoechea Zubiaur, Begoña.
37.- Azcarate, Carmen.
38.- Azcarate Goded, Pilar.
39.- Balbuena, Luis.
40.- Bandera Ruiz, Miguel.
41.- Bando Casado, Trinidad.
42.- Barbero Sampedro, Carmen.
43.- Barrachina Gª de Cuerva, Luis S.
44.- Barragan Pérez, I.
45.- Barrio Calvo, Carlos.
46.- Barrionuevo, Ana Mª.
47.- Bedia Cieza, Angel.
48.- Benach Nolla
49.- Benedicto Juste, Mª Dolores.
50.- Berenguer Claria, Joaquin.
51.- Berini López-Lara, Marta.
52.- Berna Rufete, José Lino.
53.- Bernal Ortiz, Rosario
54.- Bermudo Ruiz, Dolores.
55.- Bernardez Maquieira, Flaviano.
56.- Berral Yerón, Mª Joaquina.
57.- Bilbao Buñuel, Rosalia.
58.- Blanco Nieto, Lorenzo.
59.- Blanco Ruiz, Agustin.
60.- Bolaños Vivar, Pedro.
61.- Bonnin Forteza, José.
62.- Bordas, Inmaculada.
63.- Borrachero, Encarnación.
64.- Borras Veses, Eliseo
65.- Brichs Torello, Albert.
66.- Buendia Costiñeira, Mª Guadalupe.
67.- Bueno Beltran, Bernardo.
68.- Bueno Morales, Mª Angeles.
69.- Caballero Fernandez, Mª José.
70.- Caballero Hoyo, Manuel.
71.- Caballero Molina, Juan Antonio.
72.- Calero Posada, Carmen.
73.- Callejo de la Vega, Mª Luz.
74.- Calvo Cuenca, Rafael.
75.- Calvo Lorenzana, Urbano.
76.- Camacho, Enrique.
77.- Campón Rodillo, Petra.
78.- Campos-Maza, Magdalena.
79.- Candón Peña, Juan F.
80.- Caras Toledo, Miguel.
81.- Carracedo Matorro, Fcº Gregorio.
82.- Carranza Cruz, Mariano.
83.- Carrillo Gallego, Dolores.
84.- Carrillo Quintela, Mª Elisa.
85.- Carrillo Villen, Emilia.
86.- Casadevall Pou, Martí.
87.- Casado, Mª Luisa.
88.- Casado González, Consolación.
89.- Casado Salinas, Enrique.
90.- Casasnovas Casasnovas, Jaime.
91.- Castillejo Gómez, Luis.
92.- Cemeli, Ramón.
93.- Cerrato Sánchez, Eugenia.
94.- Cid Valle, Adolfo.
95.- Cobarro García, Manuel.
96.- Coca García, Manuel.

97.- Compostela Muñiz, Benita.
98.- Compta Creus, Alberto.
99.- Conde García, Mª Reyes.
100.- Corbero Pascual, Victoria.
101.- Corcobado Cartes, Juan Luis.
102.- Corcobado Cartes, Teresa.
103.- Criado Carmona, Ciriaco.
104.- Cruz Vazquez, Manuel.
105.- Cuenca Delgado, Juan.
106.- Chavez de Diego, Mª José.
107.- Deulofeu Piquet, Jordi.
108.- Diago Alvarez, Jesús Manuel.
109.- Diego Martín, Braulio de.
110.- Diaz Luis, Mª Carmen.
111.- Diez Fernández, Alice.
112.- Domínguez Abad, Mª Pilar.
113.- Domínguez Alarcón, Juan José.
114.- Domínguez Martínez, Elisa.
115.- Domínguez Pérez, Fernanda.
116.- Duque Jimeno, Carpoforo.
117.- Duran Sánchez, Nicasio.
118.- Ederlinda Viñuales, J.
119.- Escobar Moreno, Mª Dolores.
120.- Escudero Pérez, Isabel.
121.- Estafanell Bas, Joan.
122.- Esteban Fau, Mª Rosa.
123.- Estrada Roca, Mª Asunción.
124.- Eugenio Martínez, Emilio.
125.- Fajardo Utrilla, Juan Mª.
126.- Farfan Muñoz, Isabel.
127.- Fedriani Martín, Eugenio.
128.- Fernández Fdez., Mª Carmen.
129.- Fernández García, Angeles.



130.- Fernández Lajusticia, Alejandro.
131.- Fernández López, Manuel.
132.- Fernández Martínez, Ana.
133.- Fernández Morales, José.
134.- Fernández Muriel, J. A.
135.- Fernández Reyes, Manuel.
136.- Fernández Robledo, Mª Carmen.
137.- Ferrero de Pablo, Luis.
138.- Ferrero Vallejo, Fernando.
139.- Filomena Diaz, Elvira.
140.- Flores Fernández de Bob, Cesáreo.
141.- Flores Martínez, Pablo.
142.- Font Moll, Vicente.
143.- Fortes Cortizo, Mercedes.
144.- Fortes Outerino, Mª Luisa.
145.- Fortuny Aymemi, Josep Mª.
146.- Franco Martín, Luis.
147.- Froufe Quintas, Manuel.
148.- Frutos Fernández, Angeles.
149.- Fuentes Gil, Inmaculada.
150.- Fuentes Gómez, José.
151.- G. Cortazar, Mª Victoria.
152.- Galdón Canavese, José Mª.
153.- Gallardo San Salvador, José Angel.
154.- Gañan Ortiz, Mª de la Asunción.
155.- García, Mª Mercedes.
156.- García Azcarate.
157.- García Cruz, Juan A.
158.- García Dehesa, Mª Carmen.
159.- García Domínguez, Fernando.
160.- García Dazagaset, Juan Manuel.
161.- García García, Mª Luisa.
[illegible]emas, José Mª.

163.- García Martínez, Fernanda.
164.- García Melero, Ricardo.
165.- García Morales, Rocio.
166.- García Roman, Mª Jesús.
167.- García Santiago, Angel.
168.- García Serrano, Manuel.
169.- García Severón, Concepción.
170.- García Teran, Primitivo.
171.- García de Torres, Julián.
172.- Garzón Diaz de la Serna, Manuel.
173.- Gascón Pérez, José.
174.- Gavilan Martínez, Ana Mª.
175.- Gisbert Giner, Vicente.
176.- Gómez de Celis, Mª Carmen.
177.- Gómez Gómez, Mª Teresa.
178.- Gomis Bertrand, Elena.
179.- González, José Luis.
180.- González Davila, Manuel.
181.- Gonzalez y Diez de la Cortina, Carlos.
182.- González Fernández, Adrian.
183.- González Muñoz, Mª Manuela.
184.- González Ruiz, Francisco Javier.
185.- González Ruiz, Ramón.
186.- González Velazquez, José Antº.
187.- Gragera Villalba, Amelia.
188.- Gros Ezquerra, Mª José.
189.- Guerra Cabrera, Juana Isabel.
190.- Guerrero Casas, Flor Mª.
191.- Guerrero Hidalgo, Salvador.
192.- Gutiérrez Cubero, Carmen.
193.- Hernández García, Rafael.
194.- Hernández Gómez, Joaquin.
195.- Hernández Martínez, Mario.



196.- Hernández Vázquez, Juan José.
197.- Hernando Cabrillana, Emilio.
198.- Hernan Siguero, Francisco.
199.- Herrera Ejarque, José A.
200.- Herrera Gálvez, Mª del Pino.
201.- Herrera Jiménez, Juan.
202.- Herrero Ruiz, Francisco.
203.- Hidalgo Vega, Mª Dolores.
204.- Hinojosa López, Mª Angustias.
205.- Ibañez Martínez-Conde, David.
206.- Iglesias Cerezal, Manuel.
207.- Iriarte Bustos, Mª Dolores.
208.- Jalón de T. García, Esther.
209.- Jañez Moreno, Mª Josefa.
210.- Jiménez- Castellanos Leiva, Angel.
211.- Jiménez Molina, Julio.
212.- Jiménez Morales, Concepción.
213.- Jiménez Palos, Antonio J.
214.- Lafuente Poza, Severino.
215.- Lagartos Rodríguez, Guillermo.
216.- Lamarca Paris, José Mª.
217.- Lanau Viñals, Esther.
218.- Lapachet Murillo, Juan.
219.- Lara Palma, Ignacio.
220.- Leira Rodríguez, Antonio.
221.- León Bravo, Luis Carlos.
222.- Lerma Usero, Miguel Angel.
223.- Libori Ramos, Aurea.
224.- Linares Varela, Pilar.
225.- LLado, Carles.
226.- Lobo Hidalgo, Miguel.
227.- López Armenteros, Amador.
228.- López Carretero, Asunción.
229.- López Gómez, Juan.

230.- López Lara, Isabel Mª.
231.- López Márquez, José A.
232.- López de los Mozos, Mª Cruz.
233.- López Ollero, Mª Dolores.
234.- López Pardo, Cristina.
235.- López Solanas, Angel.
236.- López Torres, Pablo.
237.- López Vargas, Rafael.
238.- Lorenzo García, Luis de.
239.- Luelmo, María Jesús.
240.- Luengo Esteban, Mª Mercedes.
241.- Maqueda Díaz-Rullo, Julián.
242.- Malet Tomas, Antonio.
243.- Manresa Sánchez, Javier.
244.- Márquez Zurita, Luis.
245.- Martín Aguilar, Virginia.
246.- Martín Cabrera, Consuelo.
247.- Martín Casalderrey, Francisco.
248.- Martín Castilla, Antonio.
249.- Martín Castilla, Mª Teresa.
250.- Martín Fernández, Manuel.
251.- Martín Martín, Andrés.
252.- Martín Mora, Francisco Javier.
253.- Martínez Abad, Eduardo.
254.- Martínez Blanco, José Mª.
255.- Martínez Fernández, Fermina.
256.- Martínez Martínez, Mª Pia.
257.- Martínez Paez, Angel.
258.- Martínez Paredes, Francisco.
259.- Martínez Perdiguero, Ignacio.
260.- Martínez Ramírez, Manuel.
261.- Martínez Recio, Angel.
262.- Martos Romero, Lydia.



296.- Navas Luque, Aurora.
297.- Nicolas Martínez, Fcº Javier.
298.- Nieto Ledo, Manolo.
299.- Nieto Nieto, Pedro.
300.- Novo Fernando, Fermín.
301.- Nuñez García, Angel.
302.- Ocón Zamora, Carmen.
303.- Ogayar Moral, Cipriano.
304.- Oliver Perello, Mª.
305.- Olmo Moreno, Ramón del.
306.- Olmo Rodríguez, Bernardo.
307.- Orrego Contreras, Miguel.
308.- Ortega Labajos, Mª Carmen.
309.- Ortega Labajos, Mercedes.
310.- Ortega Raya, Celedonia.
311.- Ortiz Capilla, Mª Angeles.
312.- Padrón Rodríguez, Manuel.
313.- Peinado León, Pedro Antonio.
314.- Peña Argueso, Emilia.
315.- Peña Romero, Elisa.
316.- Pere Sola, Monserrat.
317.- Pereda, Carmen.
318.- Pérez Bernal, Luis.
319.- Pérez Cavero, Mª Catalina.
320.- Pérez Coronel, Tomas.
321.- Pérez Fernández, F. Javier.
322.- Pérez Guajardo, Manuel.
323.- Pérez Jiménez, Antonio.
324.- Pérez Jiménez, Mª Jesús.
325.- Pérez Jiménez, Mario.
326.- Pérez Morala, Luis Miguel.
327.- Pérez Navarro, Joaquín.
328.- Pérez Panduro, Dolores.

263.- Mas Pinto, Ana.
264.- Mata González, Ana.
265.- Mateos Mateos, Felipe.
266.- Maury Salvatella, Mª paz.
267.- Mayor Gallego, José A.
268.- Maza Gómez, Carlos.
269.- Melara Lobato, Tersa Mª.
270.- Menéndez Lobato, José Mª.
271.- Meniz Sánchez, Isabel.
272.- Mercado Vilchez, José.
273.- Merino Esteban, Jesús Alberto.
274.- Miguel García, José de.
275.- Minguez Mosquera, Julio.
276.- Molina Bravo, Juan Miguel.
277.- Molina Tebar, Antonio.
278.- Montes Lozano, Antonio.
279.- Mora A., Mª Teresa.
280.- Mora Giménez, José Manuel.
281.- Morales Rufo, Lucia.
282.- Morata Cubells, Magda.
283.- Moreno, Mª Luisa.
284.- Moreno Diaz de la Espina, Mª Fernanda.
285.- Moreno Gómez, Manuela.
286.- Moreno Rigall, F.
287.- Moya Molina, Gabriel.
288.- Muñoz García, José Gabriel.
289.- Muñoz Santonja, José.
290.- Murciano Borrego, Mercedes.
291.- Najera Brazales, Manuel.
292.- Najera Burón, Isabel.
293.- Naranjo Naranjo, Francisco.
294.- Naranjo Peiro, Mª Jesús.
295.- Navarro Rivero, Serafin.



329.- Pérez Valderrama, Juana.
330.- Petit Vila, Mª.
331.- Pineda Manrique, Pilar.
332.- Pinto Suárez, Isabel.
333.- Planas de Alfonso, Inmaculada.
334.- Plaza Baguena, Fernando.
335.- Pozo Chia, Antonio.
336.- Prada Vicente, Mª Dolores.
337.- Ramos Romero, Hector.
338.- Rocio Segoviano, Carmen.
339.- Reyes Columé, Pedro.
340.- Richarr Zapata, Manuel.
341.- Rico Romero, Luis.
342.- Río García, Dolores del.
343.- Ripoll Llorens, Andrés.
344.- Rivares Bolivar, Rosario.
345.- Rivas Salgado, Antonio.
346.- Rivera Barcina, Rosa Mª.
347.- Riviere Gómez, Vicente.
348.- Roa Guzman, Rafael.
349.- Robles Diaz, Ricardo.
350.- Rodríguez Alvarez, Ramón.
351.- Rodríguez Cordobes, Juan.
352.- Rodríguez Garica, Manuel.
353.- Rodríguez Huertas, José Antonio.
354.- Rodríguez Ipies, Carlos.
355.- Rodríguez Moñino, Julia.
356.- Rodríguez Rodríguez, Ricardo.
357.- Rodríguez Villanueva, Mª Soledad.
358.- Roig Plans, Pedro.
359.- Rojas Sánchez, Carlos.
360.- Romero Cabot, José Emiliano.
361.- Romero Falcón, Francisca.
362.- Romero León, José Manuel.

363.- Romero Moreno, Luisa Mª.
364.- Romero, Leocadia.
365.- Romero Sánchez, Sixto.
366.- Rovira, Pascual.
367.- Rovira Rubio, Nemesia.
368.- Rubiales Camino, Enrique.
369.- Rubies Garrofe, Mª.
370.- Ruy-Diaz García, Inmaculada.
371.- Ruiz Domínguez, Emilia.
372.- Ruiz Gracia, Mª Luisa.
373.- Ruiz Jiménez, Blas Carlos.
374.- Ruiz López, Catalina.
375.- Ruiz Mije, Fcº.
376.- Ruiz de Prado, Modesto.
377.- Ruperez, José A.
378.- Saa Rojo, Mª Dolores.
379.- Sales Rufi, Josep.
380.- Salmerón Sánchez, Mariano.
381.- Salvador Alcaide, Adela.
382.- Sánchez Domínguez, Juan José.
383.- Sánchez García, Mª Victoria.
384.- Sánchez Millan, Aurora.
385.- Sánchez Pladevall, Carlos.
386.- Sánchez Segovia, Angeles.
387.- Sánchez Serrano, Concepción.
388.- Sánchez Sotelo, Angel.
389.- Sánchez Vázquez, Gonzalo.
390.- Sandoval Sierra, Pilar.
391.- Santos Bravo, Rafael.
392.- Santos del Pozo, Mª Luz.
393.- Sanz Gómez, Mª Jesús.
394.- Sanz Trellez, Angel A.
395.- Segovia Alex, Isidoro.



396.- Segura Hernández, Concepción.
397.- Serrano Martínez, Arturo.
398.- Sierra Vega, Mª Teresa.
399.- Socas Robaina, Martín.
400.- Socias Manzano, Mercedes.
401.- Solana Cortiles, Mª del Pilar.
402.- Soriano Hernández, Juan Carlos.
403.- Suárez Suárez, Aurelia.
404.- Suárez Vázquez, Juan Antonio.
405.- Talavera Lora, Rosario.
406.- Tejada Chaves, Pedro.
407.- Tejero Ramírez, Eugenio.
408.- Tirado Muñoz, José Mª.
409.- Torrecilla de Amo, Diego.
410.- Torrens Galvan, Francisca.
411.- Torres Alcalde, Mª Cruz.
412.- Udina Abello, Manuel.
413.- Ureta Tejero, Cristobal.
414.- Urgorri Rodríguez, Pilar.
415.- Utges, José Mª.
416.- Vacas de la Oliva, Manuel.
417.- Valderrama Ramos, Joaquin.
418.- Valencia Docasar, Fernando.
419.- Valls Tolosa, José M.
420.- Vargas Sabadias, Angel.
421.- Varo Gómez de la Torre, Antonio.
422.- Veiga, Carmen da.
423.- Vela Arrans, Mª Dolores.
424.- Vela Torres, Manuel.
425.- Venobell Vidal, Carmen.
426.- Viader Canals, Pelegrin.
427.- Vicente Adame, Felipe de.
428.- Vidal Pino, Lorenzo.

429.- Viera, Ana Mª.

430.- Villarreya Bullido, Florencio.

431.- Vinuesa Sánchez, Carlos.

432.- Yabar Madinabeitia, José Manuel.

433.- Zamora Merino, Francisco.

434.- Zamorano García, Salvador.





## CONFERENCIANTES

EMMA CASTELNUOVO

MAURICE GLAYMAN

PASCUAL LLORENTE

## COMITE ORGANIZADOR

Antonio Aranda Plata

Trinidad Bando Casado

Manuel Iglesias Cerezal

José Mercado Vílchez

Antonio Martín Castilla

Isabel Ostalé Baeza

Antonio Pérez Jiménez

Pedro Reyes Columa

Emiliano Romero Cabot

Victoria Ruiz Abascal

Gonzalo Sánchez Vázquez

Juan A. Suarez Vázquez.

Agradecemos la presencia entre nosotros de los Profesores Carmen Pineda, Isabel Barragán, Alfonso Guiraum, Mª Dolores de Prada Vicente y Luis Rico Romero.

También queremos agradecer la colaboración de los Profesores de Historia: José María Aguilar, Angel Alvarez y José Francisco Vegas los cuales nos acompañarán en la visita a las ruínas romanas de Itálica.

El Comité Organizador.

II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

ENCUESTA

1.- Con el código de puntuación. 0, 1, 2 y 3, valora los siguientes aspectos de las II Jornadas:

A.- Conferencias..... ☐

B.- Seminarios..... ☐

C.- Debates..... ☐

D.- Ponencias..... ☐

E.- Actividades complementarias..... ☐

F.- Organización..... ☐

G.- Tu participación personal..... ☐

H.- La participación colectiva..... ☐

I.- Tu impresión general de las Jornadas..... ☐

2.- ¿Has recibido alguna ayuda económica para asistir a las II Jornadas?

SI ☐ NO ☐

¿De qué organismo?

ICE ☐

Centro de trabajo ☐ (Indica Nivel _____)

Otros ☐ ( Indica cuál _____)

NOTA: Esta encuesta se entregará en la Secretaría, el último dia de las Jornadas.

Sugerencias:



RESULTADOS DE LA ENCUESTA:

| | PUNTUACION | | | | Puntua. media | N/Comt. % del total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | 1 | 0 | | |
| CONFERENCIAS | 46 | 51 | 3 | 0 | 2.43 | 0 |
| SEMINARIOS | 3 | 58 | 30 | 9 | 1.56 | 27 |
| DEBATES | 5 | 26 | 47 | 22 | 1.15 | 15 |
| PONENCIAS | 2 | 43 | 52 | 3 | 1.43 | 0.5 |
| ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS | 35 | 45 | 18 | 2 | 2.13 | 15 |
| ORGANIZACION | 48 | 45 | 5.5 | 1.5 | 2.39 | 0 |
| TU PARTICIPACION PERSONAL | 10 | 48 | 25 | 17 | 1.52 | 11 |
| LA PARTICIPACION COLECTIVA | 18 | 49 | 31 | 2 | 1.81 | 3 |
| TU IMPRESION GRAL. DE LAS JORNADAS | 25 | 61 | 13.5 | 0.5 | 2.10 | 1 |

* Número total de encuestas entregadas: 129
* Los porcentajes han sido hallados del total de los que contestan.

De los 129 congresistas que entregan la encuesta han recibido ayuda para asistir a las Jornadas 28 de ellos( el 22 %);de los cuales,15, la reciben del centro de trabajo, 11 de un I.C.E.,1 de la Generalitat de Catalunya y 1 del Colegio de Licenciados.

En cuanto el apartado de Sugerencias los resultados fueron los

siguientes:

1.- Control previo de las ponencias y selección de ellas.(Lo sugieren 32 encuestados)

2.- Mayor tiempo para los debates de ponencias y Seminarios. (18 encuestas)

3.- Mayor tiempo para las ponencias (9 encuestas).

4.- Distinción de ponencias de comunicaciones (7 encuestas).

5.- Mandar con más tiempo los resúmenes de las ponencias (7 encuestas).

El resto de las sugerencias, hasta un total de 54 distintas, las efectuan menos de 5 personas.



## II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Comunicado de Clausura elaborado por los distintos grupos convocantes de éstas II Jornadas.

Los dias 15, 16 y 17 de Abril se han celebrado en Sevilla las II Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, como continuación de las I Jornadas celebradas en Barcelona el curso pasado, fruto de la preocupación manifestada por los profesores interesados en la mejora y renovación de la enseñanza de las Matemáticas.

Tras una reunión preparatoria celebrada en León en el mes de Octubre, se encomendó la organización de éstas II Jornadas a la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales".

La experiencia anterior ha permitido una mayor difusión que se ha visto materializada en una masiva asistencia, más de 500 profesores de Matemáticas de todos los niveles y de todas las regiones y nacionalidades, desbordando las previsiones iniciales.

En el desarrollo de las sesiones han pronunciado conferencias los profesores Emma Castelnuovo, Maurice Glaymann y Pascual Llorente a los que agradecemos su asistencia.

Han sido expuestas 62 ponencias agrupadas en distintos Seminarios: Geometría, Metodología, Informática, destacando especialmente el de Programas Educativos, tema central de estas Jornadas.

Asimismo se han realizado distintos debates sobre los temas de mayor interés.

La mayoría de los Seminarios han finalizado sus trabajos con la realización de uno o varios debates generales, a los que hay que añadir aquellos que han versado sobre la conexión entre los distintos niveles educativos.

Valoramos positivamente los trabajos de organización llevados a cabo por la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales", el Colectivo Andaluz de Pedagogía Popular y el I.C.E. de la Universidad de Sevilla que ha hecho factible el éxito de éstas Jornadas.

Agradecemos al Presidente de la Junta de Andalucía la inauguración de éstas Jornadas, así como la colaboración prestada por la Consejería de Cultura de la Junta de Andalucía, la Diputación Provincial de Sevilla, el Ayuntamiento y las Facultades de Matemáticas y Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Sevilla.

La Asamblea con la que se cierran las presentes Jornadas quiere

resaltar las dificultades con las que tropiezan los profesores de E.G.B. a la hora de asistir a actividades que, como éstas, contribuyen a ampliar su preparación y, en definitiva, a mejorar la calidad de la Enseñanza ya que, no sólo deben costearse los gastos inherentes inherentes a la asistencia, sino que además, han de pagar el sueldo del profesor que los sustituye. Por ello, la Asamblea decide enviar una copia de éste comunicado a las autoridades ministeriales para que, de una manera definitiva, se resuelva ésta situación.

Estas Jornadas han demostrado la enorme preocupación del Profesorado por la renovación de los planes de estudios. Siendo ineludible el protagonismo de los profesores en su elaboración, exigimos y ofrecemos al M.E.C. nuestra colaboración en ésta tarea. Igualmente solicitamos al M.E.C. mayor apoyo para iniciativas semejantes a las que han hecho posible éstas Jornadas.

Por último, animamos a todos los implicados en la renovación de la enseñanza de las Matemáticas a continuar su labor y anunciamos el ofrecimiento de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas para organizar las III Jornadas el año próximo.

Para la preparación de éstas Jornadas quedan invitados todos los grupos que lo deseen a la reunón que a tal fin se celebrará en Murcia los dias 10 y 11 de Octubre de 1982.

-----o--------

( Este Comunicado fué aprobado por la Asamblea de clausura de las II Jornadas)

Sevilla, 17 de Abril de 1982.



## UNA MATEMATICA DINAMICA (CONEXION CON LA REALIDAD)

(Emma Castelnuovo)

Queridos amigos:

Nos encontramos, una vez más, en un período de crisis en la enseñanza de la matemática. Un período de crisis que podría, quizás, tener en los próximos años un resultado muy positivo.

Todos estamos de acuerdo que hay que cambiar, que necesita nuevos programas una sociedad que se transforma tan rápidamente; pero, para hacer cambios, todavía tenemos que hablar, discutir, tener las ideas más claras. Es justamente por esta razón que aplaudo a esta reunión que comprueba la seriedad y el empeño de los maestros de España.

Ahora bien, yo pienso que, para tener las ideas más claras, lo primero es tener claras las ideas sobre lo que pasó en la historia de la enseñanza de la matemática. Quisiera, por lo tanto, decir algo en pocas palabras de esta historia, buscando destacar sus crisis. Después, vamos a ver cual es el problema actual; a este propósito, diré como veo yo las cosas, mostrando, a través de unos ejemplos en qué sentido me parece se deberían hoy dirigir nuestras investigaciones didácticas.

La historia. Es bien conocido que la instrucción fue, durante muchos siglos, solamente para una élite: los niños de una alta sociedad eran los únicos que podían recibir una educación, o en colegios religiosos o en su propia familia. Por lo que concierne a la enseñanza de la matemática, a nivel secundario, no existía más que un libro: los Elementos de Euclides. Pero, Euclides no había escrito su obra para uso escolar, y el efecto nocivo y nefasto de los Elementos sobre estos alumnos privilegiados apareció muy claro. A este propósito tenemos una declaración muy interesante de un gran matemático del siglo XVIII: Alexis Claude Clairaut. Clairaut dedica su delicioso librito "Los elementos de geometría" a la Marquise du Châtelet, una mujer muy inteligente que sin embargo no estaba en condiciones de penetrar en la obra euclídea. "No es posible -dice Clairaut- que un debutante pueda comprender este libro por el hecho que Euclides empieza con teorías abstractas. Para penetrar en cualquier ciencia es necesario hacer sentir todo el esfuerzo, todo el trabajo que la humanidad hizo durante siglos para extrar la teoría de los concreto, de la realidad.

Los tiempos cambian, las sociedades evolucionan, y al final del siglo pasado muchos paises tienen escuelas públicas para todos los niños. Con las escuelas públicas se establecen programas oficiales y, con los programas, entran en las clases los libros escolares, libros diferentes de país a país. Pero, para la matemática hay un libro único, igual en todas las escuelas de casi todos los paises: los Elementos de Euclides en sus diferentes traducciones, en sus diferentes adaptaciones. Y ahora, en tantos estudiantes, se verifica el mismo efecto que se tenía en los pocos de otro tiempo: un sentido de incomprensión, un complejo de inferioridad que permanece toda la vida y que lleva a declarar "yo,nunca entendía la matemática, no tenía disposición".

Los años corren y el problema de la enseñanza de la matemática no es considerado desde un punto de vista pedagógico y psicológico: lo que dijo Clairaut no deja traza, e igualmente las declaraciones de grandes educadores como Comenius, Pestalozzi, y más recientemente Óvide Decroly, no tienen ningún efecto. Son los matemáticos y los legisladores los que redactan los programas, y ellos, frecuentemente, no tienen una sensibilidad pedagógica: la matemática -dicen- debe ser matemática, y, por lo tanto, necesita empezar con una axiomática, con teorías puras, abstractas. Sin reflexionar que el adjetivo "abstracto" deriva del latin "extractus", y, luego, tiene un sentido dinámico (extraer de lo concreto).

El descontento general lleva, al final de los años cincuenta, a una crisis. Pero, no se trata de una contestación nacida y madurada en el ambiente de los estudiantes o de la sociedad, sino de una contestación que tiene su origen en un hecho totalmente extraño a la escuela: se trata del lanzamiento del primer Sputnik, en 1957, por los rusos. Este lanzamiento provoca en efecto un verdadero choc en los Estados Unidos, también en el ambiente de los matemáticos: porque, si los americanos querían estar al nivel de la tecnología rusa, era necesario formar técnicos, ingenieros, científicos; y, por lo tanto, la matemática debía tener un puesto de relieve también en las escuelas secundarias. Antes que programar nuevos 'currícula', los americanos solicitaron a la OECE que organizara un Congreso internacional con especialistas de todo el mundo a fin de discutir el problema.

Este Congreso se tuvo en Royaumont (Francia) en 1959. Es justamente en esta reunión cuando se delinea un cambio: es la toma de posición del matemático Jean Dieudonné que marca un corte neto con la tradición. Al grito, que después se convirtió en slogan de "A bas Euclide".Dieudonné impone su fuerte personalidad convenciendo a la mayoría de los participantes a ser



portavoces, en su propio país, de la necesidad de abandonar la enseñanza euclídea substituyéndola por una matemática más viva, más motivadora, y correspondiente a la moderna investigación. El estudio de figuras estáticas se debe substituir por la presentación de importantes capítulos como el del álgebra lineal.

Un muy largo seminario de especialistas tenido en el año siguiente, en 1960, en Dubrownik (Yugoslavia) llevó a la redacción de un volumen con sugerencias e ideas sobre nuevos programas, y con recomendaciones de anteponer a un curso tan moderno una premisa a base intuitivo-experimental.

Pero, una cosa fue establecer estas sugerencias, y otra cosa fue lo que pasó en casi todos los paises europeos y no europeos. Porque, para realizar esta unidad de la matemática, se estimó que la cosa mejor era adaptar a la escuela la obra fundamental de Bourbaki, y esto a partir de los doce años. Exaltados y cegados por la introducción de la llamada "matemática moderna", se olvidó la edad del muchacho y muy frecuentemente los maestros se dejaron transportar a una abstracción demasiado avanzada. La axiomática euclídea fue substituida por una axiomática más fuerte, más nociva. Más nociva porque el resultado negativo no afectó solamente a la instrucción matemática sino también a la formación educativa y social. En efecto, obligando a los alumnos a teorías tan generales y abstractas sin ningún recurso a la realidad, se sofocó cada objeción, cada diálogo de los muchachos que, dada su edad, no estaban en condiciones de discutir sobre cosas que no comprendían en profundidad.

Me doy cuenta que estoy refiriéndome al pasado, pero, muchas veces estas tendencias pertenecen también a hoy.

Otra crisis -esta vez en un sentido muy positivo- se verifica hace seis años, en 1976, con ocasión del Congreso Internacional del ICMI, en Kalsruhe (Alemania). Durante este Congreso se tuvo una muy fuerte declaración por parte de un gran geómetra, el inglés Michel Atiyah, quien acusó a los matemáticos especialistas en cosas didácticas de haber suprimido la geometría en las escuelas, porque -dijo- "es precisamente la geometría la que por una parte solicita la intuición y lleva al primer paso hacia el descubrimiento, y, por otra, marca el anillo de conjunción entre el mundo físico y la matemática".

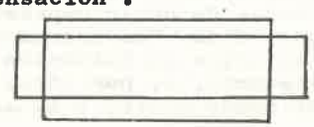
Matemática, mundo físico, sociedad: la responsabilidad de la enseñanza de la matemática en nuestro tiempo. Vamos a reflexionar: nunca como en estos últimos años la cultura científica y, con ésta, la matemática, entra en nuestras casas a través de periódicos, revistas y sobre todo a través de la radio y de la televisión. Es la escuela la que tiene la obligación de poner al ciudadano en condiciones de poder seguir una transmisión televisiva sobre cosas de ciencia. Ahora bien, para que se pueda comprender el sentido de una representación gráfica, para que se pueda entender por lo menos algo de una relación de medicina, para que los planetas y los satélites se aproximen a través de las explicaciones de científicos y periodistas, para que nuestro mundo se haga cada vez más amplio y al mismo tiempo más próximo, es necesario que la persona que escucha y ve tenga un mínimo de formación, tenga unas bases. Pero, esta formación, estas bases no se pueden tener si, en el tiempo de la escuela, no se tuvo la oportunidad de construir gráficos, si no se tuvo la posibilidad de hacer experimentos y si, en el campo de la matemática, los alumnos no tuvieron la alegría de llegar ellos solos, a través de intuiciones y deducciones, al descubrimiento de unas propiedades.

A fin que la instrucción escolar pueda constituir una base también para la ciencia de mañana, es necesario que esta enseñanza sea activa y viva, es necesario que los alumnos hagan, ellos mismos, las cosas, sea con la mano sea con el espíritu.

Quisiera dar dos ejemplos, tomados el uno de la matemática y el otro de las ciencias experimentales. Pienso que unos ejemplos aclararán mis ideas mejor que unas palabras.

## Un problema de matemática

Se parte de la observación de un material, un material muy sencillo: un cordel ligado y bien tendido entre las manos de modo que se realice un rectángulo. Acercando y alejando las manos se obtienen tantos rectángulos. Es claro que el perímetro no cambia: es el cordel. A la pregunta "¿qué le sucede al área?" los muchachos siempre contestan "el área es siempre la misma porque el perímetro no cambia", o dicen "el área es siempre la misma porque como el área se halla 'base por altura', en nuestro caso lo que se pierde en base se gana en altura; luego, hay una compensación".



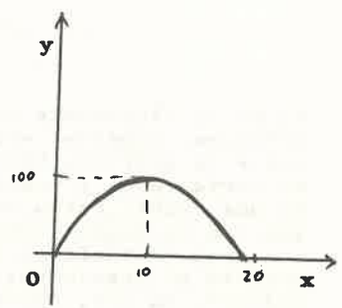


Es interesante no contestar a estas observaciones, sino continuar a "manejar" el cordel hasta llegar al caso límite, cuando una dimensión va a cero: el rectángulo "se aplasta" y... ¿el área? "No hay área -dicen-, pero..." el área no podía desaparecer". Hay en todos los alumnos un sentido de aturdimiento, de incertidumbre. Se observa todavía: el área parte de cero, crece y crece, y después decrece hasta cero. "Es como cuando se lanza una pelota" -dice alguien. Es ahora el momento de pasar al cálculo: se mide el cordel y se consideran varios casos dando a las dimensiones diferentes valores. Se ve que el área cambia y cambia mucho. Se hace una gráfica: es justamente la trayectoria de la pelota; es una parábola.

p = 40 cm.

| base | altura | área |
|---|---|---|
| 0 | 20 | 0 |
| 1 | 19 | 19 |
| 2 | 18 | 36 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 9 | 11 | 99 |
| 10 | 10 | 100 |
| 11 | 9 | 99 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 19 | 1 | 19 |
| 20 | 0 | 0 |

| x base | y área |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 19 |
| 2 | 36 |
| ⋮ | ⋮ |
| 9 | 99 |
| 10 | 100 |
| 11 | 99 |
| ⋮ | ⋮ |
| 19 | 19 |
| 20 | 0 |



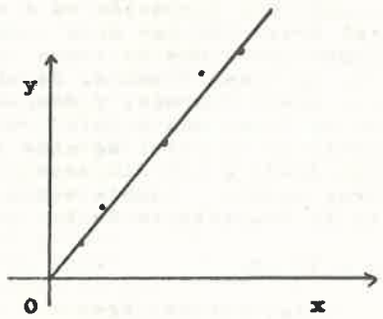

Una curva de la realidad de todos los días, pero que nunca observaban, enriquece ahora sus conocimientos: la parábola en la arquitectura moderna, la parábola en física, las antenas radar, los hornos parabólicos y todas las aplicaciones de la energía solar. Un problema de matemática pura sobre rectángulos isoperimétricos ha abierto el espíritu no solamente a conceptos fundamentales como el de función, con las ideas de caso límite, de invariante, de máximo... sino también a las aplicaciones a las cosas del mundo que nos rodea.

## Un ejemplo de ciencias experimentales

Vamos a ver ahora un ejemplo opuesto, es decir como la observación de fenómenos naturales conduzca a matematizar. Vamos a considerar un ejemplo de botánica: ¿cómo crecen las hojas de una planta? y ¿con qué ley?.

Muy frecuentemente se verifica una relación muy sencilla entre la longitud y la anchura máxima de una hoja. Aquí unas hojas de roda que pertenecían a la misma rama: hay hojas más o menos pequeñas, es decir, más o menos jóvenes. Es interesante con los alumnos tomar las medidas de cada hoja. Veamos el resultado:

| anchura máx. x | longitud y |
|---|---|
| 2,1 | 2,8 |
| 2,6 | 3,5 |
| 3,2 | 4,2 |
| 3,6 | 4,9 |
| 4,2 | 5,5 |




No se ve fácilmente una relación entre x e y. Es interesante, entonces, proceder según métodos de laboratorio, es decir pasar a la gráfica. Cada par de números da un punto en el plano cartesiano, y -cosa imprevista- estos puntos se condensan en una "nube" cerca de una recta que pasa por el origen. El sentido es claro: longitud y anchura máxima están ligadas con una proporcionalidad directa. Es decir la forma de la hoja durante el crecimiento permanece igual: la hoja crece por semejanza. Lo que, desde un punto de vista biológico, significa que el número de las células crece uniformemente en todas las direcciones.

De éste se puede pasar a otros problemas biométricos: generalmente no se verifica, en el crecimiento, una proporcionalidad directa. Es suficiente pensar en el tamaño de la cabeza de un recien nacido comparándola con el tamaño del niño, y ver, en el curso de los años, lo que sucede.

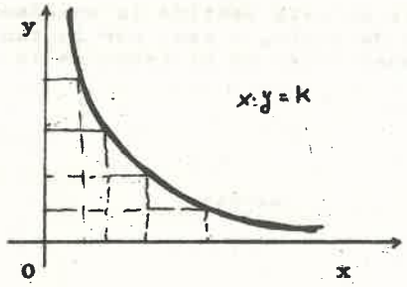
Se tienen así otros problemas biológicos para discutir, y, al mismo tiempo, otros problemas de estadística, de probabilidad, finalmente de matemática.

Volviendo todavía a las hojas, surgen naturalmente muchas preguntas:

- ¿ cómo puede el agua que cae a la tierra subir hasta las hojas?
  Este problema nos lleva a hablar de la capilaridad, a hacer experimentos: son suficientes dos vidrios, juntos de

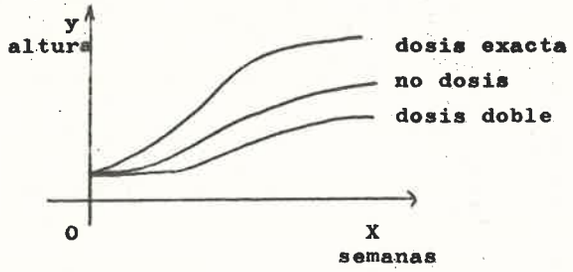


un lado y tenidos poco separados de otro, para hacer un experimento entusiasmante: en efecto, este par de vidrios, sumergidos en agua colorada, se comporta como una serie de tubos con diámetros muy pequeños y sucesivamente crecientes, y por lo tanto evidencian la ley de la capilaridad. Se obtiene una rama de hipérbola. Se descubre la ley de la proporcionalidad inversa.




Se compara este problema físico con problemas de matemática, como el de los rectángulos equivalentes.

- ¿ cuál es la ley que regula la altura de una planta ?
  Se experimenta con tres plantas de judías nacidas el mismo día y que se encuentran en el mismo ambiente (tierra, agua, exposición solar, ...), pero a las cuales se suministran durante nueve semanas diferentes cuantitativos del mismo fertilizante:
  una dosis exacta, un doble y una no-suministración. Se obtienen tres curvas que los muchachos construyeron día tras día.




Está claro que estos experimentos conducen a consideraciones de estadística, de probabilidad, de matemática pura sobre las leyes exponenciales.

De problemas de ciencias experimentales a la matemática, y -como vimos- de la matemática al estudio del mundo real.

Leyes matemáticas y leyes empíricas, gráficas correspondientes a curvas y gráficas de laboratorio. Una enseñanza que se desarrolle a lo largo de estas vías, siempre buscando interacciones naturales, es una matemática que los alumnos tienen la impresión -¡pero no se trata sólo de una impresión!- de construir con sus propias manos, y, por lo tanto, es una matemática que no se puede olvidar. Es una matemática que nunca puede envejecer, y el muchacho, ciudadano de mañana, siempre estará preparado, en el futuro, a utilizarla para resolver problemas que interesan sea a la ciencia pura sea a las aplicaciones.

Yo veo justamente en este sentido la enseñanza de la matemática en este final de siglo, y veo, por lo tanto, las investigaciones que se deben hacer en el campo de la didáctica de la matemática.

======



# EL ESTUDIO ALGORITMICO DE LAS FUNCIONES POLINOMICAS

Por Maurice GLAYMANN

Universidad de Lyon

1.- DEFINICION 1.-

$a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales. La aplicación f definida por $f(x) = a_o + a_1x + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ es una función polinómica de grado, a lo sumo, n. Si el número real $a_n$ no es nulo, entonces el polinomio es de grado n. Los reales $a_o, a_1, \ldots, a_n$ son los coeficientes de la función polinómica.

EL ALGORITMO DE HORNER (1786-1837)

Sean $a_o, a_1, a_2, a_3, a_4$ números reales. William HORNER propone el algoritmo siguiente:

$$b_4 = a_4$$
$$b_3 = a_3 + xb_4$$
$$b_2 = a_2 + xb_3$$
$$b_1 = a_1 + xb_2$$
$$b_o = a_o + xb_1$$

Para un real x dado, este algoritmo permite calcular el número real

$$b_o = a_o + x(a_1 + xb_2) =$$
$$= a_o + x(a_1 + x(a_2 + xb_3)) =$$
$$= a_o + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + xb_4)))$$

y $$b_o = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

Este algoritmo está asociado a la función polinómica

$$P: x \longmapsto a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

El algoritmo de Horner permite el cálculo de P(x) con menos cálculos que el cálculo directo.

He aquí una presentación práctica de los cálculos para determinar

$P(\alpha)$ donde $\alpha$ es un número real:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_o \\
 & & + & + & + & + \\
\alpha & \downarrow & \alpha b_4 & \alpha b_3 & \alpha b_2 & \alpha b_1 \\
\hline
 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_o = P(\alpha)
\end{array}$$

## 2.- TEOREMAS FUNDAMENTALES

DEFINICION 2.-

f es una función polinómica; $\alpha$ es un <u>cero</u> de f significa que $\alpha$ es <u>solución</u> de la ecuación $f(x)=0$.

<u>Veamos un problema</u>: si f es una función polinómica :

$$x \longmapsto a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

¿ en qué condiciones se verifica que <u>todo</u> real $\alpha$ es un cero de f?

<u>Estudio de algunos casos</u>

1.- $n=0$ : si la función <u>constante</u> $f: x \longrightarrow a_o$ admite el real $\alpha$ como cero, entonces $f(\alpha)= a_o = 0$.

f es la función <u>nula</u>; resulta,pues, que para <u>todo</u> número real $\alpha$, $\alpha$ es un cero de f.

2.- $n=1$ : si la función afín $f: x \longmapsto a_o + a_1x$ admite al número $\alpha$ como cero, entonces $f(\alpha)= a_o + \alpha a_1 = 0$. Esta igualdad es verdadera para todo $\alpha$, en particular para $\alpha=0$ : $a_o=0$ y para $\alpha=1$ : $a_o+a_1=0$ , de donde resulta que $a_o=a_1=0$ : la función f es <u>nula</u>.

Admitiremos el

<u>TEOREMA FUNDAMENTAL 1</u>

Si para <u>todo</u> real $\alpha$, la función polinómica $f: x \rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ admite a $\alpha$ como cero,entonces esta función es <u>nula</u>.

En otras palabras, para todo número natural i, $a_i=0$.

Este teorema permite enunciar el



<u>TEOREMA 1 bis</u>

La función polinómica $f: x \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ es <u>nula</u> si, y sólo si, <u>todos sus coeficientes son nulos.</u>

<u>DEFINICION 3.-</u>

Dos funciones polinómicas $f: x \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ y $g: x \longmapsto \sum_{j=0}^{m} b_jx^j$ son <u>iguales</u>, cuando para <u>todo</u> número real x, se verifica $f(x)=g(x)$.

De aquí resulta el

<u>TEOREMA FUNDAMENTAL 2</u>

Las funciones polinómicas $f: x \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ y $g: x \longmapsto \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$ son <u>iguales</u> si, y sólo si, tienen el mismo grado y los mismos coeficientes.

Admitiremos el:

<u>TEOREMA FUNDAMENTAL 3</u>

Si la función polinómica $x \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ de grado n ($a_n \neq 0$) admite n+1 ceros <u>distintos</u>, entonces esta función es <u>nula</u>.

Como ejercicio, demuéstrese el teorema para n=1 y después para n=2; imagínese una demostración para cualquier n.

## 3.- FACTORIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA

El algoritmo de HORNER es un útil eficaz para <u>factorizar</u> las funciones polinómicas. Consideremos el caso de una función polinómica de tercer grado: $f: x \longmapsto a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$ . Sea $\alpha$ un número real.

Determinemos sucesivamente:

$$b_3 = a_3$$
$$b_2 = a_2 + \alpha b_3$$
$$b_1 = a_1 + \alpha b_2$$
$$b_o = a_o + \alpha b_1$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & a_3 & a_2 & a_1 & a_o \\
\alpha & & \alpha b_3 & \alpha b_2 & \alpha b_1 \\
\hline
 & b_3 & b_2 & b_1 & b_o
\end{array}$$

Los números reales $b_3, b_2, b_1, b_o$ son los coeficientes de HORNER asociados al par $(\alpha,f)$: vienen dados en función de los coeficientes de f y del real $\alpha$:

$$b_3 = a_3$$
$$b_2 = a_2 + \alpha a_3$$
$$b_1 = a_1 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_3$$

$$b_o = a_o + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + \alpha^3 a_3 = f(\alpha)$$

Veamos un ejemplo: $f: x \longmapsto x^3 - 4x^2 + x + 6$ ; $\alpha=2$ : $\alpha$ es un cero de f.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -4 | 1 | 6 |
| 2 | | 2 | -4 | -6 |
| | 1 | -2 | -3 | 0 |

Calculemos entonces:

$f(x) - f(2) = x^3 - 4x^2 + x + 6 - (2^3 - 4.2^2 + 2 + 6) = (x-2)(x^2 - 2x - 3)$

Como $f(2)=0$, resulta $f(x)=(x-2)(x^2 - 2x - 3)$.

2 es un cero de f y existe una función polinómica g tal que $f(x)=(x-2)g(x)$.

Nótese que <u>los coeficientes de la función polinómica g son los coeficientes de HORNER asociados al par (2,f)</u>. ¿Es una casualidad?

Sea f la función polinómica $x \longmapsto a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$ y $\alpha$ real; calculemos la imagen de $\alpha$ por f:

$$f(\alpha) = a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_o$$

y

$$f(x) - f(\alpha) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o - (a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_o) =$$
$$= (x-\alpha)(a_3x^2 + (a_2 + \alpha a_3)x + a_1 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_3).$$

Reconociendo los coeficientes de HORNER asociados al par $(\alpha,f)$:

$$f(x) = (x-\alpha)(b_3x^2 + b_2x + b_1) + f(\alpha)$$

En particular, si $\alpha$ es un cero de f, resulta

$$f(x) = (x-\alpha)(b_3x^2 + b_2x + b_1)$$

<u>TEOREMA 4 (de Paolo RUFFINI 1765-1822)</u>

Sea f la función polinómica $x \longmapsto \sum_{i=o}^{n} a_i x^i$ , en la que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_o$ son números reales.

Si $\alpha$ es un real y $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_o$ son los coeficientes de HORNER asociados al par $(\alpha,f)$, entonces:

$$f(x) = (x-\alpha)(b_nx^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_2x + b_1) + b_o \qquad \text{siendo}$$

$b_o = f(\alpha)$.

En particular, si $\alpha$ es <u>un cero</u> de f, el teorema de RUFFINI conduce al

<u>TEOREMA 5 (de factorización)</u>

Si $\alpha$ es un cero de la función polinómica f: $x \longmapsto \sum_{i=o}^{n} a_i x^i$ y si los reales $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_o$ son los coeficientes de HORNER asociados al par $(\alpha,f)$, entonces $b_o = 0$ y



$$f(x) = (x-\alpha)(b_nx^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + b_2x + b_1)$$

Así, el conocimiento de un cero de una función polinómica permite factorizarla. De aquí el

<u>TEOREMA 6</u>

Si $\alpha$ es un cero de la función polinómica f: $x \longmapsto \sum_{i=o}^{n} a_i x^i$, entonces existe una función polinómica g de grado n-1 tal que $f(x)=(x-\alpha)g(x)$; los coeficientes de g son los coeficientes de HORNER asociados al par $(\alpha,f)$.

g es <u>el cociente</u> de f por $(x-\alpha)$.

## 4.- <u>APLICACIÓN A LOS POLINOMIOS DE SEGUNDO GRADO</u>

Utilicemos los teoremas precedentes para estudiar la función polinómica de segundo grado f: $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Si $\alpha$ es un número real, el teorema de RUFFINI permite escribir:

$$ax^2 + bx + c = (x-\alpha)(ax + b + \alpha a) + c + \alpha b + \alpha^2 a$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | a | b | c |
| $\alpha$ | | $a\alpha$ | $\alpha b + \alpha^2 a$ |
| | a | $b+\alpha a$ | $c + \alpha b + \alpha^2 a$ |

Apliquemos de nuevo el teorema de RUFFINI a la función afín $x \longmapsto ax + b + \alpha a$:

$$ax + b + \alpha a = (x-\alpha)a + b\ 2a\alpha$$

| | | |
|---|---|---|
| | a | $b+\alpha a$ |
| $\alpha$ | | $\alpha a$ |
| | a | $b+2\alpha a$ |

De donde:

$$ax^2 + bx + c = (x-\alpha)\left[(x-\alpha)a + b + 2\alpha a\right] + c + \alpha b + \alpha^2 a$$

y

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + (b+2a\alpha)(x-\alpha) + c + \alpha b + \alpha^2 a} \qquad (1)$$

En particular, si $\alpha$ es <u>un cero</u> de la función f, $c + \alpha b + \alpha^2 a = 0$ y

$$ax^2 + bx + c = (x-\alpha)(ax + b + a\alpha).$$

Así, si $\alpha$ es un cero de f, el real $\beta$ , solución de $ax+b+a\alpha=0$,

$\beta = -\frac{b+a\alpha}{a} = -\frac{b}{a} + \alpha$ , es <u>también</u> un cero de f.

Por el teorema fundamental 3, éstos son los <u>únicos</u> ceros de f y

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = ax^2 + bx + c .$$

Resulta así, por una parte, que $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ , y por otra parte $\alpha\beta = -\alpha\frac{b+a\alpha}{a} = \frac{-b\alpha - a\alpha^2}{a}$ y como $c + \alpha b + \alpha^2 a = 0$ , resulta $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ .

Volvamos a (1) y calculemos $\alpha$ de modo que $b + 2a\alpha = 0$:

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad y \quad ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{2a} + \frac{b^2 a}{4a^2}$$

esto es, $ax^2 + bx + c = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ .

Esta es la forma canónica de la función f.

5.- APLICACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS

Sea f la función polinómica de grado n definida por

$$f: x \longmapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son n+1 números reales con $a_n \neq 0$ .

Si $\alpha$ es un real y si $b_0, b_1, \ldots, b_n$ son los coeficientes de HORNER asociados al par $(\alpha, f)$, entonces:

$f(x) = (x-\alpha)(b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1}) + b_0$ con $b_0 = f(\alpha)$.

Sea g la función polinómica de grado n-1 definida por

$$g: x \longmapsto b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1}$$

El teorema de RUFFINI aplicado a la función polinómica g(x) permite escribir: $g(x) = (x-\alpha)(c_2 + c_3 x + \ldots + c_n x^{n-2}) + c_1$ con $c_1 = g(\alpha)$.

Sea h la función polinómica de grado n-2 definida por

$$h: x \longmapsto c_2 + c_3 x + \ldots + c_n x^{n-2}$$

Se verifica:

$$\boxed{f(x) = (x-\alpha)^2 h(x) + (x-\alpha)c_1 + b_0}$$ de donde se deduce que

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} = (x-\alpha)h(x) + c_1$$

$c_1$ es la derivada de f en el punto $x=\alpha$.

Veamos un ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$$

Tenemos sucesivamente:

$g(x) = x^2 + (\alpha-3)x + \alpha^2 - 3\alpha + 4$

$h(x) = x + 2\alpha - 3$ con $c_1 = 3\alpha^2 - 6\alpha + 4$

Así $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$ .

LYON, 4 de Marzo de 1982



Resumen de la Conferencia:

## ALGUNOS PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS ¿QUE PUEDE HACER EL PROFESOR?

Pascual Llorente

Vamos a considerar algunos de los problemas presentes en la enseñanza de las matemáticas. No me referiré, sin embargo, a los problemas específicos de la enseñanza de algún tema particular, o de las matemáticas en general, sino a algunos de los problemas globales que determinan las condiciones de contorno que limitan el trabajo docente de los maestros y de los profesores de enseñanza media.

En primer lugar aparecen los problemas propios de toda escolarización de masas y las condiciones de contorno impuestas por la misma institución escolar: clases numerosas y heterogéneas, aulas inadecuadas y construidas en función de un cierto tipo de enseñanza tradicional, programas establecidos, horarios rígidos, enseñanza organizada "por años" (en escalera ascendente de prerequisitos) y "por materias" (compartimentada y esquizofrénica), etc.

En segundo lugar podemos considerar la crisis social propia de nuestro tiempo. Sin entrar en la tan debatida relación "crisis social - crisis escolar", podemos señalar: el valor de cambio de los títulos que otorga la institución escolar (distorsionando la motivación y la actitud hacia el estudio, de aquellos que aún creen en dicho valor, y cuestionando la utilidad de someterse a la escolarización, por parte de los otros), el carácter de la escolarización obligatoria (que no parece to-

talmente asumido aún ni por la sociedad, ni por los responsables de dicha escolarización, y que en muchos casos se presenta como un deber y una imposición, más que como un derecho), la actitud de los padres (que con frecuencia delegan en la escuela su responsabilidad educadora), la situación generada por un paro laboral creciente (que lleva a las aulas a muchos jóvenes que no desean estudiar sino trabajar), etc.

Por último (y sin que con ello se agote, ni mucho menos, esta compleja problemática), podemos señalar los problemas derivados de una visión deformada de la ciencia y de los científicos, y en particular: de las matemáticas y de los matemáticos. Esta visión tan generalizada se difunde, en gran medida (y como la mayoría de las "visiones" habituales de los diversos aspectos de la realidad), a través del bombardeo de imágenes y de "información" al que nos somete la televisión y otros medios de comunicación ("comics", series de "divulgación científica", etc) En el caso de las matemáticas existen, además, una serie de mitos del tipo: "las matemáticas son útiles pero muy difíciles", "las matemáticas son muy abstractas y sólo pueden comprenderlas unos pocos", etc. Todos conocemos las nefastas implicaciones que llegan a tener estos mitos para los estudiantes. La deformación que producen es tan grande como para llegar a extremos insospechados: Si un profesor enseña las matemáticas de manera que sus alumnos las entienden, éstos se sienten incómodos: sospechan que el curso es de "poco nivel" y temen tener dificultades en el curso siguiente.

Cada maestro, cada profesor, se encuentra sometido a estas (y otras) condiciones de contorno y, además, a una serie de presiones y exigencias: atenerse a los programas oficiales (que le son impuestos), preparar a



sus alumnos para los años siguientes, estimular a los alumnos capaces y recuperar a los rezagados, insertar a los alumnos "problemáticos" (asumiendo funciones de psicólogo), adecuarse a las necesidades de sus alumnos (asumiendo funciones de sociólogo), preparar a los futuros ciudadanos (cuando no, a los futuros adultos, asumiendo las funciones de los padres) y, por supuesto: enseñar matemáticas, estar al día en las nuevas metodologías y técnicas didácticas, actualizar sus conocimientos científicos, etc.

Esta situación produce una profunda insatisfacción que, la mayoría de las veces, se ve agravada por el fracaso del esfuerzo docente. Ante ella, los profesores suelen reaccionar oscilando entre actitudes eficientistas, paternalistas, represivas, de impotencia o de desinterés.

Uno de los propósitos de esta conferencia es el de hacer frente al pesimismo y a la sensación de impotencia que estas condiciones de contorno producen en muchos de nuestros colegas. Pero ...

¿Qué puede hacer, realmente, el profesor?

En primer lugar, puede ubicarse dentro de estas condiciones de contorno y tratar de plantear con claridad su situación, su problema y sus posibilidades.

Es necesario aprender a distinguir los problemas individuales de los problemas colectivos. Los problemas colectivos requieren soluciones y acciones colectivas (sociales, políticas, gremiales), cuando se intentan respuestas individuales se cae con facilidad en la impotencia y en la justificación del desinterés.

¿Cuáles son los problemas individuales del profesor? Naturalmente, la respuesta debe ser individual. Como yo lo veo, de lo que se trata es de ser feliz, de no ir a la clase a sufrir y a hacer sufrir a los demás, de hacer de nuestra actividad algo creativo y grato para nosotros y para nuestros alumnos.

En segundo lugar, puede recobrar el interés por lo que enseña y por enseñar. Si las matemáticas dejaron de ser algo interesante, atractivo y hasta apasionante para el profesor, ¿cómo puede entusiasmar a sus alumnos? ¿cómo puede comprometerse en su enseñanza? Pero si eligió esta profesión, por algo será. En algún momento las matemáticas despertaron nuestro interés. Si luego este interés se disipó (un par de "cursos-paliza" en la universidad suelen ser suficientes para conseguirlo), no existe ninguna razón para suponer que es imposible recobrarlo. Creo que también aquí los "mitos" juegan su nefasto papel paralizante: "las fronteras del conocimiento matemático son inalcanzables sin un largo y arduo estudio previo", "no es posible hacer investigación en matemáticas si no se manejan: el lenguaje de los esquemas, las sucesiones espectrales u otros instrumentos semejantes", etc. La verdad es que muchos problemas matemáticos interesantes (y no triviales) están a nuestro alrededor, se nos presentan en cuanto comenzamos a preguntarnos seriamente sobre algún aspecto de la realidad y son atacables sin necesidad de poseer ningún arsenal de elaborados instrumentos matemáticos (que, por otra parte, con frecuencia resultan inútiles para resolverlos).

En tercer lugar, puede tratar de conocer, criticar y utilizar las propuestas que generan los "especialistas" que tratan de indicarle cómo debe enseñar, pero sin dejarse deslumbrar por ninguna de estas "modas"



psicológicas (teorías de la psicología del aprendizaje), pedagógicas ("objetivos y evaluación", "diagnosis y prescripción", etc.) o metodológicas (deductivismo, método científico, habilidades de base, resolución de problemas, método genético, etc.). Todas estas "soluciones globales", todas estas "modas", corresponden a necesidades reales y cada una de ellas puede tener su valor y su utilidad aunque, necesariamente, relativo. El problema está en que los "especialistas", usando "modelos", insistiendo en su "carácter experimental", pretenden, en general, darles una validez "científica-objetiva-universal" y un carácter "neutral", sin reconocer las limitaciones y menos aún la carga subjetiva e ideológica de sus propuestas. Los grandes maestros (como Polya y Freudenthal) que han trabajado durante toda una vida en los problemas de la enseñanza de las matemáticas, suelen ser más humildes: no nos presentan soluciones mágicas e infalibles sino que se limitan a ofrecernos sus experiencias y los materiales que han elaborado "por si pueden servirnos". Como dice Freudenthal: "Los problemas educativos no pueden ser resueltos en un escritorio o en un laboratorio sino en el proceso educativo". Además, creo que si los "especialistas" realizan sus investigaciones sin considerar las condiciones de contorno reales que (en parte) hemos señalado, corren el riesgo de hacer "pedagogía-ficción" o "didáctica-ficción".

Otra cuestión que preocupa a los profesores y maestros es la de la finalidad de la enseñanza en general y de la enseñanza de las matemáticas en particular. Las respuestas más habituales son: la "pragmática o instrumentalista" (las matemáticas se enseñan porque son útiles y necesarias para ...) y la "formativa" (las matemáticas se enseñan para desarrollar ciertas habilidades: aprender a pensar, aprender a razonar,

etc.). Estas respuestas se suelen aceptar como "slogans", de manera acrítica, pero para muchos resultan insatisfactorias. En cuanto a la primera, se observa una notable falta de correspondencia entre las matemáticas que se enseñan para ... y las matemáticas que luego efectivamente se utilizan en ... (los ejemplos abundan y algunos de ellos resultan francamente grotescos); con demasiada frecuencia debemos concluir que la única utilidad que tiene un curso de matemáticas para nuestros alumnos es la de permitirles estudiar el siguiente curso de matemáticas. (Por supuesto que ésto no significa que las matemáticas no sean útiles: significa que el enfoque de la enseñanza es inadecuado y que no puede ser justificado por una finalidad pragmática). En cuanto a la segunda, parece implicar que el estudio de las otras asignaturas no puede tener un valor formativo similar, que se puede realizar sin necesidad de pensar y de razonar. Parece conveniente tratar de ser un poco más serios al considerar esta cuestión de la finalidad. Personalmente pienso que lo que mueve a los seres humanos hacia el estudio, el aprendizaje y la investigación, es la curiosidad, la necesidad de conocer la realidad en que se desenvuelven, la necesidad de crecer y emanciparse culturalmente. Por eso comparto la finalidad que se propone el Grupo de Génova, dirigido por el Profesor Boero: "Que el conocimiento y las habilidades matemáticas estén orientados hacia el conocimiento de aspectos importantes de la realidad (social, económica, científica e histórica), cuya finalidad sea el crecimiento y la emancipación cultural de los estudiantes".

Por último, me parece conveniente aclarar un punto. He dicho que debemos tratar de convertir nuestro trabajo docente en algo grato para



nosotros y para nuestros alumnos. Pero no hay que confundir "grato" con "fácil o trivial", no se trata de hacer demagogia. Debemos generar un comportamiento productivo en los estudiantes y ésto no es algo espontáneo en general. Comprender exige un esfuerzo intelectual, para hacerlo debe "valer la pena". Si pretendemos que nuestros alumnos hagan ese esfuerzo, debemos intentar responder a sus intereses y a sus necesidades reales.

Para terminar, sólo me queda desearles: a aquellos que lo tienen, que lo conserven, y a aquellos que lo han perdido, que recuperen el interés y la alegría de enseñar.

II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS.

Relación de PONENTES. (con indicación de las ponencias que presentan).

A

Aguado-Muñoz Prada, Ricardo.....(04)
Alvaro Galvache, María.....(33)
Arribas de Costa, Antonio.....(41)
Aznar Vallejo, Francisco.....(58)

B

Barragán Pérez, Isabel.....(36)
Barrio Calvo, Carlos.....(11)
Benach Nolla, Dolors.....(18)
Berini López-Lara, Marta.....(18)
Blanco Ruiz, Agustín.....(01) (02) (03) (04)
Balbuena Castellano, Luis.....(57) (58)
Bordás, Inmaculada.....(60)

C

Casadevall i Pou, Martí.....(22)
Cobarro Garcia, Manuel.....(15) (16)
Compostela Muñiz, Benita.....(02)
Corboró, Mª Victoria.....(26)
Carrillo Quintela, Mª Elisa....(54)
Cemelí, Ramón.....(62)

D, E

Deulofeu, Jordi.....(20) (38)
Escudé Jordi, Belén.....(21)
Estefanell i Bas, Joan.....(22)

F

Fajardo Utrilla, Juan Mª.....(17)
Fedriani Martín, Eugenio.....(24)
Flores Martínez, Pablo.....(19)
Font, Viçens.....(10)
Fortuny Aymemí, Josep Mª.....(20)
Fernández Reyes, M. .....(59)
Ferrero de Pablo, Luis.....(49)

G

Galdón Canavese, José Mª.....(46)
Gascón Pérez, José.....(40)
Gomis Bertrand, Elena.....(21)
González Dávila, Manuel.....(08) (11) (12)
Guerrero Casas, Flor Mª.....(25)
Garcia Serrano, Manuel.....(52)

H, I, J, K

Hernández Garcia, Rafael.....(12)

Relación de PONENTES. (continuación).


L

Lamarca París, José Mª.....(39)
Liborí Ramos, Aurea.....(14)
Lladó Casablancas, Carles.....(26)
López Carretero, Asunción.....(13)
Luelmo Verdú, Mª Jesús.....(53)

M

Malet Tomás, Antonio.....(27)
Martín Fernández, Manuel.....(28)
Martínez Blanco, José Mª.....(23)
Menéndez Lobato, José Mª.....(08)
de Miguel Garcia, José.....(29)
Molina Bravo, Juan Miguel.....(08) (09)
Moreno, Francisco.....(10)
Moreno Diaz de la Espina, Mª Fernanda..(47)
Madina Martín, Gabino.....(55)

N,O

P, Q

Pereda, Carmen.....(42)
Pérez Jiménez, Mario de Jesús.(37)
de Prada Vicente, Mª Dolores..(31) (32)
Palacios de Burgos, Mª Jesús..(53)

R

Rico Romero, Luis.....(43)
Robles Díaz, Ricardo.....(30)
Rodríguez Cordobés, Juan.....(34) (35)
Rodríguez Garcia, Manuel.....(45)
Rubialas Camino, Enrique.....(05) (50)
Ruiz Jiménez, Blas Carlos.....(06)
Rupérez Padrón, José A. .....(56)

S, T, U, V

Sierra Vázquez, Modesto.....(44)
Salvador Alcaide, Adela.....(48)
Socas Robayna, Martín M. .....(51)
Utgés, José Mª.....(61)
Viader i Canals, Pelegri.....(63)

X, Y, Z

Yabar Madinabeitia, José Manuel.(07) (20)
Zamarreño Fernández, Ricardo..(03)
Zabala Camarero-Núñez,Javier..(50)






# R E S U M E N E S  D E  P O N E N C I A S

01.-"Posibilidades gráficas de los microordenadores standard"
(2º y 3º de BUP). Agustín Blanco Ruiz. (Grupo 2001).

Estudio de las posibilidades gráficas de los microordenadores más usuales: tabulación; dibujo de curvas; segmentos horizontales y verticales. Aplicación a la representación de diagramas de barras, dibujo de curvas, mapas y superficies. Gráficos en movimiento.

02.- "Simulación y utilización de ordenadores en la Estadística de 3ºde BUP".
Agustín Blanco Ruiz. Benita Compostela Muñiz. (Grupo 2001).

Lanzamiento de monedas por todos los alumnos; estudio por estos de la sucesión de las frecuencias relativas y suestabilización. Idem para todos los lanzamientos efectuados por la clase. Introducción al concepto de probabilidad.
Introducción a la distribución binomial a partir de la combinatoria.
Introducción a la distribución normal mediante simulaciones realizadas con ordenador.
Utilización por el profesor de un ordenador para estudiar los ejemplos de distribuciones bidimensionales a proponer en clase.

03.- "Si Arquímedes hubiera tenido calculadora"
(2º de BUP). Ricardo Zamarreño Fernández. (Grupo 2001). Será leído por Agustín Blanco.

En el trabajo se plantea el cálculo del número $\pi$ como límite de una sucesión y las dificultades que plantean diversos algoritmos a una calculadora por los errores de redondeo, investigando cuál es el algoritmo más adecuado.

04.- "Las urnas... ¿están predestinadas?"
(BUP). Ricardo Aguado-Muñoz Prada. Agustín Blanco Ruiz (Grupo 2001)

En este trabajo presentamos un ejemplo de simulación con ordenador en el cual se estudia cómo varían los estados finales de las urnas al hacerlo los parámetros del programa. Hemos pretendido explotar al máximo la riqueza probabilística de una situación muy simple y, por otro lado, mostrar una de las posibilidades que tienen los ordenadores en el Bachillerato.

05.- "El microcomputador para recuperación individual del alumno. Tema: La parábola".
(8º EGB-1º BUP). Enrique Rubiales Camino. (Grupo 2001)

El programa realizado para un HP-85, se dedica a presentarnos en tres grandes apartados un repaso del tema: La parábola.
En el primer apartado se motiva el tema, simulando el lanzamiento de un proyectil desde un cañón.
En el segundo, es propiamente el estudio de la parábola; se ve cuál es el vértice, el eje, las ramas de distintas parábolas, etc..
Y por último en el tercero, se evalúa lo repasado por el alumno, de modo que si lo sabe, pase a otro tema y si no, se le recomienda vuelva a insistir en su estudio.

06.- "Una introducción del concepto de algoritmo en Bachillerato. Estructura general del ordenador".
Blas Carlos Ruiz Jiménez.

Ésta forma parte de un proyecto sobre la enseñanza de la Informática en los niveles de COU y Bachillerato y trato solamente de dos capítulos centrales:
1.- Idea de algoritmo. 1.1. Procesos. Descripción de estos. 1.2. Algoritmos numéricos. 1.3. Algoritmos y programas. 1.4. Esquemas de flujo de control.
2.- Estructura general del ordenador. 2.1. Elaboración manual y elaboración automática. 2.2. Programa máquina. 2.3. Otros lenguajes de programación.

07.- "Las máquinas de calcular y el aprendizaje del cálculo mental"
(EGB). José Manuel Yabar Madinabeitia.

Explicación de una experiencia realizada con niños de 3º y 4º de EGB sobre el aprendizaje del cálculo mental utilizando máquinas "Dataman" y máquinas de calcular sencillas con constante y memoria acumulativa. Se explicarán los siguientes apartados:
1. Análisis del aprendizaje del cálculo mental.
2. Explicación de la experiencia
   - tipos de ejercicios trabajados
   - procesos seguidos
3. Resultados obtenidos y conclusiones.

08.- "El lenguaje BASIC como EATP en el Bachillerato"
José María Menéndez Lobato. Juan Miguel Molina Bravo. Manuel González Dávila.
(Sem. Matemáticas I.B. Mixto 3 - Jerez de la Frontera)

Análisis de la experiencia llevada a cabo en el I.B. Mixto 3 de Jerez de la Frontera, impartiendo como EATP el lenguaje BASIC utilizando el Microordenador económico Sinclair ZX81:
- Programa detallado sobre BASIC en general.
- Utilización de la Computadora ZX81.
- Particularidades del lenguaje BASIC del ZX81.
- Tipos de programas.
- Programa previsto para 3º de BUP.
- Utilización del ZX81 en la mecanización de la Matrícula.
- Ideas sobre la utilización didáctica del Microordenador en la asignatura de Matemáticas.



09.- "Notas didácticas sobre Geometría: Una introducción a $V^2$ con un apoyo práctico"
(2ºBUP). Juan Miguel Molina Bravo. (Grupo Didáctica Matemáticas Cádiz)

El objetivo de estas notas es hacer asequible el espacio vectorial $V^2$ o, al menos, el manejo de sus elementos con un mínimo de garantías para su posterior uso en el estudio de la geometría del plano, a ese alumno de nivel medio o bajo que aprende "haciendo". Para ello planteamos el estudio del plano como la realización de "itinerarios" por él, compuestos por tramos rectos; lo que nos va a llevar a presentar los vectores libres como traslaciones. Para caracterizar estas traslaciones (lo que equivale a dar módulo, dirección y sentido) se utilizará un procedimiento basado en el manejo de la cinta métrica y la brújula, aparatos conocidos por el alumno y de uso corriente en los desplazamientos terrestres y en la navegación.
Este interés en hacer la exposición en términos "razonables" para el alumno nos lleva a no cuestionar cosas que él no hubiera llegado a cuestionarse nunca, dejando un margen a la intuición natural que le llevará a reconocer, por ejemplo, una traslación como algo que no está exclusivamente ligado a los puntos inicial y final en los que se está utilizando, sin necesidad de tener que dar vida a entes ideales que lo único que producen es un choque con su mentalidad en un intento de conseguir una delimitación rigurosa de los conceptos.

10.- "Geometría afín"
(2º-3º BUP). Vicens Font y Paco Moreno (Grup Zero)

Introducción al espacio vectorial y aplicación a la geometría analítica.
- Es un tema que ahora coincide con el programa de 2º BUP, y existe la intención de continuarlo. (No se separa la geometría afín de la métrica).
- Estructura del tema:
  1) La idea es el estudio de la geometría analítica (estudio de las curvas del plano).
  2) Para hacerlo no necesitamos los vectores, pero los introducimos porque se necesitan en Física (permite una cierta interdisciplinariedad) y porque están en el programa.

11.- "Notas didácticas sobre Geometría: Una introducción a la norma, producto escalar y coseno"
Manuel González Dávila. Carlos Barrio Calvo. (Didáctica de Cádiz)

Se trata de una introducción muy sencilla a los conceptos de norma, producto escalar y coseno, ilustrando además el proceso de definición en Matemáticas. Respecto a la norma, lo que se hace es enumerar las propiedades intuitivas que debe cumplir la"longitud de un vector" y después probar con funciones sencillas hasta encontrar una que satisface las condiciones exigidas y después de haber justificado la eliminación de otras posibilidades. En el producto escalar y el coseno, el punto de partida es análogo: la búsqueda de una fórmula que nos mida la "abertura" formada por 2 vectores. Después de algunos intentos se llega a las definiciones buscadas.

12.- "La Geometría Afín del plano"
Manuel González Dávila. Rafael Hernández García. (Didáctica de Cádiz)

Existe un acuerdo generalizado sobre los inconvenientes y dificultades del uso de los vectores para desarrollar la Geometría. No se puede negar, por otra parte, algunas de sus ventajas; en particular su potencia como método general para estudiar la Geometría de cualquier espacio. En esta ponencia se analizan las causas de tales dificultades y se desarrolla la Geometría Afín sin métodos vectoriales y se sugiere un desarrollo opcional, muy sencillo, que permite que los vectores aparezcan de una forma natural sin necesidad de construcciones formales complicadas (equipolencia), es decir aprovechando sus ventajas y eliminando sus inconvenientes didácticos.
Se pretende además que este desarrollo ilustre lo que es la Geometría: una construcción natural y hasta cierto punto experimental.

13.- "Sicología genética y aprendizaje de las Matemáticas"
(1ª etapa EGB). Asunción López Carretero. (IMIPAE)

Las concepciones epistemológicas y psicológicas del presente siglo aportan datos de gran relevancia que inciden directamente en la forma de abordar el aprendizaje. El IMIPAE centra su campo de investigación en el estudio de cómo el pensamiento infantil construye espontáneamente el conocimiento y en la elaboración de los métodos de aprendizaje que inciden favorablemente en su desarrollo. En esta ponencia expondremos algunos de los trabajos realizados en el área de Matemáticas.

14.- "Construcción de una representación gráfica: El gráfico cartesiano"
(8º EGB). Aurea Líbori Ramos. (IMIPAE).

Este aprendizaje plantea de que sean los propios niños los que construyan su propio sistema de representación, construcción imprescindible para que luego puedan llegar a interpretar y utilizar el universal.
La experiencia se llevó a cabo en 8º de EGB en la Escuela Municipal PAU VILA centro experimental del IMIPAE, donde se imparte Pedagogía Operatoria y en el marco de una enseñanza globalizada. Contempló las fases de:
- Creación de formas de representación gráfica.
- Acuerdos para llegar a una representación colectiva.
- Interpretación y utilización del sistema de representación convencional.

15.- "Ensayo de educación personalizada en Matemáticas"
(EGB). Manuel Cobarro García (INDIMA)

Trata de una experiencia que se está realizando en el ciclo superior de EGB en su tercer año y en ocho colegios de la Región de Murcia conjuntamente.
1.- Características esenciales de la metodología que se ensaya.
2.- Diseño de la experiencia. Análisis de los resultados obtenidos en el curso 81-82. (Comentario sobre los Programas Renovados). Recursos.
3.- Comentario del tratamiento didáctico dado a los temas: Iniciación a la Lógica y lenguaje simbólico, Funciones y Concepto de número racional. Estos tres temas serán tratados a título de ejemplos.



16.- "El Seminario de Didáctica del ICE como medio de perfeccionamiento didáctico e innovación"
(EGB, BUP, FP). Manuel Cobarro García. (Sem. Permanente Matemáticas EGB del ICE de Murcia).

Ofrecemos el esquema organizativo de nuestro joven Seminario, al tiempo que recogeríamos todas las sugerencias de otros equipos de trabajo.
- ¿Por qué se constituyó el Seminario?
- Objetivos
- Medios
- Organigrama.

17.- "Un enfoque sistemático de la educación: El método didáctico de LANDA"
(Enseñanza Media). Juan María Fajardo Utrilla.

El alza creciente de los métodos didácticos basados en el empleo de los miniordenadores; los especiales modos de pensar que los planteamientos informáticos llevan consigo; la necesidad cada vez más acuciante de la estructuración del pensamiento y la selección de la información, tan caudalosa, son razones - entre otras muchas - que nos llevan a desarrollar en estas II Jornadas un esbozo del Método didáctico-algorítmico de LANDA, elaborado en la URSS en la década de los sesenta e implantado con probada eficacia.
El Método de LANDA se basa, esencialmente, en la evaluación de la información de retorno alumno-profesor, analizando no los resultados (evaluaciones, controles, pruebas, etc.) sino los procesos mentales simples del razonamiento matemático y heurístico. De esta forma, se clasifican las dificultades del aprendizaje y ejercicio matemáticos en varios grupos, se analizan los defectos más frecuentes de la actividad mental de los alumnos y se proponen, en la medida de lo posible, métodos sistemáticos para abordar con éxito tales dificultades.

18.- "Recursos metodológicos"
(1º y 2º BUP, 2ª etapa EGB, 1er ciclo FP). Marta Berini López Lara. Dolors Benach Nolla. (Grup Zero)

Presentación de algunas actividades que pueden realizarse en clase como complemento del trabajo diario: murales, puestas en común, pasatiempos; construcción de aparatos de medida, etc....

19.- "Fichas semiprogramadas en la enseñanza del Algebra en 1º de BUP"
Pablo Flores Martínez.

Frente a la clase "dictada" que en 1º de BUP es especialmente poco efectiva, el método activo intentaría crear unas clases en las que el alumno "haga su propia ciencia". Nos encontramos en una situación en la que no es posible dejar absolutamente de lado los programas y, por otra parte, no hay suficientes estudios de aplicación del método activo al desarrollo de las clases. Por esto el presente trabajo pretende dar un paso intermedio en este proceso. En él, el alumno "hace su ciencia" con unos elementos mínimos al alcance de cualquier centro: Fichas Semiprogramadas (fotocopiadas o multicopiadas) y libro de texto, principalmente. La clase se convierte con ellas en una serie de equipos de trabajo que, durante una semana o diez días se dedican a completar las actividades que le vienen encomendadas en las fichas. Al final del período de estudio dedicado a cada ficha una prue-a, programada simultáneamente a la ficha, permitirá contrastar los resultados obtenidos. Otras pruebas propuestas por profesores distintos al experimentador y un cuestionario relleno de manera anónima por los alumnos suministran unos datos que den idea de la validez del método.

20.- " Un acercamiento experimental de la Geometría en las Escuelas de Magisterio".
(2º y 3er ciclo EGB). Josep M. Fortuny Aymemí. (Departamento de Matem. EGB Sant Cugat).

Esta ponencia la hemos dividido en tres partes:
1. Análisis de la situación real de los alumnos de Magisterio respecto a su formación de los conceptos geométricos básicos.
2. Formulación de los Objetivos y Metodología de la enseñanza de la Geometría en las Escuelas de Magisterio, teniendo en cuenta el apartado anterior.
3. Ejemplo concreto de la metodología anterior: "Una manera de introducir el concepto de mediatriz".

21.- "Las transparencias en clase de Matemáticas"
(1º y 2º BUP, 2ª etapa EGB y 1er ciclo FP). Elena Gomis Bertrand. Belén Escudé Jordi. (Grup Zero)

Exposición práctica, con la proyección de transparencias, y comentario sobre las ventajas de su utilización.

22.- "Límite de sucesiones"
(BUP). Martí Casadevall i Pou. Joan Estafanell i Bas. (Grup Zero)

A partir de unos problemas de cálculo aproximado (superficies, número $\pi$), se pasa de la visión intuitiva a una definición más formal, primero de límite infinito, luego de límite cero y, finalmente, de límite en general, procurando utilizar un lenguaje matemático lo más simple y sugerente posible.

23.- "Introducción del número e (un ejemplo del uso de la Historia)"
(2º BUP). José María Martínez Blanco.

Para la mayoría de los bachilleres el número "e" es un enigma. La ponencia explica cómo puede utilizarse la historia (los métodos genéticos) para dar forma didáctica a una introducción elemental del número "e". Para ello se utilizan las ideas de Bürgi y Neper y se hace una reconstrucción de los trabajos que condujeron a las primeras tablas de logaritmos, con lo que se facilita que el alumno desvele ese misterio llamado número "e".

24.- "Algunos problemas didácticos de la Matemática en 1er ciclo universitario con alumnos repetidores"
Eugenio Fedriani Martín.

Estudiados superficialmente algunos problemas de didáctica de la Matemática en primer ciclo universitario de carreras no científicas y en especial de la Facultad de Ciencias Económicas de Sevilla, se presenta un "curso de repetidores" de Análisis Matemático de esta facultad. Se trata de una experiencia que viene realizando en el curso 81-82.



25.- "Valoración del 'Curso especial de repetidores' de Análisis Matemático de Ciencias Económicas y Empresariales de Sevilla"
Flor María Guerreros Casas.

Se hace una descripción de algunos aspectos de un curso especial para alumnos repetidores, organizado por el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Sevilla, como intento de resolver ciertos problemas didácticos de la Matemática en esta Facultad.
La valoración obtenida se considera positiva y se hace a través de unos resultados parciales de rendimiento académico y de una encuesta realizada a los alumnos.

26.- "Cómo hemos trabajado en 1º de BUP este curso 1981-81, utilizando el material elaborado por el Grup Zero"
Carles Lladó Casablancas. María Victoria Corberó. (Grup Zero)

Desde una óptica de "intercambio de experiencias" queremos explicar cómo hemos trabajado en algunas clases de 1º de BUP durante este curso 1981-82, intentando poner en práctica unas mínimas pautas metodológicas, más en consonancia con las características propias de los alumnos de este nivel:
- no trabajar durante periodos muy largos de tiempo en un mismo tema.
- aprovechar cualquier centro de interés de los alumnos.
- ver un mismo tema desde distintos puntos de vista y en distintos momentos.
- no desaprovechar ninguna oportunidad de trabajar en forma interdisciplinar.

27.- "Los orígenes de la Teoría de grupos"
Antonio Malet Tomas.(Grupo Matemáticas ICE Universidad de Barcelona)

La Teoría de Grupos nace, según la tradición, en una breve Memoria de E. Galois que, tras la valoración que de ella hizo S. D. Poisson, fue rechazada en primera instancia por la Academia Francesa de Ciencias en 1831. El mismo trabajo, amparado por el prestigio de J. Liouville, obtuvo el reconocimiento público doce años más tarde. La ponencia describe las fuentes y el contenido de dicha Memoria e intenta comprender su primer fracaso académico. A partir de ello se analizan los primeros pasos de camino que conduce a las formulaciones algebraicas actuales, lo cual finalmente, permite revisar desde una perspectiva epistemológica el papel predominante que una cierta filosofía ha concedido a las estructuras algebraicas en la enseñanza de las Matemáticas.

28.- "Aspectos metodológicos-intuitivos en el estudio de gráficas"
(BUP). Manuel Martín Fernández.

- Una metodología intuitiva para llegar al concepto de pendiente de una curva en un punto.
- Estudio de casos de no existencia.
- Análisis intuitivo de la "regularidad" de la curva. Gráfica de pendientes.
- Estudio de los diferentes casos de pendiente cero. Gráficas de pendientes sucesivas. Caracterización intuitiva (Criterio general sobre determinación de máx. y min.).
- Concavidad, convexidad y puntos de inflexión: caracterización intuitiva (criterios de convexidad).

29.- "Interrelación Física-Matemática. Las funciones circulares y el m.a.s., su aplicación al estudio del péndulo matemático"
(3º BUP y COU). José de Miguel García.

El autor considera que para una mejor enseñanza de la Matemática es necesario exponer al alumno trabajos donde se vea claramente la interrelación de la Matemática con distintos fenómenos físicos. En esta ponencia se puede ver cómo están relacionados el m.a.s. con las funciones circulares; cómo se usa de la extrapolación de datos para solucionar casos de indeterminciones; cómo debe de elegirse la media más apropiada para representar el valor de una magnitud; cómo se pueden construir las gráficas de distintas funciones y cómo el trabajo experimental abre el camino de una investigación sobre un determinado fenómeno. El objetivo de este trabajo es encontrar un método para obtener el periodo de un p.m. con amplitudes de hasta 90º, asociando dos movimientos con el mismo periodo, y cuya comprensión esté al alcance de un alumno de 3º de BUP o de COU.

30.- "Cálculo de un determinante mediante una calculadora de bolsillo programable".
Ricardo Robles Díaz.

Se describe el procedimiento del cálculo de un determinante mediante el método del pivote, poniendo de manifiesto el ahorro de operaciones que supone frente a la aplicación directa de la definición de determinante. Se detalla posteriormente el diagrama de flujo de dicho algoritmo utilizando instrucciones BASIC y se pone de manifiesto la posibilidad de ser programado utilizando mínimos requerimientos de memoria, lo que permite el uso de una calculadora de bolsillo programable. Se describen entonces dos programas, uno en BASIC para una calculadora de mesa HP-85 y otro en el lenguaje propio de la calculadora de bolsillo TI-59, que permiten por un lado, comentar ciertas técnicas de programación con pequeñas calculadoras y por otro, establecer algunas comparaciones.

31.- "La conexión EGB-BUP"
María Dolores de Prada Vicente.

Se tratará de los diversos estudios realizados sobre la conexión EGB-BUP en distintos distritos universitarios y comentario al respecto.

32.- "Los programas renovados de EGB"
María Dolores de Prada Vicente.

Se tratará sobre la orientación general que ha guiado la elaboración de los programas renovados de EGB: objetivos, contenidos, etc..

33.- "Aplicaciones prácticas de la enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato"
María Alvaro Galvache.

Dado el alejamiento de la enseñanza de las Matemáticas en BUP, se pretende hacer un acercamiento de estas enseñanzas a los problemas reales; como respuesta se trata un problema de secuenciación de trabajos en un taller, partiendo de los conceptos de combinatoria que posee el alumno.



34.- "Didáctica de la numeración"
(Ciclo inicial de EGB). Juan Rodríguez Cordobés.

En primer lugar haré una introducción de los fallos que a mi entender se dan en la actual didáctica de la numeración.
No conveniencia del sistema de numeración binario en el ciclo inicial de la EGB.
Relación de la numeración con la elaboración de la escritura matemática y la convención de los signos matemáticos.
Construcción operatoria de los números.
Introducción a la base zopo. Una experiencia de un nuevo sistema de numeración con niños en primero de EGB.
Comentario a esta experiencia.

35.- "Una aportación a la didáctica de las operaciones matemáticas: Didáctica de la raiz cuadrada".
(2ª etapa de EGB). Juan Rodríguez Cordobés.

Se trata de una eportación para comprender todos y cada uno de los pasos que se dan en la mecánica de la raiz cuadrada. Empezaré exponiendo una encuesta sobre esta operación, para después, ir explicando cada uno de estos pasos con un material adecuado (decímetros cuadrados, tiras de decímetros por centímetros y centímetros cuadrados).
Primero haremos la operación empíricamente con papel milimetrado, después manipulando el material y por último lo trasladaremos al lenguaje gráfico.

36.- "Exploración del espacio. Una introducción al estudio intuitivo de formas y relaciones espaciales en el plano".
(Ciclos medio y superior de EGB). Isabel Barragán Pérez.

Mediante una exploración activa se pretende que el niño llegue a adquirir conceptos y relaciones sobre entes geométricos.
Recubrimos el plano por triángulos equiláteros y proponemos una serie de actividades que llevarán al descubrimiento de diversas figuras y propiedades geométricas.
Generalizamos las observaciones al caso de recubrimiento por triángulos cualesquiera.
Planteamos posibles aplicaciones al cálculo en determinadas situaciones.

37.- "La recurrencia transfinita en el primer ciclo universitario"
Mario de J. Pérez Jiménez.

Con frecuencia suele decirse que se "construye una aplicación" de un conjunto bien ordenado no vacío $(A, \leq)$ en un conjunto B (las sucesiones recurrentes constituyen el ejemplo más significativo) mediante el siguiente esquema ("proceso recurrente"): 1º. Se define la imagen del primer elemento $\underline{a}$ de $(A, \leq)$. 2º. Si $x \in A - \{a\}$ entonces, supuestas conocidas las imágenes de los elementos estrictamente menores que $\underline{x}$, se define la imagen de $\underline{x}$, a partir de éstas. En el presente trabajo se analizan en profundidad tales procesos demostrándose que, salvo en el caso A finito, no definen directamente una aplicación de A en B, lo cual obliga a un replanteamiento del problema de la recurrencia con el fin de compatibilizar lo "intuitivamente evidente" con lo "matemáticamente plausible". Asímismo, se justifica la conveniencia de desarrollar y resolver en su totalidad los procesos recurrentes en el primer ciclo universitario, con la aportación de razones metodológicas, didácticas y múltiples aplicaciones prácticas que hacen aconsejable su tratamiento a dicho nivel.

38.- "En torno a la metodología del Grup Zero de Barcelona"
Jordi Deulofeu. (Grup Zero)

Esta ponencia constará de dos partes:
- En primer lugar una breve exposición de cuáles han sido las bases de nuestro trabajo (matemáticas constructivas, ligadas a cuestiones reales y concretas, etc.).
- En segundo lugar queremos hacer un análisis autocrítico de nuestro material en el sentido de ver hasta qué punto la metodología de resolución de problemas es exactamente la nuestra y qué ventajas e inconvenientes tiene nuestra metodología respecto a otras más tradicionales.

39.- "Detección de errores en el cálculo aritmético: un ensayo metodológico" (BUP, COU). José María Lamarca París. (Grup ARESTA)

A partir de la observación de la persistencia de los errores básicos de cálculo aritmético cometidos por un sector no despreciable del alumnado de bachillerato en general, este trabajo pretende, por un parte, poner de manifiesto la magnitud del problema y, por otra, exponer las bases de una metodología destinada a aumentar la capacidad de los alumnos para detectar dichos errores.

40.- "Diagnóstico y recuperación de la adquisición de contenidos" (BUP, COU). José Gascón Pérez.(Grup ARESTA)

La observación de nuestros alumnos nos ha llevado a la convicción de que la etapa más básica del aprendizaje radica en la adquisición de conocimientos sobre contenidos.
Las dificultades en esta etapa bloquean el progreso del alumno y constituyen un factor importante en el fracaso escolar.
El Grup ARESTA está desarrollando una metodología cuyo objetivo inmediato consiste en disminuir dichas dificultades; dicha metodología parte de criterios empíricos y pretende tomar en consideración las dificultades específicas de cada alumno.

41.- "Actividades y ejercicios para el desarrollo del tema de Estadística en 1º de BUP".
Antonio Arribas de Costa. (Grupo Gamma)

A partir de dos experiencias sencillas realizadas por los alumnos, desciframeinto de un mensaje y encuesta sobre el profesorado, se inicia directamente el tema y la metodología experimental de la Estadística.
El desarrollo del tema en clase se hace mediante ejercicios y actividades que los alumnos realizan con la orientación del profesor. Se pretende que los alumnos sean capaces, mediante descubrimiento personal, de alcanzar las correspondientes técnicas, conceptos y actitudes.
Se comentarán los objetivos del tema y la metodología seguida en su desarrollo, así como algunos puntos concretos, como los posibles engaños, equívocos y manipulaciones en las informaciones Estadísticas.
Se presentará un sistema de evaluación compuesto por varios elementos: preguntas abiertas, prueba de respuesta múltiple y trabajo de campo.
Para ilustrar y completar la visión del trabajo presentado se entregará un extracto del material.



42.- "Sobre la iniciación en Matemáticas en el comienzo de la E.G.B."
Carmen Pereda

Si se admite que el pensamiento lógico y los conceptos matemáticos tienen su origen en las percepciones y acciones del sujeto,el principal objetivo de la enseñanza de Matemáticas en E.G.B. es dar un fuerte soporte sensorial y motriz a los primeros conceptos matemáticos,que ayude a la formación de representaciones internas y permita el dinamismo de las asociaciones.
Examinaremos las ideas de A. Lapierre para la utilización de los ejercicios psicomotrices para el desarrollo de la lógica del niño y para la iniciación conjunta en Matemáticas, ritmo, desarrollo del lenguaje,etc.
Después, en una actividad concreta con un material en uso, "Números en color", veremos cómo un material permite introducir un concepto numérico, motiva y justifica la introducción de las operaciones y permite el paso a representaciones simbólicas que permiten la automatización del cálculo.

43.-"Progrmación del bloque de las fracciones en el ciclo medio de la E.G.B."
Luis Rico Romero( Grupo Granada Mats).

Los nuevos cuestionarios suponen una modificación importante en la costumbre de señalar contenidos concretos para niveles concretos; actualmente se asignan periodos más ámplios- ciclos- para la adquisición de un conocimiento pero al mismo tiempo se dá mayor precisión a los aspectos que deben lograrse- objetivos-.
De acuerdo con la nueva planificación éste trabajo intenta diseñar un posible desarrollo del bloque temático de las fracciones. Analizamos las posibilidades del alumno, la progresión en los contenidos, las distintas metodologias y los objetivos finales propuestos. Tenemos así mismo en cuenta los resultados obtenidos en algunas investigaciones realizadas sobre la adquisición de éstos conceptos. Con todo ello elaboramos una propuesta de -- programa que entendemos es interesante para el profesor de Matemáticas de éste ciclo y de los posteriores.

44.- "Estudio de los programas renovados de Matemáticas en los ciclos Medio y Superior".
(E.G.B.). Modesto Sierra Vázquez.(Didáctica de las Matemáticas de E.G.B. del I.C.E. de la Un. de Salamanca).

El grupo de estudio está en general de acuerdo con el documento inicial en el que el M.E.C. exponia la filosofia sobre los programas renovados; sin embargo observa que dicha filosofia no se traduce posteriormente en el documento sobre los niveles básicos de referencia.
En cuanto al estudio realizado sobre los ciclos medio y superior se expondrán aquellos puntos en los que estamos en desacuerdo. Así, por ejemplo,en el ciclo medio disentimos del tratamiento que los programas renovados dan a la teoria intuitiva de conjuntos y damos una alternativa sobre dicho tema. En lo referente al ciclo superior,entre otras cuestiones creemos posible la construcción de Z y Q en contra de lo manifestado en el documento del M.E.C.
El estudio se ha realizado contrastando con la práctica escolar diaria.

45.- "Didáctica de las Matemáticas en la 2ª etapa de E.G.B. y Enseñanzas medias. Sistema de evaluación"
Manuel Rodriguez Garcia.

La fuente del saber matemático se encuentra en los libros.El alumno no acude a las fuentes quizás porque les son inaccesibles, contentándose tan sólo con lo que el profesor le ofrece, satisfaciéndose con alcanzar procesos mecanizados.
La didáctica que se propone parte de la idea elemental de conseguir la alfabetización y conceptualización matemáticas facilitando la capacidad discriminativa, incrementando las posibilidades de análisis y síntesis y adiestrando en las transferencias de conocimientos teóricos a casos prácticos. Así mismo, ofrece un sistema de autoevaluación y medición de rendimientos que permiten pronosticar la evaluación de los alumnos y predeterminar los valores esperados potenciando la capacidad de autocrítica de los alumnos que le señala hacia dónde han de ir dirigidos sus esfuerzos.

46.- "Método audiovisual de Matemáticas en 2º de BUP: motivación, refuerzo y recuperación."
José Mª Galdón Canavese.

Hemos elaborado un método, para todos los temas de matemáticas de 2º de BUP, consistente en la visualización mediante diapositivas y audición mediante cassettes (montaje) de los conceptos desmenuzados paso a paso. La estructuración general del curso audiovisual está basada en los Espacios vectoriales. El soporte físico consiste en 600 diapositivas y 6 horas de grabación en cassettes, a las que se les puede sumar otras complementarias de retroacción, interviniendo la voz del alumno con los tópicos y dudas que se le plantean con frecuencia.

47.- "Programación de 2º de BUP."
Mª Fernanda Moreno Diaz de la Espina. (Grupo Mendoza ).

A.- Espacios: 1.- Espacios vectoriales reales. 2.- El plano afín. 3.-El espacio afín.
B.- Trigonometria: 1.- Definiciones y relaciones fundamentales. 2.- Resolución de triángulos.
C.- Cálculo: 1.- Recta real. 2.- Funciones reales. 3.- Límites y continuidad. 4.- Derivadas y primitivas. 5.- Integral definida.

48.- "Geometria en 3º de BUP."
Adela Salvador Alcaide (Grupo Cero).

- Geometria: su olvido en los planes de estudio.
- ¿ Qué enseñar?: .No a la Geometria de Euclides.
  .No a una geometria algebraica o analítica.
  .Transformaciones geométricas.
- ¿ Cómo enseñarlo?: Una propuesta sobre una forma de enseñar las isometrías planas y las isometrías en el espacio a partir del estudio de "motivos mínimos".



49.-"Consideraciones críticas sobre los Programas renovados de Matemát icas" (EGB) Luis Ferrero de Pablo (Didáctica Matem. EGB Madrid).

- Crítica global de los Programas.
- Ciclo inicial.
- Ciclo medio.
  Consideraciones generales.
  Consideraciones particulares.
- Conclusiones.

50.- "Programa de Informática como E.A.T.P. en 2º y 3º de BUP"
Enrique Rubiales Camino. Javier Zabala Camarero-Núñez (Grupo 2001)

Se presente un programa razonado de la Asignatura de Informática como EATP en BUP.

51.- "Experiencias didácticas en Matemáticas en el ciclo inicial de EGB"
Martín Manuel Socas Robayna (Sociedad Canaria Prof. Mat.)

Presentación de algunas experiencias de aprendizaje de la Matemática en el Ciclo Inicial de EGB y de una línea metodológica para la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina,que está llevando a cabo el equipo de trabajo:"Programación en EGB" de la S.C.P.M. en diversos Colegios Públicos de la Provi ncia de Tenerife.

52.- "Apéndice de la programación de 2º de BUP"
Manuel García Serrano. (Grupo Mendoza)

Ya que en 2º de BUP se ve el cálculo de Derivadas y pensando que algunos alumnos no escogerán Matemát icas en 3º, pensamos que en 2º se debe ver la relación que existe entre la derivación y el cálculo de áreas. De una manera muy simple lo vemos nosotros en nuestra Programación y sobre esto, en definitiva, trata el tema que adjuntamos. Se explica la propiedad del valor medio, el Teorema fundamental del Cálculo integral y la regla de Barrow.

53.- "Aportaciones al Álgebra de matrices"
(COU - Interdisciplinaridad) Mª Jesús Luelmo Verdú. Mª Jesús Palacios de Burgos. (Colectivo Leonés Didactica Matemáticas).

Presentamos u na introducción intuitiva al concepto de matriz y álgebra matricial, seguida de trs pequeños estudios que desarrollan lo anterior, y que pueden plantearse como trabajos a realizar por los alumnos.
Con ello intentamos dar un modelo de "matemáticas en la realidad", entendiendo que la actividad matemática, sobre todo en sus fases elementales, es un proceso que no sólo se aplica a la realidad, sino que surge del análisis de multitud de fenómenos, en apa riencia dispares, pero que pueden simbolizarse con un mismo concepto matemático. Este tratamiento,que en líneas generales refleja el proceder del científico, permite también un acercamiento al ideal interdisciplinar que debe caracterizar a la enseñanza elemental y media.

54.- " El número natural en la primera etapa de EGB"
Mª Elisa Carrillo Quintela (Grupo Cero Valencia)

Concepto familiar del número en el niño. Concepto matemático elemental de número natural. Aspectos cardinal y ordinal. Introducción y reflexión sobre el número en el primer ciclo de EGB. Presentación de una experiencia.

55.- "Técnicas de trabajo intelectual aplicadas a la Matemática"
(EGB - BUP) Gabino Madina Martín. (Sedad. Canaria Prof. Mat.)

Se parte del hecho de que en la estructura educativa actual no existe ningún ente que tenga como misión específica la de orientar a los alumnos en las técnicas del trabajo intelectual.
Este equipoparte de esa realidad e intenta ir un poco más allá informando no sólo de unas nociones mínimas generales, sino que profundiza especificamente en la matemática, por entender que esta disciplina requiere unas técnicas diferenciadas.
Dada la amplitud del tema, se optó por parcelarlo y concentrar los esfuerzos en capítulos tales como "los apuntes de Matemáticas", "como realizar el acto de estudiar Matemáticas", etc.

56.- "Los sesángulos"
(EGB) José Antonio Rupérez Padrón (Sdad. Canaria Prof. Mat.)

Se trata de la exposición de un material estructurado, basado en los Hexagramas del Dr. Salomón, utilizable para el desarrollo de conceptos lógicos, geométricos, estéticos, lingüísticos, etc, mediante el principio "Jugando aprendemos" de Leibnitz. El trabajo se encuentra en el periodo de recolección de datos experimentales en los niveles medio y superior de la EGB.

57.- "Los Seminarios Didácticos de Matemáticas"
Luis Balbuena Castellano (Sdad. Canria Prof. Mat.)

Se parte de la idea de que los Seminarios Didácticos juegan un papel central en el desarrollo de la asignatura. Se definen éstos, se analizan sus objetivos así como las posibles razones de su no funcionamiento en general, y se exponen, finalmente, un conjunto de ideas y sugerencias que podrían contribuir a su funcionamiento real. Son actividades que han sido experimentadas en diversos seminarios y que se presentan sólo a nivel orientador. Cada Seminario tendría que adaptarlas a sus especiales peculiaridades, pues se sostiene la idea de que las circunstancias de cada Centro hacen que los Seminarios no sean todos iguales.

58.- "La representación del espacio"
(EGB - BUP) Francisco Aznar Valejo. Luis Balbuena Castellano (Sdad. Canaria Prof. Mat.)





Un problema que no ha sido aún suficientemente estudiado es el cómo se realiza la representación de figuras tridimensionales en el plano,esto es, cuáles son los mecanismos epistemológicos que llevan a la persona a posesionarse de las técnicas necesarias para representar el espacio. Piaget y su escuela hacen aportaciones sobre el tema siguiendo su línea de sicología evolutiva. Según ellos sólo cuando el niño está en posesión de estructuras lógicas, llega a la representación d e la tercera dimensión. Esta teoría ha sido cuestionada por otros autores intentando demostrar que los esquemas de representación no son de orden estricta-mente genéticos sino cultural.
A través de pruebas realizadas en una amplia muestra de chicos escolarizados entre los diez y los dieciocho años, nosotros intentamos aportar datos sobre esta segunda línea de investigación reforzando la idea de que antes del esquema de representación de la perspectiva central existen otros y que aquel es fruto de condicionantes culrurales.

59.- "El proceso de generalización y el aprendizaje del lenguaje matemático a lo largo de la EGB."
M. Fernández Reyes (Sedad. Canaria Prof. Mat.)

Gran parte del fracaso del alumno de los últimos niveles de la EGB y 1º de BUP y FP se debe, creo, a que al tratar ciertos conceptos en la primera etapa no quedaron éstos suficientemente claros, sedimentados y generalizados.
A lo largo de sus estudios de Matemáticas, el alumnado va vi-endo "cosas distintas" cuando en realidad, sin serlo en muchps casos, se les da la impresión de que así es. Creo que puede conseguirse,por ejemplo, que el alumno escriba con toda naturalidad la relación que envuelve el enunciado de un problema de ecuaciones si, en su momento, se le enseñó a buscar y representar relaciones similares con números conocidos. Y, sobre todo, si al hacerlo se han cubierto debidamente las tres etapas de manipulación (para descubrir), expresión en lenguaje ordinario y formalización.

60.- "Diagnóstico matemático en EGB"
Inmaculada Bordás (Rosa Sensat)

61.- "Reflexiones psicopedagógicas del método heurístico en la 2ª etapa de EGB".
José Mª Bigés (Rosa Sensat)

62.-"Experiencias de informática en la 2ª etapa de EGB".
Ramón Comelf (Rosa Sensat).

63.- "Una introducción histórica de los Números Complejos"
Pelegri Viader i Canals

Agustín Blanco Ruiz
Grupo 2001

## ESTUDIO DE LAS POSIBILIDADES GRAFICAS DE LOS MICROORDENADORES

Hemos estudiado la explotación de las posibilidades gráficas que ofrecen los microordenadores dotados de monitor de T.V. sin alta resolución. Normalmente la pantalla del monitor se descompone en una cierta cantidad de filas y columnas, que dividen la superficie útil en un número de pequeños cuadrados, generalmente entre 500 y 2000, aproximadamente. El microordenador que hemos utilizado nosotros descompone la pantalla en 25 filas (desde la 0 a la 24) y 40 columnas (desde la 0 a la 39), lo que da lugar a 1000 cuadrados, en cada uno de los cuales podemos representar un símbolo numérico, literal o gráfico, estos últimos dentro de un pequeño alfabeto de ellos disponible.

Un primer problema con el que se encuentra uno, cuando piensa en la portabilidad de los programas con gráficos, es la no standardización, no ya de las instrucciones, sino de las coordenadas en la pantalla. Hemos optado por situar el origen en el vértice superior izquierdo, que es la opcion más generalmente adoptada.

Además de las instrucciones standard del BASIC, hemos utilizado las siguientes, que por no ser propias del lenguaje, sino depender del constructor, cada uno las llama de una manera:

- borrado, que borra la pantalla y sitúa el cursor en el primer lugar de esta (se encuentra en todos los microordenadores);
- ir al origen, no borra la pantalla.

## TABLAS

Parece obligado comenzar cualquier estudio sobre graficación con ordenadores en BASIC con un ejemplo de utilización de la funcion TAB para disponer apropiadamente una tabla en la pantalla. La orden TAB(X) lleva el cursor a la columna X, dentro de la fila en que se encuentra. Veamos un programa que nos proporciona una tabla numérica:

```
 10 PRINT"]"
 20 REM        ENCABEZAMIENTO
 30 PRINTTAB(5);"NUMERO";TAB(16);"DOBLE";TAB(25);"CUADRADO"
 40 FORI=3TO34
 50 PRINTTAB(I);"*";
 60 NEXTI
 65 PRINT
 70 REM        TABLA
 80 FORN=1TO20
 90 PRINTTAB(6);N;TAB(16);2*N;TAB(26);N*N
 100 NEXTN
 110 GOTO110
 120 END
READY.
```

El programa, muy sencillo, borra la pantalla (instrucción 10); escribe el encabezamiento y lo subraya (hasta la fila 60) y, posteriormente, escribe los valores requeridos para los numeros que van del 1 al 20; por último, la ejecución cae en un ciclo sin fin(instrucción 110). Tanto la instrucción 10 como la 110 tienen una función principalmente **estética**, la primera evita la permanencia en pantalla de símbolos anteriores a la ejecución, y la segunda la llegada de símbolos posteriores a esta; unos y otros podrían estropear la claridad de los textos o dibujos, o llevarnos a confusión.



## REPRESENTACION DE FUNCIONES CON TAB

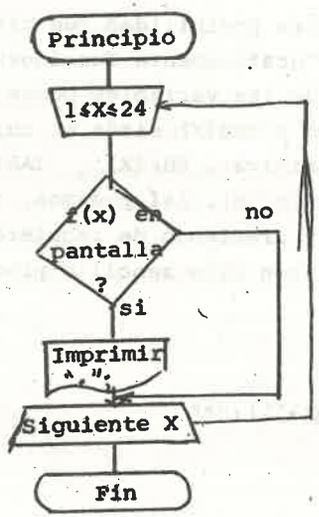
Otra posibilidad que ofrece la función TAB es la de representar gráficamente funciones. Es inmediato pensar que si el origen de las variables puede situarse en el vértice superior izquierdo y TAB(X) sitúa el cursor en la columna X, para funciones positivas, FNF(X) , TAB(FNF(X)) situará el cursor en la columna FNF(X). Así podemos, considerando x creciente hacia abajo e y creciendo de izquierda a derecha, representar f(x)=70/(x+1) con este sencillo programa,

```
10 Borrado
20 FOR X=1 TO 23
30 PRINT TAB(70/(X+1));"*"
40 NEXT X
50 GOTO 50
60 END
```

cuyo segmento principal, las líneas 20 a 40, cumplen la función de imprimir en el lugar adecuado (línea 30), y esto hacerlo 23 veces (líneas 20 y 40).

Si queremos utilizar TAB para representar funciones cualesquiera, hemos de introducir un condicional que solo permita actuar a esta instrucción cuando su argumento esté

entre 0 y 39. Veamos un ejemplo; el diagrama de flujo asociado será




Para la función $y=x^2+3$, el programa quedaría, así,

```
5 DEF FNF(X)=X↑2+3
1Ø Borrado
2Ø FOR X=1 TO 24
3Ø IF FNF(X)≥Ø AND FNF(X)≤38 THEN PRINT TAB(FNF(X));".";
35 PRINT
4Ø NEXT X
5Ø GOTO 5Ø
6Ø END
```

Si quisieramos representar funciones con ordenadas negativas, como sería la función seno, habría dos caminos,

a) sumar una constante a todas las ordenadas, de forma que sean todas positivas,



b) sumar esa constante al argumento de TAB.

Aplicando esto a la representación de la función senoidal, obtenemos las siguientes posibilidades alternativas,

a) sustituir la línea 5 por esta otra

```
5 DEF FNF(X)=19+15*SIN(X/5)
```

b) sustituir la línea 3Ø por

```
3Ø IF FNF(X)≥-19 AND FNF(X)≤19 THEN PRINT TAB(19+15*SIN(X/5));".";
```

hemos de recalcar también que, al ser la función una con un campo de variabilidad tan pequeño, hemos tenido que modificar ambas escalas, la de x y la de y.

## REPRESENTACION DE MAS DE UNA FUNCION

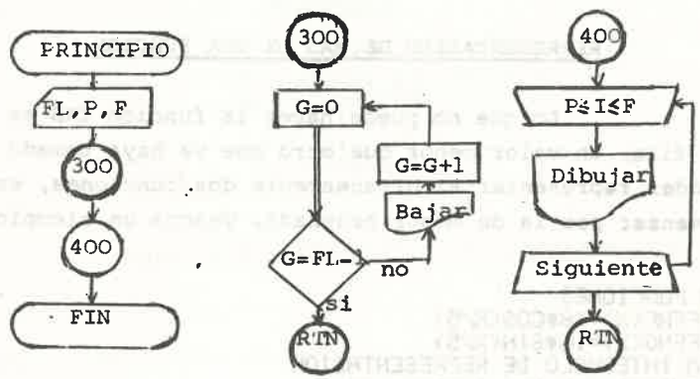
Lo que no puede hacer la función TAB es tomar, en una fila, un valor menor que otro que ya haya tomado en ella. Para poder representar simultaneamente dos funciones, es necesario comenzar por la de menor ordenada. Veamos un ejemplo,

```
5 REM FUNCIONES
10 DEFFNF(X)=18*COS(X/5)
20 DEFFNG(X)=18*SIN(X/5)
30 REM INTERVALO DE REPRESENTACION
40 INPUT"ORIGEN DEL INTERVALO";P
50 INPUT"FIN DEL INTERVALO";F
60 REM REPRESENTACION
70 PRINT"□"
80 FOR X=P TO F STEP (F-P)/23
90 IF INT(FNF(X))=INT(FNG(X)) THEN C=1
100 IF INT(FNF(X))<INT(FNG(X)) THEN C=2
110 IF INT(FNF(X))>INT(FNG(X)) THEN C=3
120 ON C GOSUB 200,250,300
130 NEXT X
140 GOTO 140
150 END
200 REM SE CRUZAN LAS DOS CURVAS
210 PRINT TAB(FNF(X)+18);"1"
220 RETURN
250 REM EL VALOR DE F(X) ES MENOR QUE EL DE G(X)
260 PRINT TAB(FNF(X)+18);"1"; TAB(FNG(X)+18);"2"
```

```
270 RETURN
300 REM EL VALOR DE F(X) ES MAYOR QUE EL DE G(X)
310 PRINT TAB(FNG(X)+18);"2"; TAB(FNF(X)+18);"1"
320 RETURN
READY.
```

## SEGMENTOS

También podemos emplear TAB para dibujar segmentos horizontales en una fila cualquiera. Para ello, tras borrar la pantalla, bajaremos el cursor a la fila requerida y, usando la función TAB, dibujaremos en los lugares precisos.




El programa asociado a estos diagramas será,

```
10 REM SEGMENTO HORIZONTAL EN LA FILA FL
90 INPUT "FILA";FL
100 INPUT "PRINCIPIO";P
110 INPUT "FIN";F
130 PRINT"□"
150 REM BAJAR A LA FILA
160 GOSUB 300
180 REM DIBUJO DEL SEGMENTO HORIZONTAL
190 GOSUB 400
200 GOTO 200
210 END
```



```
300 REM SUBRUTINA DE BAJADA
310 G=0
320 REM SI G=FL-1 HEMOS BAJADO BASTANTE
325 IFFL=0THEN370
330 IF G=FL-1 THEN 370
340 PRINT
350 G=G+1
360 GOTO 330
370 RETURN
400 REM SUBRUTINA DEL DIBUJO
410 FOR I=P TO F
420 PRINT TAB(I);"*";
430 NEXT I
440 RETURN
READY.
```

Para dibujar un segmento vertical en la columna C, desde la fila P a la F, vamos a emplear otro programa análogo, en el que nos volveremos a encontrar con la subrutina 300, que rara vez vamos a abandonar.

```
90 INPUT "COLUMNA";C
100 INPUT "PRINCIPIO";P
110 INPUT "FIN";F
120 PRINT"□"
130 REM BAJADA A LA FILA PRINCIPIO
140 FL=P
150 GOSUB 300
200 REM DIBUJO DEL SEGMENTO VERTICAL
210 GOSUB 500
220 GOTO 220
250 END
300 REM SUBRUTINA DE BAJADA
310 G=0
320 REM SI G=FL-1 HEMOS BAJADO BASTANTE
330 IF G=FL-1 THEN 370
340 PRINT
350 G=G+1
360 GOTO 330
370 RETURN
500 REM SUBRUTINA DEL SEGMENTO VERTICAL
510 FOR I=P TO F
520 PRINT TAB(C);"*"
530 NEXT I
540 RETURN
READY.
```

Entretenerse en dibujar segmentos puede parecer

pueril, pero su dominio nos abre el camino a otros tipos de representaciones, utilizadas no solo en las Matemáticas, el más simple de los cuales tal vez sea el diagrama de barras.

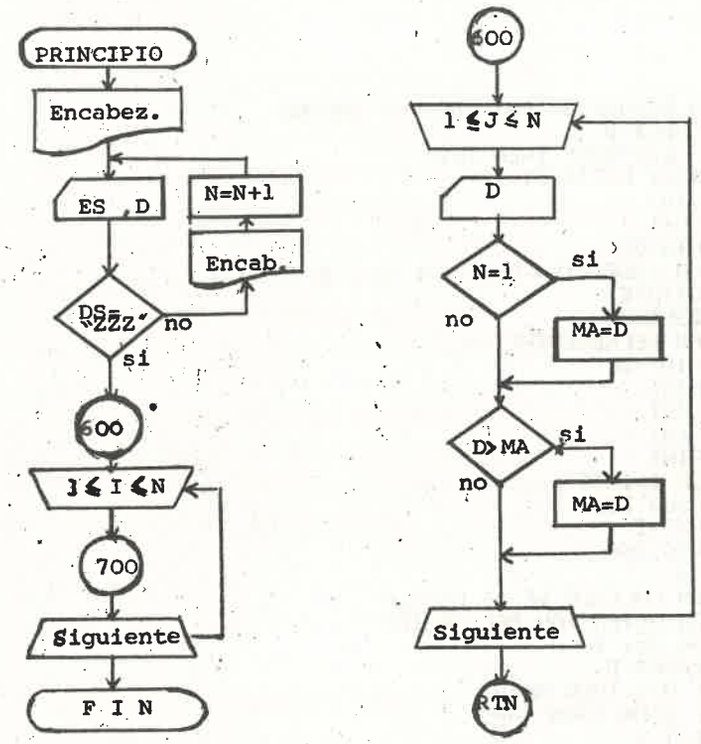
## DIAGRAMA DE BARRAS HORIZONTALES

Representar la información, contenida en una tabla, en un diagrama de barras horizontales es trivial si los valores a representar están comprendidos entre 0 y 39; nosotros vamos a pedirle al programa que, antes de representar, calcule la escala apropiada. Necesitamos un algoritmo que haga lo siguiente

1 Escribir el encabezamiento general
2 Hacer lectura de datos
  hasta que se encuentre con "ZZZ"
  hacer
    Hacer escritura del nombre de la columna hasta un máximo de diez caracteres
    Hacer cuenta de la cantidad de columnas (N)
  Fin de Hacer
3 Hacer cálculo de la escala (subrutina 600)
4 Hacer N veces (índice I)
    Hacer representación del segmento horizontal (subrut. 700)
  Siguiente vez
  FIN

Elaboramos un diagrama de flujo apropiado,






No dibujamos el diagrama de flujo de la subrutina 700, que dibuja el segmento horizontal, porque su unica particularidad es que no se puede utilizar la instrucción FOR-NEXT, ya que si, con el cambio de escala, algun segmento tuviese parte entera nula no habría de ser dibujado.

El programa resultante es el siguiente,

```
20 REM DIAGRAMA DE BARRAS HORIZONTALES
30 PRINT"□"
40 REM ENCABEZAMIENTO
50 PRINT TAB(15);"AÑO 1975"
60 PRINT TAB(15);"---------"
70 PRINT
80 PRINT
```

```
90 REM ENCABEZAMIENTO DE LAS BARRAS
100 READE$,D
110 IF E$="ZZZ" THEN 160
120 PRINT LEFT$(E$,10)
130 PRINT
140 N=N+1
150 GOTO100
160 REM SUBRUTINA PARA CALCULO DE ESCALA
170 RESTORE
180 GOSUB600
190 REM REPRESENTACION
200 PRINT"▒"
205 PRINT
210 PRINT
215 PRINT
220 PRINT
230 FOR I=1 TO N
240 GOSUB 700
250 NEXT I
260 GOTO 260
270 END
600 REM CALCULO DE LA ESCALA
605 REM OBTENCION DEL MAXIMO
610 FOR J=1 TO N
620 READE$,D
640 IF N=1 THEN MA=D
660 IF D>MA THEN MA=D
670 NEXT J
680 RESTORE
690 RETURN
700 REM BARRA CORRESPONDIENTE
710 REM LEER DATO NUMERICO
720 READ E$,D
730 REM CAMBIO DE ESCALA
740 D=(D*29)/MA
745 L=0
750 REM ? HAY ALGO QUE REPRESENTAR?
760 L=L+1
765 IF INT (D)=0 THEN 810
770 REM SI HAY
780 PRINT TAB(9+L);"*";
790 D=D-1
800 GOTO750
810 REM NO HAY QUE REPRESENTAR
820 PRINT
830 PRINT
840 RETURN
1000 DATA CINES, 8669, TEATROS, 68, TEATR.CINES, 1005
1010 DATA CAMP. FUTBOL, 3230, PL. TOROS, 350, ZZZ, -1
READY.
```



En el caso de valores muy similares, en las diferentes barras, puede que estemos más interesados por las diferencias entre ellos que por su similitud. Lo que podemos hacer es utilizar, en lugar de una escala absoluta, como hemos hecho ahora, en que todos los datos aparecen en función del mayor, una escala relativa, en que la representacion de los datos dependa del mayor y del menor; igual que antes al valor máximo le asignabamos la longitud total disponible, ahora, además de eso, al mínimo le asignaremos el cero, representación nula. Se puede utilizar el programa anterior, sin más que intercalar lo necesario para localizar el valor mínimo

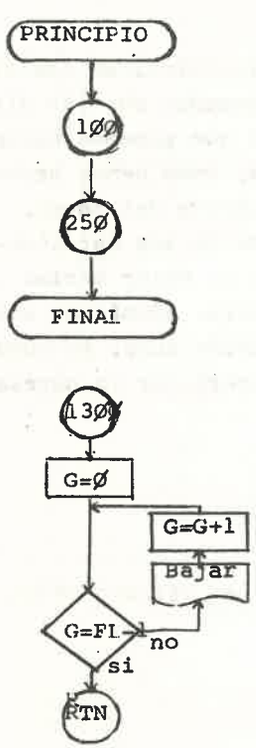
```
63Ø IF N=1 THEN MI=D
65Ø IF D<MI THEN MI=D
```

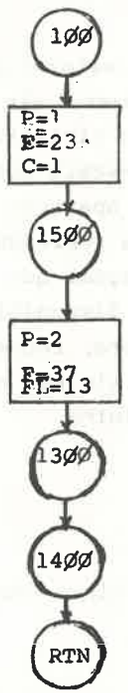
además hemos de rectificar la línea 74Ø para el cálculo de escala.

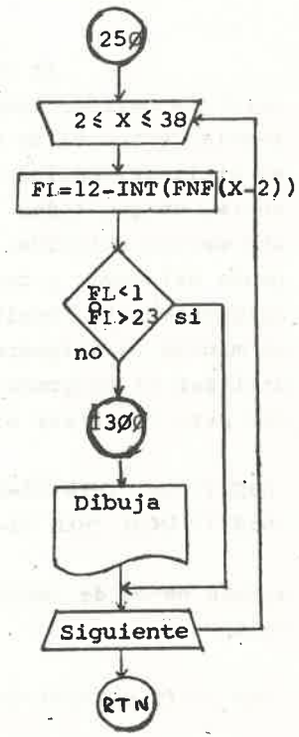
```
74Ø D=((D-MI)*29)/(MA-MI)
```

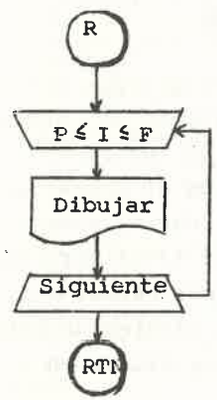
## CURVAS CON EL EJE OX HORIZONTAL

Utilizamos dos subrutinas principales, la primera para dibujar los ejes y la segunda para dibujar la curva. Como hemos optado por representar la curva en los cuadrantes de abscisa positiva, el eje vertical queda pegado al margen izquierdo de la imagen; tras dibujar este eje, el cursor sube al origen y baja hasta la fila necesaria (Subrutina 1300) para dibujar el eje OX. La segunda subrutina comienza por estudiar el valor de la imagen de cada X y, si queda en los valores de pantalla, baja el cursor a la fila correspondiente y dibuja en la columna que corresponde al valor x.




R puede ser 14ØØ o 15ØØ, las rutinas respectivas son casi iguales.



El programa corespondiente será,

```
10 REM CURVA
20 DEFFNF(X)=9*SIN(X/3)
30 REM DIBUJO DE LOS EJES
40 GOSUB 100
50 REM DIBUJO DE LA CURVA
60 GOSUB 250
90 GOTO90
95 END
100 REM DIBUJO DE LOS EJES
110 REM EJE VERTICAL
115 PRINT"J"
120 REM PARAMETROS APROPIADOS
125 PRINTTAB(0);"Y"
130 P=1
140 F=23
150 C=1
160 GOSUB 1500
170 REM EJE HORIZONTAL
180 REM PARAMETROS APROPIADOS
190 FL=13
200 P=2
210 F=37
215 PRINT"S"
216 GOSUB1300
220 GOSUB 1400
225 PRINT"X";
230 RETURN
250 REM REPRESENTACION DE LA CURVA
260 FOR X=2 TO 38
265 PRINT"S"
270 FL=12-INT(FNF(X-2))
280 REM ? ES EXCESIVA LA ORDENADA?
290 IF (FL<1) OR (FL>23) THEN 330
300 REM BAJADA
310 GOSUB 1300
320 PRINT TAB(X);"."
330 NEXT X
340 RETURN
1300 REM BAJADA
1310 G=0
1330 IFG=FL-1THEN1370
1340 PRINT
1350 G=G+1
1360 GOTO1330
1370 RETURN
1400 REM
1410 FORI=PTOF
1420 PRINTTAB(I);"-";
1430 NEXTI
```

```
1440 RETURN
1500 REM
1505 PRINT"■"
1510 FORI=PTOF
1520 PRINTTAB(C);" |"
1530 NEXTI
1540 RETURN
READY.
```

NUBES DE PUNTOS CORRESPONDIENTES A DISTRIBU= CIONES BIDIMENSIONALES

Estas representaciones, como resulta fácil comprender, son muy semejantes a las anteriores, un programa que permite realizarlas es el siguiente,

```
1 REM CAMPO DE LAS VARIABLES
20 GOSUB100
30 REM DIBUJAR EJES
40 GOSUB2000
50 REM REPRESENTAR LOS PUNTOS
60 GOSUB2500
70 GOTO70
80 END
100 REM MAXIMOS Y MINIMOS
110 READXA,YA
120 XI=XA
130 YI=YA
140 READX,Y
150 IFX<0THEN210
160 IFX<XITHENXI=X
170 IFX>XATHENXA=X
180 IFY<YITHENYI=Y
190 IFY>YATHENYA=Y
200 GOTO140
210 RESTORE
220 RETURN
1300 REM RUTINA DE BAJADA
1310 G=0
1315 IF FL=0 THEN 1370
1320 REM SI G=FL-1 ESTAMOS EN LA FILA
1330 IF G=FL-1 THEN 1370
1340 PRINT
1350 G=G+1
1360 GOTO 1330
1370 RETURN
2000 REM
2020 PRINT"□"
2030 PRINTTAB(0);MID$(STR$(YA),2,4)
```



```
2040 FORI=1TO22
2050 IFI=22THENPRINTTAB(0);MID$(STR$(YI),2,4);
2060 PRINTTAB(4);" |"
2070 NEXTI
2080 FORI=5TO38
2090 PRINTTAB(I);"-";
2100 NEXTI
2110 PRINT
2120 PRINTTAB(5);MID$(STR$(XI),2,4);TAB(34);MID$(STR$(XA),2,4)
2130 RETURN
2500 REM NUBE
2505 PRINT"■"
2510 READX,Y
2520 IFX<0THEN2600
2530 X=((X-XI)*34/(XA-XI))+5
2540 FL=INT(21-(Y-YI)*21/(YA-YI))
2550 REM BAJADA A FILA CORRECTA
2560 GOSUB1300
2570 PRINTTAB(X);".";
2580 GOTO2505
2600 RETURN
3000 DATA101,210,113,250,125,300,140,310,173,340,180,400,-1,-1
READY.
```

¿COMO COMPORTARSE EN SOCIEDAD CUANDO NO SE POSEE DOMINIO DEL CURSOR?

Cuando el ordenador en que estamos trabajando no dispone de la posibilidad de mover libremente el cursor, la mejor estrategia nos parece barrer la pantalla por filas, de arriba a abajo, y en cada fila de izquierda a derecha, así podemos producir una imagen en forma analoga a como lo hace la televisión.

Esto es lo que hacemos en el programa que sigue. En él,situamos el origen en el centro de la pantalla y en cada punto, (x,y), estudiamos si se cumple y=f(x); en caso afirmativo dibujamos un punto de la curva; en los lugares en que x=0 dibujamos un segmento vertical. Lo anterior lo hacemos paar los puntos de los cuadrantes superiores; luego dibujamos el eje OX y repetimos,lo ya hecho, para los cuadrantes inferiores.

```
10 REM PROGRAMA PRINCIPAL
20 REM CUADRANTES SUPERIORES
30 DEF FNF(X)=INT(0.25*(X↑2+3*X-40))
50 P=11
60 F=1
70 GOSUB 1000
80 REM EJE HORIZONTAL
90 GOSUB 2000
95 PRINT
100 REM CUADRANTES INFERIORES
110 P=-1
120 F=-11
130 GOSUB 1000
140 GOTO 140
150 END
1000 REM CUADRANTES SUPERIORES
1010 REM PARA CADA FILA
1020 FOR Y=P TO F STEP -1
1030 REM PARA CADA ELEMENTO DE ELLA
1040 A=-19
1050 B=-1
1060 REM ? PASA POR EL LA CURVA?
1070 GOSUB 5000
1080 REM ? CORTA AL EJE?
1090 REM SI
1100 IF FNF(0)=Y THEN PRINT TAB(19);"*";
1110 REM NO
1120 IF FNF(0)<>Y THEN PRINT TAB(19);"!";
1130 REM PARA LAS X POSITIVAS
1140 A=1
1150 B=19
1160 GOSUB 5000
1170 REM SIGUIENTE FILA
1180 PRINT
1190 NEXT Y
1200 RETURN
2000 REM EJE DE ABSCISAS
2010 REM SEMIEJE NEGATIVO
2020 A=-19
2030 B=-1
2040 GOSUB 3000
2050 REM ORIGEN
2060 GOSUB 4000
2070 REM SEMIEJE POSITIVO
2080 A=1
2090 B=19
2100 GOSUB 3000
2110 RETURN
3000 REM ?DONDE HAY CURVA?
3010 FOR X=A TO B
3020 IF FNF(X)=0 THEN PRINT TAB(X+19);"*";
3030 IF FNF(X)<>0 THEN PRINT TAB(X+19);"-";
3040 NEXT X
```



```
3050 RETURN
4000 REM ? CORTA AL ORIGEN ?
4010 IF FNF(0)=0 THEN PRINT TAB(19);"*";
4020 IF FNF(0)<>0 THEN PRINT TAB(19);"+";
4030 RETURN
5000 REM ? PASA POR UN PUNTO ?
5010 FOR X=A TO B
5020 REM EN CASO AFIRMATIVO, SENALARLO
5030 IF FNF(X)=Y THEN PRINT TAB(X+19);"*";
5040 NEXT X
5050 RETURN
READY.
```

## REPRESENTACION DE SUPERFICIES

Una manera sencilla de representar superficies es por sus curvas de nivel, pero esto solo es posible, por lo general, cuando se dispone de alta resolución. El método más cercano, en baja resolución, es la representación de la cota de cada punto. Eso hemos hecho en el programa que sigue, que en lo demas sigue el sistema de barrido que ya hemos presentado,

```
10 PRINT"J"
20 REM PARA TODAS LAS FILAS
30 FOR Y=11 TO -11 STEP -1
90 REM PARA CADA LUGAR DE ESA FILA
100 FOR X=-19 TO 19
110 REM VALOR DE LA FUNCION EN EL PUNTO
120 Z=SQR(0.8*X↑2+2*Y↑2)/3
130 REM REPRESENTARLO
140 PRINTTAB(X+19);MID$(STR$(INT(Z)),2,1);
150 NEXT X
160 NEXT Y
170 GOTO 170
180 END
1300 REM
1310 G=0
1330 IFG=FL-1THEN1370
1340 PRINT
1350 G=G+1
1360 GOTO1330
1370 RETURN
READY.
```

Si no deseamos una representacion numérica, sino gráfica, podemos sustituir la línea 140 por

```
135 IF Z>5 THEN Z=5
140 ON Z GOSUB 300,350,400,450,500
145 PRINT TAB(X+19);A$;
```

añadiendo, además, las subrutinas

```
300 A$=" "
310 RETURN
350 A$="."
360 RETURN
400 A$="•"
410 RETURN
450 A$="●"
460 RETURN
500 A$="▨"
510 RETURN
```

## MAPAS

El mapa de España, en estos momentos, consta de lo que, geométricamente hablando, serían 17 regiones disjuntas. Hemos superpuesto a este mapa un acetato cuadriculado con 25 filas y 40 columnas y ha resultado que, por ejemplo, Andalucía está situada en varias filas, la primera de ellas la 15; además, estas filas son 8 , y en la primera de ellas presenta dos segmentos disjuntos, luego,para representarlos, necesitamos cuatro valores, dos por segmento (su origen y extremo). Atendiendo a estas características, hemos construido una tabla, utlizando sentencias DATA, para cada region; con estas tablas y los valores de una lista en que almacenamos los respectivos valores que toma la variable que nos interesa, estos valores los asignamos en las 130 a 150, podemos representar la distribución de esa variable. En las lineas 200 a 295 hacemos un cambio de variable para evitar que haya valores superiores a 9.



```
10 REM MAPA
20 REM ENTRADA DE VALORES
30 GOSUB 100
40 REM PASAR A VALORES DE REPRESENTACION
50 GOSUB 200
60 REM DIBUJO DEL MAPA
70 GOSUB 400
80 GOTO 80
90 END
100 REM SUBR. DE ENTRADA DE VALORES
110 PRINT"▯"
120 DIM L(17)
130 FOR I=1 TO 17
140 PRINT I
150 INPUT L(I)
160 NEXT I
170 RETURN
200 REM SUBR. DE CAMBIO DE ESCALA
205 REM VALOR PROVISIONAL DEL MAXIMO
210 MA=L(1)
220 REM BUSQUEDA DEL MAXIMO DEFINITIVO
230 FOR I=2 TO 17
240 IF L(I)>MA THEN MA=L(I)
250 NEXT I
260 REM CAMBIO DE ESCALA
270 FOR I=1 TO 17
280 L(I)=9.9*L(I)/MA
290 NEXT I
295 RETURN
400 REM SUBR. DE DIBUJO DE MAPA
410 REM PARA CADA ZONA
415 PRINT"▯"
420 FOR J=1 TO 17
425 PRINT"▨"
430 REM LEER FILA DE COMIENZO, Y NO. DE FILAS Y COLUMNAS
440 READ FL, NF, NC
450 REM BAJAR A ESA FILA [FL]
460 GOSUB 1300
470 REM PARA CADA FILA
480 FOR K=1 TO NF
490 REM LEER PRINC. Y FIN, DE 2 EN 2
500 FOR L=1 TO NC-1 STEP 2
510 READ P, F
520 REM ? HAY SEGMENTO?
530 IF (L>1) AND (P=0) THEN 560
540 REM SI HAY. IR A DIBUJARLO
550 GOSUB 1400
560 NEXT L
570 PRINT
580 NEXT K
600 NEXT J
```

```
610 RETURN
1300 REM
1305 IF FL=0 THEN 1370
1310 G=0
1320 REM
1330 IF G=FL-1 THEN 1370
1340 PRINT
1350 G=G+1
1360 GOTO 1330
1370 RETURN
1400 REM SUBR. DE SEGMENTO HORIZONTAL
1410 FOR I=P TO F
1420 REM IMPRIMIMOS EL NO. APROPIADO EN EL LUGAR CORRECTO
1430 PRINT TAB(I); MID$(STR$(L(J)),2,1);
1440 NEXTI
1450 RETURN
3000 REM ANDALUCIA
3002 DATA 15, 8, 4
3004 DATA 9, 10, 13, 16
3006 DATA 8, 17, 0, 0
3008 DATA 4, 18, 0, 0
3010 DATA 3, 18, 0, 0
3012 DATA 5, 18, 0, 0
3014 DATA 6, 11, 0, 0
3016 DATA 7, 9, 0, 0
3018 DATA 8, 9, 0, 0
3040 REM ARAGON
3042 DATA 2, 9, 2
3044 DATA 19, 23
3046 DATA 19, 23
3048 DATA 19, 23
3050 DATA 17, 22
3052 DATA 17, 23
3054 DATA 18, 22
3056 DATA 19, 21
3058 DATA 18, 21
3060 DATA 19, 19
3070 REM ASTURIAS
3072 DATA 0, 3, 2
3074 DATA 4, 9
3076 DATA 5, 8
3078 DATA 5, 5
3090 REM BALEARES
3092 DATA 8, 5, 2
3094 DATA 35, 35
3096 DATA 32, 32
3098 DATA 31, 33
3100 DATA 32, 32
3102 DATA 28, 28
3110 REM CANARIAS
3112 DATA 17, 6, 6
3114 DATA 37, 37,  0,  0,  0,  0
3116 DATA 36, 36,  0,  0,  0,  0
```



```
3118 DATA 24, 24, 36, 36,  0,  0
3120 DATA 28, 29,  0,  0,  0,  0
3122 DATA 26, 26, 28, 29, 32, 33
3124 DATA 24, 24, 32, 33,  0,  0
3140 REM CANTABRIA
3142 DATA 0, 3, 2
3144 DATA 10, 13
3146 DATA 10, 11
3148 DATA 11, 11
3160 REM CASTILLA-LEON
3162 DATA 2, 10, 4
3164 DATA 9,  9, 12, 13
3166 DATA 6, 10, 12, 13
3168 DATA 5, 13,  0,  0
3170 DATA 5, 16,  0,  0
3172 DATA 5, 16,  0,  0
3174 DATA 6, 16,  0,  0
3176 DATA 5, 12,  0,  0
3178 DATA 5, 11,  0,  0
3180 DATA 5, 10,  0,  0
3182 DATA 8,  9,  0,  0
3190 REM CATALUNA
3192 DATA 2, 6, 4
3194 DATA 24, 25, 29, 31
3196 DATA 24, 30,  0,  0
3198 DATA 24, 29,  0,  0
3200 DATA 23, 28,  0,  0
3202 DATA 24, 26,  0,  0
3204 DATA 23, 24,  0,  0
3220 REM EUSKADI
3222 DATA 0, 3, 2
3224 DATA 14, 17
3226 DATA 14, 16
3228 DATA 14, 15
3240 REM EXTREMADURA
3242 DATA 10, 7, 2
3244 DATA 5, 7
3246 DATA 5, 8
3248 DATA 4, 8
3250 DATA 4, 10
3252 DATA 5, 9
3254 DATA 4, 8
3256 DATA 5, 7
3270 REM GALICIA
3272 DATA 0, 6, 4
3274 DATA 2, 3, 0, 0
3276 DATA 0, 4, 0, 0
3278 DATA 0, 4, 0, 0
3280 DATA 0, 4, 0, 0
3282 DATA 0, 4, 0, 0
3284 DATA 0, 0, 2, 3
3300 REM MADRID
3302 DATA 7, 3, 2
```

```
3304 DATA 13, 13
3306 DATA 12, 14
3308 DATA 11, 14
3320 REM MANCHA [ CASTILLA-LA...]
3322 DATA 7, 9, 4
3324 DATA 14, 17,  0,  0
3326 DATA 15, 18,  0,  0
3328 DATA 15, 17,  0,  0
3330 DATA 10, 18,  0,  0
3332 DATA  9, 18,  0,  0
3334 DATA  9, 19,  0,  0
3336 DATA 11, 20,  0,  0
3338 DATA 10, 19,  0,  0
3340 DATA 11, 12, 17, 17
3350 REM MURCIA
3352 DATA 14, 4, 2
3354 DATA 20, 20
3356 DATA 18, 20
3358 DATA 18, 21
3360 DATA 19, 20
3370 REM NAVARRA
3372 DATA 1, 4, 2
3374 DATA 17, 18
3376 DATA 16, 18
3378 DATA 17, 18
3380 DATA 18, 18
3390 REM RIOJA
3392 DATA 3, 2, 2
3394 DATA 14, 16
3396 DATA 14, 17
3410 REM VALENCIA
3412 DATA 8, 8, 2
3414 DATA 22, 23
3416 DATA 22, 23
3418 DATA 20, 22
3420 DATA 19, 22
3422 DATA 20, 22
3424 DATA 21, 23
3426 DATA 21, 23
3428 DATA 21, 22
READY.
```

## GRAFICOS ANIMADOS

En ocasiones puede ser conveniente utilizar un gráfico con movimiento. Hay dos posibilidades, que el operador mueva la imagen o que lo haga el operador.

hemos preparado dos ejemplos, ambos relacionados



con el laberinto de Creta. En el primero es el operador quien mueve la imagen; el ordenador, tras dibujar el laberinto proporciona instrucciones pora guiar a Teseo. La mayor parte del programa se dedica al laberinto, que se dibuja utilizando segmentos horizontales y verticales; som las líneas 5 a 240, 1300 a 1370, la rutina de bajada ya conocida, 1400 a 1540, que dibujan el laberinto con los datos almacenados en la líneas 2000 a 2126. Las líneas 250 a 310 son de instrucciones, y la línea clave es la 430, que decide la dirección de Teseo en cada paso.

```
5 REM
10 PRINT"J"
20 FOR J=1 TO 2
30 REM LEEMOS NO. DE FILAS Y DE COLUMNAS
40 READ NF, NC
50 REM PARA CADA FILA
60 FOR K=1 TO NF
70 REM LEEMOS EL TERMINO DESTACADO
80 READ TD
90 FOR L=1 TO NC-1 STEP 2
95 REM LEEMOS PRINCIPIO Y FIN DE SEG.
100 READ P, F
110 REM SI P=0 NO HAY SEGMENTO
120 IF P=0 THEN 200
130 REM BAJADA
140 IF J=1 THEN FL=TD
150 IF J=2 THEN FL=P
160 GOSUB 1300
170 REM DIBUJO DE SEGMENTO APROPIADO
180 IFJ=2 THEN C=TD
190 ON J GOSUB 1400, 1500
195 PRINT"S"
200 NEXT L
220 NEXT K
240 NEXT J
250 REM LEYENDA
260 FL=18
270 GOSUB 1300
280 PRINT"TESEO VA HACIA EL NORTE CON...1"
290 PRINT"               EL ESTE CON....2"
300 PRINT"               EL SUR CON.....3"
310 PRINT"               EL OESTE CON...4"
330 REM SITUAMOS A TESEO
340 PRINT"S"
350 FL=16
360 GOSUB1300
370 PRINTTAB(27);".";
```

```
400 REM MOVIMIENTOS DE TESEO
410 GET T$
420 IF T$="" THEN 410
430 ON VAL(T$) GOSUB 1600, 1650, 1700, 1750
440 GOTO 410
450 END
1300 REM
1310 G=0
1320 REM
1330 IF G=FL-1 THEN 1370
1340 PRINT
1350 G=G+1
1360 GOTO 1330
1370 RETURN
1400 REM
1410 FOR I=P TO F
1420 PRINT TAB(I);"▒";
1430 NEXT I
1440 RETURN
1500 REM
1510 FOR I=P TO F
1520 PRINT TAB(C);"▒"
1530 NEXT I
1540 RETURN
1600 REM NORTE
1610 PRINT"▒▒.";
1620 RETURN
1650 REM ESTE
1660 PRINT".";
1670 RETURN
1700 REM SUR
1710 PRINT"▒▒.";
1720 RETURN
1750 REM OESTE
1760 PRINT"▒▒.";
1770 RETURN
2000 REM DATOS DE LAS HORIZONTALES
2002 DATA 9, 6
2004 DATA 1, 11, 29, 0, 0, 0, 0
2006 DATA 3, 17, 20, 22, 25, 0, 0
2008 DATA 5, 17, 21, 23, 27, 0, 0
2010 DATA 7, 13, 15, 17, 19, 21, 23
2012 DATA 9, 19, 21, 23, 27, 0, 0
2014 DATA 11, 15, 17, 19, 20, 22, 24
2016 DATA 12, 24, 24, 26, 28, 0, 0
2018 DATA 13, 17, 20, 0, 0, 0, 0
2020 DATA 14, 11, 26, 28, 29, 0, 0
2100 REM DATOS DE LAS VERTICALES
2102 DATA 12, 4
2104 DATA 11, 1, 14, 0, 0
2106 DATA 13, 7, 12, 0, 0
2108 DATA 15, 8, 9, 11, 13
2110 DATA 17, 4, 4, 8, 10
```



```
2112 DATA 19, 8, 8, 0, 0
2114 DATA 20, 10, 10, 0, 0
2116 DATA 21, 6, 8, 0, 0
2118 DATA 22, 12, 13, 0, 0
2120 DATA 25, 4, 8, 0, 0
2122 DATA 26, 10, 11, 0, 0
2124 DATA 27, 3, 4, 7, 10
2126 DATA 29, 1, 14, 0, 0
```

Para el movimiento de la imagen por el ordenador, hemos optado por representar, en el mismo laberinto, al Minetauro. Si sustituimos las líneas 250 a 450 y 1600 a 1770 por las siguientes

```
300 REM MINOTAURO
310 PRINT"▒"
320 REM SITUACION INICIAL
330 FL=4
340 GOSUB 1300
345 C=14
350 F=4
360 PRINT TAB(14);"*"
370 PRINT"▒"
380 PRINT
389 FORI=1TO200
390 S=1+RND(7)*4
400 ON S GOSUB 800,820,840,860
410 FOR I=1 TO 5
420 IF F<>I THEN 480
430 FOR J=12 TO 16
440 IF J=C THEN PRINT TAB(J);"*";
450 IF J<>C THEN PRINT TAB(J);" ";
460 NEXT J
465 PRINT
470 GOTO 490
480 PRINT TAB(12);"      "
490 NEXT I
500 GOTO 370
520 END
800 IF F<>1 THEN F=F-1
810 RETURN
820 IF C<> 16 THEN C=C+1
830 RETURN
840 IF F<>5 THEN F=F+1
850 RETURN
860 IF C<>12 THEN C=C-1
870 RETURN
```

resulta que en la 390 y 400 el ordenador decide hacia dónde mover la imagen, pero solo lo hace si las paredes lo permiten, subrutinas 800 a 870.



## INTRODUCCION INDUCTIVA A ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA ESTADISTICA.

A. Blanco (Grupo 2.001) y B. Compostela.

Durante este curso damos clase de Tercero de BUP en dos Institutos de Madrid, el Cardenal Herrera Oria y el Emilio Castelar, y al abordar las lecciones de Estadística hemos tratado de introducir algunos de los conceptos fundamentales de la Estadística de manera inductiva.

### PROBABILIDAD

Empezamos por definir qué se entiende por situación aleatoria, como opuesta a situación determinista, y experimento aleatorio, como opuesto a experimento determinista, utilizando como ejemplos tipo de estos últimos los que relacionan velocidad con espacio y tiempo, sea en caída libre, sea en movimientos horizontales; y como ejemplos de los aleatorios lanzamientos de dados y monedas.

Definimos la frecuencia relativa de los resultados de un experimento aleatorio y vemos que no puede ser ni negativa, ni mayor que 1. Una vez ha quedado esto claro, abordamos la introducción al concepto de probabilidad como límite de las frecuencias relativas. A los alumnos les decimos solo que vamos a estudiar algunas regularidades que se observan cuando un experimento aleatorio se repite muchas veces. Explicamos que vamos a estudiar el experimento aleatorio más sencillo que conocemos: lanzar una moneda al aire; aclarando que de los diversos sucesos que cabe estudiar en los

resultados del experimento ( por ej., número de veces que sale cara, número de veces que sale cruz, número de veces que salen dos caras seguidas, etc.) solo vamos a interesarnos por aquellas veces que salga cara, y estudiaremos la frecuencia relativa del suceso "obtener cara en un lanzamiento de una moneda".

Hacemos que todos los alumnos lancen una moneda 20 veces y anoten la sucesión de resultados que van obteniendo ( K cara y C cruz). Una vez que cada alumno ha tenido anotada la sucesión de resultados, les hemos indicado que

1º formaran la sucesión ordenada correspondiente de frecuencias relativas de obtener cara, sucesión formada por 20 números;

2º representase estos valores sobre un sistema de coordenadas cartesianas con la escala vertical mayor que la horizontal.

Al hacerlo, observan que la sucesión obtenida por cadda uno es diferente de la de sus compañeros pero, sin embargo, casi todas ellas acaban teniendo sus términos comprendidos en el intervalo (0'4,0'6).

Para ver qué pasa si en lugar de 20 lanzamientos se efectúan más, les hemos hecho agruparse de 4 en 4, de forma que cada uno complementase su sucesión de 20 términos con las de sus compañeros de grupo. Ya no les hemos pedido repetir todo el proceso para los 60 nuevos resultados, sino que a sus 20 términos han añadido, cada uno, los resultados globales de cada uno de sus tres compañeros; así, por ejemplo, si el alumno A ha obtenido esta sucesión de resultados

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | C | K | K | K | K | K | C | C | K | K | K | C | C | C | C | K | K | K | K |

que tiene asociada la siguiente sucesión de frecuencias relativas



$f_1 = 0$
$f_2 = 0$
$f_3 = 0'33333333$
$f_4 = 0'50000000$
$f_5 = 0'60000000$
$f_6 = 0'66666667$
$f_7 = 0'71428571$
$f_8 = 0'62500000$
$f_9 = 0'55555556$
$f_{10} = 0'60000000$
$f_{11} = 0'63636364$
$f_{12} = 0'66666667$
$f_{13} = 0'61538462$
$f_{14} = 0'57142857$
$f_{15} = 0'53333333$
$f_{16} = 0'50000000$
$f_{17} = 0'52941176$
$f_{18} = 0'55555556$
$f_{19} = 0'57894737$
$f_{20} = 0'60000000$

puede ampliar esta sucesión considerando los resultados globales de B, C, y D

| | | | |
|---|---|---|---|
| A K=12 C= 8 | B K=11 C= 9 | C K=12 C= 8 | D K=10 C=10 |
| $f_{40}=0'57500000$ | $f_{60}=0'58333333$ | $f_{80}=0'56250000$ | |

ningún alumno ha mostrado reparos en admitir que esta sucesión de 23 términos era equivalente a una de 80 en la que, por comodidad, prescindimos de una serie de términos intermedios. Ahora, todas las sucesiones de lanzamientos tienen las últimas frecuencias relativas comprendidas entre 0'40 y 0'60, y una mayoría entre 0'45 y 0'55 .

A continuación, hemos hecho salir a la pizarra a un alumno y escribir su término $f_{80}$, y continuar acumulando los resultados de cada grupo de 4 alumnos para formar

$$f_{80}\ ,\ f_{160}\ ,\ f_{240}\ ,\ \dots\ ,\ f_{640}$$

Una sucesión de la cual hemos dicho que es equivalente a la que obtendríamos lanzando una sola moneda 640 veces. Recalcamos el hecho de que en los últimos elementos de esta, al añadir 80 nuevos resultados, la frecuencia relativa oscila menos de lo que oscilaba en los veinte primeros al añadir un solo

nuevo resultado (v. cifras). Este fenómeno de estabilización nos ha permitido definir la probabilidad de un suceso aleatorio como el número "alrededor " del cual se estabilizan las frecuencias relativas al aumentar el número de veces que se realiza el experimento. Tras esto, hemos dado como axiomas las propiedades más sencillas de las probabilidades.

## LA DISTRIBUCION BINOMIAL

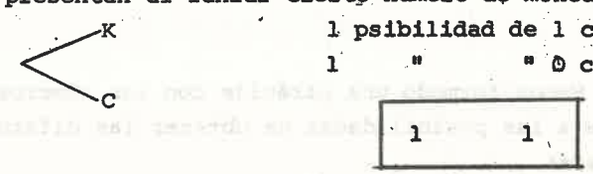
— La distribucion binomial la hemos abordado en forma diferente en los dos Institutos; en el Emilio Castelar hemos entrado desde la Combinatoria; hemos supuesto que lanzabamos n monedas y queríamos conocer la probabilidad de que K fuesen caras; no hemos hecho esto teóricamente, sino que nos apoyamos en una serie de ejemplos concretos, por ej. n=5 y K=3 , lanzamos cinco monedas y tres resultados han de ser caras ? En cuantas formas puede ocurrir este suceso? Es un ejemplo claro de combinaciones: Se pueden presentar en $\binom{5}{3}$ formas, pero?qué probabilidad tiene cada uno de ellos? Para KKCKC, al ser independientes los lanzamientos, la probabilidad es $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$, y les indicamos que la probabilidad es independiente de las posiciones de K y C. A continuación pasamos al caso general de N monedas y K caras.

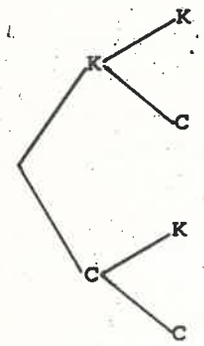
Para que viesen lo ajustado de la teoría a la práctica, han hecho la tabla de la binomial para n=20 y $p=\frac{1}{2}$ (ver columna 1)en la página siguiente); seguidamente hemos simulado en un microordenador el experimento consistente en lanzar 20 monedas 1000 veces, y hemos facilitado los resultados a los alumnos;ellos han calculado, a partir de estos, las frecuencias relativas y han confeccionado una tabla(ver columna 2), cuya similitud con la binomial teórica es evidente. Por último,hemos representado las probabilidades de la binomial y las frecuencias relativas del experimento en sendos diagramas de barras superpuestos.



| Caras | Binomial | Experimento |
|---|---|---|
| 0 | 0'00000095 | - |
| 1 | 0'000019 | 0'001 |
| 2 | 0'000181 | 0'001 |
| 3 | 0'00108 | 0'001 |
| 4 | 0'00462 | 0'001 |
| 5 | 0'01478 | 0'017 |
| 6 | 0'03696 | 0'026 |
| 7 | 0'07392 | 0'072 |
| 8 | 0'12013 | 0'104 |
| 9 | 0'16018 | 0'179 |
| 10 | 0'17619 | 0'181 |
| 11 | 0'16018 | 0'165 |
| 12 | 0'12013 | 0'131 |
| 13 | 0'07392 | 0'082 |
| 14 | 0' 03696 | 0'026 |
| 15 | 0'01478 | 0'008 |
| 16 | 0'00462 | 0'002 |
| 17 | 0'00108 | 0'002 |
| 18 | 0'000181 | 0'001 |
| 19 | 0'000019 | - |
| 20 | 0'00000095 | - |

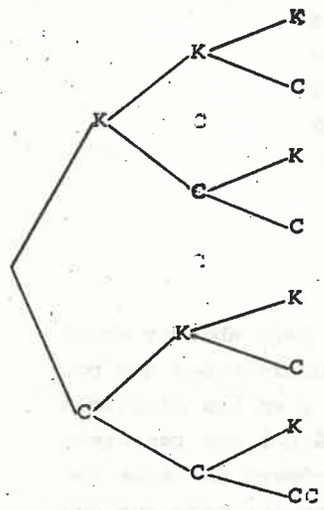
En el Cardenal Herrera Oria,por otro lado, para abordar estas distribuciones,nos hemos apoyado en los conocimientos que poseen los alumnos de Combinatoria elemental y en los Diagramas de arbol. Hemos presentado un diagrama de árbol que representa las posibilidades de obtener un cierto número de caras que se presentan al lanzar cierto número de monedas; para una vez,






1 posibilidad de 2 caras
2 posibilidades de 1 cara
1 posibilidad de 0 caras

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |




1 posibilidad de 3 caras
3 posibilidades de 2 caras
3 posibilidades de 1 cara
1 posibilidad de 0 caras

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 1 |

Hemos formado una pirámide con los números correspondientes a las posibilidades de obtener las diferntes cantidades de caras



1 1
1 2 1
1 3 3 1

y les hemos llamado la atención sobre la relación que hay entre cada número de la pirámide y los dos que tiene encima; a partir de esta relación hemos construido las filas siguientes

1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Esta construcción ha parecido gratuita a los alumnos y, por ello, regresamos al diagrama de árbol y representamos un lanzamiento más, viendo que el resultado coincide con "la predicción de la piramide". Seguidamente, les hemos encomendado a ellos la comprobación de que, para seis lanzamientos, los resultados también eran los predichos.

Una vez hecho esto, recordamos la fórmula del binomio de Newton y vemos como los coeficientes de este y las veces que aparecen las k caras son iguales; es ahora, y no antes, cuando llamamos a este tipo de distribuciones binomiales. Exponemos, que la probabilidad de obtener k caras en n lanzamientos es

$$\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

cosa que , según comprobamos sobre los diagramas, es cierta. A continuación, generalizamos la fórmula.

## LA DISTRIBUCION NORMAL

Una aproximacion teórica a la Distribución Normal queda fuera de las posibilidades de los alumnos de BUP; el aparato matemático es excesivamente fuerte. Consideramos que la mejor forma de introducirla en el Bachillerato, es como límite de la binomial. Podemos considerar que la normal es el límite de la binomial cuando el número de resultados posibles crece indefinidamente. Si pudiesemos conocer la probabilidad de obtener 0 caras, 1 cara, 2 caras ,...., 9999caras, 10000 caras, al realizar muchas veces el experimento aleatorio "lanzar al aire 10000 monedas", el polígono de frecuencias relativas sería indistinguible a simple vista de la función de densidad de la normal. Hacer esta simulación manualmente es impensable; como tampoco sería interesante hacerlo con ordenador, porque llevaría mucho tiempo, hemos optado por simular 1000 veces, en un microordenador, el experimento consistente en lanzar al aire k monedas, siendo k=5,10,20,40 y 80. A los alumnos les hemos facilitado las tablas de resultados, que figuran en el anexo, en que aparece el número de veces que se ha obtenido, en cada caso, 0 caras, 1 cara,... (k-1) caras, k caras, pidiendoles que hallasen las frecuencias relativas y representasen los polígonos de frecuencias correspondientes, que se asemejan bastante a la función de densidad de la normal, cuya fórmula les damos a continuación, pidiendoles que representen la de la normal (0,1) y comprueben su parecido con el polígono de frecuencias.



## DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

Hemos indicado a los alumnos que, a veces, en un colectivo , se dan una serie de características y nos interesa estudiar dos de ellas, para saber si guardan o no relación. Les hemos enseñado a representar nubes de puntos en el plano; se han introducido los conceptos de distribución marginal rectas de regresión y coefiente de correlación, todos ellos los hemos presentado intuitivamente y hemos dado la fórmula sin demostración teórica, Seguidamente se ha trabajado sobre ejemplos reales; en particular sobre la tabla de población elaborada por el Instituto Nacional de Estadística.

Como los calculos son largos, cada alumno ha estudiado la relación entre los datos de dos columnas. Para saber si el trabajo ha sido realizado correctamente, y ante la duda de algunos de ellos, que obtenían valores absurdos, hemos elaborado el programa en BASIC adjunto, que nos da

- la media, varianza y desviación típica de las distribuciones marginales;
- covarianza, coeficiente de correlación y ecuaciones de las rectas de regresión.

Algunos alumnos han utilizado este programa para comprobar sus resultados antes de entregar los trabajos encomendados.

## ANEXO

Resultados de la simulación con ordenador de lanzamientos de k monedas (1000 veces)

| n. caras | k=5 | k=10 | k=20 |
|---|---|---|---|
| 0 | 37 | - | - |
| 1 | 150 | 11 | 1 |
| 2 | 313 | 48 | 1 |
| 3 | 326 | 119 | 1 |
| 4 | 144 | 191 | 1 |
| 5 | 30 | 244 | 17 |
| 6 | | 205 | 26 |
| 7 | | 124 | 72 |
| 8 | | 45 | 104 |
| 9 | | 13 | 179 |
| 10 | | - | 181 |
| 11 | | | 165 |
| 12 | | | 131 |
| 13 | | | 82 |
| 14 | | | 26 |
| 15 | | | 8 |
| 16 | | | 2 |
| 17 | | | 2 |
| 18 | | | 1 |
| 19 | | | - |
| 20 | | | - |



K=40 (1000 veces)

| n. caras | | n.caras | | n.caras | | n.caras | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | 10 | 1 | 20 | 128 | 30 | - |
| 1 | - | 11 | 3 | 21 | 116 | 31 | - |
| 2 | - | 12 | 2 | 22 | 103 | 32 | - |
| 3 | - | 13 | 12 | 23 | 86 | 33 | - |
| 4 | - | 14 | 12 | 24 | 64 | 34 | - |
| 5 | - | 15 | 28 | 25 | 34 | 35 | - |
| 6 | - | 16 | 74 | 26 | 17 | 36 | - |
| 7 | - | 17 | 72 | 27 | 11 | 37 | - |
| 8 | - | 18 | 102 | 28 | 4 | 38 | - |
| 9 | 1 | 19 | 129 | 29 | 1 | 39 | - |
| | | | | | | 40 | - |

K=80 (2000 veces)

| n.caras | | n. caras | | n. caras | | n. caras | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | 20 | - | 40 | 177 | 60 | - |
| 1 | - | 21 | - | 41 | 195 | 61 | - |
| 2 | - | 22 | - | 42 | 177 | 62 | - |
| 3 | - | 23 | - | 43 | 165 | 63 | - |
| 4 | - | 24 | - | 44 | 113 | 64 | - |
| 5 | - | 25 | 1 | 45 | 99 | 65 | - |
| 6 | - | 26 | 2 | 46 | 61 | 66 | - |
| 7 | - | 27 | 3 | 47 | 59 | 67 | - |
| 8 | - | 28 | 6 | 48 | 36 | 68 | - |
| 9 | - | 29 | 10 | 49 | 17 | 69 | - |
| 10 | - | 30 | 15 | 50 | 6 | 70 | - |
| 11 | - | 31 | 27 | 51 | 4 | 71 | - |
| 12 | - | 32 | 30 | 52 | 4 | 72 | - |
| 13 | - | 33 | 57 | 53 | 1 | 73 | - |
| 14 | - | 34 | 91 | 54 | 1 | 74 | - |
| 15 | - | 35 | 102 | 55 | - | 75 | - |
| 16 | - | 36 | 116 | 56 | - | 76 | - |
| 17 | - | 37 | 108 | 57 | 1 | 77 | - |
| 18 | - | 38 | 145 | 58 | - | 78 | - |
| 19 | - | 39 | 171 | 59 | - | 79 | - |
| | | | | | | 80 | - |



PROGRAMA PARA LA SIMULACIÓN DE LANZAMIENTOS DE MONEDAS

```
1Ø REM SIMULACION DE LANZAMIENTOS DE MONEDAS
2Ø Borrado de pantalla
3Ø INPUT "NUMERO DE MONEDAS QUE LANZO";L
4Ø INPUT "VECES QUE HAGO EL EXPERIMENTO";R
5Ø DIM M(L)
6Ø T=TI
7Ø FOR J=1 TO R: C=Ø
8Ø FOR I=1 TO L: IF RND(TI) Ø.5 THEN C=C+1
9Ø NEXT I
1ØØ M(C)=M(C)+1: NEXT J
11Ø Borrado de pantalla
12Ø FOR I=Ø TO L: IF M(I) Ø THEN PRINT M(I);"VECES"; I;"CARAS",
13Ø NEXT I: PRINT: PRINT "TIEMPO=";(TI=T)/6Ø;"SEG."
14Ø GOTO 14Ø
15Ø END
```

PROGRAMA PARA LAS DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

```
5 REM DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES
1Ø INPUT "CUANTAS OBSERVACIONES HAY";N
3Ø DIM A(N-1): DIM B(N-1):DIM X(N-1):DIM Y(N-1)
4Ø FOR I=Ø TO N-1
5Ø READ A(I)
6Ø NEXT I
7Ø FOR J=Ø TO N-1
8Ø READ B(J): NEXT J
9Ø FOR I=Ø TO N-1
1ØØ X(I)=A(I)
11Ø NEXT I
12Ø GOSUB 1ØØØ
13Ø MA=M: VA=V: DA=D
14Ø PRINT "PRIMERA VARIABLE"
```

```
15Ø PRINT "MEDIA=";MA;"VARIANZA=";VA
155 PRINT "DESVIACION TIPICA=";DA
157 PRINT
16Ø FOR I=1 TO N-1
165 X(I)=B(I):NEXT I
17Ø GOSUB 1ØØØ
18Ø MB=M: VB=V: DB=D
19Ø PRINT "SEGUNDA VARIABLE"
195 PRINT "MEDIA=";MB,"VARIANZA=";VB
197 PRINT "DESVIACION TIPICA=";DB
2ØØ FOR I=Ø TO N-1
21Ø X(I)=A(I): Y(I)=B(I)
212 NEXT I
22Ø MX=MA: MY=MB
23Ø GOSUB 3ØØØ
24Ø CO=C: PRINT "COVARIANZA=";CO
25Ø REM CALCULO COEFICIENTE CORRELACION
26Ø CR=CO/(DA*DB): PRINT "COEF. DE CORRELACION=";CR
5ØØ PRINT "ECUACIONES RECTAS DE REGRESION"
51Ø PRINT : PRINT "Y-(";MB;")=";CO/VA;"(X-(";MA;"))":PRINT
53Ø PRINT "Y-(";MB;")=";VB/CO;"(X-(";MA;"))"
55Ø DATA
9ØØ END
1ØØØ REM SUBRUTINA PARA DISTRIBUCIONES MARGINALES
1Ø1Ø M=Ø: V=Ø
1Ø3Ø FOR I=Ø TO N-1
1Ø4Ø M=M+X(I)
1Ø5Ø NEXT I
1Ø6Ø M=M/N
1Ø7Ø FOR I=Ø TO N-1
1Ø8Ø V=V+(X(I)-M)↑2
1Ø9Ø NEXT I
11ØØ V=V/N: D=V↑Ø.5
111Ø RETURN
```



```
3ØØØ REM SUBRUTINA DE COVARIANZA
3Ø Ø5 C=Ø
3Ø1Ø FOR I=Ø TO N-1
3Ø2Ø C=C+((X(I)-MX)*(Y(I)-MY))
3Ø25 NEXT I
3Ø3Ø C=C/N
3Ø4Ø RETURN
```

# 7. ESPAÑA Y SUS PROVINCIAS

| PROVINCIAS | Población de derecho (*) (31-12-76) | Número de municipios (31-12-75) | Superficie – Km² | Matrimonios Año 1976 | Nacimientos – Año 1976 | Defunciones – Año 1976 | Fallecidos menores de un año Año 1976 | Viviendas familiares Año 1976 | Turismos matriculados Año 1976 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alava | 245.069 | 59 | 3.047 | 1.488 | 4.472 | 1.614 | 51 | 67.066 | 5.986 |
| Albacete | 331.734 | 86 | 14.858 | 2.404 | 6.213 | 3.038 | 69 | 112.809 | 4.885 |
| Alicante | 1.079.244 | 138 | 5.653 | 7.705 | 21.224 | 8.930 | 190 | 367.601 | 23.890 |
| Almería | 390.449 | 103 | 8.774 | 3.077 | 8.170 | 3.216 | 117 | 127.004 | 5.821 |
| Avila | 188.738 | 262 | 8.048 | 1.256 | 2.067 | 1.775 | 34 | 76.463 | 2.574 |
| Badajoz | 638.672 | 162 | 21.657 | 4.482 | 10.382 | 6.153 | 89 | 211.281 | 7.045 |
| Baleares | 611.194 | 65 | 5.014 | 4.337 | 10.915 | 5.662 | 113 | 213.512 | 14.493 |
| Barcelona | 4.485.086 | 310 | 7.733 | 30.447 | 74.858 | 31.631 | 883 | 1.183.716 | 122.716 |
| Burgos | 348.675 | 439 | 14.269 | 2.236 | 5.910 | 2.992 | 61 | 155.915 | 6.559 |
| Cáceres | 425.044 | 218 | 19.945 | 3.304 | 5.986 | 3.873 | 73 | 126.153 | 4.675 |
| Cádiz | 946.999 | 42 | 7.385 | 7.752 | 22.117 | 6.858 | 276 | 232.514 | 11.824 |
| Castellón | 414.744 | 140 | 6.679 | 2.854 | 7.606 | 4.014 | 47 | 157.591 | 9.269 |
| Ciudad Real | 479.147 | 98 | 19.749 | 3.161 | 7.478 | 4.249 | 87 | 160.695 | 6.155 |
| Córdoba | 714.632 | 73 | 13.718 | 5.534 | 12.874 | 5.878 | 148 | 211.783 | 9.867 |
| Coruña (La) | 1.064.976 | 93 | 7.876 | 7.898 | 17.905 | 9.306 | 288 | 281.126 | 18.791 |
| Cuenca | 220.499 | 242 | 17.061 | 1.492 | 2.716 | 2.255 | 16 | 93.675 | 2.590 |
| Gerona | 447.657 | 223 | 5.866 | 3.510 | 7.538 | 4.406 | 63 | 161.832 | 13.762 |
| Granada | 742.764 | 169 | 12.531 | 5.311 | 13.864 | 6.079 | 225 | 221.206 | 7.241 |
| Guadalajara | 146.179 | 295 | 12.190 | 683 | 1.785 | 1.322 | 16 | 62.239 | 1.973 |
| Guipúzcoa | 698.594 | 81 | 1.997 | 4.866 | 12.773 | 4.630 | 134 | 164.750 | 16.238 |
| Huelva | 402.629 | 79 | 10.085 | 3.050 | 7.316 | 3.928 | 101 | 117.043 | 5.694 |
| Huesca | 212.360 | 209 | 15.671 | 1.203 | 2.539 | 2.115 | 18 | 71.780 | 4.974 |
| Jaén | 647.532 | 96 | 13.498 | 4.496 | 10.798 | 5.426 | 137 | 204.279 | 5.628 |
| León | 529.524 | 222 | 15.468 | 4.146 | 7.486 | 4.856 | 79 | 171.560 | 8.637 |
| Lérida | 348.388 | 230 | 12.028 | 2.359 | 5.664 | 3.393 | 39 | 108.489 | 8.601 |
| Logroño | 243.140 | 175 | 5.034 | 1.762 | 4.049 | 2.194 | 39 | 80.562 | 5.074 |
| Lugo | 409.061 | 66 | 9.803 | 2.773 | 4.884 | 4.875 | 76 | 122.580 | 5.475 |
| Madrid | 4.576.251 | 179 | 7.995 | 31.545 | 93.704 | 27.434 | 839 | 1.132.793 | 124.691 |
| Málaga | 928.069 | 99 | 7.276 | 6.466 | 19.036 | 7.754 | 172 | 274.466 | 13.094 |
| Murcia | 890.974 | 43 | 11.317 | 6.330 | 18.591 | 7.232 | 208 | 274.223 | 14.337 |
| Navarra | 490.531 | 264 | 10.421 | 3.595 | 8.633 | 4.271 | 81 | 131.688 | 12.118 |
| Orense | 431.774 | 92 | 7.278 | 2.630 | 4.773 | 4.309 | 49 | 136.356 | 4.986 |
| Oviedo | 1.111.917 | 78 | 10.565 | 8.016 | 17.746 | 9.462 | 268 | 327.620 | 22.303 |
| Palencia | 188.824 | 203 | 8.029 | 1.401 | 2.505 | 1.873 | 38 | 62.859 | 3.122 |
| Palmas (Las) | 661.629 | 34 | 4.065 | 4.966 | 14.377 | 4.195 | 175 | 154.498 | 15.350 |
| Pontevedra | 857.326 | 61 | 4.477 | 6.420 | 16.627 | 6.348 | 230 | 208.095 | 15.160 |
| Salamanca | 351.785 | 359 | 12.336 | 2.645 | 5.235 | 3.310 | 75 | 121.568 | 6.743 |
| Sta. Cruz de Tenerife | 680.498 | 53 | 3.208 | 4.535 | 12.955 | 4.287 | 150 | 153.901 | 11.469 |
| Santander | 495.185 | 102 | 5.289 | 3.994 | 9.028 | 4.145 | 131 | 150.783 | 9.830 |
| Segovia | 149.013 | 215 | 6.949 | 1.064 | 2.070 | 1.419 | 10 | 59.343 | 2.686 |
| Sevilla | 1.386.187 | 102 | 14.001 | 11.101 | 32.058 | 11.399 | 315 | 362.118 | 21.946 |
| Soria | 102.967 | 185 | 10.287 | 569 | 1.314 | 1.039 | 11 | 42.681 | 1.967 |
| Tarragona | 496.056 | 177 | 6.283 | 3.571 | 9.044 | 4.854 | 56 | 174.665 | 11.862 |
| Teruel | 153.247 | 234 | 14.804 | 824 | 1.597 | 1.732 | 8 | 73.092 | 2.342 |
| Toledo | 465.916 | 204 | 15.368 | 3.362 | 7.208 | 4.249 | 76 | 156.421 | 6.455 |
| Valencia | 1.969.062 | 263 | 10.763 | 14.589 | 38.168 | 17.288 | 368 | 618.225 | 43.520 |
| Valladolid | 458.020 | 229 | 6.202 | 3.098 | 8.938 | 3.136 | 93 | 129.326 | 10.236 |
| Vizcaya | 1.178.055 | 96 | 2.217 | 7.917 | 23.230 | 7.993 | 163 | 301.019 | 26.585 |
| Zamora | 229.834 | 252 | 10.559 | 1.667 | 2.818 | 2.357 | 37 | 81.556 | 3.430 |
| Zaragoza | 801.029 | 292 | 17.194 | 5.549 | 13.642 | 6.903 | 135 | 249.393 | 15.144 |
| TOTAL | 36.448.481 | 8.194 | 504.750 | 259.640 | 662.084 | 291.573 | 7.089 | 10.630.131 | 739.493 |

(*) Estimación.



## SI ARQUIMEDES HUBIERA TENIDO CALCULADORA

Ricardo Aguado-Muñoz Prada
Agustín Blanco Ruiz
Ricardo Zamarreño Fernández

GRUPO" 2001"

## INTRODUCCIÓN

El concepto de límite presenta para los alumnos principiantes, además de su dificultad intrínseca, otro inconveniente. Se preguntan ¿esto para qué sirve?

Hemos de intentar plantearles ejercicios adecuados que les hagan ver la importancia del límite. Uno de estos posibles trabajos puede ser el cálculo del número.. $\pi$ .

Cualquier escolar sabe que $\pi$ es la relación existente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro o la que existe entre la superficie del círculo y el cuadrado del radio. Establecer estas propiedades no fue fácil y fueron necesarios los esfuerzos de matemáticos de primera fila.

En la antigüedad, fuera del ámbito griego, hay algunas determinaciones interesantes de $\pi$ . Los babilonios obtenían el área del círculo mediante la regla $A=C^2/12$, siendo C la longitud de la circunferencia, lo cual supone asignar a $\pi$ el valor 3.

En el papiro Rhind, escrito hacia el 1700 a.J.C., el área del círculo se calcula mediante la fórmula $A=(8d/9)^2$, siendo d el diámetro; en este caso

$$\pi=(16/9)^2=256/81=3.1604$$

Hay que llegar a los griegos para mejorar estos valores y situar el cálculo de nuestro número en un contexto más riguroso.

Dos matemáticos de la escuela sofista, Antifón y Brisón, contemporáneos de Sócrates, aportaron una brillante idea. El primero,



trabajando en la cuadratura del círculo, concibió aproximar el área del círculo mediante polígonos inscritos cuyo número de lados se iba duplicando; Brisón por su parte sugirió utilizar polígonos circunscritos.

Eudoxo, discípulo de Platón, recogió estas ideas y estableció el método exhaustivo para calcular áreas y volúmenes de figuras curvas. Con este método demostró, entre otros resultados importantes, que las áreas de dos círculos están en la relación del cuadrado de sus radios.

El método exhaustivo fue utilizado por Euclides en el libro XII de sus "Elementos". En la Proposición 1 demuestra que polígonos semejantes inscritos en círculos están entre sí en la misma relación que los diámetros de los círculos. Con dicho método prueba que si el teorema es válido para polígonos, lo será también para círculos a los que se aproxima mediante polígonos regulares inscritos.

$S/S'=d^2/d'^2$ por tanto $S/d^2=S'/d'^2=K$

y obtenemos $S=Kd^2$ o bien $S=Hr^2$ (1)

siendo S y S' las superficies de los círculos y K y H constantes.

Euclides no dió el paso siguiente que suponía el cálculo de H. Fue Arquímedes quien lo hizo con notable aproximación y lo expuso en su obra "Medida del círculo", uno de sus más breves e importantes trabajos.

En la Proposición 1 de dicha obra, demuestra que el área del círculo es igual al área de un triángulo rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia y cuya altura es igual al radio

$S = Lr/2$ que sustituida en (1) nos da

$$Lr/2r^2 = L/2r = L/D = H$$

Hemos obtenido la importante relación

$$S/r^2 = L/D = H$$

En la Proposición 3 del mismo trabajo nos dice: "La circunferencia de un círculo es igual al triple del diámetro y una parte de éste menor que la séptima parte y mayor que diez setenta y un avos del diámetro".

Dicho de un modo más sencillo

$$3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$$

o

$$223/71 < \pi < 220/70$$

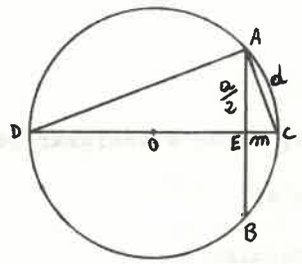
Lo que da para $\pi$ un valor comprendido entre 3.14084 y 3.14285

Para estas aproximaciones, sirviéndose del método exhaustivo, calculó los perímetros y diámetros de polígonos inscritos y circunscritos al círculo.

CALCULO DE $\pi$

Nosotros seguiremos el mismo método que Arquímedes, considerando únicamente polígonos regulares inscritos, cada uno de doble número de lados que el anterior y calcularemos la relación del perímetro al diámetro.






Realizamos la construcción en un círculo de r=1.

AB es el lado de un polígono regular y AC lo es del polígono de doble número de lados.

Aplicando los teoremas del cateto y de la altura en el triángulo rectángulo DAC obtenemos:

$$\frac{2}{d} = \frac{d}{m} \qquad d^2 = 2m \quad ; \quad \frac{2-m}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{m} \qquad \frac{a^2}{4} = m(2-m)$$

siendo $AE = \frac{a}{2}$ ; $AC = d$ , $EC = m$

Sustituyendo m en la segunda expresión y simplificando, aparece una ecuación bicuadrada en d

$$\frac{a^2}{4} = \frac{d^2}{2}\left(2 - \frac{d^2}{2}\right) \qquad d^4 - 4d^2 - a^2 = 0$$

que tiene dos soluciones positivas:

$$d_1 = \sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}} \quad y \quad d_2 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

De las dos soluciones únicamente es válida $d_2$ ya que, para el hexágono, por ejemplo, a=1 y resultaría para $d_1$ el valor

$$d_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} > 2$$

lo que evidentemente es falso. Por consiguiente, eliminando el

subíndice, resulta

$$d = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

Con objeto de unificar la notación, vamos a designar por:

$a_1$ : Lado de hexágono regular

$a_2$ : Lado del dodecágono regular

.....

.....

$a_n$ : Lado del polígono regular en la etapa enésima.

Siendo $$a_n = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_{n-1}^2}} \qquad (1)$$

Sea $$p_n = \frac{\text{Perímetro del polígono de lado } a_n}{\text{Diámetro de la circunferencia}} = \frac{\text{Perímetro}}{2}$$

Partimos del hexágono regular, en cuyo caso $a_1 = 1$ y obtenemos la sucesión siguiente:

$$p_1 = \frac{6\,a_1}{2} = 3 \cdot a_1$$

$$p_2 = \frac{12\,a_2}{2} = 2 \cdot 3\,a_2$$

.....

.....

$$p_n = \frac{3 \cdot 2^n\,a_n}{2} = 2^{n-1} \cdot 3\,a_n$$

El límite de esta sucesión será el número $\pi$.

Con una calculadora manualeprogramable calculamos los siguientes valores:



T A B L A 1ª

$p_1 = 3$

$p_2 = 3.1\,0\,5\,8\,2\,8\,5\,3\,9$

$p_3 = 3.1\,3\,2\,6\,2\,8\,6\,0\,3$

$p_4 = 3.1\,3\,9\,3\,5\,0\,1\,8\,0$

$p_5 = 3.1\,4\,1\,0\,3\,1\,7\,5\,9$

$p_6 = 3.1\,4\,1\,4\,5\,2\,4\,0\,3$

$p_7 = 3.1\,4\,1\,5\,5\,6\,5\,4\,7$

$p_8 = 3.1\,4\,1\,5\,8\,0\,0\,1\,5$

$p_9 = 3.1\,4\,1\,5\,8\,0\,0\,1\,5$

$p_{10} = 3.1\,4\,1\,4\,8\,6\,1\,3\,9$

$p_{11} = 3.1\,4\,1\,8\,6\,1\,6\,2\,4$

$p_{12} = 3.1\,4\,4\,8\,6\,3\,8\,8\,1$

$p_{13} = 3.1\,5\,6\,8\,4\,4\,3\,5\,9$

$p_{14} = 3.2\,0\,4\,3\,1\,8\,3\,6\,6$

$p_{15} = 3.1\,0\,8\,6\,4\,5\,4\,3\,1$

$p_{16} = 3.1\,0\,8\,6\,4\,5\,4\,3\,1$

$p_{17} = 0$

$p_{18} = 0$

Todo parece ir por buen camino hasta los términos $p_8$ , $p_9$ , pero a partir del $p_{10}$ la sucesión se "estropea" y $p_{17} = 0$.

¿Qué ha ocurrido?

Sospechamos que como los lados de los sucesivos polígonos se hacen cada vez más pequeños, llega un momento en que la calculadora no tiene capacidad para expresarlos y redondea a cero.

Comprobamos esta suposición y, en efecto, para $a_{17}$ aparece en pantalla el valor cero.

Esta dificultad nos plantea el hallar otra fórmula equivalente a (1) más adecuada para la calculadora.

Multiplicando y dividiendo (1) por

$$\sqrt{2+\sqrt{4-a_n^2}} \quad \text{obtenemos:}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{2+\sqrt{4-a_{n-1}^2}}} \qquad (2)$$

En esta expresión , los lados $a_n$ se aproximan a cero más lentamente, porque cuando $a_{n-1}^2$ dé cero en pantalla $a_n = a_{n-1}/2$ .

El cálculo de esta sucesión es aconsejable hacerlo con calculadora programable, porque si bien desde el término $p_{14}$ hasta el término $p_{229}$ son estables las siete primeras cifras decimales, el $p_{230}$ bruscamente se hace cero.

TABLA 2ª

$p_1 = 3$

$p_2 = 3.1\ 0\ 5\ 8\ 2\ 8\ 5\ 4\ 1$

$p_3 = 3.1\ 3\ 2\ 6\ 2\ 8\ 6\ 1\ 3$

$p_4 = 3.1\ 3\ 9\ 3\ 5\ 0\ 2\ 0\ 2$

$p_5 = 3.1\ 4\ 1\ 0\ 3\ 1\ 9\ 5\ 0$

$p_6 = 3.1\ 4\ 1\ 4\ 5\ 2\ 4\ 7\ 1$

$p_7 = 3.1\ 4\ 1\ 5\ 5\ 7\ 6\ 0\ 6$

$p_8 = 3.1\ 4\ 1\ 5\ 8\ 3\ 8\ 9\ 2$

$p_9 = 3.1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 0\ 4\ 6\ 2$

$p_{10} = 3.1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 1\ 0\ 5$

$p_{11} = 3.1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 5\ 1\ 7$

$p_{12} = 3.1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 2\ 1$

$p_{13} = 3.1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 4\ 5$

$p_{14} = 3.1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3$

$p_{15} = 3.1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 5$

.....

$p_{229} = 3.1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 5$

$p_{230} = 0$

Esta nueva anomalía es debida a que la fórmula (2) utilizada para el cálculo de $a_n$ , si bien es mejor que la anterior, también tiene inconvenientes porque el término $a_{230}$ tiene un orden de magnitud tal que la calculadora redondea a cero.

Nuevamente nos vemos obligados a conseguir otra expresión que estabilice indefinidamente los valores de la sucesión.

Como $p_n = 3 \cdot 2^{n-1} \dfrac{a_{n-1}}{\sqrt{2+\sqrt{4-a_{n-1}^2}}}$

y $p_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2} \cdot a_{n-1}$

resulta $$p_n = \frac{2\,p_{n-1}}{\sqrt{2+\sqrt{4-a_{n-1}^2}}} \qquad (3)$$

Para valores de n grandes $p_n \simeq p_{n-1}$

Con esta última fórmula la sucesión se estabiliza definitivamente y obtenemos el valor siguiente:

$$= 3.1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3$$

Todo lo anterior nos muestra que si bien la calculadora es un instrumento de cálculo de gran eficacia, hemos de manejarla siendo conscientes de sus limitaciones, ya que se pueden producir errores debidos al redondeo y a la capacidad de la pantalla.



# LAS URNAS... ¿ ESTAN PREDESTINADAS ?

Por Ricardo AGUADO-MUÑOZ y Agustín BLANCO
del GRUPO 2.001
Instituto Piloto "Cardenal Herrera Oria " de Madrid

## 1. PROBLEMA INICIAL.

Se parte de una urna cuya composición inicial es de una bola blanca y otra negra. Se extrae al azar una bola y se la devuelve a la urna acompañada de otra del mismo color. Se repite el proceso hasta que en la urna haya cien bolas. (Fig.1)

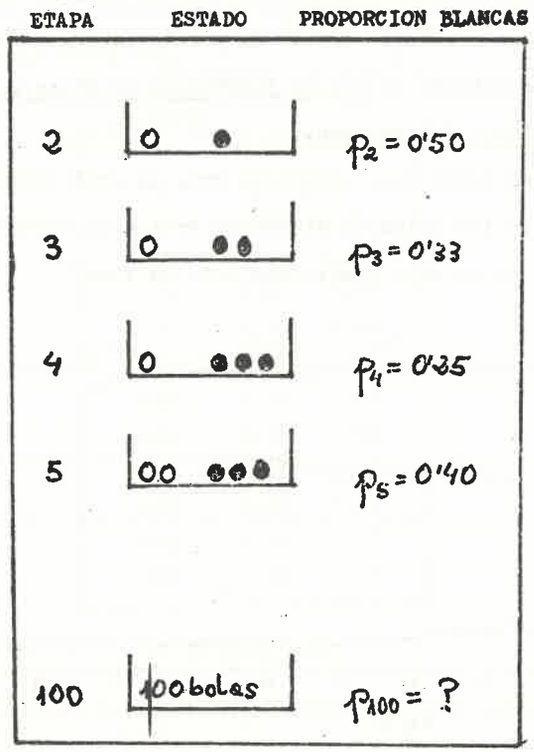



Fig. 1

Podemos considerar que la urna es un sistema que cambia de estado a lo largo de las distintas etapas. Desde la etapa inicial (etapa 2) hasta la etapa final (etapa 100), la urna atraviesa distintos estados; entendiendo por estados cada una de las composiciones posible. Así, por ejemplo, en la etapa 3 hay dos estados posibles : una bola blanca y dos negras, o dos blancas y una negra.

En la etapa 100 hay 99 estados posibles. ¿ A cuál de estos 99 estados llegará la urna ? Imposible predecirlo : todos ellos son igualmente probables; es decir, la probabilidad de que la urna llegue a un estado final concreto es 1/99 .

Aunque al principio no podamos predecir qué estado final alcanzará la urna, sí que lo podemos hacer(con cierto margen) cundo hayan transcurrido algunas etapas; porque se puede probar, mediante simulación, el hecho notable de que la proporción de bolas blancas se estabiliza a lo largo del proceso.

Esto quiere decir que, aunque la urna no esté predestinada en su nacimiento, en las primeras etapas se decide su futuro. Y también, que la infancia de la urna condiciona toda su vida.

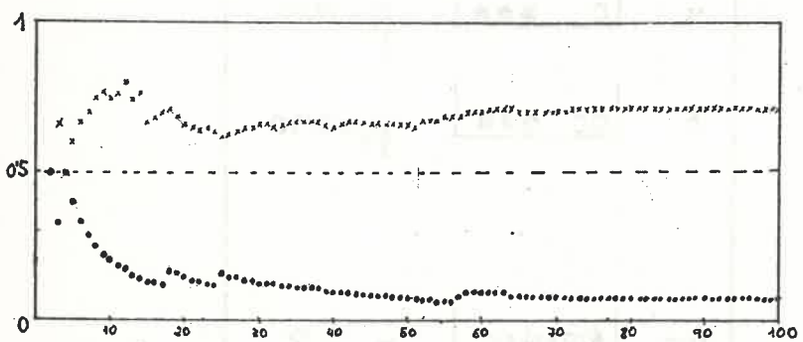



Fig. 2



Con el ordenador hemos simulado el sistema, controlando en cada etapa la proporción p de bolas blancas. Representando la variación de p , hemos obtenido gráficos parecidos a los de la figura 2; en la cual podemos observar que la proporción de blancas se estabiliza en torno a un número.

Sospechamos que la primera bola extraída tiene una influencia decisiva sobre el estado final. Es decir, que si la primera bola que se extrae es blanca, la composición final de la urna será con mayoría de bolas blancas; y si es negra, la mayoría de las bolas al final serán negras. La confirmación de esta sospecha la obtuvimos realizando un número elevado de simulaciones y comparando la proporción de la etapa 3 con la de la etapa 100.

| Número de la prueba | $p_3$ | $p_{100}$ |
|---|---|---|
| 1 | 0,33 | 0,15 |
| 2 | 0,66 | 0,48 |
| 3 | 0,66 | 0,62 |
| 4 | 0,33 | 0,16 |
| 5 | 0,66 | 0,93 |
| 6 | 0,33 | 0,28 |
| 995 | 0,33 | 0,23 |
| 996 | 0,33 | 0,54 |
| 997 | 0,66 | 0,55 |
| 998 | 0,33 | 0,23 |
| 999 | 0,66 | 0,27 |
| 1000 | 0,66 | 0,87 |

Fig. 3

En la tabla de la figura 3 se puede observar que si el sistema empieza con baja proporción de bolas blancas ($p_3$=0,33 ), acaba también con baja proporción de blancas ( $p_{100}$<0,50 ) en la mayor parte

de los casos; y que si $p_3=0,66$ , entonces lo más frecuente es que sea $p_{100}>0,50$.

Después de haber realizado mil pruebas, podemos concluir que únicamente en el 25% de los casos el destino inicial se tuerce.

Realizando también un número elevado de pruebas pudimos comprobar experimentalmente, una cosa que conocíamos teóricamente, a saber : que las proporciones finales $p_{100}$ se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0 , 1]$. Para ello dividimos este intervalo en 10 partes e hicimos el recuento de las veces que una proporción final $p_{100}$ cae en cada uno de los intervalos parciales. Obtuvimos el siguiente diagrama de barras de frecuencias relativas ( Fig.4 ).

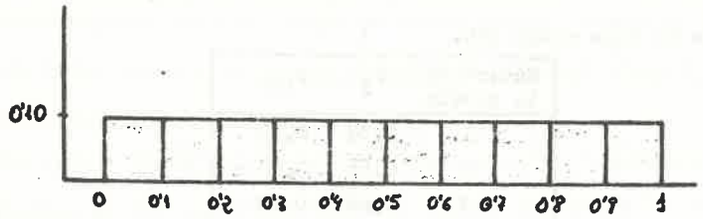



Fig. 4

## 2. GENERALIZACION DEL PROBLEMA.

El problema que acabamos de analizar es un ejemplo de sistema autorregulable, en el sentido de que la proporción de blancas, a partir de una cierta etapa, permanece estable. Acabamos de ver también, que las etapas iniciales son decisivas, y que al comienzo el destino de la urna no está determinado.

¿ Este modelo matemático puede serlo de situaciones reales ? ¿ Es posible comparar la evolución de la urna con el desarrollo intelectual de una persona ? ¿ Se puede comparar con la evolución de



sociedades cuyos miembres, blancos y negros, se reclutan por cooptación, por un procedimiento similar al de reclutamiento de las bolas para la urna ?

Corresponde a los psicólogos y sociólogos opinar sobre la validez de tales comparaciones. Nosotros hemos querido admitir, a modo de juego, la validez de éstas y modificar algunas condiciones de la urna para ver cómo evoluciona.

Entendemos que las bolas blancas son cualidades positivas de la inteligencia, que las negras representan cualidades negativas y que, unas y otras, se adquieren a lo largo de los años siguiendo el modelo de la urna.

Nos interesa saber cómo influye el hecho de que, a una cierta edad, el individuo reciba una ayuda externa de cualidades positivas. En otros términos : ¿ qué pasa si en la etapa cinco se añaden a la urna tres bolas blancas de propina ? Es evidente que la proporción final de bolas blancas aumentará en la mayoría de los casos; pero el efecto exacto lo tendremos cuando comtemplemos el diagrama de barras correspondiete a un número elevado de simulaciones. Más aún, será interesante ver cómo varía el diagrama de barras al variar la "ayuda" y la "edad" en que ésta se realiza; esto es : al variar el número A de bolas blancas que se introducen y la etapa E en que se realiza el aporte.

Un programa de ordenador nos ha permitido obtener los diagramas de frecuencias relativas adjuntos (Fig.5 ); en los que se aprecia la distribución de las proporciones finales de bolas blancas, cuando una misma ayuda A=3 se aporta en las etapas E=3, 4, 5, 10 y 50.

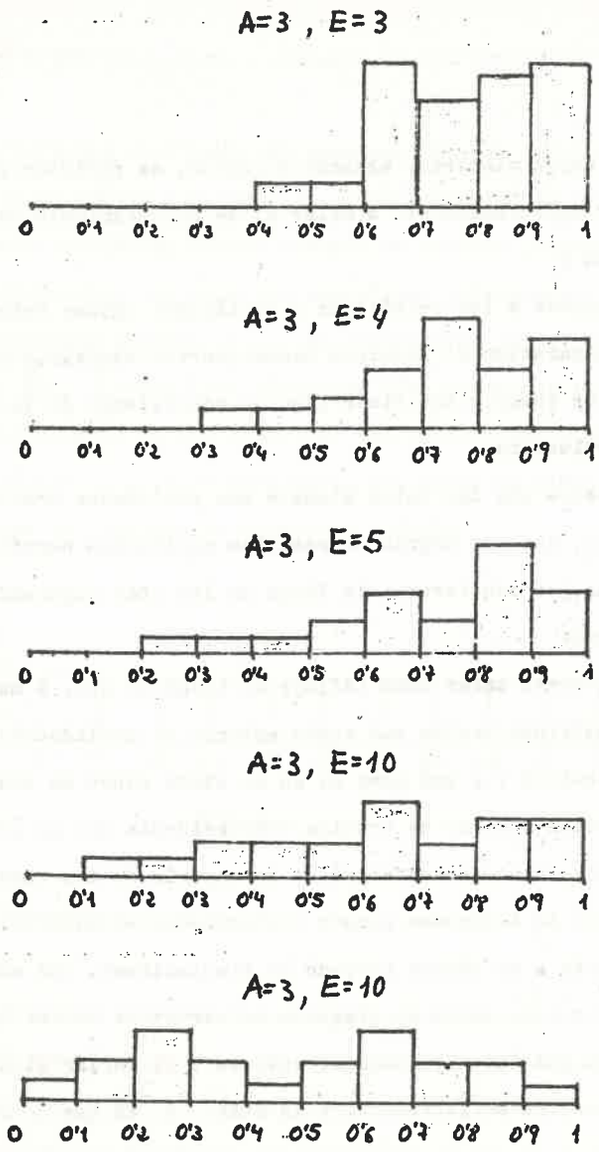



Fig. 5

Observamos que una misma ayuda, hecha en una etapa temprana tiene más trascendencia que hecha en una etapa avanzada, donde la incidencia es mínima.



Otra cuestión interesante es ver cómo evolucionan los diagramas al variar las condiciones de reclutamiento de las bolas.

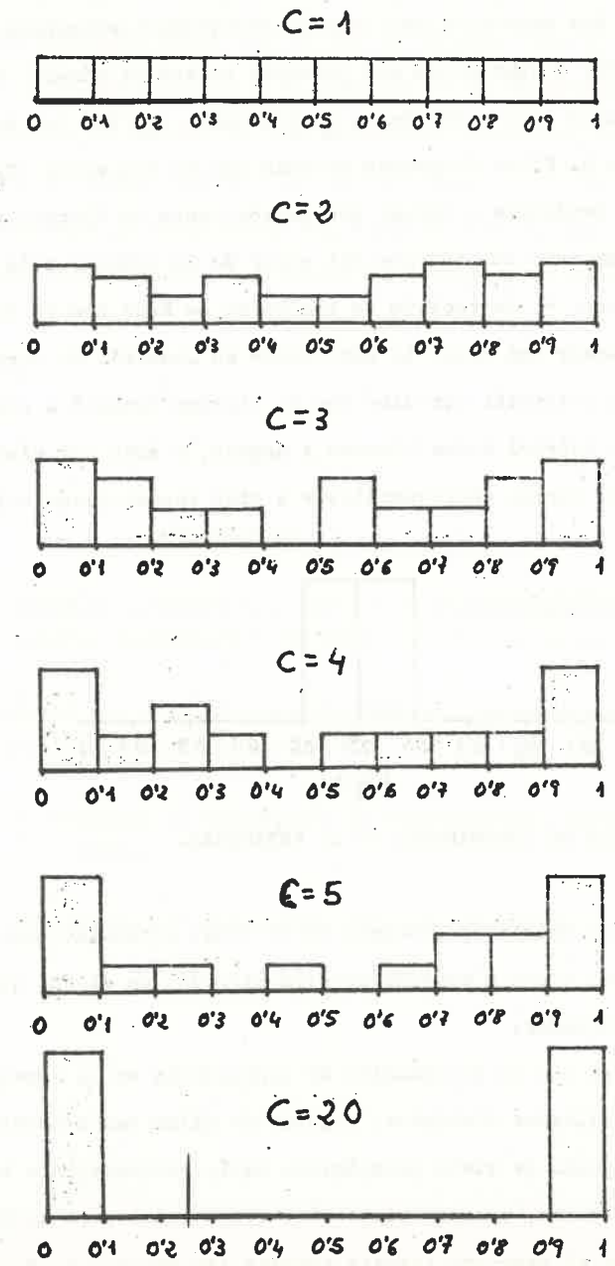



Fig.6

El caso que podríamos llamar normal es cuando al extraer una bola la devolvemos acompañada de una del mismo color. Pero, ¿qué pasaría si cada vez que extraemos una bola la devolvemos acompañada de tres del mismo color ? Un programa que permitía variar el número C de bolas introducidas para acompañar a la extraída, nos dió los diagramas de la figura 6. Estos diagramas prueban que en los casos $C \neq 1$ las urnas tienen tendencia a acabar con proporciones de blancas altas o bajas ( dependiendo fuertemente del color de la primera bola extraída).

Por último, si la recluta de las bolas se hace con la condición de que al extraer una bola, la devolvemos en compañía de otra del color contrario, la intuición nos dice que el sistema tenderá a restablecer el equilibrio inicial entre blancas y negras, y esto muy rápidamente. El diagrama de barras correspondiente a cien repeticiones del experimento es del tipo :

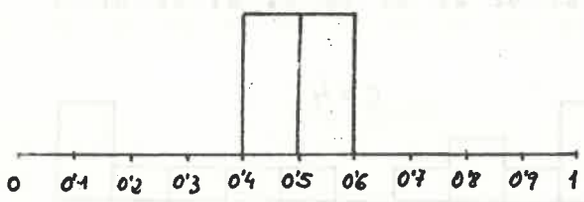



Fig.7

## 3. UTILIZACION DE ORDENADORES EN LA ENSEÑANZA.

Dejando ya aparte el problema de la urna, entendido como modelo probabilístico, vamos a centrar nuestra atención en el uso que hemos hecho del ordenador.

Sabido es que la utilización de ordenadores en la enseñanza admite posibilidades distintas, algunas de ellas radicalmente opuestas desde el punto de vista pedagógico. Aquí, evidentemente hemos simulado un sistema, y hemos visto cómo evoluciona; pero lo más interesante es que el programa permite escoger las variables N , número de veces que se repite el llenado de la urna; A , ayuda que se aporta; E , etapa en la que se ayuda; y C , número de bolas que se introducen del mismo color que la que se extrae. Todo ello da al usuario ( profesor o alumno ) la posibilidad de comprobar cómo varían los resultados en función de los parámetros iniciales, lo que permite observar el comportamiento del sistema bajo distintas hipótesis.

Este tipo de utilización es, nuestro juicio, una de las posibilidades más interesantes que ofrecen los ordenadores en el campo educativo.

## BIBLIOGRAFIA


AGUADO-MUÑOZ,R. , BLANCO A., ZABALA J. y ZAMARREÑO R. BASIC BASICO. PROGRAMACION DE ORDENADORES Edición de los autores.

AGUADO-MUÑOZ R., BLANCO A. y ZAMARREÑO R. Las calculadoras en el aula. Ediciones Anaya, Madrid, 1982

NAYLOR T. Técnicas de simulación en computadoras. Limusa. Méjico, 1977.

SOBOL I.M. Método de Montecarlo. MIR . Moscú, 1975

URNA

```
10 PRINT""
12 PRINT"                                                            "
R "
14 PRINT"                                                            "
R "
18 PRINT"          R.AGUADO-MUNOZ Y A.BLANCO                    DEL "
 "
_ "
 "
24 PRINT"  I.B. CARDENAL HERRERA ORIA.    MADRID"
30 TE=300:GOSUB 10030
40 PRINT"                  UNA URNA CONTIENE UNA BOLA "
42 PRINT"BLANCA Y OTRA NEGRA. INICIAMOS UN PROCE- "
44 PRINT"SO CONSISTENTE EN EXTRAER UNA BOLA AL A- "
46 PRINT"ZAR Y REPONERLA JUNTO CON OTRA DE IGUAL   "
48 PRINT"COLOR.":PRINT:PRINTSPC(14):PRINT"ANTES DE ESTUDIAR LA SUCE-
50 PRINT"SION DE FRECUENCIAS RELATIVAS ASOCIADA   "
52 PRINT"VAMOS A REFRESENTARLO GRAFICAMENTE,HASTA"
54 PRINT"QUE EL NUMERO TOTAL DE BOLAS ES 100."
60 AV=1:BA=14:GOSUB10100
70 GOSUB10020
80 DIMV(100):V(1)=10
100 REM URNA
110 GOSUB2000
112 AV=1:GOSUB10100
114 GOSUB10020
120 GOSUB10200
130 REM SI EL=4 FINAL
140 IFEL=4THEN200
150 REM EN OTROS CASOS ...
160 ONELGOSUB2000,3000,1000
180 GOSUB114
195 GOSUB170
200 END
900 GOTO900
920 GOSUB 1000
930 GOTO930
940 END
1000 REM*********************************
1010 REM SIMULACION DE UNA URNA
1020 PRINT"":PRINT"NUMERO DE VECES QUE SE REALIZA EL EXPERIMENTO"
1030 PRINT:INPUT"N=";N
1040 PRINT:PRINT
1050 PRINT"NUMERO DE BOLAS  QUE  SE INTRODUCEN DEL MISMO COLOR QUE L
SALE"
1060 PRINT:INPUT"C=";C
1070 PRINT:PRINT
1080 PRINT"EDAD EN LA QUE SE AYUDA"
```



```
1090 PRINT: INPUT"E=";E
1100 PRINT:PRINT
1110 PRINT"AYUDA QUE SE APORTA EN LA ETAPA E"
1120 PRINT:INPUT"A=";A
1125 T$=STR$(INT(N*(98-A)/C*.000306+.5)):LO=LEN(T$)
1130 FOR I=Ø TO 39:PRINT"  ";:NEXT I
1140 PRINT
1150 FOR I=0 TO 23:PRINT"  ";:NEXT I
1160 IF VAL(T$)=1 THEN M$=" MINUTO ":GOTO 1180
1170 M$=" MINUTOS "
1180 PRINT" ESPERE ";T$;" " ;M$;"  ,POR FAVOR ";
1190 FOR I=0 TO 53-LO:PRINT"  ";:NEXT I
1195 T0=TI
1200 FOR K=1 TO N
1210 B=1:P=.5
1220 L=2+C:ED=E
1230 FOR T=L TO ED STEP C
1240 IF RND(1)<=P THEN B=B+C
1250 P=B/T
1260 NEXT T
1270 B=B+A:L=T+A:ED=100:IF T<=100 THEN 1230
1280 F(INT(10*P))=F(INT(10*P))+1
1285 NEXT K
1290 GOSUB 5000
1300 PRINT" "
1310 PRINT"                          ";
1320 PRINT"0  .1  .2  .3  .4  .5  .6  .7  .8  .9  1";
1330 PRINT" ":PRINTTAB(9);"N=";N;TAB(17);"C=";C;TAB(25);"E=";E;TAB(33
"A=";A;
1350 GOSUB10020
1370 RETURN
2000 REM*****************************
2002 REM URNA GRAFICA
2004 REM*****************************
2010 NB=1:N=2:PB=33616:PN=33626
2015 FB=0:TN=0
2020 PRINT"":PRINTTAB(10);"NO. DE BOLAS BLANCAS  NB=";TAB(36);N
2022 PRINT:PRINTTAB(10);"NO. TOTAL DE BOLAS    NT=";TAB(36);2:PRINT"
2030 FORI=1TO10:PRINT"          ▒                   ▒":NEXTI
2032 PRINT"          ▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒▒ "
2040 POKEPB,81:POKEPN,87
2045 AV=2:BA=22:V(2)=10:GOSUB10100
2050 TE=180:GOSUB10010
2060 FORN=3TO100
2070 IF20*RND(TI)<=V(N-1)THEN2100
2075 REM SALE NEGRA
2080 GOSUB11100
2085 REM SALE BLANCA
2090 GOTO2115
2100 REM SALE BLANCA
2105 GOSUB11000
```

```
2110 REM ACELERAR
2115 GET C$:IFC$<>""THEN PRINT"▒":TE=15:AV=3:GOSUB10100
2120 GOSUB10010
2130 REM PONEMOS FR A PUNTO
2140 V(N)=20*(NB/N)
2200 NEXTN
2300 RETURN
2310 GOSUB10020
3000 REM CURVA
3200 FORP=1TO3
3300 REM EJES
3310 PRINT"▒"
3320 FORI=1TO20
3330 IFI=1THENPRINT"  1 |":GOTO3360
3340 IFI=10THENPRINT"0.5 |":GOTO3360
3350 IFI=20THENPRINT"  0 |":GOTO3360
3355 PRINTTAB(3);" |"
3360 NEXTI
3380 FORI=4TO38:PRINTTAB(I);"▒";:NEXTI
3390 ONPGOSUB3800,3830,3860
3400 REM CURVA
3410 PRINT"▒▒▒▒▒▒";
3420 FORX=ATOB
3430 FORY=1TOV(X):PRINT"▒";:NEXTY
3440 PRINT"▒";
3450 FORY=1TOV(X):PRINT"▒";:NEXTY
3460 NEXTX
3500 REM ESPERA
3510 AV=1:GOSUB10100
3520 GOSUB10020
3550 NEXTP
3600 RETURN
3799 REM LEYENDAS HORIZONTALES
3800 PRINT"     2                                   36":A=2:B=36:RETURN
3830 PRINT"    35                                   69":A=35:B=69:RETURN
3860 PRINT"    68                                   100":A=68:B=100:RETURN
3890 PRINT"    68                                   100":A=68:B=100:RETURN
4999 GOTO4999
5000 REM****************************
5010 REM SUBRUTINA DIAGRAMA BARRAS
5020 REM TENEMOS 10 CLASES DE OBJETOS
5030 REM NUMERADOS DEL 0 AL 9
5040 REM LAS FRECUENCIAS ABSOLUTAS
5050 REM F(0),...,F(9)
5060 REM CALCULO DE LAS FRECUENCIAS
5070 REM RELATIVAS A 20
5080 S=0
5090 FOR I=0 TO 9:S=S+F(I):NEXT I
5100 FOR I=0 TO 9:R(I)=INT(F(I)/S*20+.5)
5110 NEXT I
5120 PRINT"▒":REM LIMPIAR LA PANTALLA
5130 W=32768
```



```
5140 FOR I=1 TO 19 :POKE W+40*I,101:NEXT
5143 POKE W+800,76
5145 FOR I=1 TO 39:POKE W+800+I,100:NEXT
5150 POKE W+40,79:POKE W+42,49
5160 POKE W+400,76:POKE W+401,46
5170 POKE W+402,53
5190 V1=-3
5200 FOR I=0 TO 9
5210 V1=V1+4
5220 FOR U=21-R(I) TO 20
5230 FOR V=V1 TO V1+2
5240 IF R(I)=0 THEN 5260
5250 POKE W+U*40+V,160
5260 NEXT V: NEXT U
5270 NEXT I
5300 RETURN
10000 REM FRENADOS
10010 REM FRENADO DE TIEMPO
10012 T=TI
10014 IF TI-T<TE THEN 10014
10016 RETURN
10020 REM FRENADO DE CONTACTO
10022 C$=""
10024 GET C$:IF C$="" THEN 10024
10026 C$="": RETURN
10030 REM FRENADO DE TIEMPO-CONTACTO
10032 T=TI: C$=""
10034 GET C$:IFC$=""ANDTI-T<TE THEN10034
10036 RETURN
10100 REM AVISOS
10110 REM PARTE COMUN
10112 PRINT"▒"
10114 FORW=1TOBA:PRINT:NEXTW:ONAVGOSUB10122,10132,10142
10116 RETURN
10120 REMAVISO PARA CONTINUAR
10122 PRINT"PARA CONTINUAR PULSE UNA TECLA":RETURN
10130 REM AVISO PARA ACELERAR
10132 PRINT"PARA AUMENTAR LA VELOCIDAD PULSE TECLA":RETURN
10140 REM BORRADO DE AVISO
10142 PRINT"                                        ":RETURN
10200 REM OPCIONES
10210 PRINT"▒▒▒▒▒▒▒▒"
10212 PRINT"PARA FORMAR UNA URNA PULSE...........1":PRINT:PRINT
10214 PRINT"PARA VISUALIZAR LA SUCESION DE":PRINT
10216 PRINT"   FRECUENCIAS RELATIVAS PULSE.......2":PRINT:PRINT
10218 PRINT"PARA ESTUDIAR N URNAS PULSE..........3"
10220 PRINT:PRINT:PRINT"PARA FINALIZAR PULSE................4"
10230 GETEL:IF(EL<=0)OR(EL>4)THEN10230
10240 RETURN
11000 REM BOLA BLANCA
11002 NB=NB+1:PRINT"▒▒▒▒▒▒":PRINTTAB(36);NB:PRINT:PRINTTAB(36);N:
IFTE=30THEN11020
```

```
11004 PRINT"[illegible]"
11006 PRINT" [illegible]"
11008 PRINT" [illegible]"
11010 PRINT" [illegible]"
11012 PRINT" [illegible]"
11020 IFFB<9THENFB=FB+1:GOTO11040
11030 PB=PB-40:FB=0
11040 POKEPB+FB,81:RETURN
11100 REM BOLA NEGRA
11102 PRINT"[illegible]":PRINTTAB(36);NB:PRINT:PRINTTAB(36);N:IFTE=30
THEN11120
11104 PRINT"[illegible]"
11106 PRINT" [illegible]"
11108 PRINT" [illegible]"
11110 PRINT" [illegible]"
11112 PRINT" [illegible]"
11120 IFTN<9THENTN=TN+1:GOTO11140
11130 PN=PN-40:TN=0
11140 POKEPN+TN,87:RETURN
READY.
```



**EL MICROCOMPUTADOR PARA RECUPERACION INDIVIDUAL DEL ALUMNO**

**Tema: LA PARABOLA.**

**Enrique RUBIALES CAMINO.**
**I.B. "San Fernando de Henares".**
**SAN FERNANDO DE HENARES (Madrid).**

EL MICROCOMPUTADOR PARA RECUPERACION INDIVIDUAL DEL ALUMNO.

Tema: LA PARABOLA.

El profesor de matemáticas ha explicado el tema de la parábola para el curso correspondiente. De hecho, no suele comprenderse el tema, por todo el alumanado y es evidente que un cierto número de alumnos se han quedado atrás. ¿Cómo resolver este problema?. Dado que en un aula solemos tener 40 alumnos y llevar varios niveles cuesta bastante, lo que se pretende con la utilización del microcomputador es, por una parte, que el alumno rezagado se concentre sobre el tema y por otra, que el alumno repita el aprendizaje cuantas veces le sea necesario.

A grandes rasgos el trabajo consiste en lo siguiente:

Una introducción, por la cual, vamos a saber si el alumno llega a entender cuál es la trayectoria que describe un proyectil. En la pantalla del microcomputador se simula el lanzamiento desde un cañón. (Figura 1).

Una parte central, donde se estudia la parábola. Se comienza por la parábola $y=x^2$, donde por medio de parpadeos se hace ver al alumno donde está el vértice y el eje. (Figura 2). Después se estudian las ramas, presentando parábolas que las tienen más abiertas o cerradas que $y=x^2$ (Figura 3), y también, que las tienen hacia abajo. A continuación se estudian parábolas, donde el vértice se ha trasladado hacia la derecha sobre el eje X (Figura 4) y hacia arriba sobre el eje Y (Figura 5). Todo ello también con parpadeo e incluso el vértice se mueve con un sonido un tanto peculiar, para obligar al alumno a estar atento.



El final de esta parte, consiste en desplazar el vértice hacia la derecha y hacia arriba. Después hacia arriba y hacia la derecha, para terminar desplazándolo directamente, de modo que obtenemos una parábola con el vértice en cualquier lugar del plano XY (Figura 6).

Se cierra el trabajo con una prueba, que permita saber al profesor, o al mismo alumno, si llegó a comprender bien el tema de la parábola (Figura 7). El número de ejercicios es 10, dando dos puntos si se contesta bien a la primera, un punto, si se contesta correcto a la segunda y cero, si no se contesta bien. El resultado de la prueba aparece al final y allí, según la puntuación se recomienda al alumno que repase o que vuelva a estudiar el tema. En caso de alcanzar una calificación de sobresaliente o notable se le da la enhorabuena.

Como lo interesante de este trabajo es ver la cinta donde está grabado el programa, para hacerse una idea de lo que verá el alumno, he escogido unas cuantas gráficas, que van a continuación:

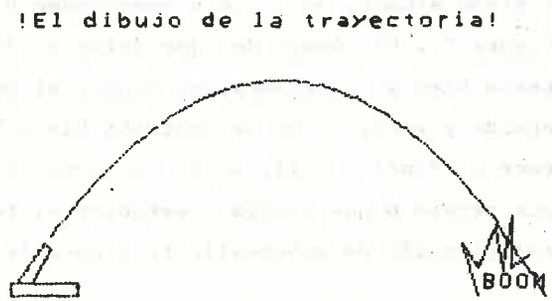



Figura 1.



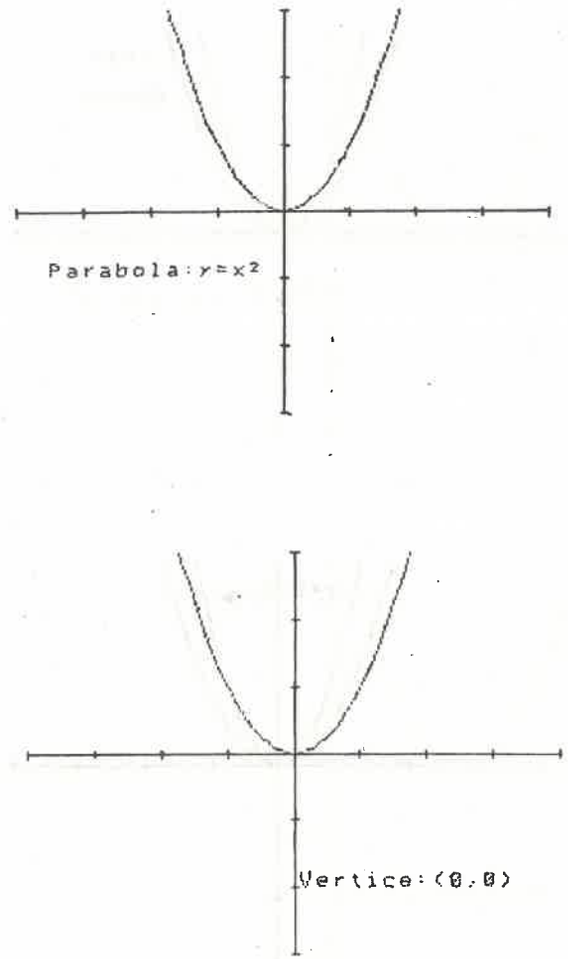



Figura 2.

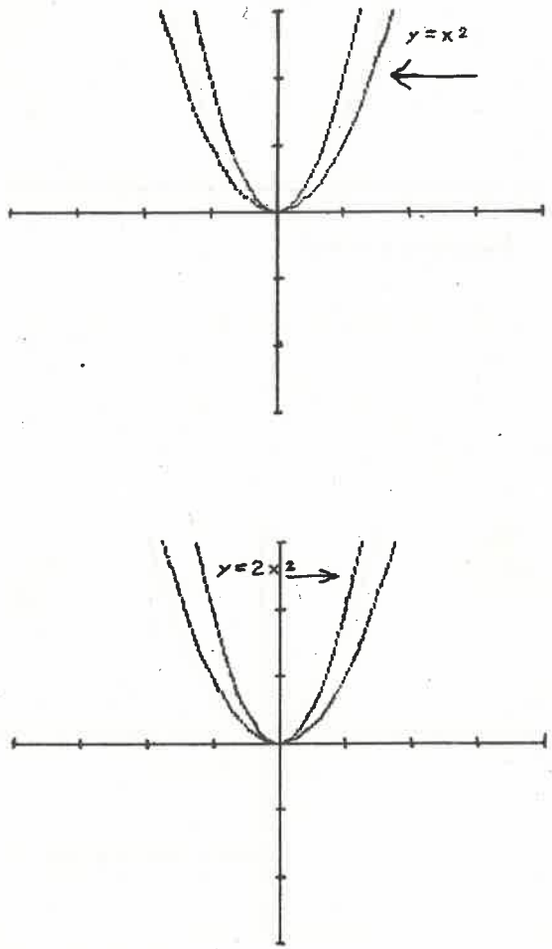



Figura 3.



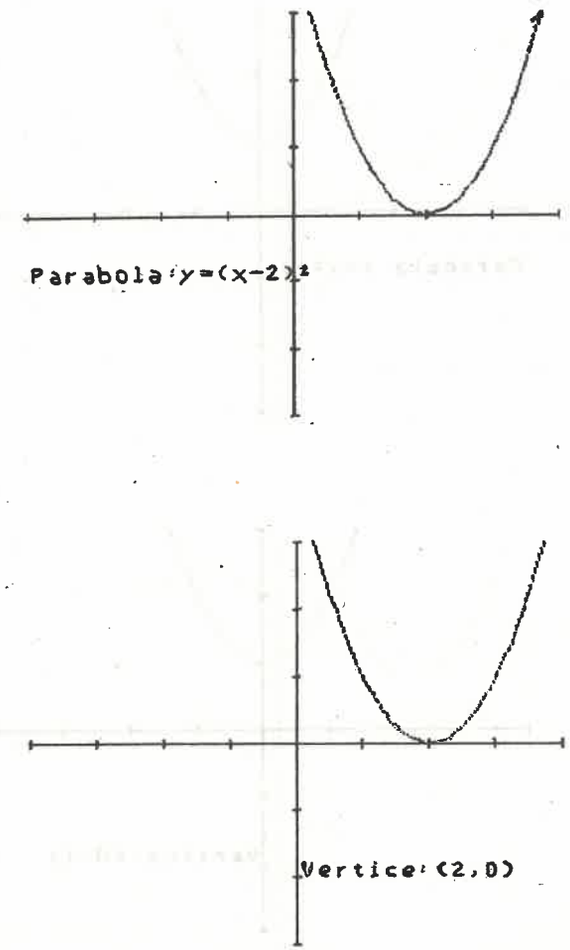



Figura 4.

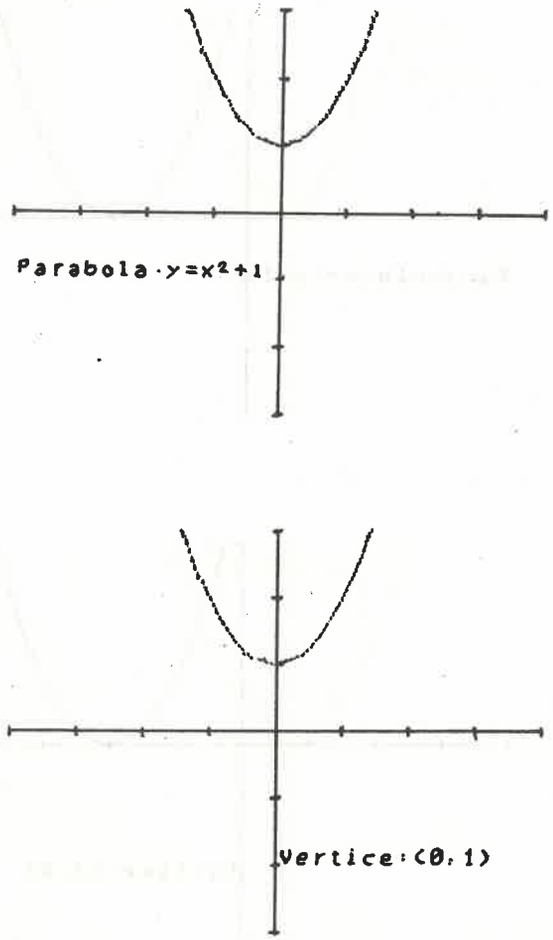



Figura 5.



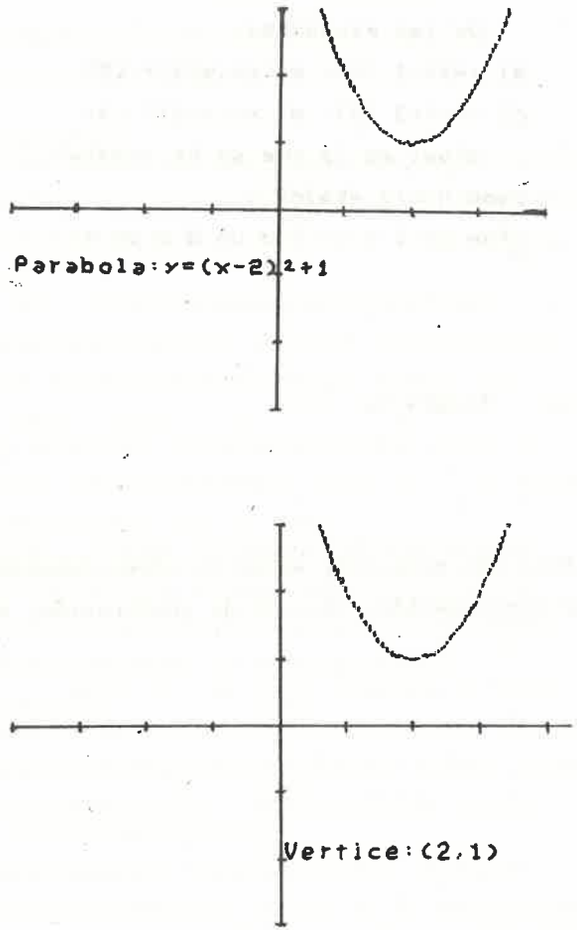



Figura 6.

Ejercicio numero 7

De las parabolas:

a) $y=x^2-1$ (1); b) $y=(x+3)^2$ (2)

c) $y=x^2+3$ (3); d) $y=(x-4)^2$ (4)

¿Cual es la que se ha trasladado hacia abajo?

- (Pon un 1 o un 2 o un 3 o un 4) ?

Figura 7.

Para más detalles, sobre el microcomputador utilizado, lenguaje de programación, sistema de graficación, etc., dirigirse al autor.



## UNA INTRODUCCION AL CONCEPTO DE ALGORITMO Y ESTRUCTURA GENERAL DEL ORDENADOR EN LOS NIVELES DE BACHILLERATO

### Nota introductoria

El presente trabajo forma parte de un proyecto de Introducción de la informática en los niveles de Bachillerato actual. Este se expone en dos cursos dentro de las actuales E.A.T.P. e incluye los siguientes temas:

2º de BUP: 1.-Qué es la informática?Campos de aplicación Evolución histórica del calculador. 2.-Sistemas de numeración.Codificación de la información(1ª parte).3.-Algebra de proposiciones. Expresiones lógicas.Funciones lógicas. Circuitos lógicos. 4.-Algoritmos. Procesos secuenciales. Descripción de algoritmos mediante diagramas de flujo. 5.-Estructura general del ordenador. 6.- Intruducción al lenguaje de programación BASIC (1ª parte).

3º de BUP: 1.- Sistemas de numeración (2ª parte): el teorema fundamental de la numeración. REpresentaciones en punto flotante. 2.- Cálculo lógico(2ª parte): puertas lógicas y biestables. Diseño y montaje de circuitos lógicos. 3.- La memoria Central y la CPU. Lenguajes de programación. 4.- Las unidades periféricas. 5.- Introducción al BASIC (2ª parte)

Dichos cursos los estoy llevando a cabo en mi Instituto durante el presente curso escolar(81/82) y las partes prácticas con ayuda de micro-ordenadores Zx81(Sinclair).

Solamente trataré aquí de una Introducción al concepto de algoritmo y Estructura general del Ordenador, por ser estos dos temas de suma importancia en este proyecto que solamente deseo sea un paso más en una futura implantación de la Informática en el Bachillerato .

Málaga, Abril de 1982

BLAS CARLOS RUIZ JIMENEZ
Profesor Agregado de Matemáticas del
I.B. Cánovas del Castillo ( Málaga)

## CONCEPTO DE ALGORITMO

Llamaremos acción descriptible ( o simplemente acción , o proceso ) a un suceso del cual conocemos sus protagonistas, sus efectos y la transformación que realiza, con la peculiaridad de tener una duración limitada. Un proceso en general podrá ser descompuesto en acciones mas simples. Consideremos dos ejemplos concretos:

A: un cocinero prepara una paella de mariscos para 8 personas

B: un estudiante calcula el producto de los números a=12 y b=320

La descripción del proceso A es lo que usualmente se conoce como una receta de cocina y esta describe:

1.-la lista de ingredientes ( ½ kg. de arroz, etc.)

2.- el conjunto de acciones a seguir ( lavar, mezclar, etc.), el orden a seguir y la verificación de condiciones que determinan que el cocinero ( ejecutor )ejecute la acción siguiente ( ...cuando el arroz esté dorado ... )

En general la descripción de un proceso debe contener:

1.- la lista de datos

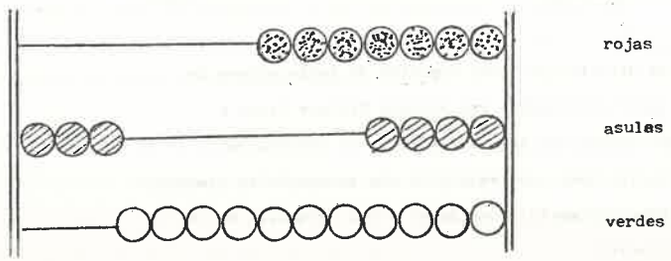
2.- el conjunto de acciones, orden a seguir y control de ciertos aspectos del proceso para determinar la siguiente acción a ejecutar. Por ejemplo , en B , la descripción del proceso debe contener las reglas para la multiplicación de dos números enteros. A simple vista parece que no estan diferenciados las posibles descripciones de A y B; sin embargo veamos una cuantas diferencias esenciales. La descripción de A no es exacta en el sentido siguiente: en la repetición de este no se garantiza el mismo resultado. Nos interesará en lo sucesivo procesos ( o descripción de procesos mejor) que



se puedan repetir en los cuales el resultado no dependa del ejecutor.

Pero hay otra diferencia esencial entre las posibles descripciones de A y B: mientras que la descripción de A ( la receta de cocina) solamente nos servirá para preparar dicho plato, la descripción de B nos va a servir para resolver todos los problemas del mismo tipo ( tantos como posibles valores enteros tomen a y b). En otras palabras, la descripción de B será lo que llamaremos un algoritmo.

Los algoritmos mas conocidos son las reglas con las que se realizan las operaciones aritméticas elementales ( suma, diferencia , producto y cociente entero )en el sistema de numeración decimal!.Estas reglas son tales que las sencillas operaciones de que consiste pueden ser ejecutadas maquinalmente ( automáticamente) por nuestro alumno hipotético sin más que con una tabla de sumas, abstrayéndose del sentido del hecho que ejecuta. Estos algoritmos operan sobre objetos que son representaciones simbólicas de los datos. Veamos un ejemplo para aclarar este tipo de representaciones: una posible descripción de B con ayuda de un ábaco formado por tres filas de bolas ( rojas, azules y verdes ) con la peculiaridad de tratarse de un algoritmo ejecutable en cualquier sistema de numeración.



Consideremos el siguiente algoritmo o "sucesión de indicaciones" ($):

1. Desplazar a la izquierda a bolas rojas
2. Desplazar a la izquierda b bolas azules.
3. Desplazar a la izquierda a bolas verdes.
4. Desplazar a la derecha una bola azul.
5. Si existen bolas azules a la izquierda pasar a la indicación 3; en otro caso seguir.
6. Contar las bolas verdes y parar ($$)

En esta descripción hemos utilizado bolas de colores para representar los datos y esto es fundamental. Si hubiéramos tomado representaciones de datos utilizando las cifras arábicas 0,1,...,9 , la descripción del proceso ya no opera sobre objetos físicos; el proceso anterior se puede realizar utilizando hojas de papel en lugar del ábaco. A cada hoja le damos un nombre y sobre cada una de estas se escriben los datos y resultados que nos interesan ( realmente cada fila del ábaco o cada hoja de papel será un registro físico). Una posible descripción del mismo proceso podría ser:

inicio; tomar tres hojas de papel x,y,z;
escribir a sobre la hoja x;
escribir b sobre la hoja y;
escribir 0 sobre la hoja z;
mientras el valor escrito en y no sea cero hacer:

($) algunos autores diferencian dicha sucesión de indicaciones de la estructura de datos utilizada ( por ejemplo Niklaus Wirth y A. Andronico). Aquí seguiremos las definiciones de Trajtenbrot.

($$) todas las descripciones que trataremos son secuenciales ejecutándose las indicaciones secuencialmente en el orden natural;( salvo que se indique lo contrario)



inicio
calcular la suma de los valores escritos sobre x y z y escribirlo en z.
restar 1 al número escrito en y y escribirlo en y.
fin
fin ($)

( Nótese que sólo utilizamos dos operaciones básicas: suma y diferencia de enteros en cualquier sistema de numeración; esto va encaminado a la posibilidad de ejecución del algoritmo utilizando un ordenador )

En realidad los pasos dados hasta ahora consisten en simplificar la descripción del algoritmo y todavía podemos visualizar las indicaciones de una forma más sencilla; hemos utilizado antes hojas de papel y está claro que la realización de esto corresponde a memorizar ciertos valores en ciertos registros. Para describir un proceso simbólico de este tipo es necesario establecer una notación apropiada; por ejemplo utilizar la expresión:

x:= y ($$)

que expresa "escribir" el contenido de la hoja ( o registro ) y en el registro x; o en general

x:= expresión aritmética

donde dicha expresión contiene las claves de los registros necesarios que jugarán el papel de variables ( una vez evaluada la expresión de la derecha tomando los correspondientes valores de los registros se introduce el valor en el registro x).

($) puede extrañar la forma de escribir el conjunto de indicaciones ; aquí utilizaremos la descripción PASCAL .

($$) dicha expresión se conoce en el argot informático como instrucción de asignación ( en BASIC se utiliza LET X = Y)

Admitimos tambien expresiones de la forma:

x:= leer  para expresar: en el registro x introducimos cierto valor de algún dispositivo de lectura. Por tanto el algoritmo anterior lo podemos expresar ahora simbólicamente de la forma:

```
inicio
x:= leer;
y:= leer;
z:= 0;
mientras y ≠ 0 hacer :   inicio
                         z:= z + x;
                         y:= y-1;
                         fin
fin
```

La ejecución de un algoritmo permite asociar, de forma única, a los datos de entrada, datos de salida, realizando por tanto una función en la cual los argumentos son los datos de entrada y los valores estan contenidos en los de salida. En otras palabras, un algoritmo será un conjunto de indicaciones o esquema para saber como calcular una función; dos algoritmos se diran equivalentes si calculan la misma función. Es importante señalar de nuevo que un algoritmo resuelve todos los problemas de cierto tipo; así pues el anterior permite efectuar el producto de números enteros positivos y está claro que si por ejemplo el valor asignado a y fuera negativo , dicho proceso no terminaría de ejecutarse.

Los algoritmos en los cuales los problemas planteados se reducen al empleo de las cuatro operaciones aritméticas elementales se llaman algoritmos numéricos. Veamos como ejemplo de algoritmo numérico, el cálculo del máximo común divisor de dos enteros positivos



con el algoritmo de Euclides. Este consiste en obtener una sucesión decreciente de números, siendo el primero el mayor de los dados, el segundo el menor, el tercero el resto de la división entre los dos primeros, el cuarto el resto de la división entre los dos siguientes, etc. Por ejemplo, para calcular m.c.d.(700,91) efectuamos los cálculos según la tabla:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 7 | 1 | 2 | 4 |
| 700 | 91 | 63 | 28 | 7 |
| 63 | 28 | 7 | 0 | |

en la cual aparecen los términos de la sucesión antes citada en la fila central, abajo los restos y encima los cocientes. Sin embargo la división se puede reducir a una sustracción reiterada puesto que se tienen las propiedades:

a.- m.c.d.(a,b)=m.c.d.(b,a)

b.- m.c.d.(a,b)= m.c.d.(a-b,b) si a mayor que b.

c.- m.c.d.(a,a) = a

Consideremos dos registros ( en el sentido anterior) de nombre x e y y supongamos el siguiente algoritmo:

1.- hacer x:=a e y:=y

2.- Si los contenidos de x e y son iguales, uno cualquiera de ellos es el m.c.d. y parar el proceso. En otro caso seguir.

3.- Si el contenido de x es menor que el de y, intercambiar los contenidos de x e y. En otro caso seguir.

4.- Restar al contenido de x el de y y dejarlo en y.

5.- Saltar al paso nº 2.

Vamos a escribir el algoritmo anterior en forma simbólica. Quizás el paso más complicado sea el 3. Si pusiéramos para describirlo la secuencia de acciones: x:=y; y:=x

no funcionaría debido a que la expresión x:=y borraría el contenido de x y se pierde la información que este contiene. Debemos utilizar un registro adicional, por ejemplo z, y hacer:

z:=x ; x:= y ; y:= z

por tanto el algoritmo anterior puede escribirse:

```
    inicio
    x:= leer;
    y:= leer;
2:  Si x = y.parar
    Si x < y   hacer: inicio: z:=x;x:=y;y:=z;fin
    x:=x-y
    Ir a 2
    fin
```

Al terminar la ejecución del algoritmo, el valor del m.c.d. queda almacenado en x o en y.

Es de sumo interés observar que el número de operaciones descritas por el algoritmo no se conoce de antemano , pero se sabe que es finito. Dicho número dependerá de las condiciones del problema y se aclara en el proceso de ejecución.

El hecho de que muchas operaciones se puedan reducir a las cuatro elementales determina la amplia utilización de los algoritmos numéricos. Por ejemplo el cálculo de la raíz cuadrada con un grado de exactitud preestablecido, se reduce a una sucesión de divisiones, productos y cocientes. En una especial de la matemática ( el análisis numérico ) se estudian algoritmos numéricos para resolver problemas complicados como la diferenciación , integración ,etc. Así pues en matemáticas , y en otras disciplinas, se considera resuelta una serie de problemas de cierto tipo cuando se encuentra el algoritmo adecuado. El objetivo es la creación de estos. A veces, si no se encuentra el algoritmo para la resolución de todos los problemas



de cierto tipo, se logra resolver algunos de estos imponiendo ciertas condiciones a los datos; es el caso del décimo problema de Hilbert: encontrar un algoritmo para aclarar la existencia de soluciones enteras de una ecuación diofántica. En el caso de una variable dicho algoritmo se conoce hace mucho tiempo y es el siguiente:
si la ecuación es:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o = 0 \quad ( a_i \text{ enteros}) \qquad (1)$$

1. hallar los divisores de $a_o$
2. Sustituir los divisores en el primer miembro de (1)
3. Si el resultado es 0, se trata de una raíz entera; en otro caso , si no se anula para ninguno de estos divisores, no tiene raices enteras.

De todo lo visto anteriormente podemos deducir las características fundamentales del algoritmo(\$) :

a.- se exige que el método de cálculo en forma de un número finito de indicaciones de pueda comunicar a otra persona ( o en general cualquier ejecutor ( una máquina) en el lenguaje apropiado(\$\$).

b.- el cálculo no depende del ejecutor y puede ser repetido con el mismo éxito por culaquiera y cuantas veces sea necesario.

c.- el amplio empleo del algoritmo para resolver todos los problemas de cierto tipo.

En lo que sigue nos ocuparemos de la ejecución de algoritmos utilizando una máquina.

---

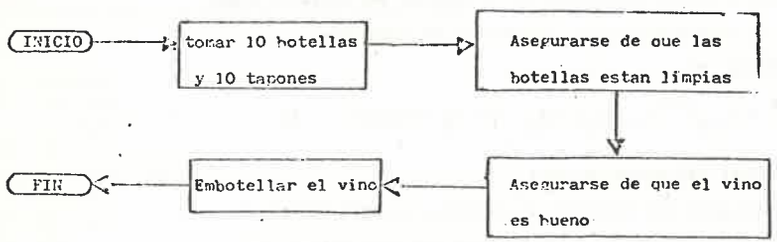
(\$)al parecer el origen del nombre algoritmo es debido al matemático árabe del siglo IX Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi

(\$\$)conocidos por lenguajes de programación.

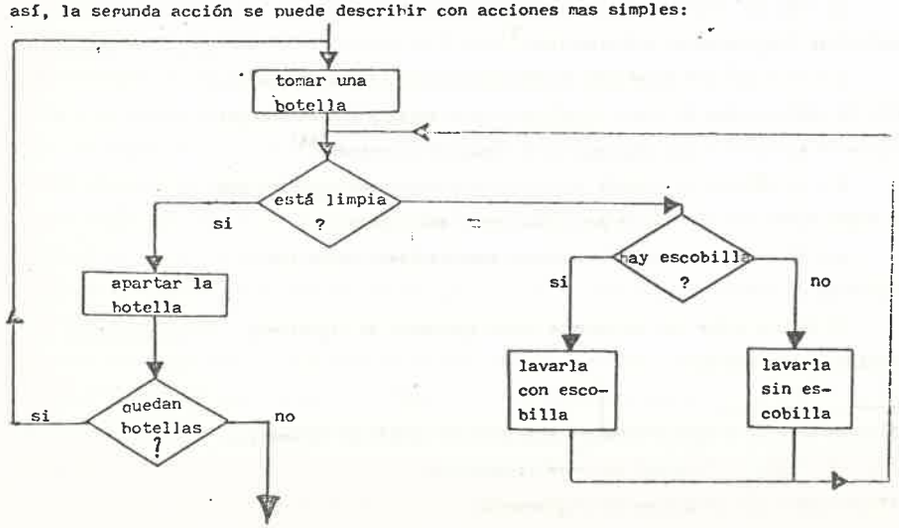
## DIAGRAMAS DE FLUJO DE CONTROL

Interesa a veces describir un proceso en forma de diagrama. Para ilustrar este método consideremos el proceso de embotellado de botellas de vino. Tenemos como acción más general:

Si queremos describir el proceso con acciones mas simples, podríamos poner:

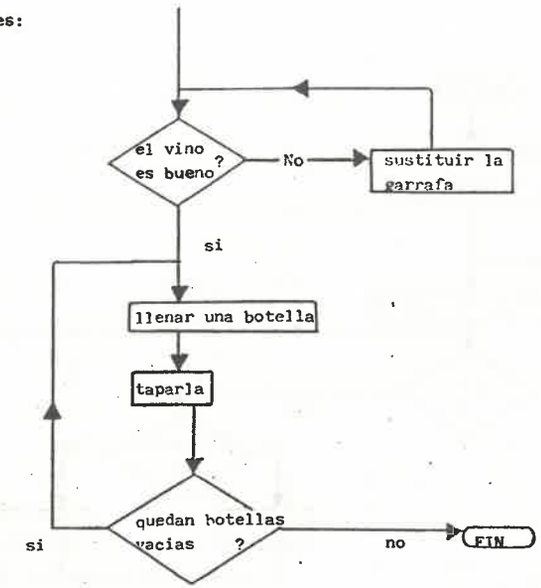



Este esquema no es suficiente, ya que por ejemplo, la ejecución de la segunda acción necesita un control para decidir si se lava o no la botella: así, la segunda acción se puede describir con acciones mas simples:

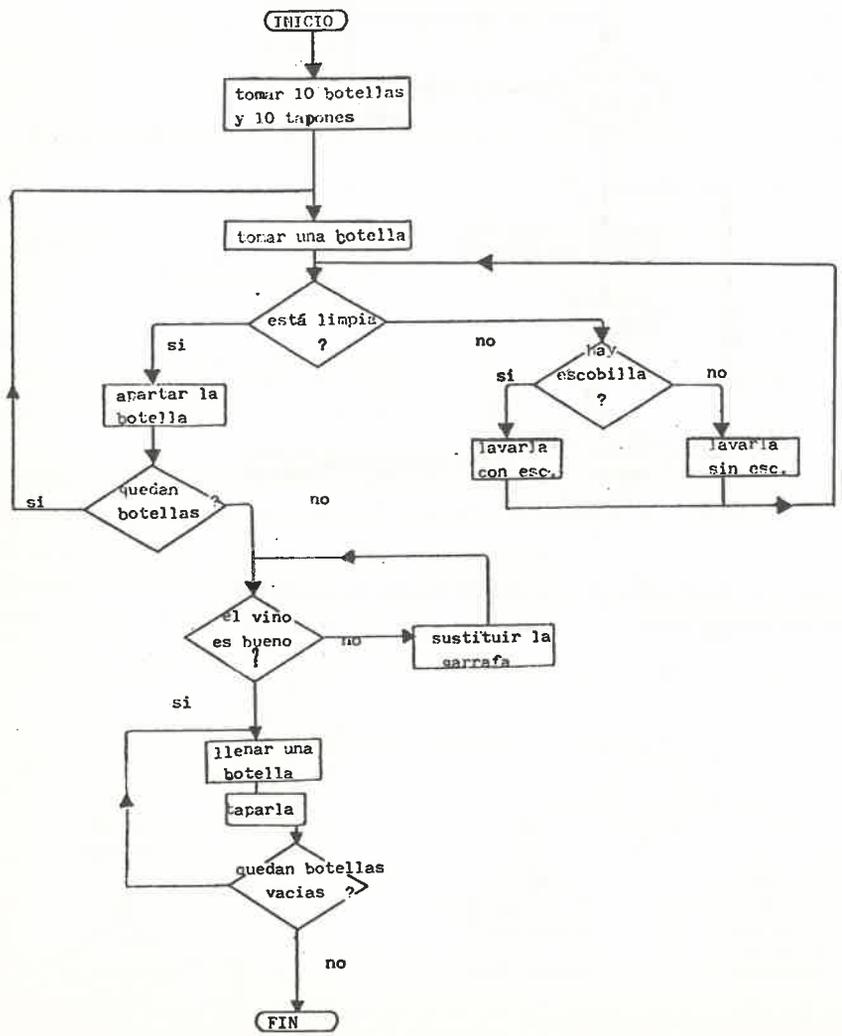




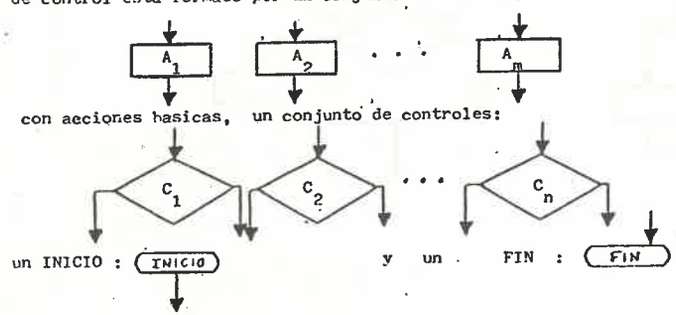

Vamos a describir la acción del tercer rectángulo en acciones y controles mas simples:




Así pues, una descripción mas completa del proceso de embotellado podría ser la siguiente:




En la descripción anterior hemos usado un formalismo particular constituido por bloques circulares para indicar el comienzo y el fin, bloques rectangulares con acciones básicas, bloque en forma de rombo que contienen el nombre de un control y una serie de lineas que ligan las acciones a seguir. Dicho diagrama se conoce con el nombre de diagrama de flujo. Así pues un diagrama de flujo de control esta formado por un conjunto de bloques:




de forma que:

1º) Cada bloque del tipo [A] tiene una flecha de entrada y otra de salida.

2º) Cada Control ⟨C⟩ tiene una flecha de entrada y dos de salida.

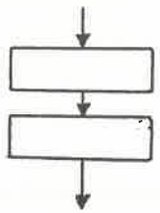
3º) Cada flecha, o entra en un bloque, o se une a otra flecha.

4º) El bloque INICIO no tiene flecha de entrada, y cualquier otro bloque se puede unir a él por un camino ( de control)

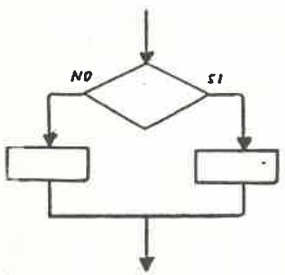
5º) El bloque FIN no tiene flecha de salida, y cualquier otro bloque se puede unir a él por un camino de control.

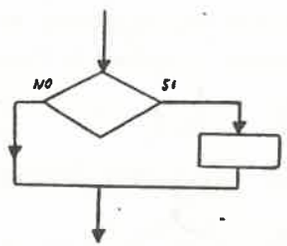
Notemos también que existen varios caminos de control bien diferenciados para especificar una secuencia , o bien una selección o bien una repetición :

SECUENCIA

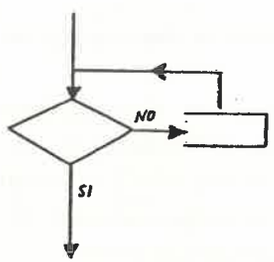


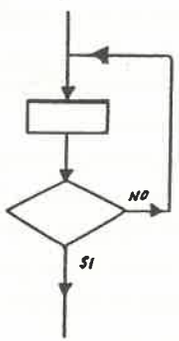
SELECCION



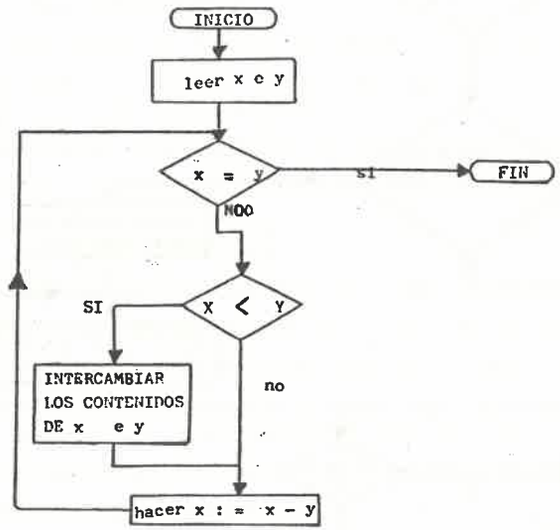

REPETICION



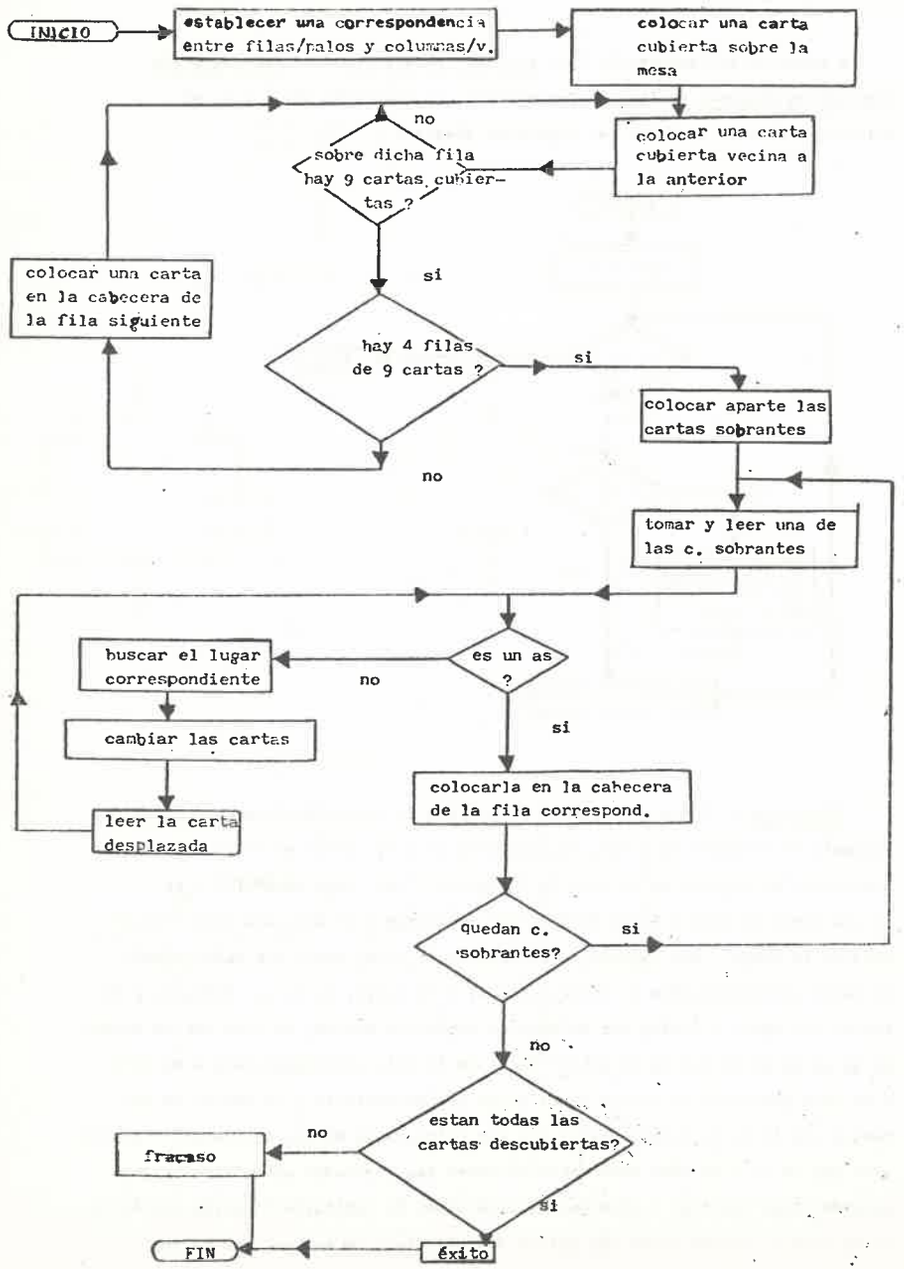






A veces es extremadamente útil elaborar un algoritmo en forma gráfica mediante un diagrama de flujo. Por ejemplo, el algoritmo del m.c.d. se podría representar en forma del siguiente diagrama :




Ejercicio . Vamos a describir el proceso de ejecución de un solitario mediante un diagrama de flujo. El solitario va a consistir en el proceso siguiente: se dispone de un mazo de 40 cartas ( una baraja española) ; se situan sobre la mesa 4 filas de 9 cartas cubiertas y se asocia a cada fila un palo de la baraja ( por ejemplo, oros para la 1ª fila, etc.) y a cada columna el valor correspondiente al orden habitual ( es decir, 2, 3, .., Sota, C. y R) Sobran por tanto 4 cartas que se colocan cubiertas aparte. Se toma una de estas; si es un as se coloca en el primer lugar de la fila correspondiente a su palo ( en caso contrario se coloca en el lugar correspondiente y se repite lo anterior con la carta desplazada ); una vez colocada la última desplazada ( cuando esta sea un as ) se toma otra carta de entre las separadas anteriormente y se procede igual mientras queden cartas separadas. El solitario finaliza con éxito si al fina l quedan todas las cartas descubiertas. Un esquema podría ser:






Para ejecutar un algoritmo necesitamos describirlo de forma simbólica según quien sea el ejecutor. En cualquier caso, cuando el algoritmo ha sido creado , debe ser tal que el ejecutor pueda cumplirlo exactamente aunque no tenga el mínimo concepto de la esencia del problema a resolver. Se exige solamente que el ejecutor ( bien sea un hombre o bien una máquina ) sea capaz de cumplir "maquinalmente" las sencillas operaciones elementales de las cuales se compone el proceso y que sin objección alguna se atenga a la descripción propuesta. La expresión "maquinalmente" se emplea aquí para recalcar la precisión del algoritmo. En lugar de una persona hipotética que ejecute el algoritmo sin conocer la esencia del problema, se puede colocar una máquina que cumpla dicho proceso .

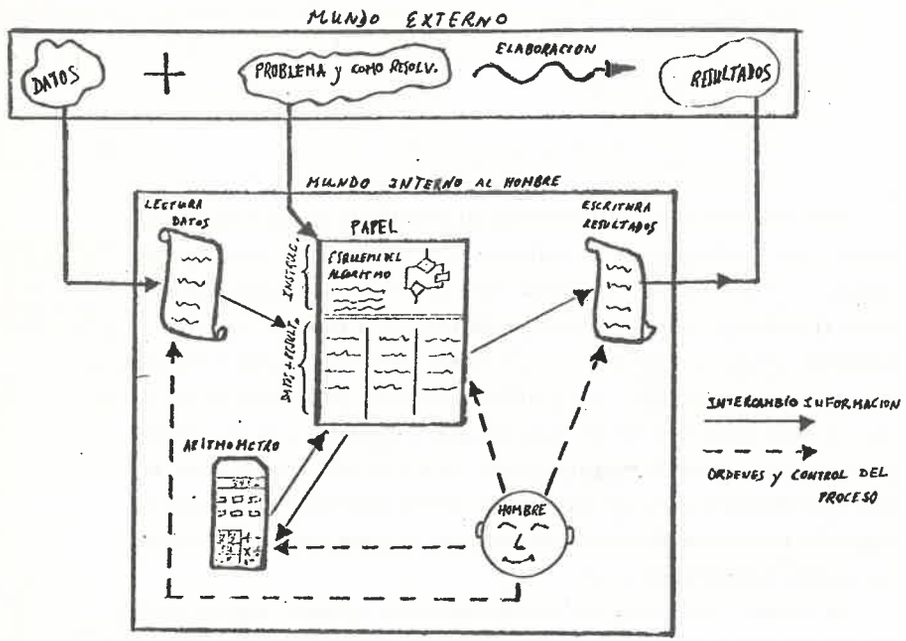
En primer lugar veamos que tipo de operaciones generales realiza nuestra persona hipotética para resolver el problema; en general la elaboración manual contiene las siguientes etapas:

1.- lectura de datos y escritura de los resultados

2.- El almacenamiento de la información corrientemente en hojas de papel. Entre esta información aparecen los datos y las instrucciones a realizar ( la descripción del algoritmo ) escritas lógicamente en un lenguaje interpretable por nuestra persona hipotética.

3.- El tratamiento de la información. En líneas generales cada operación consiste en lo siguiente: el ejecutor, en concordancia con la instrucción a realizar, saca ciertos datos( por ejemplo números ) de unas determinadas columnas de la hoja de papel, introduce estos en el mecanismo de tratamiento ( que llamaremos aritmómetro ) y el resultado lo coloca en cierto lugar de la hoja de papel.

4.- El control del proceso. Es decir, tomar la decisión para realizar una u otra operación de acuerdo con la instrucción y controlar el orden a seguir.




ESQUEMA DE ELABORACION MANUAL

Lógicamente nuestra persona hipotética utiliza un alfabeto muy especial para representar los datos ( por ejemplo, utilizando el sistema de numeración decimal con los dígitos árabes: 0,1,2,...,9 ) e instrucciones ( normalmente son relaciones parecidas a ecuaciones matemáticas donde las variables representan ciertos lugares de la hoja de papel). Una serie de razonamientos de tipo físico justifica la presencia en un ordenador digital moderno de un alfabeto binario a base de dos símbolos: 1 y 0 para las distintas formas en las que se puede materializar la información ( datos e instrucciones) dentro del ordenador: como la existencia (1) o no (0) de impulsos eléctricos, estados magnéticos positivos( 1) o negativos (0), perforación (1) o no perforación (0), etc. A cada posición o cifra de esta naturaleza se le llama bit. Así pues los elementos y el funcionamiento de un ordenador se fundamentan en el álgebra de Boole y las operaciones mas sencillas que este realiza son de tipo Boleano :



```
        LO B
CICLO : SU A
        JZ FIN
        JP CICLO
        LO A
        ST C
        LO B
        ST A
        LO C
        ST B
        JU CICLO
FIN   : SP
```

Máquinas con instrucciones de dos direcciones

En este caso, un nemotécnico para cada instrucción máquina, debe dar información sobre el código de operación, los identificadores de los operandos y sobre el tipo de direccionamiento. Por ejemplo : si detrás del nemotécnico para el código de operación aparece el signo $ , el segundo operando es el valor ( no la dirección ) ( o sea , el campo K en el código máquina es 5 ). Así pues, el programa para el cálculo de la suma de los contenidos de las direcciones de memoria 100, ...,120 , podría escribirse :

```
LO$  A-1, 0     ( A representa la dirección 100, luego A-1, la
LO$  RI,20      ( cargar 20 en el reg. RI)            /08)
AD   A-1,A,RI   ( sumar a la dir. A-1, el contenido de A+RI)
JZ RI,RCP+3     (si (RI)=0 incrementar en 3 el RCP)
SUS  1,1        ( restar 1 a RI-dirección 1-)
JU   RCP-3      (decrementar el RCP en 3)
SP              ( parar)
```

Para transformar el programa fuente ( programa en lenguaje simbólico ) en un programa objeto ( programa en lenguaje máquina ) el ordenador debe disponer de un traductor o compilador o bien de un intérprete. El compilador consiste en un programa general que realiza las siguientes etapas:

-análisis lexicológico ( reconocimiento y separación de las palabras claves del lenguaje, identificadores elegidos a gusto del usuario, constantes, etc)

- análisis sintáctico ( verificación de la corrección de las instrucciones ; en caso negativo dar los mensajes de error correspondientes)

Así pues un programa máquina ( máquina ) es el algoritmo preparado para la elaboración automática utilizando un ordenador y consta de un conjunto de instrucciones ( las indicaciones del algoritmo ). Una instrucción ( máquina) consta de un código de operación y una, dos o tres informaciones adicionales que normalmente son las direcciones de los operandos, o sea, una indicación del lugar que ocupan en memoria dichos operandos; por tanto la memoria debe ser direccionable, es decir, ha de ser posible el acceso directo a una posición cualquiera de la misma y esta debe estar formada por una serie de configuraciones a base de biestables[S] llamadas palabras. Todas las palabras estan formadas por el mismo número fijo de biestables, llamado longitud de la palabra de memoria y este número cambia según el tipo de ordenador. Una configuración formada por 8 biestables se llama un byte ; por tanto un byte puede almacenar un número comprendido entre 0 y 255 ( $2^8-1$ ) puesto que la representación binaria de 255 es $1111\ 1111_{(2)}$ . Así pues 1 byte almacena 8 bits.
(- por dimensión de la memoria se entiende el número de palabras de memoria que puede almacenar y su longitud; así pues en un ordenador construido de forma que las palabras de memoria esten formadas por bytes, una memoria de 8K bytes significa una distribución formada por 8 . 1024 bytes ( 1 K es $1024=2^{10}$ bytes)-)

Las instrucciones pueden ser de varios tipos:

a) de tratamiento de la información con las que se realizan cálculos aritméticos, comparaciones, transferencia entre direcciones de memoria, etc.

b) de bifurcación, que permiten modificar el orden natural ( secuencial ) de ejecución según el resultado de operaciones aritméticas o lógicas.

c) de entrada/salida, que regulan los intercambios de información entre la memoria y los organos periféricos ( lectora de fichas, impresora, video, memoria auxiliar, cintas, etc.)

Según el tipo de información que contiene una instrucción , esta facilita más ó menos la programación máquina ( es decir , si además del código de operación , la instrucción proporciona o bien una, dos o tres

(S) biestable es el mas simple dispositivo de memoria capaz de registrar un solo bit



direcciones de operandos, este número será fundamental para simplificar el proceso de tratamiento e intercambio de información ) . Para aclarar esto veamos varios ejemplos:

Máquinas con instrucciones de una dirección . En este tipo de máquinas las instrucciones constan de un código de operación y una dirección del primero o segundo operando; por ejemplo , consideremos las instrucciones:

| | código operación | dirección | resultado |
|---|---|---|---|
| suma (ADD) | 01 | N | ACC:= (ACC) + (N)<br>RCP : = (RCP)+1 |
| diferencia(SUR) | 02 | N | ACC:= (ACC) - (N)<br>RCP := (RCP)+1 |
| cargar(LOAD) | 03 | N | ACC:= (N)<br>RCP:=(RCP)+1 |
| almacenar(STORE ) | 04 | N | N := (ACC)<br>RCP := RCP + 1 |
| SALTO ( JUMP ) | 05 | N | RCP:= N |
| Salto Cond(JP) | 06 | N | si (ACC) 0 hacer RCP:=N<br>en otro caso RCP:=(RCP)+1 |
| Salto Cond.(JZ) | 07 | N | si (ACC)=0 hacer RCP:=N<br>en otro caso RCP:=(RCP)+1 |
| Parar ( Stop ) | 00 | N | Parar el proceso de ejecución. |

( Notas: ACC es un registro ( una palabra de memoria ) especial acumulador ( no hay que especificar su dirección puesto que la máquina la sobreentiende) ; RCP es el registro contador de programa, en el se introduce la dirección de la instrucción a ejecutar); (ACC) indica el contenido de ACC, (RCP) indica el contenido de RCP y (N) indica el contenido de la dirección N )

Veamos en este tipo de máquina como sería el algoritmo para el cálculo del m.c.d. de dos números naturales. Supongamos los números en las direcciones 100 y 101 ; el programa máquina será:

Máquinas con instrucciones de dos direcciones. En este tipo de máquinas cada instrucción consta de un código ytres informaciones adicionales:

modelo de instrucción

Vamos a explicar brevemente en que consiste el tipo de direccionamiento. Hay cuatro formas de encontrar la dirección del segundo operando:

- direccionamiento directo ( K = 0 ) ; en este caso la dirección del segundo operando es D2.
- direccionamiento indirecto ( K = 1 ); en este caso en D2 aparece la dirección de la zona de memoria donde se encuentra la dirección del segundo operando .
- direccionamiento indexado (K = 2 ) ; en este caso la dirección del segundo operando se calcula sumando a D2 el contenido de cierto registro de control ( llamado registro índice: RI )
- direccionamiento indirecto-indexado ( K = 3 ); en este caso la dirección del segundo operando se calcula sumando al contenido de la dirección que indica D2 el contenido del registro índice RI .

Veamos varios ejemplos:

a) supongamos el código 01 para la suma , y consideremos la instrucción:

| 01 | 1000 | 1001 | 0 |
|---|---|---|---|

esta suma al contenido de la dirección 1000, el contenido de la dirección 1001 y deja el resultado en la dirección 1000

b) sea la instrucción:

| 01 | 1000 | 1001 | 1 |
|---|---|---|---|

esta suma al contenido de 1000 el contenido de la dirección que contiene la dirección 1001 , y deja el resultado en la direc. 1000. Así pues si (1000)= 32, (1001)= 1004, (1004)= 25 , despues de ejecutar la instrucción en 1000 habrá 32 + 25 = 57

c) sea la instrucción:

| 01 | 1000 | 1001 | 3 |
|---|---|---|---|

siendo (RI)=3

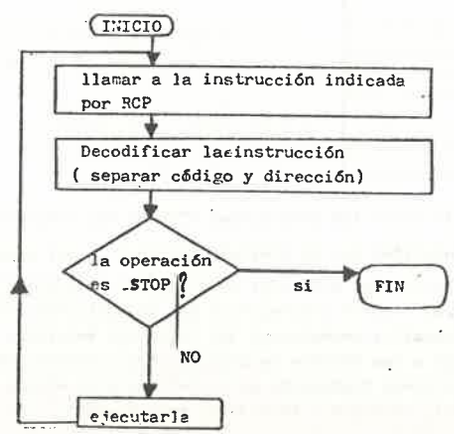
esta suma al contenido de la d. 1000, el contenido de la dirección:



(contenido de la memoria)

| dirección | contenido |
|---|---|
| 01 | Acc |
| 02 | RCP |
| ⋮ | ⋮ |
| 20 | 03 101 |
| 21 | 02 100 |
| 22 | 07 031 |
| 23 | 06 021 |
| 24 | 03 100 |
| 25 | 04 102 |
| 26 | 03 101 |
| 27 | 04 100 |
| 28 | 03 102 |
| 29 | 04 101 |
| 30 | 05 021 |
| 31 | 00 000 |
| ⋮ | |
| 100 | 00021 |
| 101 | 00028 |
| 102 | 00000 |
| ⋮ | ⋮ |

La unidad de control en correspondencia con la instrucción a ejecutar introduce en la unidad aritmético-lógica los operandos, ordena la ejecución de la operación prescrita , y pasa a ejecutar la siguiente instrucción ( la instrucción indicada por el RCP ) . Así pues la ejecución de una instrucción consta de los pasos siguientes:



1001+3; por ejemplo, si (1000)=32, (1001)=20, (1004)=20, despues de ejecutar la instrucción en la d. 1000 tenemos: (1000)+(1001+3)= 32 + 12 = 44

d) Sea la instrucción:

| 01 | 1000 | 1001 | 3 |
|---|---|---|---|

siendo (RI)=3, (1001)=1008 , (1011)= 32 y (1000) = 12, entonces, suma al contenido de 1000 el contenido de la dirección

(1001)+ (RI) = 1008 + 3 = 1011

y el contenido de 1000 despues de realizada la instrucción será:12+32=44.

Veamos un ejemplo. Consideremos una máquina con instrucciones de dos direcciones con códigos de operaciones análogos a la anterior de una dirección, ( para instrucciones de salto tomamos la dirección del segundo operando); supongamos que queremos sumar los contenidos de las direcciones 100,101,..,120: vamos a ver un programa máquina que realice dicha suma: utilizamos la dirección 000 como acumulador y supongamos que si el campo K ( cuarto campo de la instrucción máquina ) es 5, el tercer campo es el valor del 2º operando:

| direcciones | contenido(memoria) | |
|---|---|---|
| 1 | | RI |
| 2 | | RCP |
| ⋮ | ⋮ | |
| 20 | 03 099 000 5 | |
| 21 | 03 001 020 5 | |
| 22 | 01 099 100 2 | |
| 23 | 07 002 026 0 | |
| 24 | 02 001 001 5 | |
| 25 | 05 000 022 0 | |
| ⋮ | ⋮ | |
| 099 | | |
| 100 | | |
| 101 | | |
| ⋮ | | |
| 120 | | |

No vamos a entrar en detalle sobre los componentes físicos del ordenador que realizan las operaciones descritas por un programa máquina, así como (\$)el sistema de componentes físicos del ordenador lo llamaremos "HARDWARE" del ordenador(esta palabra inglesa se traduce literalmente por quincallería(comercio de quincalla) ( del francés,clincaille:onomatopeya del ruido del metal)) ; POR EL CONTRARIO, llamaremos "SOFTWARE" a los métodos de porgramación y explotación del ordenador ( esta palabra no tiene traducción al castellano y de alguna forme significa lo contrario de la pal. hardware ( hard-duro, soft-blando)



las distintas tecnologías utilizadas para la construcción de memorias ( ferritas o circuitos integrados); resulta evidente que la programación en lenguaje máquina no es viable por ser muy complicada y poco visual ; esta dificultad provocó la aparición de lenguajes simbólicos cue estuvieran mas cerca del usuario ...

## 5.3. Otros lenguajes de programación

Los distintos lenguajes de programación pueden estar orientados hacia ordenadores concretos o bien ser independientes del ordenador. Los lenguajes que dependen del ordenador, a su vez pueden ser:

- lenguaje máquina
- lenguaje ensamblador

Un lenguaje ensamblador es una versión nemotécnica ( simbólica) del lenguaje máquina ; y por tanto mas fácil de utilizar . Este consiste en escribir cada instrucción máquina utilizando distintos símbolos para cada campo. Normalmente dos símbolos para el código de operación ( LO ( para cargar), ST (almacenar,etc..) y cadenas de letras ( identificadores) para las distintas direcciones de memoria. Veamos varios ejemplos:

Máquina con instrucciones de una dirección

En este caso, si consideramos la tabla de códigos antes vista, podemos escribir:

| operación | código máquina | nemotécnico ensamblador |
|---|---|---|
| suma | 01 | AD |
| dif. | 02 | SU |
| carg. | 03 | LO |
| alma. | 04 | ST |
| salto | 05 | JU |
| salto con. | 06 | JP |
| " " | 07 | JZ |
| stop | 00 | SP |

El programa máquina para el cálculo del m.c.d. podría escribirse:

| suma lógica | | | producto lógico | | | inversión | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 + x_2$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1 \cdot x_2$ | $x$ | $\bar{x}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | |

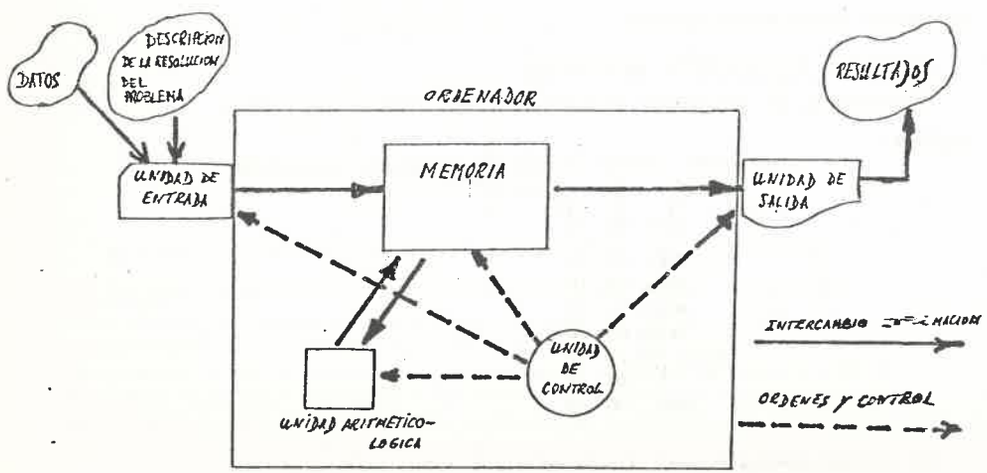
En concordancia con el esquema del funcionamiento del proceso de elaboración manual, en un ordenador moderno se distinguen las siguientes partes, previstas ya por Ch. Babbage :

1.- una unidad de entrada y otra de salida.

2.- La unidad de memoria ( que cumple la función de la hoja de papel). En esta se guardan en el lenguaje de la máquina los datos y el programa ( conjunto de instrucciones en lenguaje máquina - que componen el algoritmo).

3.- Unidad aritmético-lógica , que juega el papel del aritmómetro, aunque su funcionamiento es diferente.

4.- La unidad de control. Crea las condiciones para la ejecución de las instrucciones y controla el orden a seguir.






- análisis semántico ( interpreta las instrucciones correctas para la elaboración del programa máquina) .

La diferencia fundamental entre un intérprete y un compilador , está en que el intérprete no genera un programa máquina, sino cada instrucción es interpretada generando un código en máquina con el número de instrucciones necesarias para ejecutar la instrucción simbólica ; una vez ejecutada se pasa a la siguiente instrucción y se hace lo mismo. De alguna forma el intérprete compila cada instrucción por separado.

Desde le punto de vista del programador interesan un tipo de lenguajes simbólicos que sean independientes del ordenador. Hoy en día existen varios; citemos los más conocidos:

de tipo técnico- científico :

FORTRAN ( FORmula TRANslator)

ALGOL ( ALGorithm Oriented Language)

BASIC ( Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code)

APL ( A Program Language)

de tipo comercial:

COBOL ( COmmon Business Oriented Language )

RPG ( Report Program Generator )

PL/1 ( recoge aspectos del FORTRAN, COBOL y ALGOL )

BIBLIOGRAFIA

Puesto que es difícil encontrar Bibliografía que se adapte a los temas tratados todos, expongo aquí unos cuantos textos que a mi parecer pueden ser muy útiles para el que se inicia en esta importante disciplina como es la Informática. Estan expuestos en orden de complicación y el lector debutante puede iniciarse muy rápidamente con los seis primeros textos.


(1) FOMIN,S.V.: " Sistemas de numeración"; Lecciones populares de matemáticas, Ed. Mir (1975)

(2) CRAIG FIELDS: "Introducción a los computadores"; Alianza Univ.(1978)

(3)TRAJTENBROT, B.A.:"Los algoritmos y la resolución automática de problemas"; Lecciones populares de Matemáticas, Ed.Mir(1977)

(4) AIKEN,H; BARRAGE,Ch.; VON NEUMANN,J.etc.:"Perspectivas de la revolución de los computadores"; Alianza Universidad (1975)

(5)HOLLINGDALE y TOOTILL: "Computadores Electrónicos ";Alianza(1967)

(6)ARROYO,L.:"Del bit a la telemática:Introducción a los Ordenadores"; Ed. Alhambra(1980)

(7)KORSHUNOV,Yu M.:"Fundamentos matemáticos de la Cibernética";Ed.Mir.

(8)ANDRONICO,A.;DE MICHELIS,G.;etc."Manuale di Informática";Zanichelli, Bologna(1979)

(9)GUERLARDONI,G.:"calcoli Numerici"; ETS-Pisa(1968)

(10)KNUTH,D.:"The Art of Computer Programming" tres volumenes publicados, Addison-Wesley Publisbing Company (2ª ed. 1971)

(11)NICHOLS,E.;etc.:"programación del micro-procesador Z80"; Marcombo Ed. (1981)

(12)WIRTH,N.:"Algoritmos+ Estructuras de datos = Programas";Ed.Castillo(1980)



Blas Carlos Ruiz Jimenez
Profesor Agregado de Matemáticas del
I.B. Cánovas del Castillo ( Málaga )




# LAS MAQUINAS DE CALCULAR Y EL APRENDIZAJE DEL CALCULO MENTAL


**José Manuel Yábar Madinabeitia**

**Profesor de la Escuela de Formación del Profesorado de EGB.**
**Sant Cugat del Valles**
**Universidad Autónoma de Barcelona**

## Las máquinas de calcular y el aprendizaje del cálculo mental

Este trabajo que presento es la explicación de una experiencia que ha sido llevada a cabo durante dos años consecutivos con alumnos de 3º y 4º de EGB ,con el siguiente objetivo: estudiar como podemos trabajar el cálculo mental con alumnos de esta edad utilizando máquinas de calcular.
El número de clases que han realizado la experiencia ha sido de 7 clases con un total de 200 alumnos teniendo como elemento de comparación el seguimiento de 9 clases paralelas que no han realizado la experiencia.
Para llevar a término esta experiencia hemos utilizado tres tipos de máquinas :

- "Dataman" - Texas Instruments
- "TI-1025" - Texas Instruments
- "TI-59 con impresora"- Texas Instruments.

Las caracteristicas básicas de estas tres máquinas son las siguientes:

"Dataman"

- No da resultados.Podemos decir que es una pseudocalculadora.Plantea operaciones programadas por la máquina o introducidas por uno mismo. Se ha de escribir la respuesta y la máquina actua como un comprobador de respuesta.Permite dos intentos antes de dar la respuesta correcta.
- Se pueden introducir dentro de la memoria de "Dataman" hasta 10 operaciones .Posteriormente podrán ser contestadas en el mismo orden que habían sido introducidas.
- Tiene elementos de control. Al trabajar una serie de operaciones ,nos da el número de operaciones contestadas correctamente y el tiempo utilizado.



- Dataman ,por si misma,da series de 10 operaciones programadas con dos grados de dificultad.

"TI-1025" es una máquina típica de cuatro operaciones
Hemos de destacar dos características:

- Dispone de constante .Esto hace posible operaciones con el segundo término,un número fijo.
- Tiene memoria acumulativa.Esto quiere decir que podemos introducir números ,sumando o restando, y resuelve las operaciones guardando el resultado, que podemos llamar en cualquier momento.

"TI-59" es una máquina programable con tarjetas magnéticas a la cual se le puede incorporar una impresora.

Antes de llevar a termino nuestra experiéncia hemos tenido que realizar diversos trabajos previos:

1.- Análisis del proceso de aprendizaje del cálculo mental;
2.- Tipos de ejercicios ,que adaptados a las posibilidades de cada máquina , podemos realizar siguiendo el proceso establecido ;

para posteriormente llevar a cabo la experiencia y estudiar los resultados.

### 1.- Analisis del proceso de aprendizaje del cálculo mental

A)Consideraciones generales

- En una clase donde estamos trabajando el cálculo mental, si las operaciones a efectuar estan escritas en la pizarra los resultados positivos son en un 90% mientras que si estas se dictan nada más oralmente este porcentaje se reduce al 50%.

Esta observación plantea el siguiente método de trabajo :

1. realización de las operaciones correspondientes a un mismo grado de dificultad , escribiendo los números a operar

2. realización de las operaciones utilizando nada más el lenguaje oral.

Es evidente que donde podemos utilizar las máquinas de calcular es en el desarrollo del 1º punto.

-Es importante fijar los mecanismos que podemos utilizar para resolver las operaciones. Hemos escogido aquel que memorice el mínimo número de cifras posible; esto queda concretado en que el alumno nada más ha de retener en la memoria ,sin tener que utilizarla en aquel momento , como máximo una cifra:

34+45 ; 34 + 40 , 74 ; 74 + 5 , 79

B)Cálculo mental de la adición

Hemos considerado los siguientes grados de dificultad

grado 1 .:sumar números de una cifra

grado 2 .:sumar decenas

grado 3 .:sumar números de una cifra con números de dos cifras:

- "sin llevar"

35 + 4 ; 5 + 4 , 9 ; 39

- "llevando"

35 + 7 ; 5 + 7 , 12 ; 30 + 12 ,42

grado 4 .:sumar números de dos cifras

- decenas y otros números
- "sin llevar"

43 + 25 ; 43 + 20 , 63; 63+ 5 , 68

- "llevando"

57 + 36 ;57+30 , 87; 87+ 6 , 93

grado 5 .:estudio de casos especiales.

En la resta y en la multiplicación hemos seguido un proceso semejante.



2.- Tipos de ejercicios adaptados a las posibilidades de cada máquina

+ Dataman

-Banco de memoria.

Se introducían en el,cinco operaciones del tipo de dificultad que se estaba trabando en ese momento. Después se contestaban , apuntando cada alumno los resultados obtenidos.

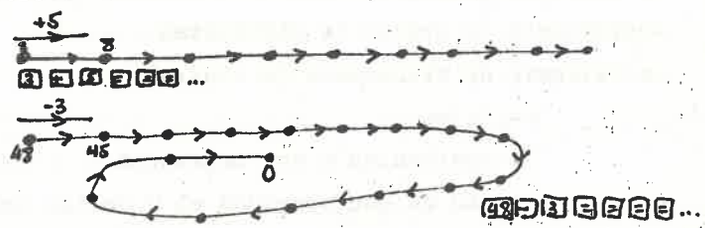
-"la caja misteriosa"

La máquina da series de 10 operaciones con unas condiciones preestablecidas

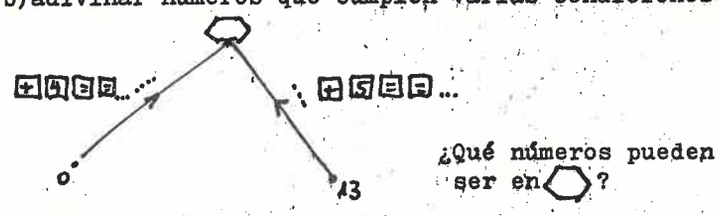
+ TI-1025

-Constante

a)series numéricas de sumar y restar




b)adivinar números que cumplen varias condiciones




-Memoria acumulativa.

Esta característica se ha utilizado para realizar sumas de series de números de una cifra , mentalmente, teniendo la máquina como comprobante de la respuesta

+ TI-59

Se han elaborado programas sobre:

- series de sumas , restas y multiplicaciones con condiciones determinadas
- los números y su descomposición
- series de números naturales.

Exponemos a continuación el objetivo, las condiciones y el organigrama de uno de ellos:

a)Objetivo:calcular mentalmente las sumas de series de números

b)Condiciones que ha de cumplir este programa:

-posibilidad de variación del número de sumandos de cada serie

-posibilidad de variación del número de series a realizar seguidas

-existencia de grados de dificultad

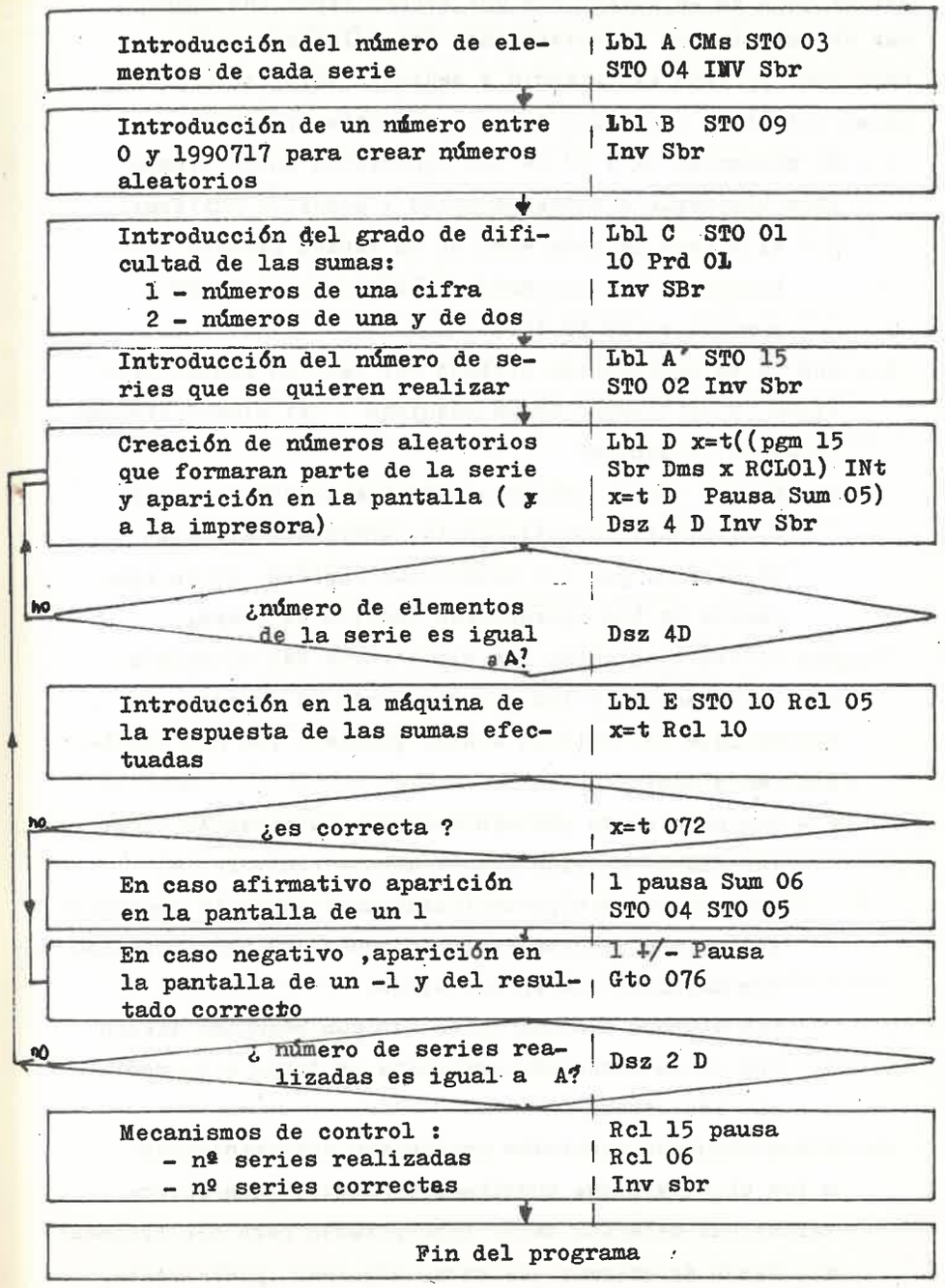
-existencia de mecanismos de control:

- fijos
- opcionales : con impresora

- imposibilidad de que aparezca el 0 en las series

c)Organigrama :





El objetivo principal de esta experiencia ha sido observar cual es la incidencia que pueden tener las máquinas de calcular en el aprendizaje del cálculo mental. Partiendo de esta experiencia y mediante datos tabulados hemos intentado responder a las siguientes preguntas:

1.- El alumno de 3º y 4º de EGB ,¿necesita mucho tiempo para adaptarse a estas máquinas y poderlas utilizar?

R.- El alumno de esta edad no ha tenido grandes problemas en la adaptación a la máquina Dataman y menos en la TI-1025.

2.- Con la metodología de trabajo del cálculo mental descrita ,y utilizando estas máquinas , ¿el alumno obtiene progesos evidentes?

R.- Hay un avance evidente. Hay una tendencia clara a disminuir las diferencias entre los niveles adquiridos por los alumnos.La rapidez en la ejecución de las operaciones también es clara.

3.-¿Hay diferencias entre los alumnos que han trabajado con calculadoras y los que siguiendo un proceso de aprendizaje del calculo mental paralelo ,no han utilizado máquinas?

R.- Los niveles de cálculo mental adquiridos en todas las clases ha sido prácticamente equivalente.
La media de tiempo utilizado para hacer 10 operaciones es más pequeña en los alumnos que han trabajado con máquinas que en los otros.
Los alumnos que han trabajado con máquinas tienen los datos mucho más agrupados en torno a la media que los otros

4.- Estas máquinas concretas ¿responden didácticamente a los objetivos que queriamos conseguir?¿Qué características deberían tener incorporadas para ser óptimas?

R.- Hemos de afirmar que estas máquinas ,globalmente,



son un elemento didáctico y sirven para trabajar el cálculo mental.Ahora bien, hemos de constatar que ,analizadas nada más en el aspecto del cálculo mental ,aunque tienen una gran gama de posibilidades también tienen deficiencies.

Una máquina, que cumpla las mínimas exigencias, ha de tener:

- una pantalla suficiente para escribir números hasta el millón.
- un conjunto de posibilidades , como ofrece la máquina Dataman ,con algunas pequeñas variaciones en los mecanismos de control; por ejemplo que los datos de control queden fijos en la pantalla el tiempo que se quiera.
- el conjunto de posibilidades que ofrece la TI-1025 haciendo especial incapie en la constante y en la memoria acumulativa
- algunas nuevas posibilidades dirigidas a trabajar series de sumas o restas y descomposiciones de los números.

Otras conclusiones que pueden expresar aspectos positivos e interesantes de la experiencia son:

- Los alumnos de esta edad pueden trabajar con máquinas de este tipo, sin problemas ,siempre que se trabaje con unos objetivos concretos .
- El interés por el trabajo realizado con las máquinas no ha decaido en el transcurso de toda la experiéncia El conjunto de posibilidades hace que se pueda realizar una programación muy atractiva
- Hay alumnos,que esta experiencia,les ha potenciado el gusto por realizar cálculo mental
- Los alumnos con dificultades especiales de aprendizaje no han realizado un trabajo provechoso.Este hecho no nos puede hacer pensar que estos alumnos no puedan.

utilizar las máquinas , ya que el proceso de aprendizaje realizado ha sido muy rápido y estos alumnos necesitan un ritmo más lento.



# LA INFORMATICA COMO E.A.T.P. EN EL BACHILLERATO

por

Manuel González Dávila
Catedrático de Matemáticas del
I.B. Mixto 3 de Jerez de la Frontera

José María Menendez Lobato
Agregado de Matemáticas del
I.B. Mixto 3 de Jerez de La Frontera

Juan Miguel Molina Bravo
Agregado de Matemáticas del
I.B. Mixto 3 de Jerez de la Frontera

## LA INFORMATICA COMO EATP EN EL BACHILLERATO

### 1. INTRODUCCION.

La experiencia concreta que estamos llevando a cabo consiste en impartir Informática como asignatura EATP en 2º y 3º de Bachillerato.

En el curso actual 1981/82 nos hemos limitado al curso 2º donde estamos desarrollando el lenguaje BASIC. Como Seminario de Programación y durante una hora semanal voluntaria estamos trabajando también con alumnos de COU; confiamos en ampliar esta experiencia a 3º BUP en los próximos cursos.

Desde nuestro punto de vista existen tres justificaciones fundamentales para la enseñanza de la Informática y en particular para el aprendizaje de un lenguaje sencillo y útil, como es el BASIC.

En primer lugar la indudable importancia práctica de la Informática. No vamos a discutir aquí esta cuestión.

En segundo lugar sus aspectos formativos. Nosotros pensamos que es en este punto donde pueden encontrarse argumentos mas fuertes. En efecto, enseñar un lenguaje informático no es una mera enumeración de "recetas" que al alumno le sirven para programar un problema que, por otra parte, debe saber resolver con antelación. Supone ante todo hacer una revisión muy exacta de los métodos utilizados y a la luz de este análisis localizar y discutir fallos que hasta ahora habían pasado desapercibidos. Es asombroso observar, por ejemplo, como los alumnos aceptan la necesidad del uso de paréntesis, que a muchos de ellos les había parecido hasta este momento una manía del profesor de matemáticas.

Además, el alumno debe adoptar dichos métodos a la nueva lógica con que debe operar. Por ejemplo, en BASIC se maneja frecuentemente una igualdad del tipo I=I+1. Esta igualdad



es contradictoria si se están manejando números reales, pero es aceptable en BASIC, y su significado cuando viene asociada a una proposición LET es elemental: "Tómese como nuevo valor de la variable I, el anterior incrementado en una unidad". De este modo el alumno se ve obligado a revisar sus conocimientos anteriores y además a traducirlos, con mucho cuidado, a la nueva situación, lo que le obliga a una atención y precisión extraordinarias.

En último lugar su posible utilización como instrumento didáctico en las clases de matemáticas o en las de cualquier otra asignatura. En este aspecto las posibilidades de un microordenador son inmensas.

### 2. CONSIDERACIONES SOBRE EL PROGRAMA A IMPARTIR.

Hemos utilizado como texto básico el libro de Byron S. Gottfried titulado " Programación Basic" de la Editorial Mc. Graw Hill. Este texto está dividido en dos partes: Basic elemental y Basic avanzado. La idea inicial era desarrollar el Basic elemental en 2º y dejar el avanzado para 3º. Hoy pensamos que todo el lenguaje se puede desarrollar en un curso. El programa concreto que estamos experimentando figura mas adelante. También creemos que en algún momento es importante impartir algunos conocimientos generales de Informática pues hay ciertas cuestiones (funciones de acceso a la memoria interna del computador, por ejemplo) que no se puedan comprender perfectamente sin ellos. En lo que respecta al problema de si es conveniente o no empezar directamente con el uso de un microordenador concreto, creemos que es más conveniente impartir en el 1er. trimestre un curso teórico de BASIC sin necesidad de utilizar en este momento la computadora. Ello es debido a que cada micro posee un Basic particular que se puede alejar más o menos del general. Con este curso inicial se sitúa al alumno en condiciones de acceder al lenguaje de cada máquina, y de otra forma puede producirse una confusión

entre las características especiales de una máquina y el lenguaje Basic.

En los trimestres siguientes se puede comenzar a operar directamente con el micro, desarrollando primero sus diferencias con el lenguaje general y sus aspectos técnicos particulares que no son precisamente lenguaje Basic, pero que son fundamentales a la hora de la práctica. Este proceso sirve además de repaso a todo lo anterior.

3. ORIENTACIONES DIDACTICAS.

Como orientación fundamental creemos que estas clases deben ser totalmente prácticas, es decir, es mejor comenzar directa e inicialemtne con la confección de programas sencillos, introduciendo en cada uno de ellos los conceptos de Basic que sean necesarios.

Mas concretamente, para introducir unas proposiciones cuales quiera, por ejemplo INPUT, LET o PRINT, en lugar de describir que es lo que hace cada una de ellas es mejor confeccionar un programa en que se utilicen directamente y que el alumno conozca más o menos, por ejemplo la ecuación de segundo grado. Este método mixto teorico-práctico es el que ha dado los mejores resultados.

En los alumnos ha habido en general una aceptación positiva de esta experiencia. Un objetivo fundamental se ha conseguido al hacer comprender a los alumnos que lo más importante a la hora de confeccionar un programa es discutirlo y que pasarlo después por la computadora es un paso posterior cuya importancia fundamental radica en que nos dice definitivamente si el programa sirve o no.

Es importante notar que cualquier microordenador funciona también como calculadora y que, por tanto, todas las investigaciones desarrolladas para aplicar estos instrumentos a la enseñanza son útiles aquí; pero además con todas las ventajas añadidas: Visualización de resultados en una pantalla,



grabación e impresión de programas y datos, etc.

Una ventaja indudable del proceso de confección de un programa es que obliga al alumno a revisar gran cantidad de conocimientos adquiridos anteriormente y que podía haber olvidado. Podemos utilizar así la Informática como repaso de cursos pasados de Matemáticas. Muchos de los problemas que hemos planteado a nuestros alumnos se han basado en este hecho.

En uno de los grupos de 2º, aprovechando una de las ventajas legales de las asignaturas EATP, se imparten las dos horas semanales seguidas y en otro en días alternos. No hemos observado grandes diferencias por este motivo aunque ciertamente hay muchos programas cuya compresión y desarrollo exige un tiempo superior a una hora.

En cuanto al Seminario desarrollado en COU, el resultado es bueno aunque el hecho de disponer solo de una hora a la semana produce algunas dificultades de tiempo. Dos horas semanales es un tiempo adecuado y suficiente.

3. ALGUNAS DIFICULTADES DE LA EXPERIENCIA.

Es preciso hacer notar que al comienzo de la experieocia ninguno de los profesores implicados tenía conocimientos de Basic, aunque sí de otros lenguajes. No existe ninguna grave dificultad en este aspecto y se puede comenzar a impartir Basic con unas horas de estudios previos. Realmente una de las sorpresas que se lleva uno es lo extraordinariamente sencillo que es este lenguaje.

Por necesidades de acomodación de grupos de alumnos, los dos cursos de Basic de 2º se componen de 40 alumnos. Esta ha sido junto con el hecho de disponer solo de un microordenador, la mayor dificultad. Hemos intentado resolver este problema entregando a cada alumno una fotocopia del teclado. De esta forma cada alumno puede seguir personalmente la escritura de cada programa determinado que un compañero va realizando en el teclado real. Naturlamente sería deseable dispo-

ner de mas máquinas y que cada alumno tuviera mas tiempo para practicar.

4. CUESTIONES PENDIENTES PARA PROXIMOS CURSOS.

Programa para el curso 3º: En este momento tenemos tres opciones posibles.

a) Continuar practicando el lenguaje BASIC.
b) Aplicarlo a algunas técnicas de utilidad general para la mayoría de los alumnos (Estadística, por ejemplo).
c) Ampliar los conocimientos de Informática en general o desarrollar un nuevo lenguaje (PASCAL, FORTRAN , etc)

Cada una de estas opciones tiene sus ventajas e inconvenientes. En nuestra opinión habría que continuar en la dirección c) ya que los alumnos adquieren en 2º un conocimiento que juzgamos acptable de BASIC y que las técnicas que hemos pensado para la dirección b) no precisan del ordenador mas que como una herramienta auxiliar aunque potente. Los problemas que se plantean en c) son fundamentalmente que programa desarrollar y su conexión con el lenguaje BASIC, aparte por supuesto de la compra de los microordenadores adecuados.

En este curso hemos trabajado solo a nivel teórico en la dirección de aplicar el BASIC a las clases de Matemáticas. Esperamos realizar algunas de las experiencias diseñadas en lo que queda de curso (Limites de Sucesiones, funciones) y en el próximo curso (Estadística, análisis, etc.).

Naturalmente la amplitud de este tipo de actividades depende del conocimiento y de la extensión de la Informática a todos los alumnos.

En el momento actual del curso no hemos trabajado todavía con la impresora y la grabadora. Esperamos manejar ambas en el tercer trimestre.



Una de las ventajas de que la Infomática figure como EATP es su posible adscripción a otros Seminarios (Física y Química, por ejemplo). Aparte de las ventajas que este hecho acarrea en cuento a distribución de asignaturas y confección de horarios, se plantea así una posible dirección de trabajo, en cuento a la coordinación entre Seminarios, que no hemos experimentado todavía.

También es preciso insistir aquí en que al impartir esta asignatura puede evitarse que el profesorado de Matemáticas se vea obligado a impartir asignaturas distintas de la suya, como por ejemplo otra EATP distinta. Desde el punto de vista personal esta no es una ventaja trivial.

5. UTILIZACION CONCRETA DE UN MICROORDENA DOR.

La máquina que estamos utilizando es SINCLAIR ZX-81. Comparando sus inconvenientes con sus ventajas (especialmente su precio) no hemos encontrado alguna otra mejor, y globalmente estamos satisfechos de sus características.

Es preciso notar que desde el punto de vista didáctico presenta mas ventajas una máquina sencilla y de fácil accesibilidad para los alumnos que otra mas completa. En este sentido ZX-81 tiene un montón de ventajas: Por ejemplo, su gran facilidad de transporte y el hecho de poder adaptarse a cada televisor permite que cada profesor puede disponer de ella para trabajar y estudiar en su propia casa.

Como argumento importante para conseguir la compra por cada Centro de algún microordenador, podemos citar la posibilidad de mecanizar la matrícula de los alumnos. Hemos confeccionado un programa que con el módulo de ampliación de memoria nos resuelve la clasificación de alumnos y la confección de listas. Esperamos experimentar este programa en el próximo periodo de matrícula.

## LA INFORMATICA COMO E.A.T.P. EN EL BACHILLERATO

(Introducción a los Microordenadores)

Si el alumno ha de enfrentarse con una asignatura en la que se le explique el funcionamiento y utilización de los microordenadores, creemos que un programa de dicha materia podría basarse en los siguientes objetivos y contenidos:

1.- Habría que distinguir entre máquinas analógicas y digitales. Las primeras basadas en el principio de que los números estén representados por ciertas magnitudes físicas (intensidad de corriente eléctrica, número de grados de arco que ha girado un disco etc.). Las segundas que representan los números como agregados de dígitos, operando directamente sobre números.

Por su constitución, las primeras pueden tener fluctuaciones incontrolables del mecanismo que reporten errores difícilmente subsanables. Las segundas, en cambio, proporcionan mayor precisión y velocidad de cálculo. Seguidamente cabría plantearse el origen y ante qué necesidades se han producido los ordenadores.

2.- Creemos esencial la comprensión de los sistemas de numeración usados con y por los computadores, puesto que la mayoría de los dispositivos físicos empleados en ellos se caracterizan por la existencia de dos posiciones estables (abierto o cerrado, corriente positiva o negativa, etc.). Se estudiarían los siguientes sistemas:

- Sistema decimal. Usado por el operador que manipule los números para ser menejados por el computador.
- Sistema binario. En él se basan las operaciones básicas de muchos computadores.
- Sistemas de codificación. Permiten simplificar la identificación y escritura de numero en sistema binario.



= Sistema octal y hexadecimal. Expresan el valor numérico de un número binario en base 8 ó 16 respectivamente.

= Decimal codificado en binario. Se escribe primero en decimal y después cada una de sus cifras (unidades, decenas, centenas...) se representan en el sistema binario.

= Código ASCII. Utilizado para representar números, letras del alfabeto y una amplia gama de símbolos corrientes tales como los signos + y -, comas, corchetes etc.

La elección del sistema de codificación vendría regida en último extremo por razones de comodidad y rendimiento.

3.- La indiscutible fundamentación de los computadores en el álgebra lógica (los impulsos y no impulsos representan números binarios, con impulsos que representan unos y no impulsos, que representan, ceros o al revés), nos plantearía la introducción al Algebra de Boole, circuitos de contactos y funciones de conmutación, que mostraría el poder de análisis y síntesis del Algebra Lógica.

4.- Sería conveniente dar unas nociones elementales de HARDWARE(circuitos y redes de que dispone un ordenador) y SOFTWARE(programas escritos para un ordenador).

En HARDWARE, se daría el esquema general de un ordenador: unidad de entrada- salida, unidad de memoria, unidad central de proceso (Unidad aritmético-lógica y unidad de control). Al estudiar la estructura interna de la memoria y sus distintos tipos, interna y externa, se daría un vocabulario mínimo y significado del tema como bit, byte, K-bytes, posición, dirección, registro, etc.

Llegados a este punto, nos enfrentamos con el problema de en qué forma han de introducírsele las instrucciones al ordenador para que pueda cumplir con su cometido en la resolución de un problema concreto (SOFTWARE). Se desarrolla

rían los conceptos de algoritmo, diagrama de flujo (partes esenciales en el diseño de un programa) y lenguajes de programación. Convendría que el alumno adquiriera una visión general de los distintos lenguajes (Basic, Fortran, Pascal etc.) para la programación y, sus distintas aplicaciones - así, como que llegue a diferenciar entre el lenguaje máquina (lenguaje que entiende el hardware del ordenador), lenguaje de alto nivel ( de programación, más fácil de utilizar que el lenguaje máquina) y, compilador (traduce un programa escrito en alto nivel a lenguaje máquina).

5.- Por último, pasaríamos a tratar los microordenadores, objetivo fundamental de nuestro estudio.

Previamente estudiariamos la estructura de un microprocesador dispositivo que ha permitido el diseño de los micro y miniordenadores particularizando el estudio hecho sobre la arquitectura de los ordenadores.

De esta forma, el alumno podría distinguir los distintos tipos de memoria, ROM, RAM PROM, EPROM, etc., y conocer los distintos periféricos (unidades de entrada-salida) de que - disponen los microordenadores. En este punto, el alumno debe estar en condi iones de utilizar los microordenadores, - teniendo una visión de conjunto sobre funcionamiento y utilización de los mismos en cualquiera de sus asignaturas.



## LA INFORMATICA COMO E.A.T.P. EN EL BACHILLERATO

1.- INTRODUCCION A LOS ORDENADORES.

1.- Evolución histórica de los computadores.
- Distinción entre máquinas analógicas y digitales.
- Orígenes y metamorfosis de las máquinas de calcular.

2.- Sistemas de numeración. Codificación.
- Decimal y binario. Aritméticas respectivas.
- Octal, Hexadecimal y decimal codificado en binario.
- Sistema de codificación ASCII.

3.- Introducción a la lógica del ordenador.
- Algebra de Boole.
- Proposiciones y circuitos de contacto.

4.- Arquitectura básica de un ordenador.
- Esquema general de un ordenador.
- Unidades de entrada-salida. Tipos.
- Unidades de memoria. Tipos.
- Unidades aritmético-lógicas y de control.

5.- Programación.
- Solución de un problema en el computador. Algoritmos y diagramas de flujo.
- La máquina y su lenguaje.
- Lenguajes de programación. Jerarquía de los lenguajes en un ordenador.

11.- MICROORDENADORES.

1.- El microprocesador. Microordenadores.
- Estructura del microprocesador.
- Estructura de mini y microordenadores.

= La memoria. Distintas clases de memoria: ROM, RAM, etc.

= Dispositivos de entrada-salida. Periféricos.
- Funcionamiento del microordenador.

2.- Utilización de los microordenadores.

PROGRAMA DE LENGUAJE BASIC PARA ORDENADORES COMO E.A.T.P. EN SEGUNDO DE B.U.P.

INTRODUCCION:

El programa que hemos elaborado consta de:

- Una introducción referente a los ordenadores y a su funcionamiento desde el punto de vista del programador.
- Una primera parte relativa a las caracterísiticas generales del lenguaje BASIC que sirve para iniciar al alumno en la programación de ordenadores a la vez que le proporciona una información general sobre este lenguaje, válida para cualquier máquina programable en BASIC. Los temas de esta parte se desarrollan en el primer cuatrimestre del curso, a nivel meramente teórico. Básicamente se puede seguir el libro de Byron S. Gottfried: "PROGRAMACION BASIC", de la serie Schaum; salvo en el punto relativo a operadores lógicos que, lamentablemente, no se trata en este libro aun cuando su uso está permitido en muchas máquinas.
- Una segunda parte, con uso de máquina centrada precisamente en el manejo de dicha máquina, donde se pasa revista a las peculiaridades que presenta la versión del lenguaje BASIC de ZX81 respecto a lo que se ha visto en general. Para esto basta con seguir el manual de la máquina.

Creemos que la citada versión, teniendo en cuenta que se trata de un microordenador de capacidad bastante limitada, (1K ampliable a 16K), llega a ser en algunas instrucciones, más versátil que el lenguaje original. Sirva como ejemplo lo siguiente:

Cada palabra clave se corresponde con una tecla; por lo que no hay que deletrearla.
Una instrucción puede ocupar varias lineas.
En algunos casos las funciones no precisan de paréntesis par los argumentos.



La instrucción GO TO admite una variable e incluso una fórmula como direccion de la transferencia de control; por lo que la máquina no lleva ON-GO TO.
IF-THEN no es únicamente una bifurcación; sino que tras la clave THEN puede ir cualquier instrucción, GO TO, LET, PRINT,...; con lo que servirá como bifurcación, para definir una variable, imprimir,... o cualquier otra cosa, todo supeditado a la verificación de una condición - en realidad, a que el valor lógico o numérico de la expresión situada entre las claves IF y THEN sea distinto de cero.
Carece de READ y DATA; pero este inconveniente se puede salvar con un bucle y el almacenamiento de cinta.

De todas formas se nota la falta de instrucciones relativas a la definicion de funciones y al cálculo matricial y aunque podrían suplirse con subrutinas esto alarga demasiado los programas.

---

PROGRAMA

INTRODUCCION

1. El ordenador.-

1.1 ¿Qué es un ordenador?
1.2 Idea general de programa. Lenguaje de programación.
1.3 Esquema del funcionamiento de un ordenador.

PRIMERA PARTE: INTRODUCCION AL BASIC.

2. Primeros conceptos del lenguaje.-

2.1 Constantes: tipos y reglas de escritura.
2.2 Variables: tipos y reglas de escritura.
2.3 Operadores.
2.4 Funciones de biblioteca.

3. Operadores.-

3.1 Operadores aritméticos.

3.1.1 Fórmulas. Jerarquía de operación. Reglas para la redacción de fórmulas.

3.1.2 Uso de paréntesis.

3.2 Operadores alfabéticos. Reglas de uso.

3.3 Operadores de relación: comportamiento y reglas de uso.

3.4 Operadores lógicos: comportamiento y reglas de uso.

4. Funciones de biblioteca.-

4.1 Funciones de argumento numérico.

4.2 Funciones de argumento alfabético (cadenas de caracteres).

5. Estructura de un programa BASIC.-

5.1 Comandos (acción inmediata) e instrucciones (acción secuencial.

5.2 Estructura de un programa. Reglas de escritura.

5.3 Diagnóstico de errores.

6. Primeras instrucciones.-

6.1 Definición de variables: instrucción LET

6.2 Introducción de datos: instrucción INPUT.

6.3 Salida de resultados: instrucción PRINT y función TAB.

6.4 Comentarios al programa: instrucción REM.

6.5 Detención y finalización del programa: instrucciones STOP y END.

6.6 Algunos programas elemantales.

7. Comandos de uso frecuente en la ejecución de un programa.-

7.1 Comando de comienzo: RUN.

7.2 Comando para el listado de programas y archivos: LIST Y CATALOG.

7.3 Comando para el almacenamiento: SAVE.



7.4 Comandos para rectificar: RUBOUT, DELETE, ALTMODE y ESCAPE.

7.5 Comando para el borrado de variables y programas: CLEAR, NEW y UNSAVE.

7.6 Detención de un rpograma: comando BREAK.

8. Bifurcaciones.-

8.1 Bifurcación incondicional: GO TO.

8.2 Bifurcación múltiple: ON-GO TO.

8.3 Bifurcación condicionada: IF-THEN.

8.4 Ejemplos de programas.

9. Diagramas de flujo.-

9.1 Organigramas y ordinogramas.

10. Construcción de bucles.-

10.1 Definición de bucle y posibles utilidades.

10.2 Instrucciones FOR-TO y NEXT.

10.3 Ejemplos de programas.

11. Definición de funciones y subrutinas.-

11.1 Definición de una función: DEF.

11.2 Subrutinas: instrucciones RETURN y GOSUB.

11.3 Ejemplos de programas.

12. Variables subindicadas.-

12.1 Reserva de memoria: DIM.

12.2 Asignación de valores: instrucciones READ, DATA y RESTORE.

13. Generación de números aleatorios.-

13.1 La función RND.

13.2 La instrucción RANDOMIZE.

13.3 Ejemplos de programas.

SEGUNDA PARTE: EL BASIC DEL MICROORDENADOR ZX81.

14. Uso del ZX81 como calculadora.-

14.1 Estudio y uso del teclado.

14.2 Comandos e instrucciones propios.

14.3 Cursores de pantalla y códigos.

15. Variaciones del BASIC para ZX81.-

15.1 Constantes. Variables. Operadores. Funciones de Biblioteca. Prioridades.

15.2 Reglas de escritura de instrucciones.

15.3 Variaciones en las instrucciones INPUT, PRINT y END.

15.4 Las bifurcaciones en el ZX81, GO TO e IF-THEN.

16. Almacenamiento en cinta magnética.-

16.1 Instrucciones SAVE y LOAD.

16.2 Asignación de valores a las variables subindicadas.

17. Construccion de gráficos.-

17.1 Inversión de caracteres. Funciones CODE y CHR$.

17.2 Instruc iones PLOT y UNPLOT.

NOTAS DIDACTICAS SOBRE GEOMETRIA:

UNA INTRODUCCION A $V^2$ CON UN APOYO PRACTICO

por:

Juan Miguel Molina Bravo

## UNA INTRODUCCION A $V^2$ CON UN APOYO PRACTICO.

### INTRODUCCION

1. El motivo de estas notas es la dificultad de asimilación de la estructura vectorial por parte del alumno medio de 2º de B.U.P., ocasionada, en nuestra opinión, por la falta del nivel de abstracción necesario para plantearse problemas que escapan a su experiencia de la vida cotidiana. Pensamos al decir esto, por ejemplo, en la necesidad que pueda ver el alumno de definir una relación de equipolencia entre vectores fijos cuando lo más natural es que, al plantearle las dos figuras siguientes // //, diga que son iguales sin reservas de ningún tipo. O, en la idea que pueda concebir de vector libre, ente formado por infinitos vectores fijos, que utilizará únicamente a nivel de notación, ya que, a la hora de hacer cualquier razonamiento gráfico, deberá utilizar vectores fijos, y que, además, le obligará a "purificar" dicho razonamiento mediante la relación de equipolencia (como ocurre con las definiciones de la suma y el producto por números reales).

2. Nuestro objetivo es hacer asequible $V^2$o, al menos, el manejo de sus elementos, con un mínimo de garantías, para su posterior uso en el estudio de la geometría del plano, a ese alumno de nivel medio o bajo que aprende "haciendo". Para ello planteamos el estudio del plano mediante la realización de "itinerarios" compuestos por tramos rectos; lo que nos va a llevar a presentar los vectores libres como traslaciones. Para caracterizar estas traslaciones (lo que equivale a dar módulo, dirección y sentido) se utilizará un procedimiento basado en el manejo de la cinta métrica y la brújula, aparatos conocidos por el alumno y de uso corriente en los desplazamientos terrestres o en la navegación.



Este interés en hacer la exposición en términos "razonables" para el alumno, nos lleva a no cuestionar cosas que él no hubiera llegado a cuestionarse nunca, dejando un margen a la intuición natural que le llevará a reconocer, por ejemplo, una traslación como algo que no está exclusivamente ligado a los puntos inicial y final en los que se esté utilizando, sin necesidad de tener que dar vida a entes ideales que, lo único que producen es un choque con su mentalidad por mor de conseguir una delimitación rigurosa de los conceptos.

Somos conscientes de que esto trae como consecuencia una falta de rigor en la exposición; pero creemos que la introducción rigurosa del tema es interesante únicamente a niveles superiores y para gente particularmente interesada; además, el rigor no es la única aportación de las Matemáticas a la enseñanza, pudiendo convertirla incluso en una disciplina tediosa y aburrida.

Intentamos, también, que el alumno vaya "descubriendo" cosas; evitando, en la medida de lo posible, anticipar definiciones o propiedades hasta que se hayan hecho comprobaciones o existan motivos "razonables" que las sugieran.

DEFINICION DE LOS ELEMENTOS DE $V^2$:

1. El estudio se puede comenzar partiendo de un plano "físico" -la superficie de la pizarra o de una hoja de papel-, considerándolo como un conjunto de infinitos puntos o posiciones. Habrá que disponer de una "rosa de los vientos", círculo donde aparezcan marcadas gran número de direcciones, con sus respectivos sentidos, distribuidas regularmente (se admitirá que pueden figurar todas las posibles) y una, en particular, con un sentido privilegiado, que llamaremos N. También fijaremos una unidad para la medida de longitudes en cualquier lugar y dirección del plano.

El primer trabajo del alumno puede ser la construcción de la "rosa de los vientos" sobre un papel vegetal y de una "regla", graduada por él mismo con la unidad de medida utilizando el teorema de Thales.

2. Con estos "instrumentos" se le propone al alumno la realización de "itinerarios" (poligonales) por el plano:

Lo primero que deberá hacer será empezar por algún sitio. Habrá de elegir un punto de partida, O.

Fijado este punto, deberá determinar hacia dónde ir. Tendrá que considerar, entonces, todas las rectas que pasan por O -con ayuda de la "rosa de los vientos"- y seleccionar una; con lo que dispondrá de una DIRECCION. Pero esta dirección es una "vía" a lo largo de la cual puede desplazarse; y, como ocurre con todas las vías, el desplazamiento se puede efectuar de dos formas diferentes. Concretando una de ellas tendrá fijado un SENTIDO de los dos posibles y ya podrá comenzar el "itinerario".



(Sería interesante realizar estos "itinerarios" sobre mapas o sobre papel milimetrado con la "orientación", N, marcada; pues en ellos se dispone de unidades de longitud).

Comenzado el desplazamiento, puede llegar el momento en que se quiera cambiar. ¿Qué hacer, entonces, para poder recordar el camino?, o, simplemente, para dejar constancia de él. Lo lógico parece ser anotar la dirección y el sentido en un disco de cartulina, donde figure N; con lo que tendrá una ORIENTACION, y medir la longitud, A, del desplazamiento. A este tipo de desplazamiento se le llamará TRASLACION, y podrá representarse en la forma, $(A,\emptyset)$, donde, A, es la longitud o MODULO de la traslación y, $\emptyset$, la orientación (esta representación permitirá poca variedad de orientaciones; por lo que, también, podrían identificarse las orientaciones con sus medidas angulares tomadas desde N).

Hecha la anotación, el alumno podrá cambiar el desplazamiento eligiendo, en el punto donde se encuentre, otra orientación y desplazándose una cierta distancia siguiéndola. Tendrá así, otra traslación $(B,\theta)$.

Prosiguiendo de esta forma, dispondrá, al final, de una lista ordenada de traslaciones que describirá perfectamente su recorrido y permitirá reconstruirlo desde el punto de partida o, también, le permitirá volver a dicho punto "invirtiendo" las orientaciones.

OPERACIONES.

3. Para introducir la suma de dos traslaciones $\vec{A}=(A,\emptyset)$ y $\vec{B}=(B,\theta)$, se puede hacer observar al alumno que, para cada par de puntos del plano, hay una traslación (única) que va del

primero al segundo. Así, considerando la posición inicial y la posición final que se alcanza efectuando las dos traslaciones consecutivamente -primero $\vec{A}$ y luego $\vec{B}$-, ve que existe una traslación, $\vec{C}=(C,\theta)$, con el mismo efecto, "suma" de los efectos de las dos primeras; se llamará, por tanto, traslación SUMA de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y se escribirá $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$.

Fácilmente puede ver que esta traslación $\vec{C}$ no depende del orden en que se efectúen $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (propiedad CONMUTATIVA: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$, fig.(1)). También, que, al efectuar tres traslaciones consecutivas, $\vec{A}$,$\vec{B}$ y $\vec{C}$, puede sustituir, indistintamente, dos consecutivas por su suma sin que esto altere la posición final (propiedad ASOCIATIVA: $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$; ambas expresiones representan una misma traslación $\vec{D}$, que suele escribirse simplemente $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$, fig. (2).

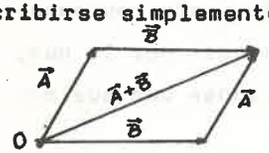


Fig.(1)

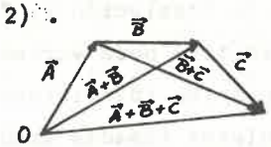


Fig.(2)

Con estas propiedades, el alumno comprueba que puede "cortar camino" libremente a la hora de seguir un "itinerario" e, incluso, alterarlo cambiando el orden de las traslaciones, en la seguridad de que acabará siempre en el mismo punto.

El ELEMENTO NEUTRO o traslación nula puede presentarse como una "parada" en el "itinerario". Será una traslación $\vec{0}=(0,\emptyset)$ que, cuando sigue o precede a otra, $\vec{A}$, no produce ningún efecto en el recorrido ($\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}=\vec{0}+\vec{A}$).

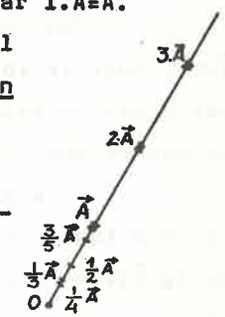
Para llegar a la existencia de traslaciones OPUESTAS, basta comprobar que, para cada traslación $\vec{A}=(A,\emptyset)$, existe otra, $(A,\emptyset)$, que, cuando la precede o la sigue, anula su



efecto. A esta traslación se le denota por, $-\vec{A}$, y cumple $(-\vec{A})+\vec{A}=\vec{0}=\vec{A}+(-\vec{A})$.

4. Para introducir el producto por números reales se puede comenzar proponiendo la suma de dos traslaciones, $\vec{A}=(A,\emptyset)$ y $\vec{B}=(B,\emptyset)$, con la misma orientación. Se comprobará que el resultado es una traslación $\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B},\emptyset)$, también con la misma orientación y módulo suma de los módulos. Particularizando esta suma a la misma traslación $\vec{A}$, tomada como sumando varias veces, se llega a la traslación $(nA,\emptyset)$, que pasa a denotarse $n.\vec{A}$.

En un segundo paso, se puede proponer "detenerse" durante una traslación $\vec{A}$, a la cuarta parte del camino, a la tercera parte, a la mitad, a las tres quintas partes, etc.; con lo que se van obteniendo las traslaciones $(1/4.A,\emptyset)$, $(1/3.A,\emptyset)$, $(1/2.A,\emptyset)$, $(3/5.A,\emptyset)$, etc., que se denotarán $1/4.\vec{A}$, $1/3.\vec{A}$, $1/2.\vec{A}$, $3/5.\vec{A}$, etc. Con esto, la definición de $a.\vec{A}$, para $a\in\mathbb{R}^+$, cae por su peso: $a.\vec{A}=(a.A,\emptyset)$; en particular $1.\vec{A}=\vec{A}$.




En este momento se puede proponer al alumno la graduación algunas semirrectas tomando como unidades los módulos de $\vec{A}$, $\vec{B}$,... y de algunas otras traslaciones $a.\vec{A}$, $b.\vec{A}$,..., $a.\vec{B}$, $b.\vec{B}$,..., múltiplos de las anteriores. Las consecuencias que se observan después de hacer esto son:

(a) Con los múltiplos positivos de una traslación, $\vec{A}$, se pueden alcanzar, partiendo de O, todas las posiciones localizables siguiendo la orientación, $\emptyset$, de $\vec{A}$.

(b) Cada una de estas posiciones puede identificarse con un único número real positivo (que variará si se fija $\vec{A}$ o $a.\vec{A}$).

(c) $(a+b).\vec{A}=a.\vec{A}+b.\vec{A}$

(d) $(a.b).\vec{A}=a.(b.\vec{A})$

En un tercer paso, se puede especular sobre la posibilidad de alcanzar las posiciones localizables siguiendo la orientación $\emptyset$, contraria a la de $\vec{A}$ (lo que se puede conseguir perfectamente con los múltiplos positivos de $-\vec{A}$). Estas posiciones serán accesibles definiendo $(-a).\vec{A}=a.(-\vec{A})$, que, como se puede comprobar, coincide con $-(a.\vec{A})$. Además, la relación (c) seguirá siendo válida para estos múltiplos negativos por serlo para $-\vec{A}$; y, para comprobar la validez para un factor positivo y otro negativo, se podrá recurrir a algunas comprobaciones con ejemplos e intentar construir la demostración analizando los distintos casos que se pueden presentar.

La relación (d) también se cumplirá para números negativos y de ambos signos, como puede comprobarse haciendo uso de las definiciones.

Con esto, y definiendo $0.\vec{A}=\vec{0}$, cosa que pueden llegar a sugerir los propios alumnos, se extienden las graduaciones a las rectas completas, identificando cada posición con un número real. Además, las relaciones (c) y (d) se mantienen.

De esta forma el alumno puede observar, por una parte, que todas las traslaciones con una misma dirección (incluso la $\vec{0}$) se pueden considerar múltiplos de una cualquiera de ellas, y, por otra, que las rectas se pueden graduar de forma diferente según la dirección (p.e.: en marina, para longitudes en superficie se utiliza la milla, 1.851,851 m., mientras que para profundidades se emplea la braza, 1,671 m.).

Habría que completar la lista de propiedades del producto por números reales comprobando la relación

(e) $a.(\vec{A}+\vec{B})=a.\vec{A}+a.\vec{B}$



lo que se podrá hacer, para algunos casos, construyendo las rectas graduadas correspondientes a algunas traslaciones $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y a su suma $\vec{A}+\vec{B}$.

INTRODUCCION DEL CONCEPTO DE BASE.

5. Hasta el momento el alumno sabe que todas las traslaciones con una misma dirección, $\emptyset$, se pueden expresar como múltiplos de una de ellas; p.e.: $\vec{A}=(A,\emptyset)$, lo que le permitirá, a la hora de tener que citarlas, dar, simplemente, expresiones de la forma $a.\vec{A}$; sin embargo, esto no le supone mucha ayuda teniendo en cuenta que existen infinitas direcciones y que tendría que graduarlas todas.

Hecha esta observación se le puede proponer alcanzar distintas posiciones del plano partiendo de 0, y siguiendo únicamente dos direcciones prefijadas (que podrían cambiarse en distintos ejercicios). Esto contribuirá a que el alumno compruebe que, desde 0, se puede alcanzar cualquier posición del plano mediante traslaciones con dos direcciones diferentes y que, además, basta con una de cada tipo.

Pasar de aquí a que cualquier traslación se puede expresar como suma de múltiplos de dos de ellas, con direcciones distintas, no presentará dificultades.

Siendo, el alumno, consciente de este hecho, podrá elegir libremente dos direcciones y graduarlas a partir de sendas traslaciones $\vec{A}$ y $\vec{B}$; con lo que dispondrá de dos "reglas" y con ellas podrá asignarle un par de números $(a,b)$ a cada traslación $\vec{C}$, con la condición de que $\vec{C}=a.\vec{A}+b.\vec{B}$, que la caracterizará inequívocamente (serán sus coordenadas respecto a la base $\{\vec{A},\vec{B}\}$). (Por motivos técnicos se deberán elegir estas direcciones formando ángulos de 30º, 45º, 60º o 90º, que se pueden conseguir con escuadra y cartabón).

Con esto verá que no es necesaria la "rosa de los vientos" para definir traslaciones y podrá liberarse de la notación primitiva, $(C,\emptyset)$, para cada traslación $\vec{C}$, cambiándola por el par de números (a,b), con la ventaja, por parte de la nueva, de que si $\vec{C}=(a,b)$ y $\vec{D}=(c,d)$ entonces $\vec{C}+\vec{D}=(a+c, b+d)$ y $k.\vec{C}=(k.a,k.b)$, lo que facilita mucho las cosas en el estudio de "itinerarios" por el plano.



# GEOMETRIA (AFIN)

Por Vicens Font y Paco Moreno

## CONSIDERACIONES GENERALES

1) El material que presentamos ha sido elaborado por miembros del GRUP ZERO DE BARCELONA siguiendo la metodología del grupo basada en la resolución de problemas.

Aquí no vamos a discutir esta metodología que suponemos mínimamente conocida, (en esta jornadas hay una ponencia que trata sobre la metología de dicho grupo). Sí, remarcaremos que a los alumnos se les da una "colección" de problemas que van resolviendo en clase.

2) Aquí presentaremos un trabajo sobre vectores y geometría, que coincide básicamente con el apartado del programa oficial de 2º de B.U.P. titulado " Geometría afín de la recta".

3) Este material ha sido pensado para ser utilizado al final de 2º de B.U.P. o bien a principios del tercer curso. Nosotros lo hemos experimentado durante el primer trimestre del tercer curso.

4) Creemos que este material se puede hacer en dos meses, o dos meses y medio.

5) Su estructura es la siguiente:

### CAPÍTULO I - VECTORES

INTRODUCCIÓN
A- DESPLAZAMEIENTOS
B- VECTORES
C- 1) OPERACIONES CON VECTORES
   2) PROBLEMAS DE APLICACIÓN
D- MAGNITUDES VECTORIALES
   1) VELOCIDADES
   2) FUERZAS
E- ARITMETIZACIÓN DE VECTORES
F- PROBLEMAS DE CONSOLIDACIÓN

## CAPÍTULO II - GEOMETRÍA ANALÍTICA

A- INTRODUCCIÓN

B- LOS DOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE DESCARTES.

1) SISTEMAS DE COORDENADAS Y SU RELACION CON LOS VECTORES: SISTEMAS DE REFERENCIA

2) COMPARACIÓN DE LAS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS Y LAS CURVAS DEL PLANO.

C- LA RECTA

1) PROBLEMAS DE INTRODUCCIÓN

2) RESUMEN DE PRIMERO DE BUP

3) ESTUDIO DE LAS ECUACIONES DE LA RECTA

4) INCIDENCIA Y PARALELISMO.

5) PROBLEMAS DE APLICACIÓN Y CONSOLIDACIÓN.

APÉNDICE I: PERPENDICULARIDAD

### Consideraciones sobre el capítulo I

Las dos difucultades que presenta este tema son :

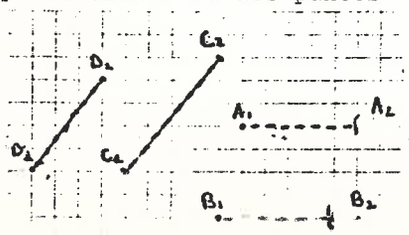
1) ¿Cómo se introducen y definen los vectores? y

2) ¿Cómo se relacionan los vectores con las magnitudes vectoriales que los alumnos estudian en Física ?.

Nota: A partir de ahora la letra minúscula corresponderá a la reproducción de parte del material que se ha dado a los alumnos, mientras que la letra mayúscula formará parte de nuestros comentarios sobre dicho material.

LA FORMA DE INTRODUCIR LOS VECTORES ES LA SIGUIENTE: EN EL APARTADO A) SE ESTUDIAN LOS DESPLAZAMIENTOS EMPEZANDO CON EL PROBLEMA SIGUIENTE:

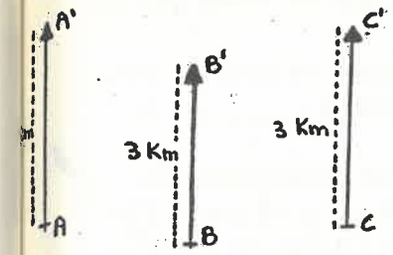
A-1) En la figura que se adjunta podemos observar el movimiento de cuatro personas A, B, C, D que han salido respectivamente de los puntos $A_1$, $B_1$, $C_1$ y $D_1$.




a) ¿Qué distancia ha recorrido cada persona?. ¿Han recorrido la misma distancia?.

b) ¿Podrías decir que se han desplazado de la misma manera?? ¿Por qué?






mientos AA' , BB' , CC' , etc...; o sea, cuando hablamos del vector anterior nos estamos refiriendo a todos los desplazamientos de 3 Km de longitud, dirección S-N y sentido hacia el Norte. A cada uno de estos desplazamientos lo llamaremos "representante del vector" (por ejemplo, AA' , BB' y CC' son distintos representantes del vector anterior).

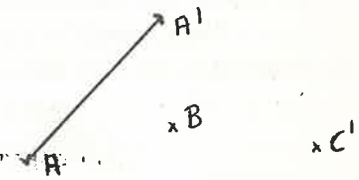
a) ¿Cuándo dos flechas representan al mismo vector?.

b) Dibuja dos flechas que representen al mismo vector, une los puntos orígenes y después los puntos finales. ¿Qué figura se ha formado ?.

A partir de ahora a los vectores los escribiremos con una letra minúscula $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ , etc ... y los dibujaremos en el plano mediante cualquiera de sus representantes, o sea, poniendo una flecha. Pero, a diferencia de antes, esta flecha se puede situar en cualquier punto del plano siempre que no le cambiemos la dirección, ni el sentido, ni la longitud.

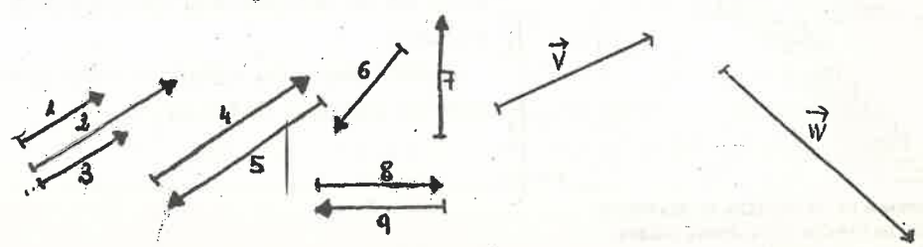
A la longitud del vector también le llamaremos módulo del vector.

B-5) a ) Dada la flecha $\overrightarrow{AA'}$ , dibuja otra que represente al mismo vector con origen en B. y otra con final en C.




b) Agrupa las flechas que representen al mismo vector.

c) Dibuja tres representantes de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ .



d) Si hace el viaje Alicante - Palma de Mallorca, a 600 km/h. , dibuja el desplazamiento que se ha realizando cuando se llevan 10 minutos de viaje.

e) Haz lo mismo para el desplazamiento que se tiene que hacer cuando faltan 5 minutos de vuelo.

f) Si va desde Palma a Alicante a la misma velocidad, representa el desplazamiento al cabo de 15 minutos.

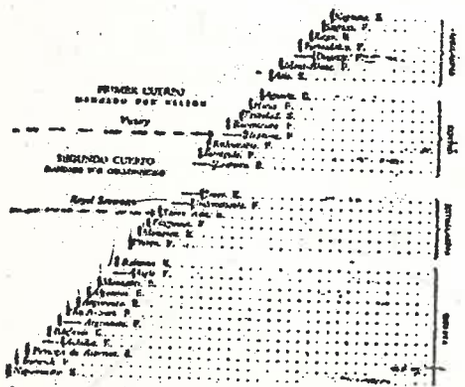
A-3) En el problema A-1 hemos dicho que un desplazamiento queda determinado conociendo el punto de origen y el punto final. En el problema A-2 hemos observado otra forma de caracterizar un desplazamiento, ¿cuál?.

CON ESTE ULTIMO PROBLEMA PRETENDEMOS QUE EL ALUMNO SE DÉ CUENTA QUE EN EL PROBLEMA A2) PARA DETERMINAR UN DESPLAZAMIENTO HA UTILIZADO UNA DIRECCION, UN SENTIDO , UNA LONGITUD Y UN PUNTO (EL ORIGEN O EL FINAL) . A CONTINUACION SE RESUELVE EL PROBLEMA A-4) EL CUAL PRESENTA UNA SITUACION QUE PERMITE DEFINIR LA SUMA DE DESPLAZAMIENTOS SIEMPRE QUE EL EXTREMO DE UNO COINCIDA CON EL ORIGEN DEL OTRO. EN EL APARTADO SIGUIENTE, EL B, INTRODUCIREMOS EL CONCEPTO DE VECTOR.

## B - VECTORES

A veces podemos leer o escuchar las expresiones: "El viento sopla con una velocidad de 30 km/h."

"Una escuadrilla de aviones se mueve en formación a una velocidad de 400 km/m."



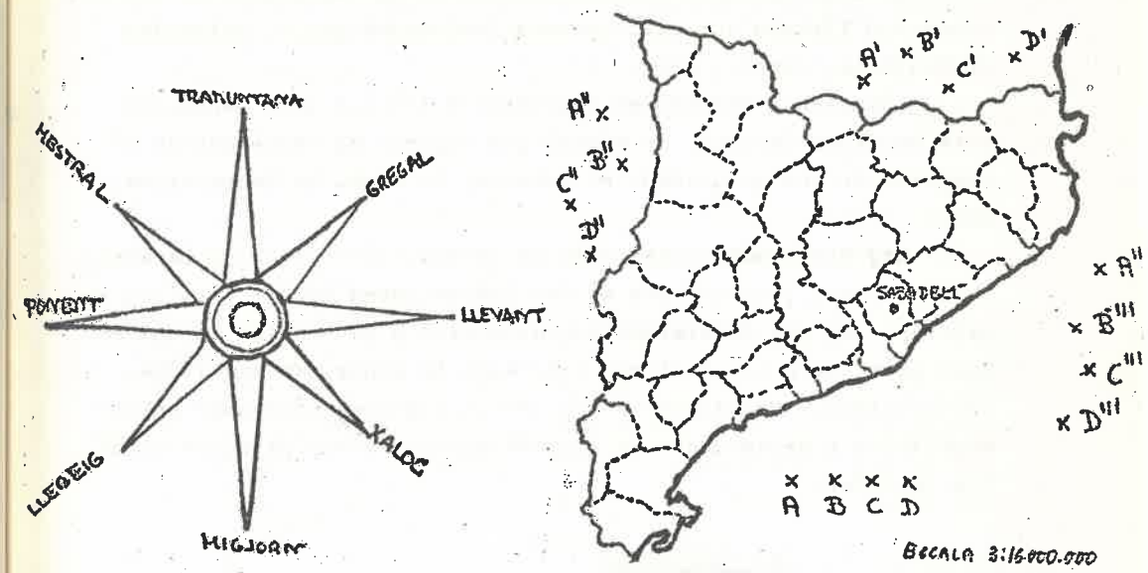
Esquema de la batalla de Trafalgar (de la novela de B. Pérez Galdós del mateix títol)

"En la batalla de Trafalgar las armadas franco-española e inglesa navegaban siguiendo las formaciones de la figura".

"8 nadadores han atravesado una piscina de 50 m. por sus respectivas calles".

A continuación estudiaremos estos hechos con más detalle.






B-1) La figura 1 corresponde a la Rosa de los Vientos de Cataluña.

a) ¿Qué viento traerá humedad, el levante o el poniente?.

b) ¿El Xaloc que traerá,frío o calor?.

c) El mapa de la figura 2 lo utilizaremos para representarcuatro de los vientos mas frecuentes en Cataluña. Si sabes que el migjorn sopla con una velocidad de 100 m/mt. y en cada uno de los cuatro puntos, A, B, C, D, hay un globo sonda, ¿en qué punto se encontrarán cada uno de estos globos al cabo de un cuarto de hora?. (Supondremos que la velocidad se ha mantenido constante y que el viento no ha formado remolinos).

d) Representa los desplazamientos anteriores mediante flechas. ¿Qué tienen en común estas flechas? (Utiliza la figura 2)-

e) Idem para los puntos A', B', C' y D', pero suponiendo que sopla la tramuntana a una velocidad de 1200m/mnt.

f) Idem para los puntos A", B", C" y D" cuando sopla el viento de poniente a 1400 m/mnt.

g) Idem para los puntos A"', B''', C"' y D"' si hay viento de levante a una velocidad de 1100 m/mnt.

## APENDICE 1 : MAGNITUDES VECTORIALES

En este apartado supondremos que estás familiarizado con los conceptos físicos que utilizaremos (velocidad media, velocidad instantánea, fuerza, etc... )

Llamaremos magnitudes escalares a las que sólo necesitan para su determinación un número que expresa el resultado de la comparación con la unidad, el volumen, la masa, la temperatura, etc...

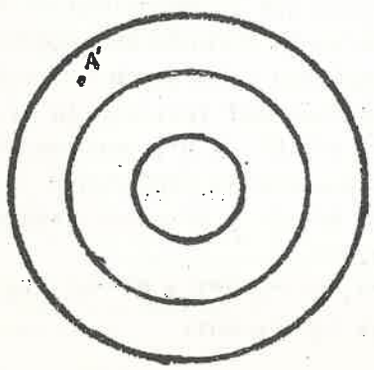
Hay otras magnitudes como la fuerza, la velocidad, la aceleración, etc..., que, además de las indicaciones dichas para las escalares, hay que determinar una dirección y un sentido de una manera parecida a los vectores (por esto se denominan magnitudes vectoriales). Estudiaremos más detalladamente algunas de estas magnitudes y veremos que su comportamiento es muy parecido al de los vectores.

### A) VELOCIDAD

I) Un avión vuela a una altura de 9000 m. Si el piloto comunica, cuando pasa sobre un aeropuerto, que la velocidad es constante (600 km/h ) y el movimiento es rectilíneo, ¿en qué punto se encontrará al cabo de dos horas?. ¿Qué otros datos necesitas?.

II) En una estación costera se observa, en una pantalla de radar, a un barco , A, que se mueve con una velocidad constante de 10 nudos.

a) ¿Crees que con este número hay suficiente información?. ¿Qué otros datos necesitas?.




b) una flecha, ¿te servirá para representar esta velocidad?. ¿Por qué?.

c) Utilizando la escala 1 cm. : 5 nudos y teniendo en cuenta que el barco viene del NO hacia la estación de radar (recuerda la Rosa de los Vientos del problema B-1), dibuja una flecha representante de esta velocidad.



Nota: En la discusión del problema anterior, seguramente habrán surgido muchos criterios distintos sobre lo que es un desplazamiento y lo que quiere decir desplazarse de la misma manera. Para unificar criterios, entenderemos por desplazamiento en el plano, cualquier movimiento que nos traslade EN UNEA RECTA desde un punto $P_1$ hasta otro $P_2$.

Diremos que dos desplazamientos son iguales, si tienen el mismo punto de origen y el mismo punto final, independientemente del tiempo que se ha tardado.

Los representaremos en el plano mediante una flecha (segmento orientado).

Así, en la figura de la izquierda, entenderemos que se está representando el desplazamiento que va del punto $P_1$ al $P_2$. Simbólicamente escribiremos $\overrightarrow{P_1P_2}$ .

Llamaremos longitud de un desplazamiento a la distancia que hay entre el origen y el final.

A-2) Un avión va desde Barcelona hasta Alicante a una velocidad constante de 600 km/h.

a) Representa con una flecha, en el plano adjunto, el desplazamiento efectuado al cabo de 30 minutos. (Nota: para calcular la distancia real entre Barcelona y Alicante, mide la del plano y fíjate en la escala).

B) Idem con el desplazameiento que tiene que hacer cuando faltan 100 km para llegar a Alicante.

c) Si va, a la misma velocidad, desde Alicante a Barcelona, dibuja una flecha que represente el desplazamiento hecho al cabo de 20 minutos de viaje.

B-6) Utilizando la Rosa de los Vientos del problema B-1 y la escala 1 cm. : 3 km. , dibuja tres flechas diferentes que representen a los siguientes vectores:

a) ( 9 km. , SO - NE , sentido hacia el NE )

b) (12 km. , N - S , hacia el S. )

B-7) a) ¿Qué se entiende por desplazamiento ?.

b) ¿Cómo se representan ?.

c) ¿De cuánta maneras queda determinado un desplazamiento?

d) ¿Cómo se suman ?.

e) ¿Puedes sumar dos flechas cualesquiera?.¿Por qué?.

f) ¿Qué es un vector?.

g) ¿Qué diferencia hay entre un vector y un desplazamiento?

h) ¿Qué diferencia hay entre una flecha que representa a un vector y una que representa un desplazamiento?.

EN EL PROBLEMA B-4 HACEMOS, DE UNA MANERA IMPLÍCITA, LA RELACIÓN DE EQUIPOLENCIA Y DEFINIMOS LOS VECTORES COMO LAS CLASES DE EQUIVALENCIA. LOS PROBLEMAS B-5 Y B-6 SIRVEN PARA APLICAR LA DEFINICIÓN DE VECTOR Y EL PROBLEMA B-7 ES UN RESUMEN DE LOS CONCEPTOS APARECIDOS, QUE SIRVE PARA RECORDARLOS Y VER SUS DIFERENCIAS.

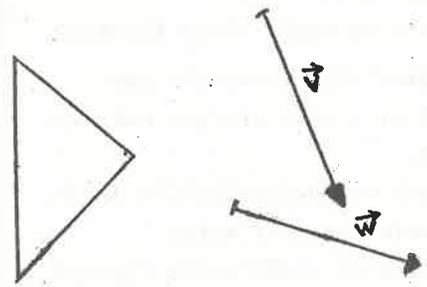
EN EL APARTADO C ; COMO PUEDE VERSE EN EL PROBLEMA C-1, INTRODUCIMOS LA SUMA DE VECTORES. EN EL MISMO PROBLEMA C-1 , Y EN OTROS POSTERIORES, EL ALUMNO COMPRUEBA LAS PROPIEDADES DE LA SUMA Y , DE UNA FORMA PARECIDA, SE INTRODUCE LA OPERACIÓN DEL PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UN VECTOR Y SUS PROPIEDADES. A CONTINUACIÓN HAY UNOS PROBLEMAS DE APLICACIÓN QUE PARA SER RESUELTOS POR EL ALUMNO, ÉSTE TIENE QUE APLICAR LOS CONCEPTOS Y PROPIEDADES ANTES INTRODUCIDOS.

EN EL APÉNDICE SIGUIENTE SE REPASAN LAS MAGNITUDES VECTORIALES QUE EL ALUMNO HA ESTUDIADO EN FÍSICA.



## C - OPERACIONES CON VECTORES

En este apartado estudiaremos la suma de vectores y sus propiedades, así como otra operación: el producto de un número por un vector.




C-1) a) Traslada el triángulo de la figura según el vector $\vec{v}$ . (En la figura tienes una flecha representante del vector $\vec{v}$ y cuando te piden que traslades el triángulo según $\vec{v}$ te indican que todos los puntos del triángulo se desplacen en la dirección y sentido de la flecha, una longitud como la de la flecha).

b) A continuación traslada el nuevo triángulo según $\vec{w}$ .

c) ¿Podríamos pasar del primer triángulo al tercero mediante un solo vector?. ¿Cuál?

d) Halla una flecha representante de este vector. Describe cómo la has obtenido.

e) A este vector lo llamaremos suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y lo escribiremos $\vec{v} + \vec{w}$ . Si $\overrightarrow{AA'}$ es un flecha representante de $\vec{v}$ , dibuja una flecha que represente a $\vec{w}$ con origen en A' y una flecha que represente a $\vec{v} + \vec{w}$ con origen en A . ¿Qué figura forman?.

f) ¿Cuál será el resultado de la suma permutando los vectores, es decir, $\vec{w} + \vec{v}$ ?. ¿Cómo se llama esta propiedad?.

g) Dados tres vectores cualesquiera $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ , efectua gráficamente las sumas $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ y $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ . ¿Son iguales los resultados?. ¿Cómo se llama esta propiedad?.

B-2) Si la formación de aviones de la figura viene de poniente con una de velocidad de 900 km/h.:

a) Al cabo de una hora, ¿qué posición tendrán? ¿Y al cabo de dos?.

b) Caracteriza los desplazamientos anteriores mediante flechas. (Utiliza la escala 1 cm. : 300 km.)

c) ¿Qué tienen en común estas flechas?.

B-3) Tres nadadores han atravesado una piscina de 25 m. , cada uno por una calle diferente.

a) Representa el desplazamiento de cada nadador mediante una flecha.

b) ¿Qué tienen en común estas flechas?

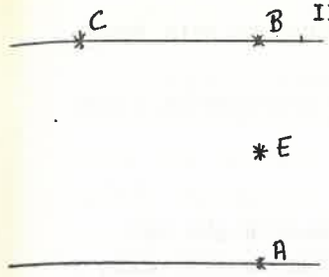
B-4) En los problemas B-1 y B-2 hemos visto que fijada una unidad de tiempo, todos los desplazamientos producidos por el viento tienen igual dirección, sentido y longitud, y que en el movimiento de una escuadrilla de aviones se puede considerar como diferentes desplazamientos hechos simultáneamente en la misma dirección, sentido y longitud; pero en el problema B-3 los nadadores han hecho desplazamientos que tienen la misma distancia, dirección y sentido, aunque no han tardado el mismo tiempo.

Por tanto, en cada uno de los problemas anteriores tenemos diversos desplazamientos que tienen la misma longitud, dirección y sentido (sin que sea necesario que se hayan hecho en el mismo tiempo).

Para estudiar estas situaciones utilizaremos una nueva herramienta: los vectores (la palabra vector viene de la palabra latina "vehere" que quiere decir transportar).

Un vector quedará caracterizado por una longitud, una dirección y un sentido. Por ejemplo, por el vector de longitud 3 km. , dirección S-N y sentido hacia el Norte, entenderemos los desplaza



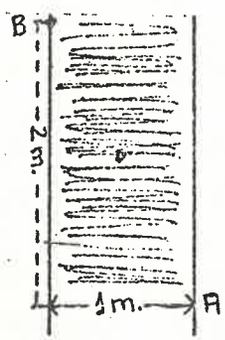



III) La figura adjunta representa a un río; en el punto E hay una barca que se deja llevar por la corriente. Un nadador se lanza desde el punto A, perpendicularmente a la corriente del río, para llegar al punto B.

a) Una persona situada en el punto A, ¿qué trayectoria observará?¿Y una persona que se encuentra en la barca?.

b) Si la velocidad del nadador es de 5Km/h., la amplitud del río 90 m. y el nadador ha llegado , al cabo de 1'08 mnt., a un punto, C, situado a 72 m. a la izquierda de B, ¿cuál ha sido la velocidad efectiva del nadador?.

c) Representa, utilizando flechas con origen en el nadador, las velocidades de la corriente del río, la debida al esfuerzo del nadador y la que has encontrado en el apartado anterior (escala 1 Km/h : 0'5 cm.) ¿Cómo están relacionadas?.




IV) La figura de la izquierda representa una cinta transportadora de 1 m. de anchura, vista desde arriba, que lleva una velocidad de 2 m/min.

Una persona pone en marcha un camión de juguete que va a una velocidad de 1 m/min., en una dirección perpendicular a la cinta.

a) Dibuja las posiciones que tendrá el camión en 1 minuto, medio y un cuarto. Marca la línea sobre la cual se desplazará el camión.

b) ¿Cuál es la velocidad efectiva?.

c) ¿El desplazamiento resultante es el mismo que si primero se hubiese realizado el desplazamiento de la cinta y después el del camión ?.

d) Situa el camión en un punto de la trayectoria y, con origen el camión, representa, utilizando flechas, las tres velocidades, [illegible] cm. ¿Cómo están relacionadas?.

V) a) ¿Qué quiere decir sumar velocidades?.

b) ¿Se puede aplicar la regla del paralelogramo para sumar velocidades?.

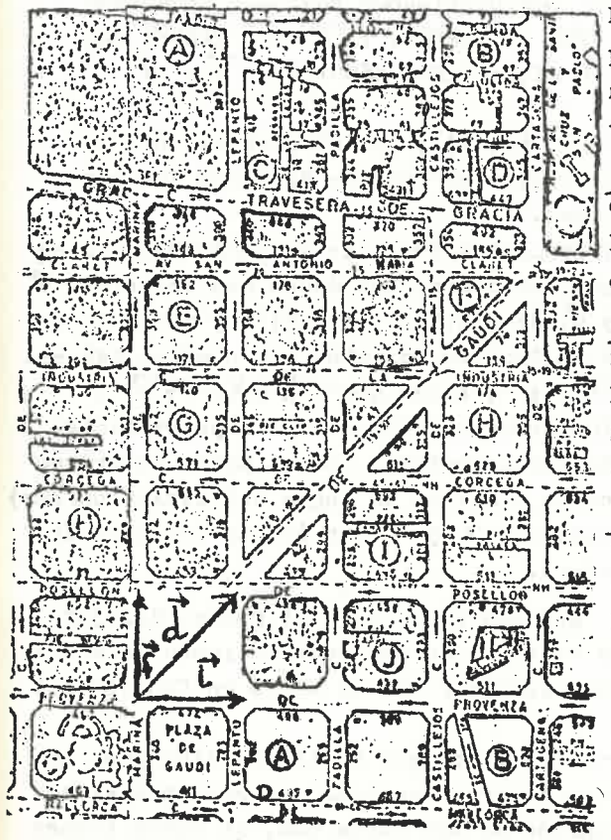
c) ¿Qué coincidencias encuentras entre la velocidades y los vectores?.

EN ESTOS PROBLEMAS SE INTENTA VER LA RELACIÓN QUE HAY ENTRE LOS VECTORES , ESTUDIADOS EN LOS APARTADOS ANTERIORES, Y LA VELOCIDAD. NO DECIMOS QUE LA VELOCIDAD ES UN VECTOR LIBRE , SINO QUE PRETENDEMOS QUE EL ALUMNO SE DÉ CUENTA QUE LA VELOCIDAD ES UNA MAGNITUD QUE SE COMPORTA COMO LOS VECTORES; ES DECIR, QUEDA DETERMINADA POR UNA DIRECCIÓN , UN SENTIDO Y UN NÚMERO , SE REPRESENTA POR FLECHAS Y SE SUMA POR LA REGLA DEL PARALELOGRAMO COMO LOS VECTORES. A CONTINUACIÓN, SE HACE UN ESTUDIO DE LAS FUERZAS , PARECIDO AL HECHO SOBRE LA VELOCIDAD , CON EL MISMO OBJETIVO.

## E - ARITMETIZACIÓN DE VECTORES

Lo que haremos en este apartado será "aritmetizar" los vectores. Con esto indicamos lo siguiente: hasta ahora hemos estudiado a los vectores desde un punto de vista geométrico, un vector viene determinado por una dirección, un sentido y una longitud que son propiedades geométricas. En este apartado veremos que un vector también se puede caracterizar por un par de números.

El primero que aritmetizó los vectores fue Lagrange en su libro Mecánica analítica, publicado en el año 1788.




E-1) La figura adjunta representa un trozo del plano de Barcelona. Dados los vectores $\vec{i}$ , $\vec{f}$ , $\vec{d}$ :

a) Expresa, en función de $\vec{d}$, el vector que va desde la Sagrada Familia hasta el Hospital de S. Pablo.

b) Escribe, en función de $\vec{f}$, el vector que va por la calle Marina desde la Sagrada Familia hasta la calle P.A.M. Claret.

c) Expresa, en función de $\vec{i}$, el vector que va por la calle Córcega, desde la calle Cartagena hasta el de Cerdeña.

d) Escribe $\vec{f}$, en función del vector que va desde el Hospital de S. Pablo hasta la calle Rosellón, andando por la calle Cartagena.

e) ¿Puedes escribir, en función de $\vec{d}$, el vector que va por la calle Padilla desde la calle Mallorca hasta la de Industria?.

f) ¿Puedes escribir, en función de $\vec{f}$, el vector que va por la calle Industria desde la calle Lepanto hasta la de Castillejos?.

g) Expresa, en función de $\vec{f}$ e $\vec{i}$, el vector que va por la avenida de Gaudí desde el Hospital de S. Pablo a la Sagrada Familia.

h) Idem para el vector $\vec{d}$

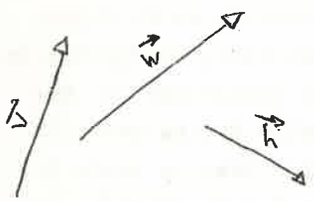
i) Idem para el vector que va desde la calle Marina hasta la de Cartagena por la calle Industria.

j) Escribe los tres vectores de los apartados g), h) e i) en función de $\vec{f}$ i $\vec{d}$.

k) Idem en función de los vectores $\vec{d}$ e $\vec{i}$.

LOS APARTADOS a), b), c), d), e) Y f) DEL PROBLEMA E-1 Y LOS PROBLEMAS E-2 Y E-3 LOS UTILIZAMOS PARA QUE EL ALUMNO DESCUBRA LO SIGUIENTE : "DOS VECTORES , V Y W , TIENEN LA MISMA DIRECCIÓN SI, Y SOLO SI, PODEMOS ESCRIBIR $\vec{V} = \lambda\vec{W}$

E-6) En los apartados g), h), i) y j) del problema E-1 y en el E-5 hemos escrito un vector en función de otros dos que tienen diferentes direcciones.




a) Demuestra que esto se puede hacer siempre, es decir, que dados dos vectores, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, de distinta dirección y otro vector h cualquiera, existen dos números reales, $\lambda$ y $\mu$ , tales que $\vec{h} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ . (Sugerencia: dibuja tres representantes de estos vectores con el punto de origen común y aplica la regla del paralelogramo)

b) Justifica gráficamente que $\lambda$ y $\mu$ son únicos (utiliza la figura del apartado anterior).

E-7) En el problema E-3 has visto que, si puedes dibujar los representantes de dos vectores en una recta (tienen la misma dirección), entonces puedes escribir uno de ellos en función del otro.

De la misma manera, has visto que si tienes dibujados en el plano los representantes de tres vectores, siempre puedes escribir uno de ellos en función de los otros dos, si éstos tienen distintas direcciones y son diferentes del vector cero.

Decimos que, en la recta, un único vector (diferente de cero) forma una base y que, en el plano, dos vectores diferentes



diferentes de cero y con direcciones distintas forman una base. Llamaremos dimensión al número de vectores de una base.

a) ¿Cuál es la dimensión de la recta?

b) Dibuja dos vectores del plano que formen base y dos que no.

EN LOS PROBLEMAS E-8, E-9, E-10 y E-11 SE DEFINEN LAS COMPONENTES DE UN VECTOR Y SE COMPRUEBA QUE SON ÚNICAS RESPECTO A UNA BASE, QUE CAMBIAN AL VARIAR LA BASE Y QUE ES IMPORTANTE EL ORDEN DE ÉSTAS. SE BUSCAN LAS COMPONENTES DE LOS VECTORES DE UNA BASE Y DEL $\vec{0}$ Y SE OBSERVA QUE RELACIÓN HAY ENTRE LAS COMPONENTES DE $\vec{V}$ , $\vec{W}$ Y $\vec{V} + \vec{W}$ Y LAS DE $\vec{V}$ Y $\lambda\vec{V}$ .

LOS PROBLEMAS E-12, . . . , E-17 SON DE CONTEXTO MATEMÁTICO EN LOS QUE SE VE RÁPIDAMENTE QUE SE TIENEN QUE APLICAR LOS CONCEPTOS ESTUDIADOS ANTERIORMENTE.

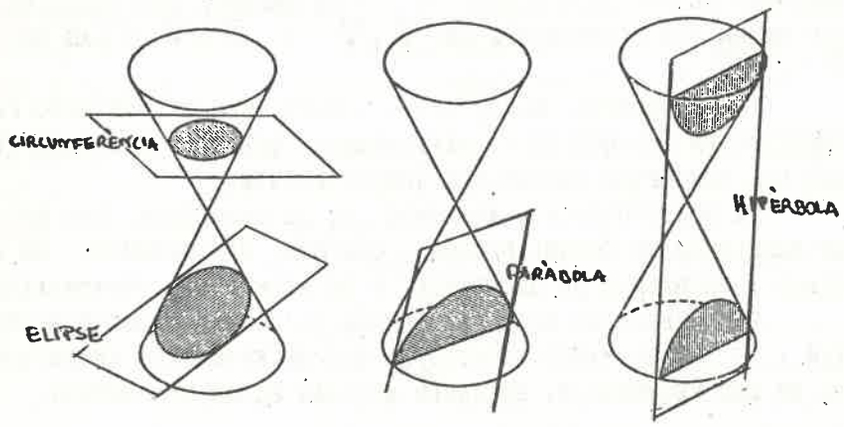
A CONTINUACIÓN , APARTADO F, SE RESUELVEN UNA SERIE DE PROBLEMAS DE CONSOLIDACIÓN , QUE SON, BÁSICAMENTE, DE DOS TIPOS : PROBLEMAS DE GEOMETRÍA Y DE MAGNITUDES VECTORIALES.

PARA RESOLVER ESTOS PROBLEMAS EL ALUMNO TIENE QUE OBSERVAR : 1º , EL MARCO TEÓRICO, EL QUE HA ESTUDIADO ANTERIORMENTE EN LOS VECTORES, Y, 2º SABER APLICAR ESTOS CONCEPTOS.

## CAPITULO II: GEOMETRÍA ANALITICA

### A - INTRODUCCIÓN

Durante la primera mitad del siglo XVII nació una rama completamente nueva de las matemáticas: "La Geometría Analítica", que estableció un nexo de unión entre las curvas del plano y las ecuaciones algebraicas con dos incógnitas, que anteriormente se estudiaban por separado. Los griegos, hace 2000 años ya estudiaban algunas curvas del plano como: circunferencias, elipses , hipérbolas, parábolas, etc.. que eran llamadas cónicas porque podían obtenerse por la intersección de un cono y un plano tal como se puede ver en la figura:




Por otra parte, las ecuaciones algebraicas con dos incógnitas, como,por ejemplo, $2x + 3y - 1 = 0$ , no se consideraban importantes debido a que tenían infinitas soluciones (si damos el valor $x = 0$, $3y - 1 = 0$ , $y = 1/3$ , por lo que $x = 0$, $y = 1/3$ es una solución de esta ecuación; y así, si vamos asignando valores a la $x$ , obtendremos infinitas soluciones de esta ecuación).

Fue la geometría analítica la que hizo ver la conexión que hay entre estas dos cuestiones. Su aparición no fue accidental, la transición en Europa a los nuevos métodos de producción requirió el progreso de todas las ciencias. Durante el siglo XVI, en todas las ramas de las ciencias naturales se habían acumulado datos empíricos y perfeccionado los instrumentos de observación; por lo que, en lugar de las teorías escolásticas ya anticuadas se empezaron a crear otras nuevas.



El rápido desarrollo de la navegación de altura necesitaba urgentemente conocimientos mas avanzados en astronomía y mecánica; de la misma manera, la guerra iba incorporando los avances de la mecánica. De los nuevos conocimientos destacaremos:

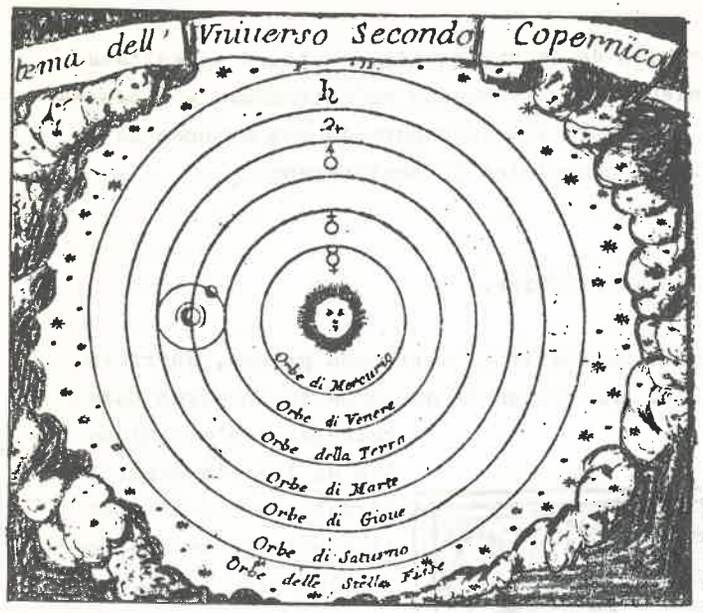
1) La nueva concepción astronómica.

Claudio Ptolomeo, matemático y astrónomo griego, escribió hacia el año 150 J.C. unlibro en el que daba la fórmulas para calcular los movimientos de los planetas. Las fórmules se basaban en la hipótesis de que todos los planetas giraban en trajectorias circulares alrededor de la Tierra.

El sistema aquí representado es el cerrado y circular realizado por Ptolomeo: la Tierra se encuentra inmovil en el centro, rodeada por las esferas del agua, el aire y el fuego: por las siete esferas que contienen las órbitas de los planetas Luna, Mercurio, Venus, Sol, Marte, Jupiter y Saturno): por el firmamento de las estrellas fijas, por el noveno cielo y por el cristalino (el primer móvil). Fuera de todos ellos se encuentra el Empireo, motor de vida y movimiento del entero sistema: y en el fondo, los mismo en un sentido espacial que espiritual, el infierno.

A medida que se fueron acumulando observaciones celestes, los cálculos matemáticos se hicieron cada vez mas complicados, por lo que los científicos empezaron a dudar de la validez del sistema de Ptolomeo.

Copérnico publicó en 1543 "De Revolutionibus Orbium Celestium" , exponiendo la tesis que los planetas giran en círculo alrededor del centro de la órbita de la Tierra, aproximadamente donde está el Sol, pero sin dudar de




de la perfección de los movimientos circulares de los planetas.

Kepler perfeccionó las teorías copernicanas en su libro "Astronomia nova" (1609), exponiendo sus dos primeras leyes sobre el movimiento planetario:

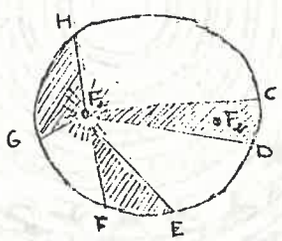
a) los planetas se mueven alrededor del Sol en elipses, no en círculos, siendo el sol uno de sus focos.

b) Los planetas no se mueven uniformente; sino de manera que, si se trazase una línea desde cualquiera de ellos al Sol, esta línea pasaría a través de zonas de áreas iguales en la elipse en iguales periodos de tiempo.

En su "Harmonia mundi" (1619) enunció su tercera ley sobre el movimiento planetario:

c) El cuadrado del tiempo que necesita un planeta para recorrer su órbita alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media que lo separa del Sol

PRIMERA LLEI DE KEPLER: Trajectòria elíptica, amb el Sol un dels seus focus



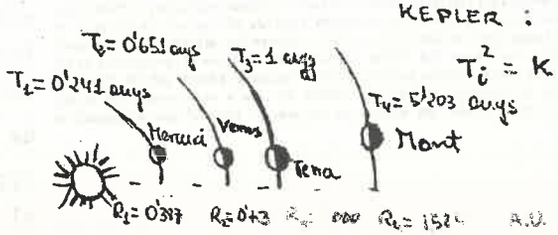

SEGONA LLEI DE KEPLER:

$CDF_1 = EFF_1 = GHF_1$

(en iguals intervals de temps)

TERCERA LLEI DE KEPLER:

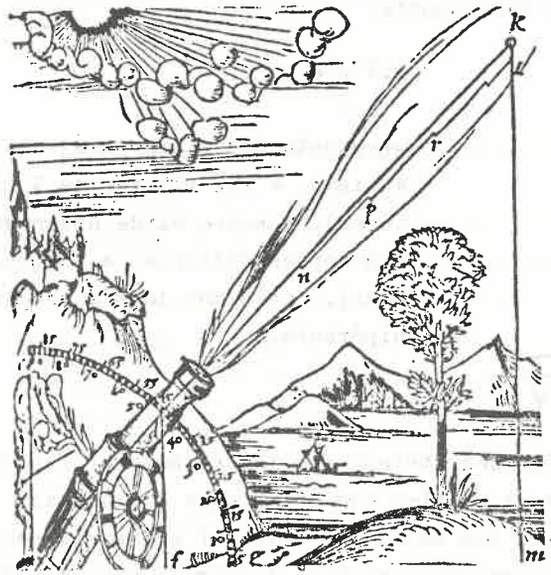
$T_i^2 = K R_i^3$

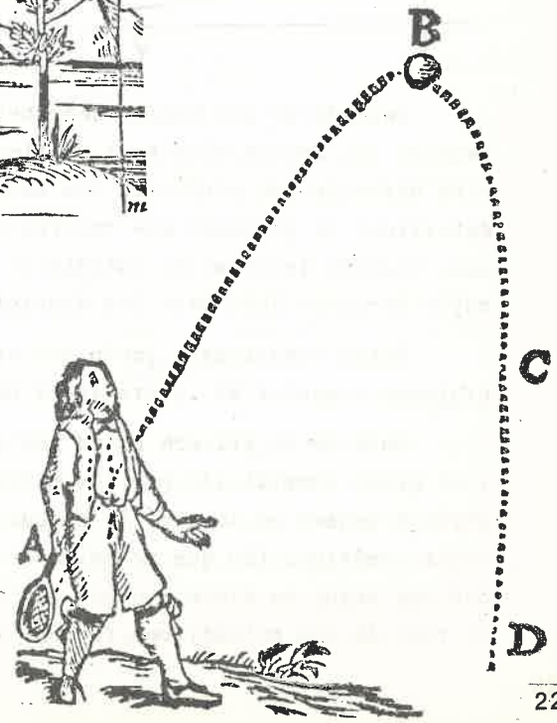



Estas leyes hicieron olvidar definitivamente la concepción aristotélica del movimiento perfectamente circular de los cuerpos celestes así como la astronomía de Ptolomeo.

2) El tiro de un proyectil.

En la figura 1 podemos observar la ilustración del concepto aristotélico de la trajectoria de un proyectil, concepción que pervivió hasta que Galileo, en el siglo XVI, descubrió que un proyectil describe una parábola, como se ilustra en la figura 2.

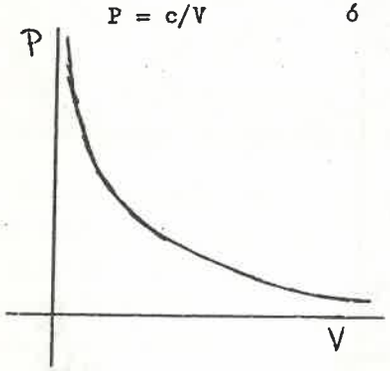




3) La ley de Boyle-Mariotte.

Una propiedad esencial y característica de la materia en estado gaseoso, es su gran compresibilidad. Esta propiedad, aunque ya era conocida en la antigüedad, fue estudiada por primera vez desde un punto de vista cuantitativo por Robert Boyle en Inglaterra y por el abad Mariotte en Francia. Boyle en 1622 y Mariotte en 1679 comprobaron, cada uno por su parte, que: " A temperatura constante , el volumen ocupado por una masa gaseosa es inversamente proporcional a la presión que soporta."

$P = c/V$ ó $P.V = c$




Representando, sobre el eje de abcisas, a los valores de V (volumen), y sobre el de ordenadas los correspondientes a P (presión), obtenemos la rama de una hipérbola.

Después de que Kepler descubriera que los planetas giran alrededor del Sol en elipses y Galileo que una piedra lanzada al aire describe una parábola, fue necesario calcular estas elipses y determinar la parábola que recorre una bala disparada por los cañones. También interesó el estudio de las hipérbolas que la ley de Boyle-Mariotte daba para las distintas temperaturas.

Estas cuestiones, junto con otras que no hemos mencionado, hicieron aumentar el interés en el estudio de las curvas del plano.

Durante la primera mitad del siglo XVII, en los primeros años , un grupo constituido por los matemáticos más importantantes empezaron a pensar en la idea de estudiar las curvas del plano con métodos numéricos (lo que normalmente se llama Geometría Analítica). Los que mejor se dieron cuenta de la posibilidad de crear una nueva rama de las matemáticas fueron: Pierre Fermat, consejero del



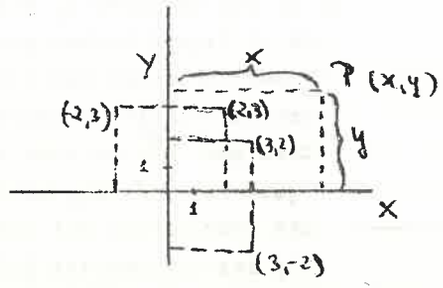
parlamento de la ciudad de Toulouse y matemático famoso en todo el mundo y el conocido filósofo René Descartes. Este está considerado como el principal creador de la geometría analítica y escribió el gran tratado filosófico : "Discurso del método para dirigir correctamente la razón y buscar la verdad en las ciencias con aplicaciones a la Dióptrica, Meteorología y Geometría".

La última parte de este trabajo, titulada "Geometría" y publicada en el año 1637, contiene una exposición bastante completa, aunque no muy clara, de la teoría matemática que desde aquella época se conoce por "Geometría Analítica".

## B - LOS DOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE DESCARTES

Descartes deseaba crear un método que pudiera aplicarse en la resolución de todos los problemas de la geometría; es decir, que suministrase un método general de resolución. La teoría de Descartes se basa en dos conceptos: el de las coordenadas y el de representar en forma de curva a cualquier ecuación albraica con dos incógnitas, utilizando para esto el método de las coordenadas.

### I PRIMER CONCEPTO FUNDAMENTAL DE DESCARTES. Coordenadas de un punto: "Aritmetización de puntos"




Por coordenadas de un punto , Descartes entendía lo siguiente:

"por un punto cualquiera, O, del plano se trazan dos rectas perpendiculares (llamadas ejes de coordenadas). Un punto P, del plano, viene determinado por un par de números (x , y); donde el

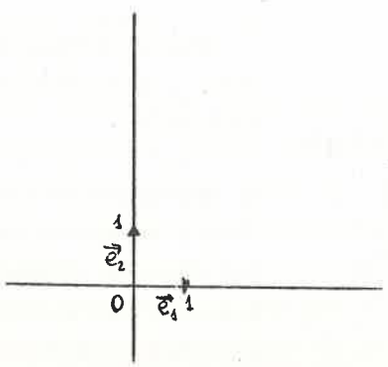
primero, x (llamado abcisa del punto), nos da la distancia de P al eje de las Y, y el segundo número, y (llamado ordenada del punto), nos da la distancia de P al eje de las X. Estas distancias se cogen con su signo correspondiente; por ejemplo, (-2, 3) y (2, 3), (3, 2) y (3, -2), etc... Es punto de intersección de los ejes de coordenadas, es decir, el que tiene coordenadas (0, 0) se llama origen. Con la introducción de las coordenadas (llamadas cartesianas en honor de Descartes) se consigue "la aritmetización del plano" y así en vez de determinar un punto geométricamente sólo tendremos que dar un par de números ordenados; y, recíprocamente, al dar un par de números ordenados estamos dando un punto. (Se supone que estos conceptos no son totalemnte nuevos para ti).

Lo que haremos a continuación será relacionar la aritmetización de puntos del plano con la de vectores que estudiaste en el tema anterior.

## RELACIÓN ENTRE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS Y LAS BASES: SISTEMAS DE REFERENCIA

B-1) a) En el sistema de coordenadas cartesianas de la figura dibuja el punto P= (2, 3).

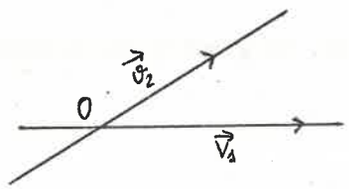
b) Dibuja la flecha de punto final en P , si su origen es el de coordenadas.




c) Si los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ de la figura forman una base, encuentra las componentes del vector representado por $\overrightarrow{OP}$ en esta base. ¿Qué relación hay entre las coordenadas del punto P' y las componentes del vector representado por $\overrightarrow{OP}$?.



Nota: Fijar un sistema de coordenadas, es decir, dar unos ejes y una unidad en cada eje, equivale a fijar un punto, O, y dar una base de los vectores del plano. Generalmente, estos ejes son perpendiculares y la unidad es la misma en cada eje por lo que los vectores de la base $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ son de la misma longitud y perpendiculares. Pero esto no tiene porque ser así; sino que tan solo hace falta dar un punto como origen de coordenadas y una base cualquiera para que cualquier punto del plano quede determinado por un par de números, como puedes ver en el siguiente problema. Siempre que nos den un punto como origen y una base de vectores, diremos que tenemos un <u>sistema de referencia</u>.




B-2) a) En el sistema de referencia de la figura, dibuja los siguientes puntos:
A=(2, 3); B = (-1, 2); C=(0,0)
D= (1/3, -1); E = (-2, -1/2)

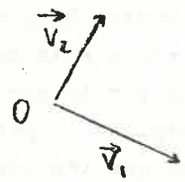
b) Idem con el sistema de referencia: (O , $\vec{u}_1$ , $\vec{u}_2$)

c) Elige en sistema de referencia (O , $\vec{e}_1$ , $\vec{e}_2$) y un punto, P, cualquiera. Halla sus coordenadas.

d) Define coordenadas de un punto en un sistema de referencia.

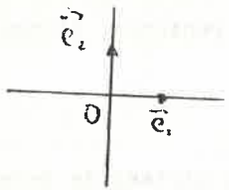
e) ¿Las coordenadas de un punto varian al cambiar la base? ¿Y al variar el punto de origen ?.

B-3) a) Contesta, sin dibujar previamente, en que cuadrante está el punto A(1, -3).



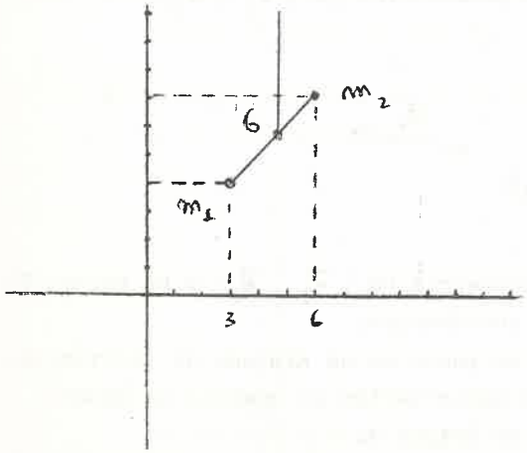

b) ¿En qué cuadrantes puede estar un punto si su abcisa es positiva?.

c) ¿Qué coordenadas tiene el punto final del vector $-5\vec{v}_1$, cuando el origen es el punto O ?.




B-4) Dados los puntos A (0, 0); B (1, 2) y C (4, 3). ¿Cuáles tienen que ser las coordenadas del punto D para que el cuadrilátero ABCD sea un paralelogramo?.

B-5) Dibuja los puntos A (4, 1) y B (5, 5) y busca las coordenadas del punto medio del segmento AB.



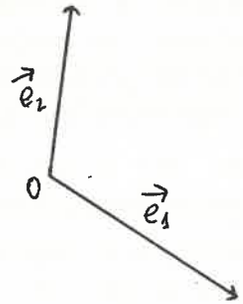

B-6) La figura de la izquierda representa a una varilla que tiene en los extremos dos masas, $m_1$ de 3 unidades y $m_2$ de 2 .

Está en equilibrio mediante un hilo que la sostiene por el punto G. ¿Cuáles son las coordenadas de G?.





B-7)




a) ¿Qué es un sistema de coordenadas?.

b) ¿Cuáles son las coordenadas del origen?.

c) ¿Qué es un sistema de referencia?.

d) ¿Qué diferencias hay entre un sistema de coordenadas y un sistema de referencia?.

e) ¿Cómo están relacionadas las coordenadas del punto P y las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ ?

f) ¿Cómo definirías las coordenadas de un punto en un sistema de referencia?.

g) ¿Son únicas?.

h) Si cambiamos la base, ¿varían las coordenadas del punto?.

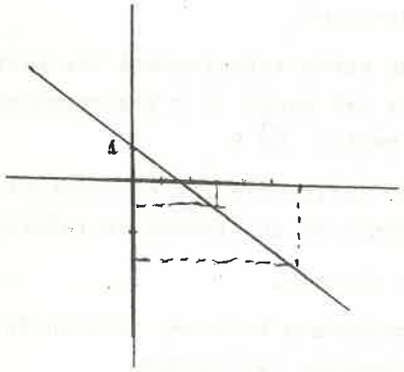
i) ¿Y si cambiamos el origen de coordenadas?.

II) SEGUNDO CONCEPTO FUNDAMENTAL DE DESCARTES. "Comparación de las ecuaciones con dos incógnitas y las curvas del plano".

Antes de Descartes, cuando se planteaba una ecuación algebraica con dos incógnitas; por ejemplo, $2x + 3y = 3$, se decía que el problema era indeterminado, ya que era imposible determinar estas incógnitas desde la mencionada ecuación; podía asignarse cualquiervalor a una de las incógnitas; por ejemplo, $x = 6$, y, una vez sustituida en la ecuación, obtener una ecuación de primer grado con una incógnita (en el nuestro ejemplo, $12 + 3y = 3$) que, en general, tiene solución (en este caso $y = -3$). Cada valor de x, arbitrariamente elegido, con el hallado para y , verifican la ecuación dada. ($6.2 + 3(-3) = 3$ ). De esta manera se decía que

una ecuación indeterminada no tenía interés.

Descartes consideró la situación desde un punto de vista diferente. Propuso que, en una ecuación con dos incógnitas, la x fuese considerada com la abcisa de un punto y la y correspondiente como su ordenada. Si se dan distintos valores a la incógnita x, y, para cada uno de estos valores, se calcula la correspondiente y , se obtiene un conjunto de puntos que constituyen una curva.



En el caso $2x + 3y = 3$, si empezamos a dar valores, obtenemos:

para $x = 0$ $y = 1$, punto $(0, 1)$
" $x = 3$ $y = -1$, " $(3,-1)$
" $x = 5$ $y = \frac{-7}{3}$, " $(5,-7/3)$
" $x = 6$ $y = -3$, " $(6, -3)$

Representando estos puntos (y otros) se puede comprobar que la curva , en este caso, es la línea recta de la figura.
(Se considera a la recta como la curva más simple).

De esta manera, cada ecuación algebraica con dos incógnitas está relacionada con una curva totalmente determinada en el plano, que representa a la totalidad de los puntos, cuyas coordenadas verifican dicha ecuación.

Y, recíprocamente, a cada curva del plano le corresponde una ecuación algebraica con dos incógnitas.

A continuación, utilizando lo que hemos estudiado en los vectores, haremos lo siguiente:

1) Estudiaremos la curva del plano más simple: la recta. Buscaremos distintas ecuaciones que verifican los puntos de de una recta.



2) Buscaremos la ecuación que cumplen los puntos de una circunferencia.
3) Idem para una parábola.
4) " " " elipse.
5) " " " hipérbola.

En este libro desarrollaremos el apartado 1) y en libros posteriores 2), 3), 4) y 5).

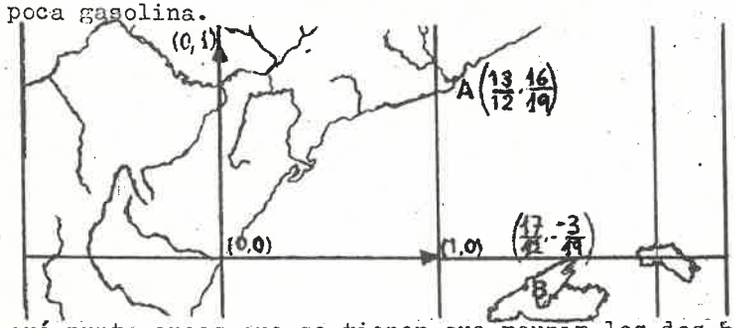
DESPUÉS DE ESTA INTRODUCCIÓN,QUE SE DA A LOS ALUMNOS, PARA EMPEZAR LA GEOMETRÍA ANALÍTICA HACEMOS UN ESTUDIO DE LAS ECUACIONES DE LA RECTA Y DE LA INCIDENCIA Y PARALELISMO DE RECTAS. A CONTINUACIÓN, HAY UNOS PROBLEMAS DE APLICACIÓN QUE PARA SER RESUELTOS POR EL ALUMNO ÉSTE NECESITA APLICAR LOS CONCEPTOS ANTES INTRODUCIDOS. MAS TARDE, SE RESUELVEN LOS PROBLEMAS DE CONSOLIDACIÓN QUE PARA RESOLVERLOS EL ALUMNO TIENE QUE OBSERVAR : Iº QUE EL MARCO TEÓRICO ADECUADO ES EL ESTUDIADO ANTERIORMENTE Y 2º SABER APLICAR ESTOS CONCEPTOS.

## APÉNDICE I : PERPENDICULARIDAD

COMO CONSIDERAMOS QUE PARA EL ALUMNO NO TIENE SENTIDO LA SEPARACIÓN ENTRE EL ESTUDIO DEL PARALELISMO EN 2º DE BUP Y EL DE LA PERPENDICULARIDAD EN 3º , SEGUIMOS CON UN ESTUDIO EN EL QUE SE ESTUDIA ESTO ÚLTIMO. PARA MOTIVAR ESTE ESTUDIO EMPEZAMOS CON PROBLEMAS COMO EL SIGUIENTE :

En este apéndice estudiaremos perpendicularidad de rectas y vectores; para hacerlo consideraremos un sistema de ejes perpendiculares con los vectores de la base de igual longitud.

A-1) La figura adjunta representa a una parte del Mar Mediterráneo. Un yate está realizando un viaje desde Port de Sóller (17/12 , -3/19) hasta Barcelona (13/12 , 16/19) . Un barco de pescadores situado en el punto (3/2, 1/2) en el que hay una persona enferma envia un mensaje, por radio, al yate preguntándole si puede recoger al enfermo y llevarlo a Barcelona. El yate no quiere desviarse de su ruta y el barco de pescadores tiene poca gasolina.




a)¿En qué punto crees que se tienen que reunir los dos barcos?
b) Halla la ecuación de la recta que indica la ruta del yate.
c) Determina analíticamente la ecuación de la recta que tiene que seguir el barco de pescadores. (En caso de que no lo pueas hacer hacer analíticanete, hazlo gráficamente). Escribe el dato que te falta para resolverlo analíticamente.
d)¿Cuáles son las coordenadas del punto en donde uno de los [illegible] al otro?

# UNA INTRODUCCION A LA GEOMETRIA EUCLIDEA

por:


Manuel González Dávila
Catedrático del I.B. Mixto 3
de Jerez de la Frontera (Cádiz)

Juan Miguel Molina Bravo
Agregado del I.B. Mixto 3
de Jerez de la Frontera (Cádiz)

Carlos Barrios Calvo
Catedrático de Matemáticas del
I.B. "Manuel de Falla" de Puerto
Real (Cádiz)

## UNA INTRODUCCION A LA GEOMETRIA EUCLIDEA

I. Uno de los problemas centrales de la enseñanza de la Geometría elemental es el paso de la Geometría Vectorial o Afín a la Geometría Euclídea, es decir la introducción del concepto de distancia en el Plano, o en el Espacio.

El método usualmente empleado para desarrollar la Geometría Afín, consiste en la construcción del Espacio vectorial $V^3$ de los vectores libres y despues el Espacio Afín sobre él. Sin entrar a discutirlo ahora, lo que no cabe duda es que la mayoría de las definiciones y conceptos que allí se introducen son aceptados por el alumno como "naturales", bien por su utilización en Física (Operadores entre vectores...) bien por su visualización gráfica sencilla (bases, coordenadas, ecuaciones de la recta,...). De este modo la Geometría aparece como lo que es; como algo "natural" y hasta cierto punto experimental. En una palabra: Se ven las razones de todas las reglas del juego.

Por el contrario, para introducir el concepto de distancia el método usualmente empleado es hablar primero del Producto escalar: Un concepto que no cumple ninguno de los requisitos anteriores: Es una operación "extraña" ( v.w. es un número real) con algunas propiedades difíciles de aceptar o visualizar -- (v.v>0) y sobre todo, se pierde el "tono" llevado hasta ese momento pues para el alumno " ya empiezan a aparecer cosas raras". No se pueden negar las enormes ventajas de este enfoque pero hay que eliminar sus inconvenientes pedagógicos.

El método que proponemos pretende solucionar estos inconvenientes, llegando al producto escalar y a la distancia, sin que aparezcan cosas (excesivamente) raras. Suponemos que el alumno opera mínimamente en el Espacio Vectorial, (básicamente el concepto de base y coordenadas).



2. Una vez desarrollada la Geometría Afín, el paso siguiente es intentar dar una definición de "lo que mide un vector"; lo que habitualmente se cono e como "norma" de ese vector y se denota $\|\vec{v}\|$.

3. De la idea intuitiva de "medida" y del comportamiento del módulo de un vector frente al producto por números reales surgen las siguientes condiciones que debe cumplir una "norma":

2.1) $\|\vec{v}\| \in \mathbb{R}$

2.2) $\|\vec{0}\| = 0$ (2.2.1)

$\|\vec{v}\| > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$ (2.2.2)

2.3) $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \, \|\vec{v}\| \Rightarrow \|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ (2.3.2)

(2.3.1)

4. La condición 2.1) nos centra el problema en establecer una aplicación de $V^3$ en $\mathbb{R}^+$; de momento la única relación entre vectores y números reales que tenemos es la utilización de coordenadas respecto a una base:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \qquad CB = V^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{v} \longrightarrow (x, y, z) \mid \vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

Como esta aplicación, que asocia a cada vector sus coordenadas, es un isomorfismo, podemos transportar el problema a $\mathbb{R}^3$ e intentar resolverlo allí, con lo que la solución será relativa a la base B que se haya tomado. En definitiva se trata de encontar una expresión para $\|(x, y, z)\|$, o sea una cierta función $\| \, \| : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

5. Las funciones más sencillas son siempre los polinomios. Por eso, buscamos una fórmula de tipo polinómico. Examinaremos algunos.

5.1) Polinomios Constantes.

La expresion $\|(x, y, z)\| = K$ debe rechazarse, pues 2.2) obligaria a K=0 en su primera parte y no se cumpliría la segunda.

5.2) Polinomios de primer grado.

La expresión $\|(x,y,z)\| = ax+by+cz+d$ se vería condicionada de la siguiente forma:

$\|(0,0,0)\| = 0 \Rightarrow d=0$

$\|(x,y,z)\| = \|(-x,-y,-z)\| \Rightarrow d=0, b=0$ y $c=0$

(basta probar con las ternas (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1)) con lo que volveremos a $\|(x,y,z)\| = 0$, expresión que ya fué rechazada.

5.3) Polinomios de segundo grado.

Probemos con $\|(x,y,z)\| = ax^2+by^2+cz^2 dxy+exz+fyz+gx+hy+jz+k$

$\|(0,0,0)\| = 0 \Rightarrow K=0$

$\|(x,y,z)\| = \|(-x,-y,-z)\| \Rightarrow g=0, h=0$ y $j=0$, probando para (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1). $\|(x,y,z)\| > 0$ para $(x,y,z) \neq (0,0,0) \Rightarrow a>0$, $b>0$ y $c>0$, probando nuevamente con (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1).

Luego quedará: $\|(x,y,z)\| = ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz$

$a>0$, $b>0$ y $c>0$

De todas formas, en aras de una mayor simplicidad de la expresión podríamos optar por:

$\|(x,y,z)\| = ax^2+by^2+cz^2$ con $a>0$, $b>0$ y $c>0$ con lo que se cumpliriá inmediatamente que $\|\vec{v}\| > 0$ si $\vec{v} \neq 0$

Este punto es el más delicado. Se podría plantear la cuestión de si es posible hacer tal elección, es decir tomar directamente $d=e=f=0$.

Esto se puede resolver viendo que, efectivamente, al final de todo el proceso obtenemos una norma que cumple las condiciones descritas.

Otra forma de solucionar este problema es comenzar en 5.3) con polinomios de 2º grado más sencillos que el polinomio general, por ejemplo con polinomios del tipo: $ax^2$, $by^2$ o $cz^2$, que habría que desechar por (2.2.2). Probaríamos después con $ax^2+by^2+cz^2$ que cumple 2.1) y 2.2) siempre que $a>0$, $b>0$ y $c>0$, pero no se cumpliría (2.3.1); de aqui se podría pasar al polinomio general y mediante el estudio precedente se llegaría a que debe de ser de la forma $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz$ para que se cumpla 2.1), 2.2) y 2.3.2), pero tampoco se cumpliría 2.3.1) pues

$\|\lambda(x,y,z)\| = \|(\lambda x, \lambda y, \lambda z)\| = \lambda^2(ax^2+bx^2+cz^2+dxy+exz+fyz)$

mientras que:

$|\lambda|\,\|(x,y,z)\| = |\lambda|\,(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz)$

En definitiva el problema es el mismo que si utilizamos $ax^2+by^2+cz^2$ unicamente, puesto que esta expresión cumple las mismas condiciones que $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz$ y falla también en la misma condición, es decir en (2.3.1).

Naturalmente todo esto se puede plantear de un modo experimental y buscar otras posibilidades, pero en principio es razonable que al elegir el polinomio lo hagamos de tal forma que sea el más sencillo posible y así facilitar las operaciones.

Hasta ahora tenemos $\|\vec{v}\| = \|(x,y,z)\| = ax^2+by^2+cz^2$ con $a>0$, $b>0$, $c>0$

Se trata ahora de intentar que se cumpla (2.3.1)

6. De las expresiones:

$\|\lambda(x,y,z)\| = \lambda^2(ax^2+by^2+cz^2)$

$|\lambda|\,\|(x,y,z)\| = |\lambda|\,(ax^2+by^2+cz^2)$

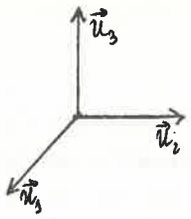
Se deduce que hay que hacer desaparecer el cuadrado de $\lambda$, lo que se puede conseguir de varias formas, utilizando la raiz cuadrada por ejemplo:

a) Tomar $\|(x,y,z)\| = \sqrt{ax^2+by^2+cz^2}$

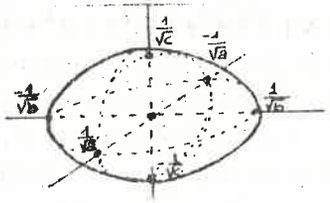
b) Tomar $\|(x,y,z)\| = a\sqrt{x^2} + b\sqrt{y^2} + c\sqrt{z^2} = a|x| + b|y| + c|z|$

c) Tomar $\|(x,y,z)\| = \sqrt{ax^2+by^2} + c|z|$

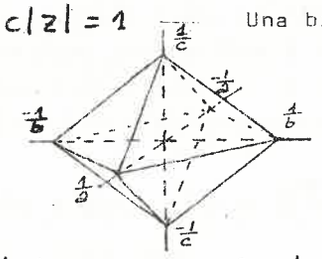
La forma de optar entre todas ellas puede ser "pintar" la "esfera" de radio 1, es decir el conjunto $\{\vec{v} \mid \|\vec{v}\| = 1\}$

Dibujando cada caso para una base:  se obtiene:

a) $\sqrt{ax^2+by^2+cz^2} = 1 \Leftrightarrow ax^2+by^2+cz^2=1$ Un elipsoide.

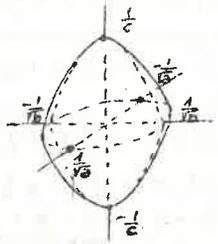


b) $a|x|+b|y|+c|z|=1$ Una bipiramide.



c) $\sqrt{a\cdot x^2+b\cdot y^2}+c|z|=1 \Leftrightarrow a\cdot x^2+b\cdot y^2-c\cdot z^2+2c|z|=1$

Dos hiperboloides elípticos.





Parece preferible escoger la fórmula a).

Además, teniendo en cuenta que $\|\vec{u}_1\| = \|(1,0,0)\| = \sqrt{a}$, en
$\|\vec{u}_2\| = \|(0,1,0)\| = \sqrt{b}$
$\|\vec{u}_3\| = \|(0,0,1)\| = \sqrt{c}$

cuanto elijamos valores para a,b,y c tendremos fijadas las unidades de medida en cada una de las tres direcciones marcadas por los vectores de la base B, por ello parece "natural" tomar las normas de estos vectores como unidades de medida para cada dirección, lo que equivale a tomar a=b=c=1, con lo que resulta para cualquier otra dirección $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y el elipsoide del caso a) es ahora una esfera.

Esta última elección se justifica perfectamente, pues si lo que pretendemos es estudiar un espacio homogéneo e isotropo, lo lógico es tomar todos los vectores de la base con la misma "norma", y así las unidades de medida serán las mismas en todas las direcciones.

En definitiva hemos obtenido:

$$\|\vec{v}\| = \|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Esta formula cumple las propiedades 2.1), 2.2) y 2.3) y también se puede probar que cumple la desigualdad triangular $\|\vec{v}+\vec{w}\| \leq \|\vec{v}\|+\|\vec{w}\|$ ; con lo que tendremos que cumple todas las propiedades que caracterizan a una norma en el sentido matemático del término.

Nótese la fuerte dependencia de las "normas" de los vectores respecto a la base B fijada de antemano.

Más concretamente, lo que hemos hecho es construir infinitas normas, una para cada base.

Es corriente insistir, cara al alumno, en que desde el punto de vista matemático no hay ninguna privilegiada. En [illegible] las definidas cumplen la desigualdad triangular

y son por tanto normas en sentido topológico, aunque algunas den resultados que chocan a la "intuición física", por ejemplo, bastaría tomar la base B con sus vectores de "longitud física" distinta. Con la norma definida en esa base mediante $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, resulta que todos sus vectores tienen normas iguales a la unidad.

Precisamente, comprender que la aparente "anormalidad" de estos resultados se debe a que se tiene una forma prefijada de medir es distinguir lo que es accesorio de lo que es esencial, es decir COMPRENDER. Hay que tener en cuenta que al decir que los vectores de la base no pueden medir igual, se está implícitamente diciendo " respecto a la medida física". Pero es que ésta es una más y no tiene nada de especial desde el punto de vista matemático. En general la unidad de medida que resulta no es una unidad de longitud física. O dicho de otra forma, no hay manera de decir que la unidad de longitud de un eje es igual a la unidad de longitud del otro. Además el hecho de que haya infinitas "longitudes" plantea una diferencia clara con lo Afín donde solo hay una forma de sumar vectores, etc. Es decir solo hay una geometría afín del plano y hay infinitas euclídeas aqunque todas ellas las estudiemos conjuntamente. Cada concepto introducido depende pués de la norma (o del producto escalar)introducido. La métrica no es algo inherente al plano sino algo que añadimos para estudiarlo. Con la noción de ortogonalidad ocurre igual: Hay infinitas, y la noción natural de perpendicularidad es sólo un ejemplo de ellas. El alumno debe comparar esta situación con la noción de paralelismo en el Plano Afín.

El problema que se plantea ahora es la introducción del concepto de producto escalar a partir de lo hecho. Pero es preciso insistir en que el producto escalar no es una idea natural, sino un concepto algebraico que simplifica enormemente los cálculos. Por tanto es a la hora de operar donde

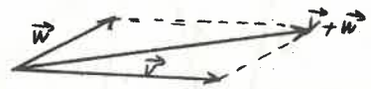


deberá aparecer. En general, las consideraciones geométricas deben servir para colocar el problema en una buena situación y los cálculo para acabar de resolverlo.

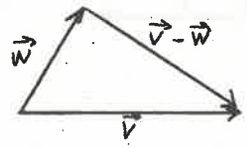
7. Se trata ahora de estudiar la introducción del producto escalar.

Independientemente de como se haga esto, si se ha llegado a alguna de las expresiones:

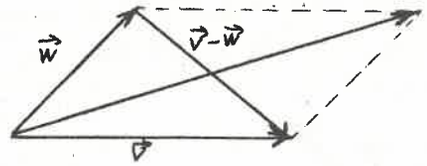
a) $\vec{v}.\vec{w} = 1/2\ (\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2)$




b) $\vec{v}.\vec{w} = 1/2\ (\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}-\vec{w}\|^2)$




c) $\vec{v}.\vec{w} = 1/4\ (\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}-\vec{w}\|^2)$



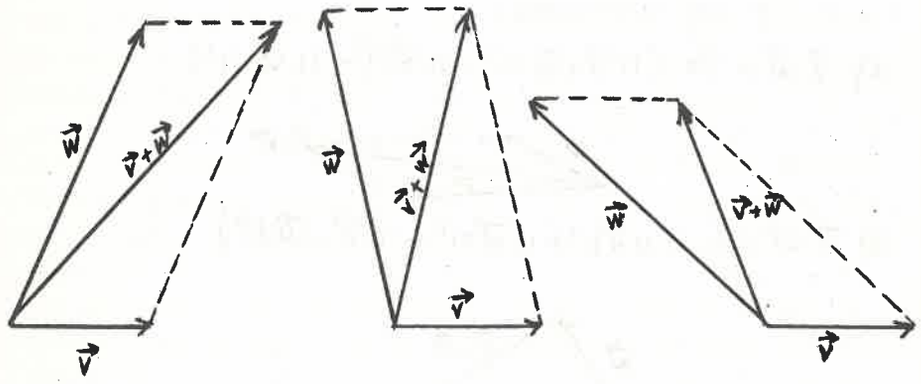

entonces basta hacer operaciones para obtener:

$$\vec{v}.\vec{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

A continuación se indica como justificar las fórmulas a) y b) anteriores. Naturalmente, las dos justificaciones son perfectamente intercambiables.

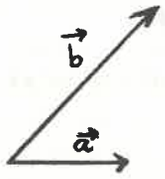
8. Justificación de la fórmula a)

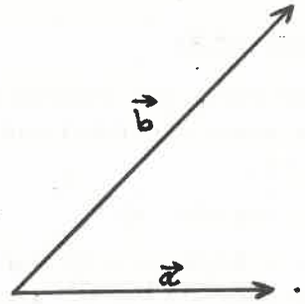
Se trata de estudiar la abertura formada por dos vectores, y en particular tratar de encontar un número que sirva para medir dicha "abertura".




Con arreglo a los dibujos anteriores (en todos los cuales $\|\vec{v}\|$ y $\|\vec{w}\|$ permanecen fijas ) parece que lo que "mide la abertura" es $\vec{v}+\vec{w}$ o más propiamente $\|\vec{v}+\vec{w}\|$ . Cuánto mayor es esta norma, menor es la "abertura".

No sirve $\|\vec{v}+\vec{w}\|$ como "medida de la abertura" puesto que los dos pares de vectores siguientes:




tienen la misma "abertura" pero $\|\vec{v}+\vec{w}\| < \|\vec{a}+\vec{b}\|$

Lo que se trata ahora es intentar encontrar una fórmula que "mida la abertura" independientemente de las normas de los pares de vectores que definen dicha "abertura".

Un intento elemental para solucionar este problema puede ser restar las normas, elevándolas previamente al cuadrado para suprimir la raiz, que es siempre molesta.

Es decir, se puede intentar utilizar como "medida de la abertura" el número siguiente:

$$\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2$$

Esto también depende de $\|\vec{v}\|$ y de $\|\vec{w}\|$ . Definitivamente se obtiene una "medida de la abertura" con la fórmula:

$$\frac{\|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

Si se sustituye $\vec{v}$ por $\lambda\vec{v}$ y $\vec{w}$ por $\mu\vec{w}$, se comprueba que la fórmula permanece constante, es decir que depende solo de la "abertura".

Entonces definimos:

$$\vec{v}.\vec{w} = \tfrac{1}{2}\left( \|\vec{v}+\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 \right)$$

(El factor $\tfrac{1}{2}$ se justifica por razones de simplificación de cálculo posteriores).

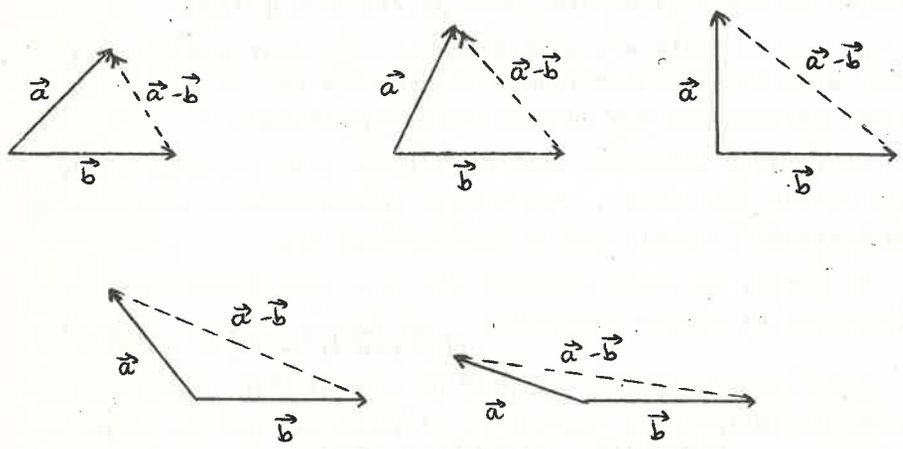
$$\cos(v,w) = \frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$ o equivalentemente:

$$\vec{v}.\vec{w} = \|\vec{v}\| . \|\vec{w}\| . \cos(\vec{v},\vec{w})$$

Quedan así justificadas estas dos importantes fórmulas, a partir de las cuales se puede continuar con el desarrollo clásico de estas cuestiones.

9. Justificación de la fórmula b)

El punto de partida es análogo al anterior: Asociar al ángulo formado por dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ algo que nos permita calcular dicho ángulo.




Al observar los triángulos de la figura de arriba, en todos los cuales $\|\vec{a}\|$ y $\|\vec{b}\|$ permanecen fijos, se observa algo claramente:

Conforme aumenta el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$, aumenta $\|\vec{a} - \vec{b}\|$. Parece pués natural pensar que haya alguna relación entre dicho ángulo y expresiones en las que aparezcan $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ y $\|\vec{a} - \vec{b}\|$.

Vamos pués a asociarle al ángulo que formen $\vec{a}$ y $\vec{b}$ una demostración que no utilice el producto escalar: consiste en aplicar dos veces el teorema de Pitágoras.

Basta con comparar ahora esta expresión del teorema del coseno con la definición de producto escalar para obtener:

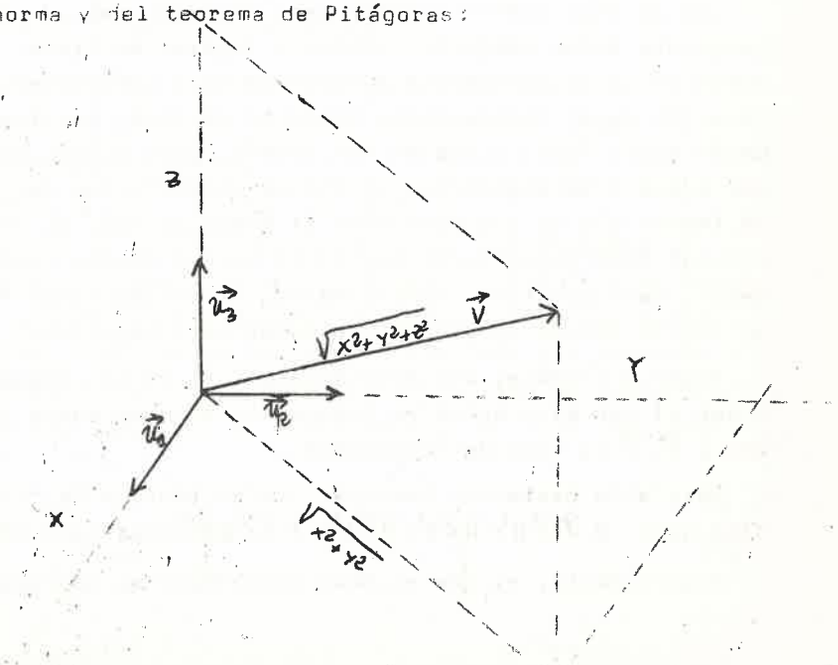
$$\vec{a} . \vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|. \cos(\text{ang}(\vec{a},\vec{b}))$$

Esto nos permite por fin calcular ang $(\vec{a},\vec{b})$.

10. Naturalmente surge la cuestión de como relacionar todo esto con la "Geometría clásica". Excepto en el punto 8, todo lo dicho vale para cualquier base. Utilizando una en particular, se obtiene una traducción de la "Geometría Euclídea clásica" a este lenguaje.

En efecto con una base donde los vectores "midan una unidad de longitud" y " formen dos a dos ángulos rectos" resulta:

10.1) La longitud de un vector (lo que se llama su módulo) coincide con la norma. Esto sale directamente de la definición de norma y del teorema de Pitágoras:



una de esas expresiones, que vamos a llamar producto escalar. ¿Cual de ellas?. Como tenemos muchas para escoger, vamos a exigirle a nuestra expresión algo más. Lo más "importante" que le puede pasar a dos vectores desde el ángulo que forman es que sean perpendiculares. Vamos pués a exigirle a nuestra expresión que nos permita distinguir claramente los vectores que son perpendiculares.

¿Hay alguna expresión de este tipo que nos permita ver facilmente si los vectores son perpendiculares. Si. El teorema de Pitágoras nos dice que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, entonces $\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 0$. Esta expresión nos muestra claramente cuando dos vectores son perpendiculares y ademas está claramente relacionada con el ángulo que formen $\vec{a}$ y $\vec{b}$ : a mayor valor del ángulo, menor valor de la expresión. Esto es suficiente justificación para definir provisionalmente: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$

Los alumnos pueden empezar ya a trabajar con la relación existente entre producto escalar y ángulo. No tienen un dominio de la trigonometría suficiente para comprender que la relación mayor ángulo-menor producto escalar, implica una unión entre ambos a traves del coseno, pero pueden observar por ejemplo lo siguiente: si dos vectores forman ángulo agudo (menor que el que formarían si fuese recto), su producto escalar será mayor de lo que es si forman ángulo recto, es decir, será positivo. Análogamente, si dos vectores forman un ángulo obtuso su producto escalar será negativo.

Vamos a intentar ver exactamente cual es esa relación, y a ver si con ello somos ya capaces no sólo de saber cosas de ang ( $\vec{a}, \vec{b}$ ), sino de calcularlo.

Para ello basta con observar que el teorema del coseno nos dice que: $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos(\text{ang}\,(\vec{a},\vec{b}))$

Naturalmente, si los alumnos desconocen el teorema del

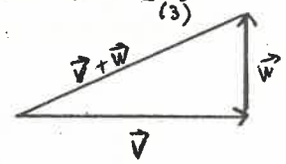
10.2) Dos vectores son ortogonales si y solo si son perpendiculares. Es decir, con esta base la noción Geométrica de perpendicularidad se traduce en la noción algebraíca de ortogonalidad que es mucho más operativa.

En efecto

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow |\vec{v}+\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 \overset{(3)}{\Longleftrightarrow}$$

$\Longleftrightarrow$ El triángulo:




es rectángulo. $\Longleftrightarrow$

$\overset{(4)}{\Longleftrightarrow}$ $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares.

(1) Formula a) del punto 7
(2) 10.1
(3) Teorema de Pitágoras
(4) Definición de triángulo rectángulo.

11. Con todo lo hecho se justifican las definiciones de norma, producto escalar, coseno y la utilización de unas bases especiales que con los resultados que se obtienen posteriormente permiten analizar la estructura euclídea del espacio; o del plano pues todo lo desarrollado es válido en este último caso sin más que útilizar 2 coordenadas en lugar de tres.

# LA GEOMETRIA AFIN DEL PLANO

por:

Manuel González Dávila
Catedrático de Matemáticas del
I.B. Mixto 3 de Jerez de la Frontera

Rafael Hernández García
Catedrático de Matemáticas del
I.B. Mixto de Alsagua (Navarra)

## LA GEOMETRIA AFIN DEL PLANO

Para abordar el estudio de la Geometría del plano, se suele comenzar con los vectores fijos, que no se definen y simplemente se describen a través de ideas intuitivas como módulo, dirección y sentido. Se construye después, por medio de la relación de equipolencia, el espacio vectorial $V^2$ de los vectores libres del plano y se continúa con el estudio del plano afín relacionando adecuadamente puntos y vectores.

Parece existir un acuerdo general entre los profesores de Matemáticas en el bachillerato en cuanto a los inconvenientes didácticos de este sistema.

En primer lugar, resulta difícil que los alumnos comprendan el entramado subyacente a la construcción de $V^2$ mediante la relación de equipolencia. Se considera un éxito que simplemente se queden con la idea de que un vector se puede desplazar paralelamente a donde interese.

Habría que discutir también el hecho de que se pretenda hacer una construcción más o menos formal de la Geometría y se comienze utilizando directamente conceptos como "módulo","distancia","dirección","sentido", etc..

Estos 2 inconvenientes se suelen solucionar a veces comenzando directamente con el estudio de los vectores libres del plano, es decir afirmando la existencia de un espacio vectorial cuyos elementos llamados vectores se pueden dibujar en el plano en diferentes posiciones, obtenidas todas ellas mediante desplazamientos paralelos, con lo que en definitiva 2 vectores que se pueden superponer mediante desplazamientos paralelos son iguales.



Se útilize uno u otro sistema, existe la sensación de que a partir de este momento, es decir a partir de la introducción de los vectores en el plano, la geometría (que es o debe de ser algo natural y experimental) se convierte en algo inaccesible para la mayoría de los alumnos. Y las cosas se complican definitivamente cuando se continúa con cuestiones como dependencia e independencia lineal, bases, referencias, etc...

Y naturalmente, después de meses de estudiar la geometría del plano mediante vectores, si se pide a cualquier alumno que "pinte un plano", dibuja dos rectas que se cruzan , olvidándose con buen criterio, de todo el bagaje vectorial que se suponía que debería haber adquirido.

¿Qué es lo que ocurre?

En nuestra opinión y de acuerdo con las ideas generales sobre lo que debe ser la geometría, en todo este planteamiento hay 2 errores básicos:

1º) Utilizar desde el principio y de sopetón los vectores del plano, sin dar ninguna razón que justifique su introducción. El rechazo que se produce entre los alumnos vicia todo el desarrollo posterior y crea una situación mental entre los alumnos que es casi imposible de superar posteriormente.

2º) Nadie se imagina el plano como un conjunto de vectores. Los vectores no son un instrumento de descripción ni de definición del plano sino, a lo sumo, un instrumento de cálculo.

En definitiva todos los conceptos del plano deben ser introducidos naturalmente, poco a poco, mediante pequeños saltos que permitan que se acpte obviamente la necesidad y oportunidad de dicha introducción. Siempre tienen que tener respuestas, preguntas como:

¿Por que se hace eso?,¿Por que se define eso así y no de otra forma?, ¿Para que sirve tal cosa?, etc... Lo que quizás caracteriza a la geometría elemental es que se puede construir de tal forma que todas estas preguntas tengan respuestas e incluso que las respuestas puedan ser formuladas por los propios estudiantes.

Es preciso insistir en que los vectores no son algo inherente al plano, que se puede hacer la geometría sin ellos y que si por el motivo que sea conviene que aparezcan, debe de ser en el momento adecuado y preciso.

Hay una cierta tendencia últimamente a volver a la enseñanza clásica de la geometría analítica, donde se utiliza como instrumento básico los sistemas de ejes de coordenadas, es decir un par de rectas que se cortan. Este instrumento no provoca ninguna sensación de rechazo porque las rectas son algo natural del plano.

Lo que debemos pretender es construir toda la Geometría elemental a base de saltos lo más pequeños posibles y tratando siempre de justificarlos al máximo. Lo que creemos es que hay que evitar las definiciones por "Real Decreto" y "porque ya se verá en el futuro lo útil que es"; o por otra parte los engaños con premeditacion y alevosía "porque los muchachos no lo entenderían de otra forma". Si como decía H. Lebesgue: "La única enseñanza que un profesor puede dar es pensar delante de los alumnos", no nos queda mas remedio que hacerlo BIEN, delante de ellos, lo que implica su participación con claridad y rigor ( rigor de pensamiento, no necesariamente de exposición). En definitiva, con respeto a su capacidad intelectual en formación.



## GEOMETRIA DEL PLANO

### 1. El plano Afín

1.1 La primera cuestión que hay que estudiar en la Geometría del plano son las definiciones básicas. Estas definiciones explican las relaciones más sencillas entre los objetos que vamos a manejar. Los objetos quedan definidos única y exclusivamente por las relaciones básicas y el objetivo de la Geometría es deducir de estas relaciones otras generalmente más complejas.

Decimos Geometría porque los objetos de los que tratamos se refieren a ideas espaciales. Normalmente se trata de ideas espaciales perfectamente intuibles. Es decir, el espacio del que hablamos es el espacio de la experiencia.

1.2 El plano de la Experiencia.

(1.2.1) El plano es un conjunto $\pi$

A sus elementos los llamamos puntos.

En el plano podemos escoger tantos puntos como queramos, es decir Axioma 1.(A1) El plano es un conjunto infinito de puntos.

(1.2.2) Ahora tratamos de subconjuntos del plano. De los subconjuntos del plano los más sencillos son las rectas. ¿Por qué?. Siempre que nosotros nos referimos a una línea recta necesitamos 2 puntos de referencia:

"Tal avión vuela en linea recta desde A hasta B"
"Tal ciudad está en linea recta con A y B"

Esto quiere decir que solemos entender que una línea recta se conoce cuando nos dan 2 puntos ( A y B ) distintos de ella: podemos considerarla como un subconjunto sencillo del plano, porque es el mas fácil de determinar.

Enunciamos:

<u>Axioma 2.(A2)</u> Una recta D es un subconjunto del plano $\pi$ D es un conjunto infinito. $D \neq \pi$.

<u>Axioma 3.(A3)</u> Dados 2 puntos distintos del plano $\pi$, a, b existe una unica recta D(a,b) de tal manera que ambos puntos pertenecen a ella.

Resulta claro que realmente lo que hace el Axioma 3 es relacionar los puntos con las rectas y además esta relación es la que caracteriza a la recta.

Este aspecto puede resaltarse comparando esta propiedad y todas las que se enumeren respecto a las rectas, con las que se obtiene sustituyendo rectas por circunferencias u otras figuras y estudiando la validez de las propiedades enunciadas así.

Este es un ejercicio utilísimo a lo largo de toda la Geometría.

(1.2.3) Vamos a ver ahora un ejemplo de como se utilizan los axiomas, es decir un ejemplo de un teorema de la Geometría que estamos haciendo.

Sabemos que dados 2 puntos distintos hay una sola recta que pasa por ellos.

Si solo damos un punto (P) puede haber muchas rectas que pasen por él. Vamos a ver que de hecho podemos deducir de <u>A1,A2 y A3</u> que hay infinitas rectas que pasan por él.

<u>Teorema</u> Por un punto P del plano pasan infinitas rectas

<u>Demostración</u>

$\exists$ p' $\neq$ p por A1

$\exists$ una única recta $D_{pp'}$ que pasa por p y p' por A 3

$\exists$ p" $\notin D_{pp'}$ por A 2

Una única recta $D_{p'p''}$ que pasa por p' y p" por A 3



p $\notin$ Dp'p" pues si P $\in$ Dp'p" entonces por Axioma 3 Dp'p" = Dpp' pero p" $\notin$ Dpp'

Dado P hemos construido una recta que no pasa por P. Esta recta es Dp'p".

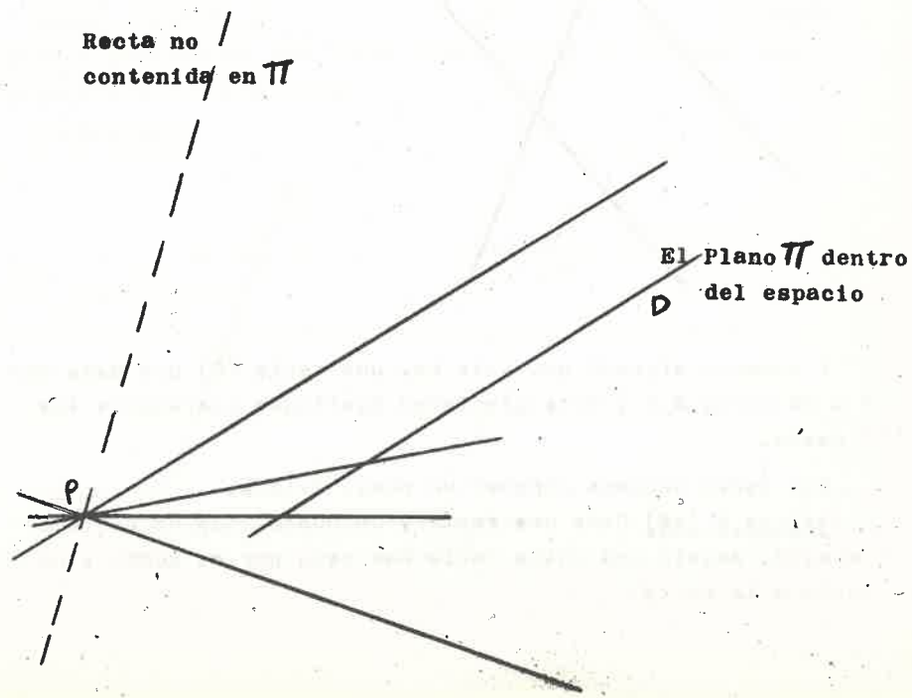
Ahora para cada punto de esta recta Q podemos conducir la recta Dpq que pasa por P. Según A2 y A3 hemos construidos infinitas rectas que pasan por P.

(1.2.4) Si se observan minusiosamente los axiomas. A1, A2 y A3 se vé que en ningun momento se caracteriza al plano. Lo único que se dice de él es que es un conjunto infinito.

Es decir, como todavía no hemos caracterizado al plano los axiomas A1, A2 y A3 pueden definir las rectas en otro espacio. Por ejemplo, todo lo dicho anteriormente se cumple en el espacio.

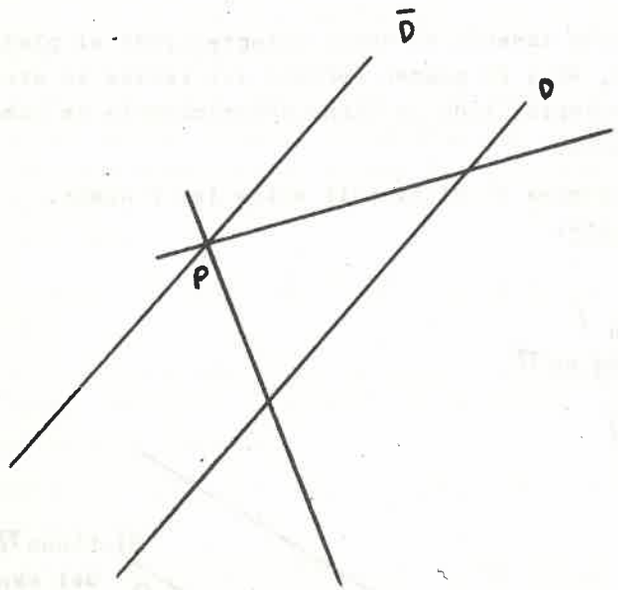
Tratamos entonces de distinguir entre los 2 casos.

<u>Intuitivamente</u>:



Sabemos que en $\pi$ hay una recta que no pasa por P, sea D. Y en consecuencia (1.2.3) hay infinitas rectas que pasan por P y cortan a D en el espacio también. La diferencia no está en las rectas que pasan por P y cortan a D sino en las rectas que pasan por P y no cortan a D.

En el espacio hay muchísimas más. En $\pi$ la situación es la siguiente:




Y podemos afirmar que solo hay una recta ($\bar{D}$) que pasa por P y no corta a D y esta propiedad distingue claramente los 2 casos.

Por tanto debemos imponer un nuevo Axioma.

Axioma 4 (A4) Dada una recta y un punto, que no pertenece ella, existe una única recta que pasa por el punto y no corta a la recta.



Es importante distinguir entre un razonamiento intuitivo como el anterior y un razonamiento deductivo como (1.2.3)

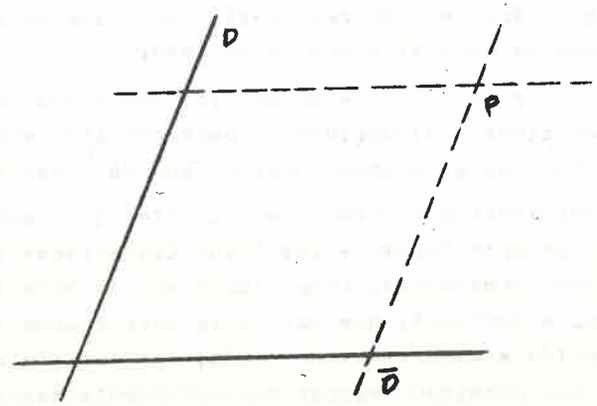
Y esta es una buena ocasión para hablar de la noción de demostración y su relación con el concepto de verdad en Matemáticas. Se aconseja la lectura de : Bourbaki, Nicolas. Elementos de historia de las matemáticas. Madrid. Alianza Editorial. 1976. En especial el apartado titulado: "La noción de verdad en matemáticas".

(1.2.5) 2 rectas en $\pi$ que no se cortan o que coinciden, suelen llamarse paralelas. Puede deducirse de A4, por ejercicio, que la relación "ser paralela" en el conjunto de rectas del plano $\pi$ es de equivalencia. Y cada clase es una dirección del plano.

(1.2.6) Sean ahora dos rectas D y $\bar{D}$ que se cortan.

Vamos a demostrar ahora que a cada punto del plano le podemos asociar de una forma única un par de puntos, uno pertenece a D y otro a $\bar{D}$.

En efecto:



(1) Cada punto P pertenece a una única recta paralela a D. (Utilícese A4).

(2) Cada recta no paralela a D corta a todas las paralelas a D (supongase lo contrario y utilícese que la relación de paralelismo es transitiva según se ha dicho en (1.2.5)).

La observación (2) implica que cada paralela a D determina un único punto en cualquier transversal a D (por ejemplo en $\bar{D}$).

Repitiendo el proceso con $\bar{D}$ en lugar de D resulta que cada punto P pertenece a una única paralela a $\bar{D}$ y determinar un único punto en D.

En definitiva hemos asociado a cada punto del plano un par único de puntos, uno en D y otro en $\bar{D}$.

Utilizando A4 se puede demostrar el recíproco y a partir de 2 puntos cualesquiera uno en D y otro en $\bar{D}$, obtenemos un único punto del plano.

Todo lo anterior se resume diciendo:

$$\pi = D \times \bar{D} \; ; \; \forall D, \bar{D} \quad D \neq \bar{D} \quad D \cap \bar{D} \neq \emptyset$$

Y además responde exactamente al proceso de localizar un punto en un plano. Tal como lo realizaría cualquier persona. (Por ejemplo como se hace el plano de un tesoro).

La igualdad anterior nos dice el sentido que tiene la frase " el plano tiene 2 dimensiones"; para nosotros eso significa: El plano es el producto cartesiano de 2 rectas.

(1.2.7) En los apartados anteriores lo único que hemos hecho es dar un aspecto formal a las ideas Geometricas que las personas usan normalmente. Estas ideas son la base de la Geometría que estudiamos, que por tanto corresponde con bastante perfección a nuestra experiencia; las definiciones que hemos dado nos permiten razonar con suficiente seguridad sobre nuestras ideas del plano. Esa es su utilidad, y ese proceso se le llama formalización del plano intuitivo.

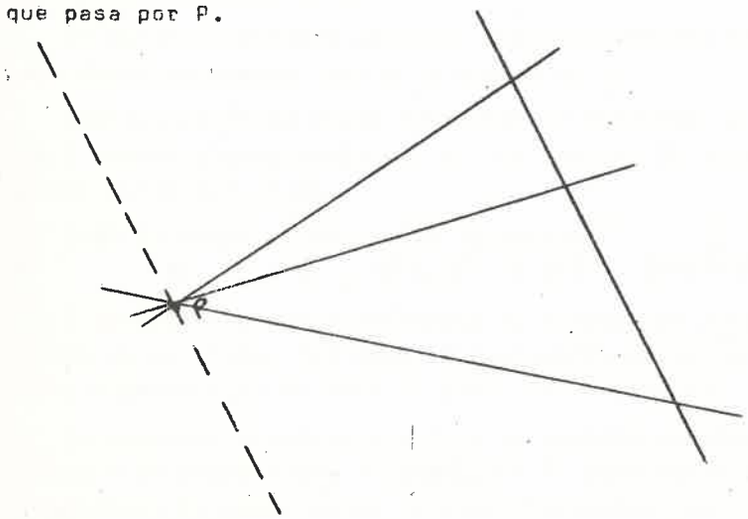
Debe quedar claro que no decimos que haya que demostrar todo, sino que poseemos un metodo que podemos "ensayarlo" todas las veces que lo necesitemos para estar seguros desde el punto de vista matemático de la certeza de lo que estamos haciendo.

En otras palabras, uno de los objetivos de la Geometría es la iniciación a la demostración como método de deducción lógica a partir de unos ciertos axiomas.

4. Hemos demostrado ya que por un punto P pasan infinitas rectas del plano. Mas aún, hemos obtenido estas infinitas rectas uniendo P con cada uno de los puntos Q pertenecientes a una recta r en la que no está P (Vease 1.2.3 ).

¿Son todas estas las rectas que pasan por P?

Se demuestra fácilmente que falta solo la paralela a r que pasa por P.




Es decir hemos determinado el conjunto de rectas que pasan por un punto P.

A lo largo de la Geometría surgen naturalmente preguntas de este tipo, como por ejemplo:

¿Cuantas rectas determinan 2 puntos?

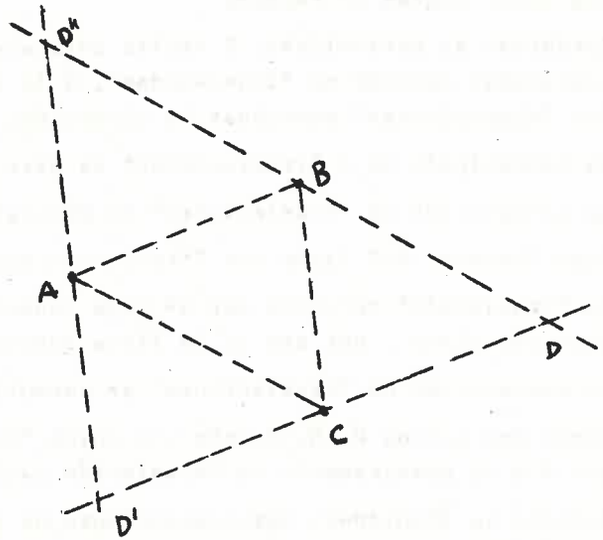
¿Cuantos triángulos determinan 2 puntos? ¿Y tres?

¿Cuantos cuadrilateros determinan 3 puntos? ¿Y cuatro?



En particular se puede plantear la siguiente cuestión:

¿Cuantos paralelogramos determinan 3 puntos no alineados A,B,C,?




La respuesta es 3. Son los paralelogramos ABDC, ABCD",AD'BC.

¿Como podemos "distinguir" los paralelogramos ABDC y ABCD'?

En el primero de ellos, "C es a D como A es a B" y en el segundo es lo contrario, es decir "C es a D como B es a A ".

Precisando más se puede decir que D se obtiene "trasladando C según AB" y D' " Trasladando C según BA ".

También parece que las traslaciones "según AB y según BA son opuestas".

Mediante unos cuantos ejercicios y suficientes dibujos se deben buscar propiedades que las "traslaciones" parece que deben cumplir. Por ejemplo:

a) Transformar puntos en puntos.

b) Son aplicaciones biyectivas.

c) Tranforman puntos alineados en puntos alineados, o lo que es lo mismo rectas en rectas.

d) Conservan el paralelismo; 2 rectas paralelas siguen siendo paralelas después de "trasladadas", o lo que es lo mismo las "traslaciones" conservan la dirección.

e) La composición de 2 "traslaciones" es otra "traslación"

f) La composición de "traslaciones" es asociativa.

g) Cada "traslación" tiene una "traslación opuesta".

h) La "traslación" definida por AA deja invariantes todos los puntos del plano y por eso se le llama identidad.

i) La composición de "traslaciones" es conmutitiva.

j) Dados dos puntos P, Q, existe una única "traslación" que lleva P a Q, precisamente la "traslación según PQ".

k) Excepto la identidad, las traslaciones no tienen ningún punto fijo.

l) La "traslación según AB "deja fijas globalmente a cualquier recta paralela a la que pasa por A y B.

En este momento debe plantearse como objetivo la obtención de una definición correcta de traslación que permita asegurarnos si las propiedades propuestas y otras por el estilo son ciertas o no.

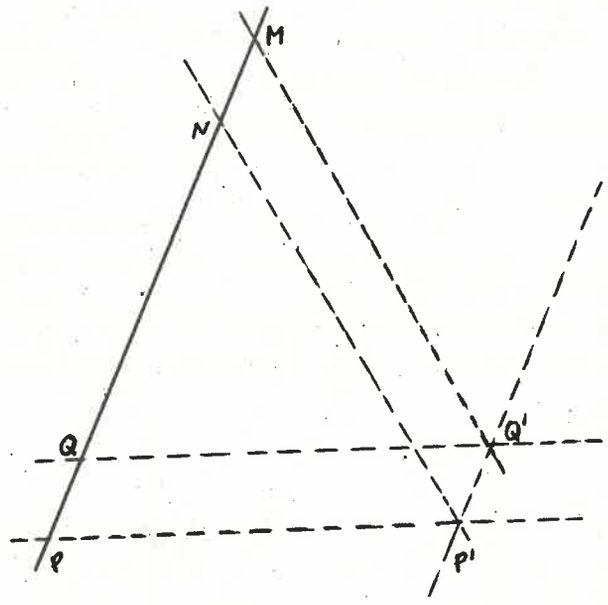
Lo que la traslación tiene de sencillo respecto a otras transformaciones es que conocida la imagen Q de un punto P, podemos conocer la imagen M de otro punto N. O dicho de otra forma: Una traslación T queda determinada dando un punto cualquiera y su imagen.

Dados P,Q = t(P) y N , ¿Cómo podemos calcular M = t(N) ?.

Intuitivamente debemos considerar dos casos.



2º caso P,Q y N están alineados

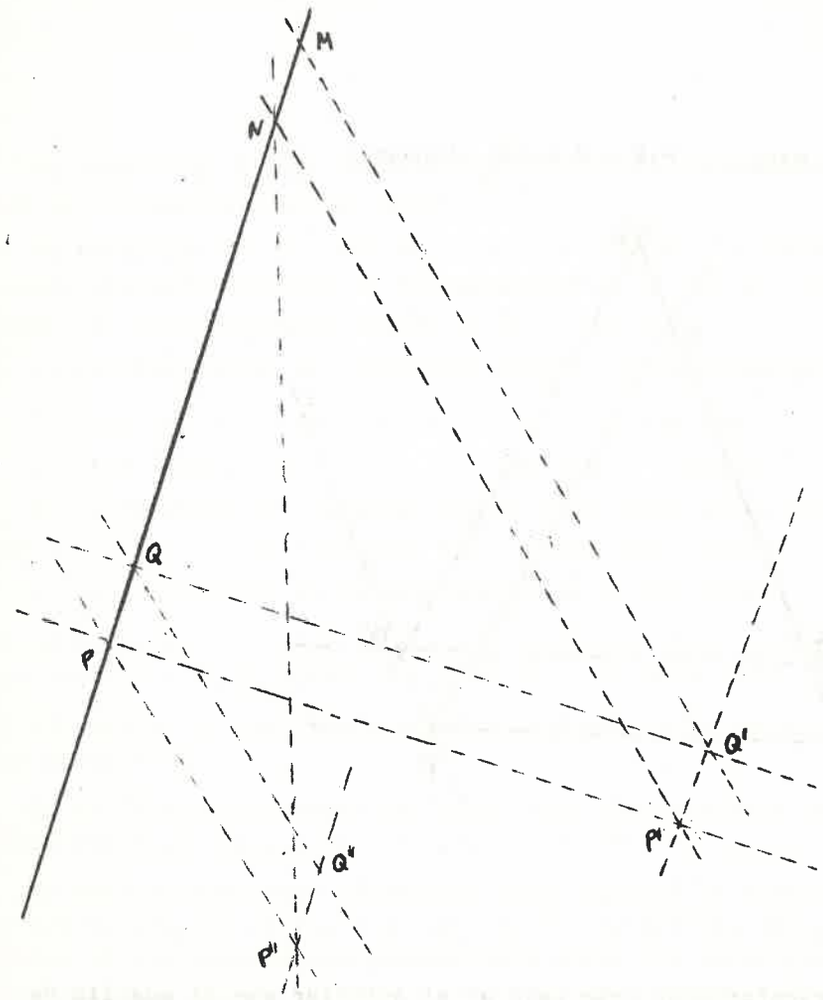



Transformamos este caso en el anterior con el auxilio de dos puntos P' y Q' , siendo Q' la traslación de P' según PQ.

Aquí lo que se trata de demostar es que el punto M no depende del par de puntos P' y Q' , escogidos como instrumento auxiliar.

Gráficamente la situación es la siguiente:

Si escagemos otro par de puntos P" y Q" , de tal forma que Q" sea la traslación de P" según PQ, entonces:




Una vez construido M a partir de los puntos P' y Q', se trata de demostrar que con el auxilio de los puntos P" y Q" se obtiene el mismo punto M, o lo que es lo mismo, - q e una vez construidos los paralelogramos PQQ'P', P'Q'MN, y PQQ"P", entonces el cuadrilatero P"Q"MN también lo es.

Intuitivamente "parece" que P"Q"Q'P' és un paralelogramo, dicho de una forma mas sencilla parece que se pueden "pegar" paralelogramos y se obtienen nuevos paralelogramos.



Si suponemos aceptado esto, entonces se tiene:

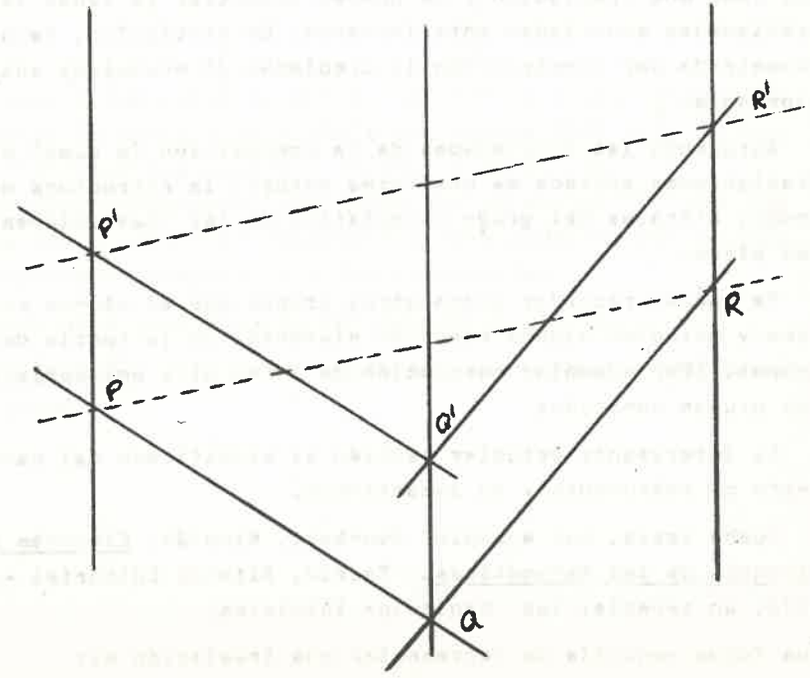
1º) P"Q"Q'P' es un paralelogramo.

2º) Como por construcción P'Q'MN era un paralelogramo, al "pegarlo" con P"Q"Q'P' resulta que P"Q"MN es un paralelogramo, que es lo que queríamos demostrar.

Pegar paralelogramos es un nuevo axioma que se enuncia como sigue:

<u>Axioma 5 (A5)</u> "Axioma de Desargues" (Primera parte)

Sean l,m,n tres rectas distintas paralelas.
Sean P,P' dos puntos de l; Q,Q' dos puntos de m y R,R' dos puntos de n. Suponemos además que DP'Q' es paralela a DP'Q' y que DQ'R' es paralela a DQ'R'. Entonces DP'R' es paralela a DP'R'



El Axioma enunciado se utiliza también en la demostración de algunas de las propiedades de las traslaciones y es fundamental en todo el desarrollo posterior.

Definitivamente podemos definir traslación:

<u>Una traslación</u> $t$ es una aplicación del plano en si mismo tal que $\forall$ A, B del plano el cuadrilatero AB t (B) t(A) es un paralelogramo; es decir: $D_{AB} \parallel D_{t(A)t(B)}$ y $D_{At(A)} \parallel D_{Bt(B)}$

O bien:

-Dados 2 puntos distintos P, Q, <u>la traslación que lleva P a Q</u> es la aplicación del plano en si mismo definida por

N $\longrightarrow$ M $\Longleftrightarrow$ P Q M N es un paralelogramo.

Naturalmente, falta afirmar que consideramos a la identidad como una traslación y se pueden demostrar ya todas las propiedades enunciadas anteriormente. En particular, hemos demostrado por construcción la propiedad j) enunciada anteriormente.

Agrupando las propiedades de la composición (o suma) de traslaciones aparece de una forma natural la estructura de grupo, a través del grupo conmutativo de las traslaciones del plano.

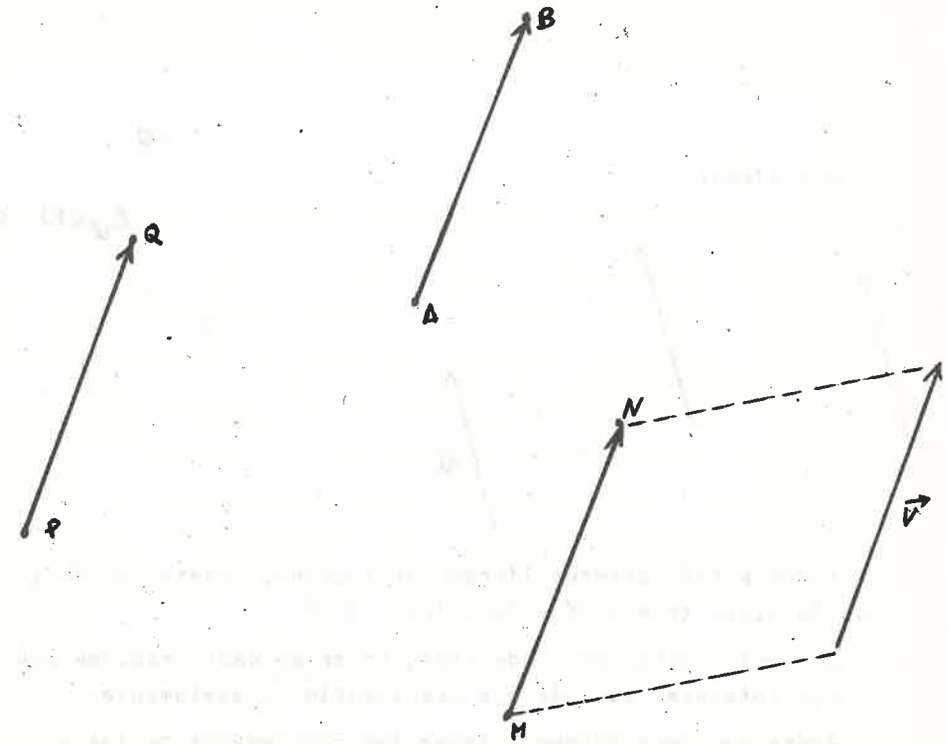
Se pueden recordar ahora otros grupos que el alumno conoce y estudiar alguna cuestión elemental de la teoria de grupos. (Por ejemplo: resolución de $a * x = b$) y aplicarla a los grupos conocidos.

Es interesante estudiar también el significado del concepto de estructura y su importancia.

Puede verse, por ejemplo: Bourbaki, Nicolás. <u>Elementos de historia de las Matemáticas</u>. Madrid, Alianza Editorial - 1976; en especial los capitulos iniciales.

Una forma sencilla de representar una traslación es:





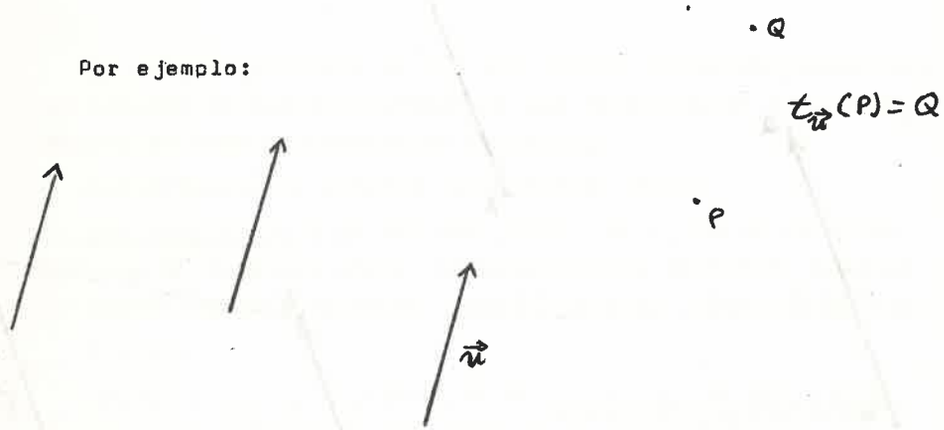

Todos estos pares de puntos definen la misma taslación; es decir la única traslación t que cumple t(P) = Q, es también la única que cumple t (A)=B, t(M)=N, etc.

Representamos esta traslación con un vector $\vec{v}$ que llamamos libre porque al desplazarlo paralelamente por el plano representa siempre la misma traslación.

Todo ello justifica la definición siguiente:

<u>Definición</u>: Un vector libre del plano es una traslación del plano.

Por ejemplo:




Todos estos vestores libres son iguales, puesto que definen la misma traslación, denominada $t_{\vec{u}}$

Un vector libre se puede representar en cada problema donde más interese, sin más que desplazarlo paralelamente.

Ahora conviene traducir todas las propiedades de las traslaciones. Gráficamente se ve muy bien que con este lenguaje conviene utilizar la notación aditiva y a la única traslación t que cumple t (P)=Q representarla con el vector $\overrightarrow{PQ}$.

Puede ser útil tambien representar $P = t_{\vec{u}}(Q)$ mediante $P + \vec{u} = Q$, De esta forma aparece la operación externa entre puntos y vectores que sirve para definir el plano afín.

$$+ : \Pi \times V^2 \longrightarrow \Pi$$

$$(P, \vec{v}) \rightsquigarrow Q = P + \vec{v} = t_{\vec{v}}(P)$$

Se obtiene una buena colección de ejercicios sobre traslaciones (o vectores)tratando de demostar rigurosa y sencillamente algunas propiedades intuitivas. Por ejemplo, la composición de las traslaciones $t_{\overrightarrow{AB}}$, $t_{\overrightarrow{BC}}$ y $t_{\overrightarrow{CA}}$ es la identidad, puesto que dicha composición deja fijo el punto A. (Vease propiedad k) anterior)

Con vectores diriamos que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$



Lo que hemos hecho en difinitiva es construir un grupo conmutativo (El grupo de las traslaciones), que actúa simple y transitivamente sobre el plano. Este estudio sirve de introducción para abordar el problema general de las transformaciones del plano (aplicaciones biyectivas del plano en sí mismo), una vez que se haya desarrollado suficientemente el Plano Afín. Ahora sabemos además que es lo que hay que hacer con cada tipo de transformación; Debemos buscar las imagenes de algunas figuras: puntos, rectas, triangulos, cuadriláteros, etc., encontrar que propiedades se conservan y cuales no, obtener la composición de dos transformaciones del mismo tipo y de tipos distintos, averiguar las propiedades de estas composiciones, buscar las trazas de cada transformación, estudiar sus invariantes: puntos fijos, rectas fijas, etc., y naturalmente, una vez establecida la biyección entre el plano y $R^2$, obtener las ecuaciones de cada transformación.

El objetivo final de todo este proceso es el estudio del grupo de las isometrías del plano. Con todo este bagaje es posible estudiar todas las cuestiones de la Geometría clásica o "moderna". Se pueden trabajar todos los Teoremas clásicos sobre el triángulo o el círculo, rigorizando las demostraciones mediante los grupos de transformaciones adecuados y sus invariantes.

2. Si se estima conveniente se puede hablar y trabajar aquí de los problemas lógicos que presentan las teorias - axiomáticas. En concreto:

(a) ¿Puede deducirse alguno de los axiomas del resto de los otros?.

Se puede discutir esto sobre todo en relación con A 4, y se puede hablar de las Geometrías no Euclídeas y del modelo de Klein en el círculo donde aparece un modelo que - cumple A1, A2 y A3 pero no A4. Véase por ejemplo: Bonola, Roberto Non-Euclidean Geometry. A critical and historical study od its development. London, Dover Publications 1955.

A la hora de definir las rectas de este modelo se puede hablar también del concepto de definición en matemáticas: Los objetos se definen enunciando sus propiedades.

Este modelo plantea además la necesidad de responder a la pregunta siguiente:

(b) ¿Pueden ser contradictorios los axiomas enunciados?. O lo que es lo mismo ¿Podemos demostrar matemáticamente la existencia de un conjunto donde se cumplan los axiomas enumerados?.

Este es un problema más dificil, que se puede dejar planteado hasta el estudio de la biyección entre $\Pi$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, lo que permite construir un conjunto ( $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) en el que se puede comprobar los axiomas citados y que también sirve como modelo del plano métrico por lo que la resolución a - esta cuestión podría dejarse para más adelante. Debe necesariamente hacerse notar a los alumnos que lo que hemos hecho es reducir la existencia de un plano a la existencia - de los números reales y en definitiva a los números naturales y a la teoria de conjuntos.



(c) ¿Debemos aceptar todas las consecuencias lógicas que se deduzcan de los axiomas aunque no sean intuitivas?.

Este punto esta relacionado también con el concepto de - verdad en Matemáticas y constituye el "riesgo" de una teoria axiomática.

En la historia de las Matemáticas existen muchos fracasos relacionados con esta cuestión.

Se pueden encontrar unos cuantos de ellos en la obra de Bonola citada anteriormente.

Las cuestiones planteadas en (a) y (b) son una excelente ocasión para hablar de la naturaleza y el fundamento de las Matematicas en particular del concepto de axioma y de su - necesidad.

3. A partir de este momento el desarrollo de la geometría afín puede seguir 2 direcciones distintas que enumeramos a continuación:

PRIMERA DIRECCION: Continuar con el desarrollo de la geometría afín prescindiendo por completo del concepto de vector.

En concreto, después de haber trabajado en los puntos anteriores con la figura formada por 2 rectas, se puede pasar a estudiar la figura formada por tres rectas, los triángulos, sus distintas clases, etc.

Se puede pasar después a la figura formada por 4 rectas, las distintas clases de cuadrilateros, sus propiedades, etc.

En todo caso es importante hacer notar la necesidad de nuevos instrumentos que permitan resolver algunas cuestiones que en este estudio se plantean, por ejemplo, no podemos distinguir entre paralelogramo y rectángulo, no podemos definir círculo, etc.

Todos estos problemas conducen al estudio de nuevos conceptos como distancia y ortogonalidad, y deben aparecer aqui como algo que "añadimos" al plano para poder estudiarlo mejor, no como algo "inherente" al plano.

SEGUNDA DIRECCION: Se debe comenzar con un estudio descriptivo sobre lo que es un triángulo, un cuadrilatero, un paralelogramo, etc, e intentar después justificar la introdución del espacio vectorial de los vectores libres del plano y continuar a partir de aqui con el desarrollo normal de la geometría afín del plano a traves de los vectores. En los puntos siguientes se indica como puede hacerse esa introducción.

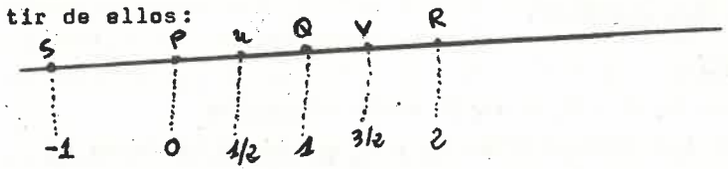


5.- Para finalizar con la introducción de los vectores del plano, solo queda la operación externa " producto de un número real por un vector".

Es importante observar que hasta el momento no se ha hablado para nada de los numeros reales y de hecho todo lo desarrollado es válido también en el plano definido por QxQ.

La relación funda ental que el alumno conoce (porque es la propiedad fundamental de R ) entre los objetos de la Geometría y los números reales es la biyección en re cada recta y R.

La forma en que cada alumno construye una de estas biyecciones es tomar dos puntos distintos P,Q de la recta y a partir de ellos:




Los puntos de abscisa entera (los primeros que el alumno dibuja) tienen una representación sencilla con el lenguaje de traslaciones o de ve tores. Llamando $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ resulta:
$Q = P + \vec{v}$, $R = P + \vec{v} + \vec{v}$, $S = P - \vec{v}$, $T = P - \vec{v} - \vec{v}$, etc.

Podemos intentar intuitivamente describir el resto de los puntos de la recta mediante la siguiente generalización:
$Q = P + \vec{v}$, $R = P + 2\vec{v}$, $S = P - \vec{v}$, $T = P - 2\vec{v}$, $U = P + \frac{1}{2}v$,
$V = P + \frac{3}{2}\vec{v}$, etc.
Es decir aceptamos los siguientes axiomas (que también se pueden formular con traslaciones).

Axioma 6 (A6)

En el conjunto de vectores del plano hay definida una operación externa con dominio de operadores el conjunto R, y que cumple:

1) $\alpha(\vec{v}+\vec{u}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{u}$
2) $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
3) $(\alpha.\beta)\vec{v} = \alpha.(\beta\vec{v})$
4) $1.\vec{v} = \vec{v}$

Deben hacerse suficientes ejercicios para traducir gráficamente lo que significan algunas de estas propiedades. Por ejemplo la propiedad 1) es una formulación vectorial del Teorema de Thales. Por supuesto, se pueden proponer otras propiedades de esta operación que tambien parecen aceptables ( Por ejemplo $0.\vec{v} = \vec{0}$ ) y después ver que todas ellas se deducen de las anteriores y plantear así todos los problemas relacionados con el método axiomático.

Para construir definitivamente la biyección entre cada recta y R, hay que aceptar:

Axioma 7 A(7)

a) Los puntos P, $P + \vec{v}$, $P + \alpha\vec{v}$ están alineados.
(Es decir las traslaciones $t_{\vec{v}}$ y $t_{\alpha\vec{v}}$ tienen la misma dirección)
b) Axioma de DESARGUES. (Segunda parte).
Dados tres puntos alineados P,Q,R distintos, existe un único $\alpha \in R$ tal que $R = P + \alpha\,\overrightarrow{PQ}$.
La parte b) es equivalente al enunciado clásico del Teorema de Desargues cuando se toman rectas concurrentes en lugar de paralelas como habíamos hecho en el Axioma 5. Los axiomas de Desargues son las propiedades que permiten construir el Espacio Vectorial de los vectores libres del plano y por tanto su estudio mediante el algebra Lineal. A causa de todo ello decimos que nuestro plano es un plano ARGUESIANO.
Al número $\alpha$ se le llama abscisa del punto P respecto a la Referencia (P,Q) de la recta $D_{PQ}$. A partir de aquí se pueden definir relaciones como "estar entre P y Q" ($0 \leq \alpha \leq 1$), conceptos como semirectas, ecuación vectorial de una recta, etc.



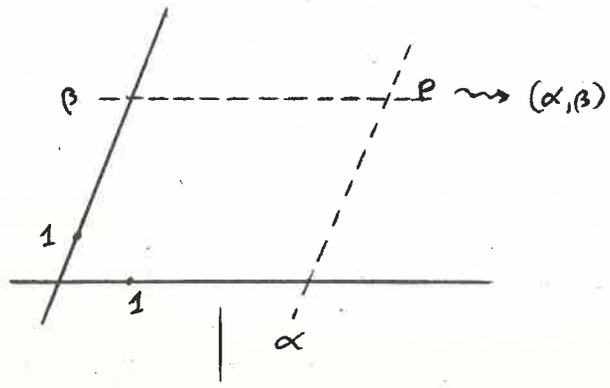
Para dar una biyección entre cada recta y R, basta tomar dos puntos distintos P,Q de la recta y utilizar la aplicación:

$$R \longrightarrow D_{PQ}.\alpha \dashrightarrow P + \alpha\,\overrightarrow{PQ}.$$

A partir de aquí se puede continuar con el desarrollo vectorial que se suele hacer de estas cuestiones. Cuando sea necesario o conveniente se puede utilizar lenguaje de traslaciones por ejemplo al abordar los conceptos de dependencia, independencia, base, etc.

Al ser biyectiva cada recta y el cuerpo R, resulta que el plano es biyectivo con R x R y de este hecho pueden sacarse las consecuencias oportunas: Ecuaciones, coordenadas, existencia de un conjunto que cumple los axiomas enumerados, etc.

Es preciso notar que el proceso usual de utilización de ejes coordenados, (el proceso que un alumno utiliza cuando se le pide que "pinte un plano") ha quedado perfectamente formalizado y puede ser utilizado directamente:



II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

(15, 16 y 17 de Abril). SEVILLA

COMUNICACION del GRUPO INDIMA SOBRE la EXPERIENCIA "ENSAYO de EDUCACION PERSONALIZADA en MATEMATICA"

(Ciclo Superior E G B)

MURCIA

ABRIL de 1982

G U I O N :

1.- Presentación del equipo.

2.- Necesidad de la experiencia.

3.- Características que la definen:

3.1) Metodología utilizada.

3.2) Material didáctico.

3.3) Desarrollo de una clase.

3.4) Colectivos.

3.5) Hipótesis.

4.- Evaluación de avance de la experiencia.

5.- Comentario del tratamiento didáctico dado a los temas:

5.1) Iniciación a la Lógica Matemática.

5.2) Funciones.

5.3) Concepto de número racional.

- - - - - - -
- - - - - -
- - - - -
- -
-



1.- Presentación del equipo.

Este equipo se constituyó en el año 79 con motivo del inicio de la presente experiencia. A través de los medios informativos de la Región se invitó a todo el profesorado; quedando constituído en la actualidad y después de algunos cambios, debidos a la dinámica propia del profesorado, por:

- Manuel Cobarro García. Murcia.
- Manuel Esteban Albert. Murcia.
- Manuel Richart Zapata. Santa Lucía. Cartagena.
- María Picossi Avila. Los Mateos. Cartagena.
- Hilario Buendía Arróniz. Alcantarilla. Murcia.
- Antonio Niñano Sánchez. Murcia.
- José L. Bermé Rufete. La Alberca. Murcia.
- Josefa Alarcón Mengual. Puebla de Soto. Murcia.
- Mª Carmen Olmo Mercño. Murcia.
- José Ginés Hernández. Yecla. Murcia.

2.- Necesidad de la experiencia.

Nos surgió de la práctica docente y ante los problemas con los que claramente encontramos en esta área.

- Alto índice de fracaso escolar.
- Rechazo sico-afectivo por parte del alumno de la Matemática; y consecuentemente falta de interés.
- Falta de comunicación de los alumnos, entre ellos y con el profesor en esta área.
- Desajuste entre los procesos discursivos profesor, alumnos y libro referido a ritmos y capacidades, así como al propio lenguaje en sí.
- Falta de conexión con la realidad circundante.
- Actitud pasiva y receptiva del alumno.

- Falta de ambiente de trabajo.
- Ausencia de creatividad.

Ante este panorama emprendimos la búsqueda de una metodología práctica con la que eliminásemos estos defectos y consiguiéramos como objetivos primordiales.

- El descubrimiento por parte del alumno de los conceptos y aplicaciones.
- La adecuación del ritmo de trabajo, profesor y "libro" a la capacidad de cada alumno.
- La comunicación como elemento esencial en la realización personal; consecuentemente el trabajo en equipo.
- La comprensión y expresión del alumno mediante un lenguaje matemático adecuado.
- La autorresponsabilidad.
- Conseguir un clima creativo y armónico en la clase.
- Conexión con la Historia de la Matemática.
- Presentación coherente de la Matemática, no como dos Matemáticas, la Moderna y la Clásica.

## 3.- Características que la definen.

### 3.1) Metodología utilizada

Se basa en:

- Método ACTIVO.
- Método INDUCTIVO (INTUITIVO) - DEDUCTIVO.
- CREATIVIDAD.
- Conexión con el mundo real del niño.
- Desarrollo de la comunicación.



Nosotros hemos plasmado estos principios del siguiente modo:

- Las explicaciones del profesor en clase colectiva se reducen sólo a casos muy concretos.
- La clase en su mayor parte se dedica al trabajo personal y en equipo, simultáneamente.
- A este trabajo personal le sigue un coloquio (puesta en común).
- La función esencial del profesor es animar al grupo, y ayudar personalmente a cada alumno en la realización correcta de su trabajo.
- Confeccionando nuestro propio material didáctico; pues si bien la enseñanza personalizada en otras áreas fue experimentada satisfactoriamente, en ésta de la Matemática, existía, a nuestro entender, la carencia de un material idóneo que la hiciere factible.

### 3.2) Material didáctico.

Hemos pretendido crear un material que permitiese al alumno descubrir activamente y de una forma inductiva los conceptos matemáticos y las aplicaciones prácticas de éstos; material que no es programado, pues queda abierto a la comunicación y divergencia de razonamiento, ni el "fichismo" que consistía en una serie de ejercicios.

Pretendemos el equilibrio entre la palabra escrita y la verbal, siempre de una forma socrática, en términos de "rentabilidad educativa".

Para que el alumno pueda en cualquier momento evaluar su trabajo (comprobar si va por un camino correcto) dispone de un autocontrol; al mismo tiempo se pretende con esto que se responsabilice y consiga un conocimiento de sí mismo; para facilitarle este último objetivo dispone de una ficha de planificación y autocontrol.

El material elaborado por nosotros consiste en:

- Programación general del curso (se adjunta la de 7º Nivel), sirve de orientación al alumno y, por supuesto, al profesor.
- Planificación del trabajo, normalmente por quincenas, incluyendo secuenciación de objetivos, desarrollo de actividades y autoevaluación permanente y final del tema. (Se adjunta esta esta hoja).
- Confección de cada tema del programa; para lo cual hacemos en primer lugar una secuenciación clara y progresiva de objetivos y de contenidos. Incluyendo en cada tema una sección de Ejercicios de Repaso para evitar el olvido de los objetivos previamente alcanzados, en este nivel o en los anteriores. En cada tema se fija un nivel de ampliación; facilitando una serie de ejercicios de mayor complejidad. (Se adjunta como muestra un tema de 6º, 7º y 8º niveles).

Este material es provisional, pues está creándose, siendo sometido a revisión constante, se reelaborará al final de la experiencia. Los alumnos cuentan con una biblioteca matemática de clase.

Utilizamos una serie de pruebas y cuestionarios para el seguimiento de la experiencia.

Habiendo sido estudiados los Programas Renovados, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

1º) Las líneas metodológicas que en ella se expresan están en concordancia con las de esta experiencia. Nuestra experiencia, sería una concreción de las mismas en una opción por la educación personalizada.

2º) Estamos plenamente de acuerdo en dejar las formalizaciones de la construcción de conjuntos numéricos y las estructuras para el BUP. Si bien, tal y como se reconoce en los Programas Renovados, creemos muy importante que el alumno progresivamente vaya dominando un LENGUAJE MATEMATICO que le permita comprender y EXPRESAR el pensamiento matemático adecuadamente.

3º) Existe una diferencia entre nuestra programación y los Programas Renovados consistente en que nosotros incluímos un tema (Unidad 1 de Secto Nivel) cuya finalidad es familiarizar al alumno con la forma de hacer Matemáticas; de una forma muy sencilla se le da alguna noción de LOGICA Matemática a fin de que tenga elementos para elaborar este lenguaje adecuado.

También la unidad 2 contiene una síntesis de la Teoría de Conjuntos más estructurada que en el Ciclo Medio, de acuerdo con la mayor capacidad de abstracción del alumno. En los Programas Renovados no aparece esta Síntesis, suponiendo que el alumno ya ha adquirido estos conocimientos y vocabulario en el Ciclo Medio.

4º) A fin de buscar una adecuación a los Programas Renovados y habiendo comprobado en la experiencia la necesidad de descongestionar el programa de Secto Nivel, hemos decidido pasar estas dos unidades reducidas a su mínima expresión, pudiendo ser introducidas en 5º Nivel; siendo conscientes de que no constituyen tanto un objetivo en sí mismas sino un instrumento LINGUISTICO que permitirá el desarrollo didáctico adecuado de los temas del Ciclo Superior. Por ejemplo el conocimiento del producto cartesiano le permitirá al alumno descubrir con mayor facilidad y precisión el concepto de función y su representación gráfica.

5º) La experiencia nos ha enseñado de que normalmente es necesario cimentar en 6º Nivel objetivos fundamentales del Ciclo Medio, tales como la resolución de problemas y cálculo con números decimales; ya que se ha podido producir olvido

o, lo que es más serio, no se llegaron a dominar con la profundidad que sería de desear debido a la dificultad que entrañan estos objetivos para los niños, entre otros motivos. Por eso reservaríamos alguna semana de la Programación de Sexto a la fundamentación de los objetivos esenciales del Ciclo Medio; esta necesidad es un hecho real que no puede ignorarse a la hora de programar.

6ª) Estamos totalmente de acuerdo que la única Geometría que puede enseñarse a nivel de EGB es la Euclidiana a base de intuición; su estudio facilita al alumno una rica experiencia para la percepción de su entorno físico y sin la cual no podría comprender más tarde otros tipos de Geometrías no euclidianas tales como la afín.

7ª) Sin que suponga un recargamiento, consideramos importante abordar los temas desde su punto histórico también; de forma amena y sencilla.

8ª) Falta comprobar si los alumnos pueden asimilar o no estos contenidos "mínimos" en el tiempo previsto según los objetivos de la EGB.

Creemos que una conclusión importante a la que hemos llegado en la experiencia respecto al material didáctico es que ha sido válido para alumnos de ambientes socioculturales y económicos muy diversos.

3.3) Desarrollo de una clase.

En primer lugar, si se trata del comienzo de un tema, planificación del trabajo. Clase colectiva, en los temas que lo requieran (no tiene que ser necesariamente al comienzo de la clase). Trabajo personal del alumno.



Autoevaluación. Puesta en común para clasificar ideas, fomentar la comunicación y reflexionar sobre los hábitos de trabajo y actitudes.

3.4) Colectivos.

El total de alumnos del grupo experimental son 797; de ellos 235 pertenecientes a Sexto Nivel y 257 a Séptimo y 305 a Octavo.

Similar número de alumnos forman el grupo de control.

El total de colegios nacionales son los siguientes:

C.N. Centro Piloto, "Narciso Yepes" del ICE en Murcia.
C.N. "Ntra. Sra. del Mar", Santa Lucía, Cartagena.
C.N. "Anibal", Los Mateos, Cartagena.
Escuelas de SANJE, Alcantarilla. Murcia.
C.N. "Virgen de la Fuensanta", La Alberca. Murcia.
Escuela Puebla de Soto. Murcia.
Escuela Equipo. Murcia.
C.N. "La Paz", Las Herratillas. Yecla. Murcia.

Descripción sociológica.

Tratamos de enmarcar la población de nuestro estudio en determinadas categorías que definan sus perfiles sociológicos. Los indicadores empleados para encuadrar en coordenadas sociológicas a nuestra muestra son dos básicamente: a) el medio de procedencia y b) la profesión de los padres.

Descripción sociológica de la muestra referida a 6º EGB.

En este nivel predomina el ambiente semiurbano que representa un 65 % de toda la muestra y el urbano el restante. No hay representantes del ambiente puramente rural.

Idéntica proporción observa el grupo de control.

La profesión de los padres es función de la que determinamos

el nivel social de la familia de nuestros alumnos presenta el siguiente perfil:

El 50 % puede clasificarse con propiedad como clase media - media.

Un 30 % correspondería a una clase trabajadora de reducido acceso a los bienes de cultura y escasa posibilidad de promoción social.

Un 10 % podría catalogarse como clase media - alta.

Un 8 % de nivel social imposible de determinar según los datos obtenidos.

Un 2 % no contesta.

Para el grupo control las frecuencias se distribuyen con similares valores:

60 % - clase media-media.
30 % - clase trabajadora.
5 % - clase media-alta.
5 % - indeterminable o no contesta.

Descripción sociológica de la muestra referida a 7º EGB.

El medio urbano representa el 20 % de la muestra de este nivel, mientras que la mayoría, el 70 % corresponde al ambiente semiurbano. El medio rural se halla escasamente representado por un 10%.

La proporción en el grupo de control para este nivel es prácticamente coincidente.

La distribución del nivel socioeconómico se distribuye del siguiente modo:

39 % corresponde a clase media-media.
35 % corresponde a estratos bajos de la población.
10 % procede de clase media-alta.
15 % no responde o no puede determinarse.



Para el grupo de control la distribución de frecuencias es la siguiente:

46 % clase media-media.
41 % clase baja.
4 % clase media-alta.
4 % sin determinar.
5 % no responde.

Descripción cultural de la muestra.

Cuadro 1

En 7º EGB { Experimental N = 168 / Control N = 93 }  En 6º EGB { Exp. N = 142 / Cont. N = 86 }

| | Sin estudios | % | Estudios primarios | % | Bachiller | % | Grado Medio | % | Grado Superior | % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7º Expe. | 41 | 24'40 | 84 | 50'00 | 8 | 4'76 | 22 | 13'09 | 13 | 7'74 |
| 7º Control | 23 | 24'73 | 61 | 65'59 | 3 | 3'22 | 3 | 3'22 | 3 | 3'22 |
| 6º Expe. | 33 | 23'24 | 71 | 50'00 | 10 | 7'04 | 18 | 12'68 | 10 | 7'04 |
| 6º Control | 14 | 16'28 | 57 | 66'28 | 6 | 6'97 | 3 | 3'49 | 6 | 6'97 |

Como puede observarse en las dos primeras categorías, sin estudios y estudios primarios, se agrupa en todos los casos más del 50 % de la población.

3.5) Hipótesis.

Comprobar lo más cientificamente posible que "con esta metodología se alcanza unos rendimientos mayores, que los conseguidos por otra metodología tradicional", tanto en conocimientos como, lo cual es muy importante, en actitudes e intereses.

Hemos de decir que esta experiencia ha obtenido el apoyo del ICE y Consejería de Educación de Murcia y de la Dirección General de EGB.

## 4.- Evaluación de avance de la experiencia.

Sin menoscabo de la evaluación rigurosa que realizaremos podemos avanzar ahora algunas conclusiones basadas en la observación sistemática de nuestras clases en la reflexión crítica del equipo, y en la aplicación de pruebas y cuestionarios.

- Se da en la clase, con toda naturalidad, un ambiente de trabajo, no existe problema alguno de disciplina.
- El alumno se encuentra agusto en clase de Matemática; no se da el rechazo de esta área.
- Aprende razonando, descubriendo y a su ritmo.
- Desarrolla la dimensión social: Se comunica, da y recibe ayuda en el equipo y en la puesta en común.
- Se responsabiliza de su trabajo.

### 4.1) Evaluación del rendimiento académico.

En primer lugar, destaca el hecho de que no podemos hablar de óptimos resultados si por ello entendemos el éxito final en el 100 por 100 de los alumnos. Sin embargo, parece muy aceptable éxitos del 75 % del alumnado de nuestras características si tenemos en cuenta que la diversidad y heterogeneidad de la clase no permite que todos los retrasos acumulados en cursos anteriores y que son con frecuencia básicos para nuevos conocimientos y operaciones sean recuperados en un curso.

El porcentaje de suspensos situado entre un 22 a un 33 % como valor máximo parece discreto y moderado dadas las cifras de fracaso escolar en esta disciplina.

Es de resaltar como contrapunto que del 66/77 % de aprobados según la prueba de referencia nos hallamos con que de un 26 a 43 % corresponden a la calificación de Notable, Sobresaliente, lo cuál es sin duda un excelente resultado y revela una magnífica apropiación de los conocimientos por un significativo porcentaje de alumnos de nuestra muestra.

Dado el carácter experimental del Centro Piloto en él ha sido factible poder establecer una comparación entre el rendimiento de un sexto y séptimo cursos experimentales y sus homólogos de control.

El problema general que se plantea a la hora de contrastar una evaluación final es que no siempre coinciden los contenidos desarrollados en el curso; por ello en 8º, final del Ciclo Superior, será más fácil hacer esta evaluación final, pues los objetivos fundamentales se han de haber desarrollado ya.

En Sexto Nivel ha sido posible llegar a un acuerdo, siendo siete las cuestiones comunes que corresponden a los Items 2.3 ; 2.4.a ; 2.4.b ; 3.2.b ; 4.2.a ; 4.2.b ; y 4.2.c de la evaluación final de 6º Nivel (Ver Apéndice).

Las respuestas positivas en tantos por cientos son:

| ITEM | 6º A EXPERIMENTAL | 6º B CONTROL |
|---|---|---|
| 2.3 | 85'53 % | 9'38 % |
| 2.4.a) | 77'64 % | 53'13 % |
| 2.4.b) | 64'48 % | 46'88 % |
| 3.2.b) | 40'79 % | 25'00 % |
| 4.2.a) | 53'95 % | 31'25 % |
| 4.2.b) | 43'43 % | 21'88 % |
| 4.2.c) | 64'48 % | 23'44 % |

(Ver gráfica adjunta en página 14)

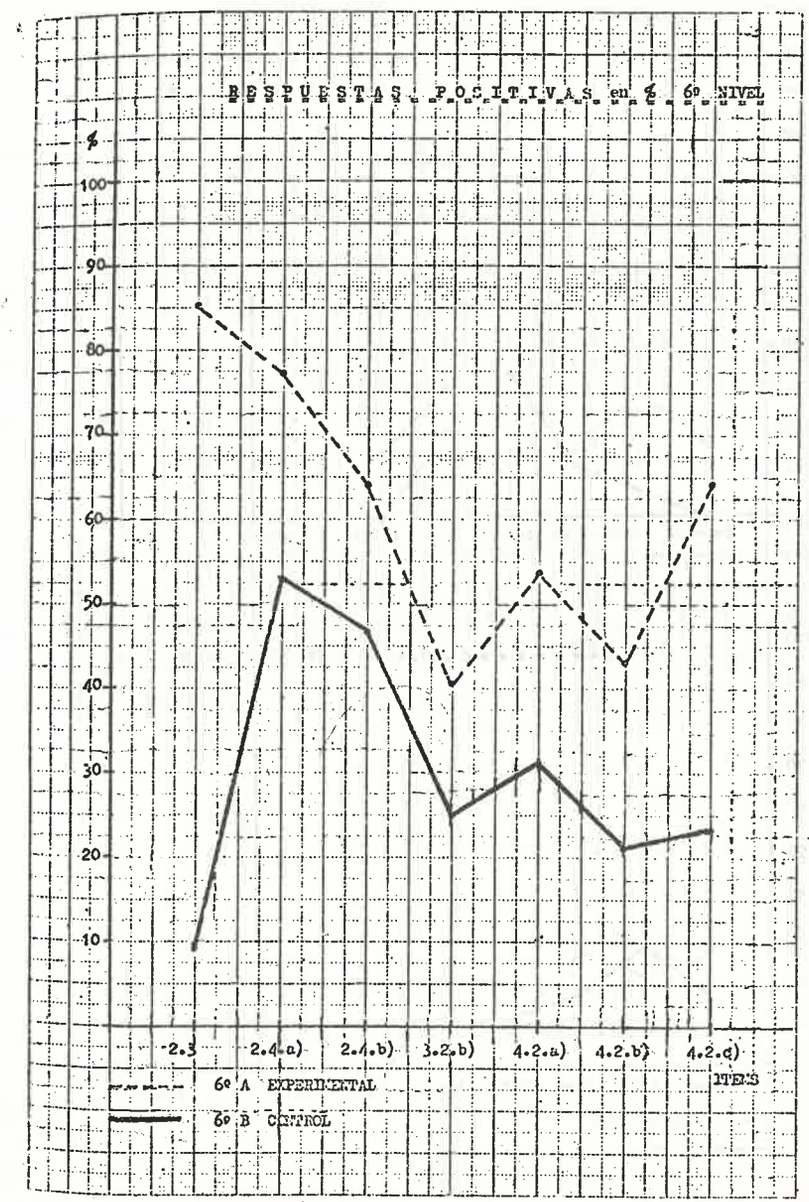
EL RESUMEN de CALIFICACIONES FINALES ES EL QUE SIGUE en %

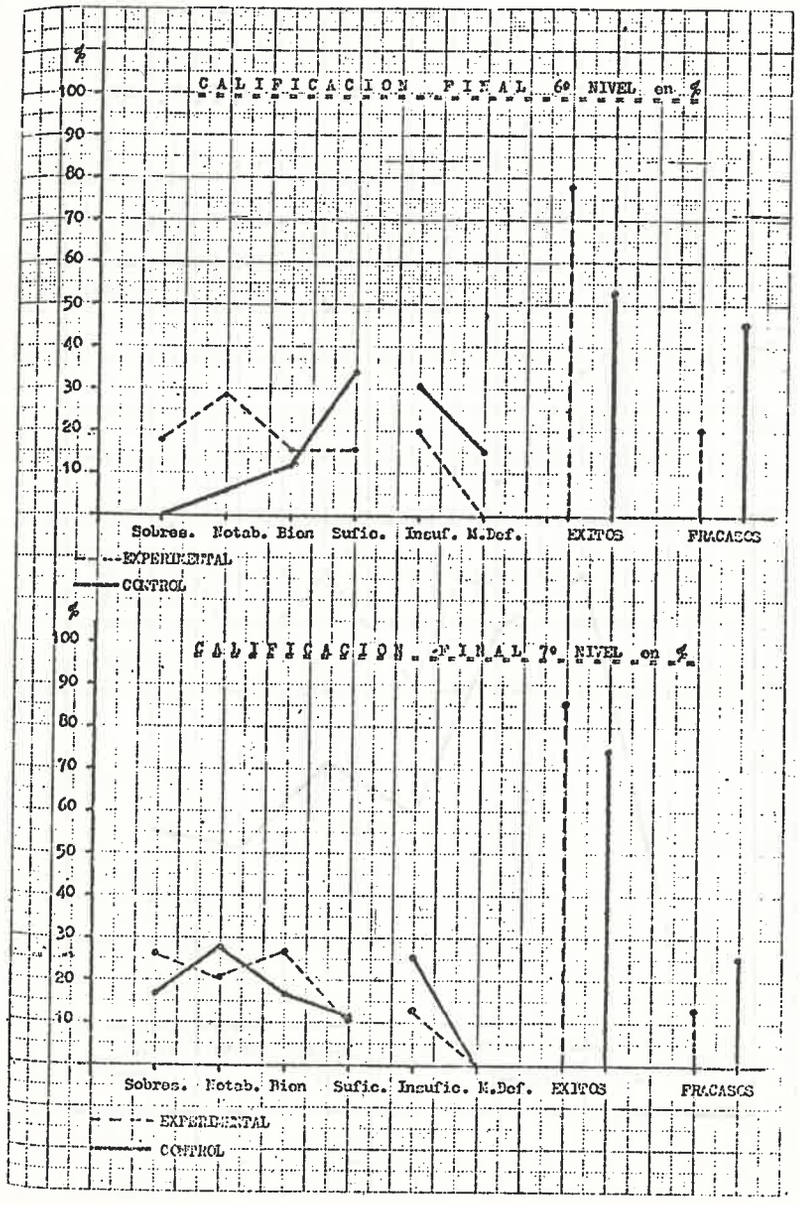
| | 6º A EXPERIMENTAL % | 6º B CONTROL % |
|---|---|---|
| Sobresaliente | 18'42 | —— |
| Notable | 28'94 | 6'25 |
| Bien | 15'78 | 12'50 |
| Suficiente | 15'78 | 34'38 |
| TOTAL EXITOS | 78'92 | 53'13 |
| Insuficiente | 21'05 | 31'25 |
| Muy deficiente | —— | 15'63 |
| TOTAL FRACASOS | 21'05 | 46'88 |

En Séptimo Nivel

| | 7º A EXPERIMENTAL % | 7º B CONTROL % |
|---|---|---|
| Sobresaliente | 27'02 | 17'14 |
| Notable | 21'62 | 28'57 |
| Bien | 27'02 | 17'14 |
| Suficiente | 10'81 | 11'43 |
| TOTAL EXITOS | 86'47 | 74'28 |
| Insuficiente | 13'53 | 25'72 |
| Muy deficiente | —— | —— |
| TOTAL FRACASOS | 13'53 | 25'72 |










4.2) Evaluación de actitudes e intereses.

Creo que es interesante hacer notar aquí las impresiones que obtuvimos en la visita a tres de los colegios con grupos experimentales: Los Mateos, Santa Lucía y Yecla. En todos ellos observamos la clase de Matemática y mantuvimos un coloquio con los alumnos. Fue muy estimulante; los alumnos nos animaron a continuar trabajando así porque "les resultaba más interesante, fácil, eran ellos mismos los que descubrían las propiedades matemáticas, iban a su ritmo, ..."

Pudimos incluso constatar el caso de alumnos considerados en las demás clases por sus profesores como "niño problema", según nos dice su profesor tutor, que en la clase de Matemática estaba perfectamente integrado, participando activamente en la puesta en común. Los niños tienen el convencimiento de que la Matemática es útil.

CUESTIONARIO PARA LA AUTOEVALUACION DE INTERESES Y ACTITUDES DEL ALUMNO

6º Nivel

(*) 1.- ¿Te encuentras agusto en la clase de Matemática?

SI ( ) NO ( )

2.- ¿Te resulta difícil normalmente comprender las explicaciones (orales o escritas) de Matemática?:

SI ( ) NO ( )

3.- ¿Generalmente sabes resolver los ejercicios de Matemática?

SI ( ) NO ( )

4.- La Matemática son de las asignaturas que te gustan:

SI ( ) NO ( )

Por cualquiera de los siguientes motivos.

- Porque las comprendo bien ( )
- Porque enseñan cosas útiles ( )
- Porque son interesantes ( )
- Porque las necesitaré más adelante ( )
- Porque me las explican bien ( )

Por cualquiera de los siguientes motivos.

- Porque no las entiendo ( )
- Porque no sirven para nada ( )
- Son aburridas y pesadas ( )
- Porque no pienso estudiar más Matemática cuanto termine EGB ( )
- Porque no las explican bien ( )

5.- Cualquiera que sea tu caso, ¿tienes interés en aprender la Matemática?

SI ( ) NO ( ) ME DA IGUAL ( )

6.- Consigues mantener la atención a lo largo de las clases de Matemática:

SI ( ) NUNCA ( ) A VECES ( ) TRATO DE ESTAS ATENTO PERO ME DISTRAIGO ( )

(*) (La 1ª pregunta es distinta en el cuestionario inicial; ésta es la siguiente: ¿Has suspendido las Matemáticas en algún curso anterior?SI, NO)



7.- Escribe, por orden de preferencia las tres asignaturas que más te gustan o interesan:

1: . . . . . .

2: . . . . . .

3: . . . . . .

8.- Escribe, por orden de no preferencia, las tres asignaturas que menos te gustan o interesan:

1: . . . . . .

2: . . . . . .

3: . . . . . .

(-) 9.- ¿Te gustaría continuar el próximo curso con el mismo sistema de enseñanza en Matemática que éste?

EL MISMO SISTEMA ( )

LO CAMBIARIA ( )

(-) 10.- ¿Qué fallos, en tu opinión, tiene el sistema utilizado en clase este curso?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

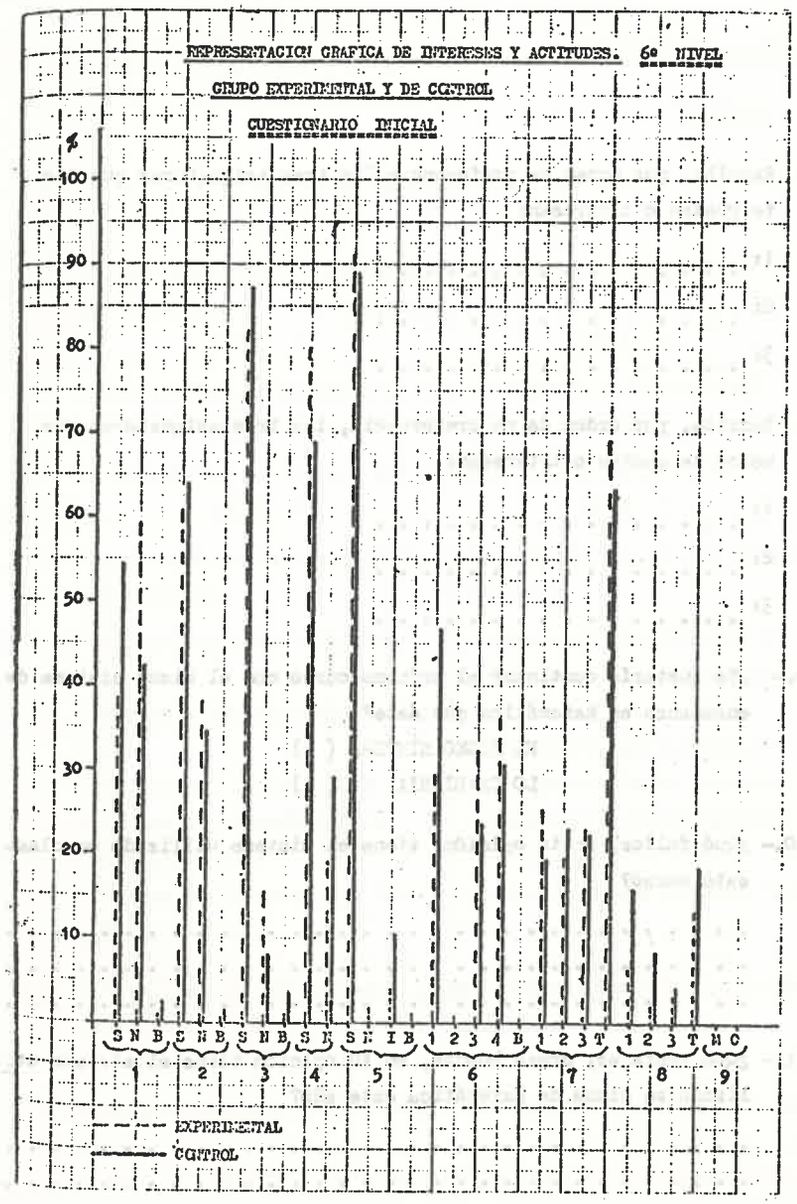
(-) 11.- ¿Qué ventajas, cosas buenas, en tu opinión tiene el sistema utilizado en clase de Matemática este año?

. . . . . .

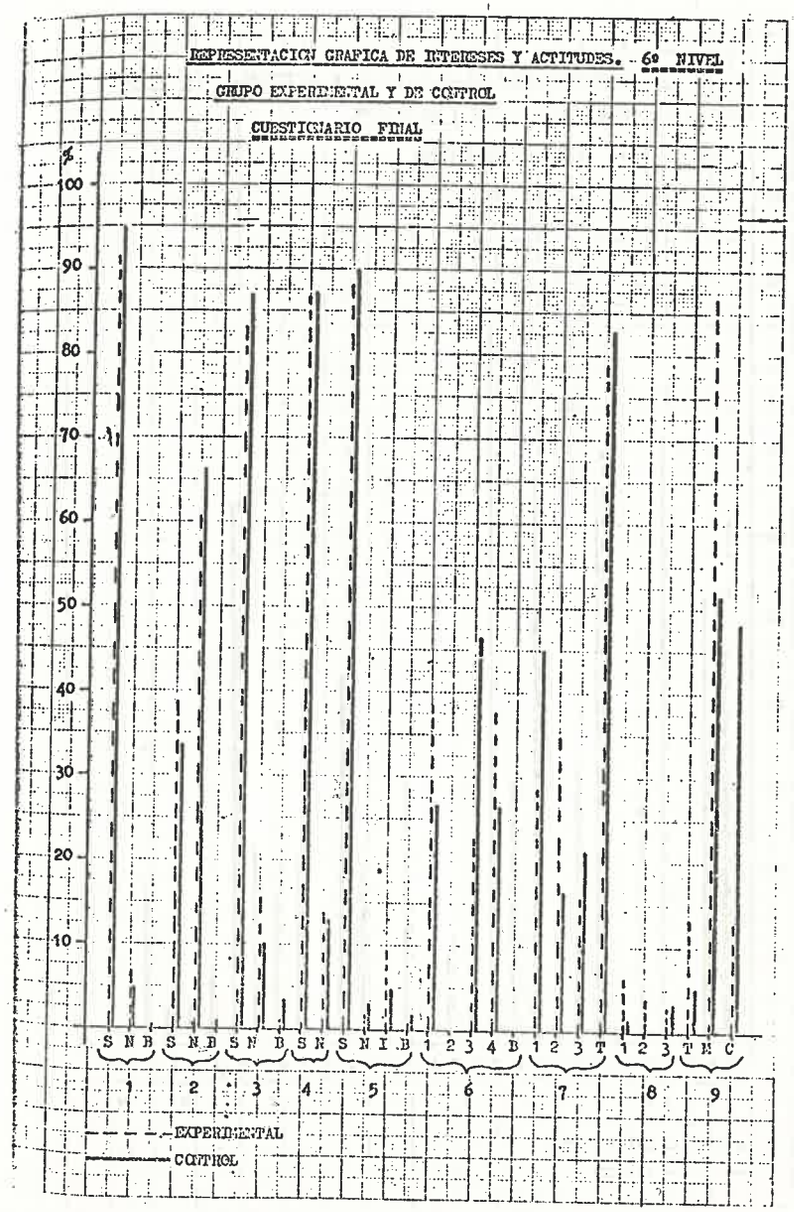
. . . . . .

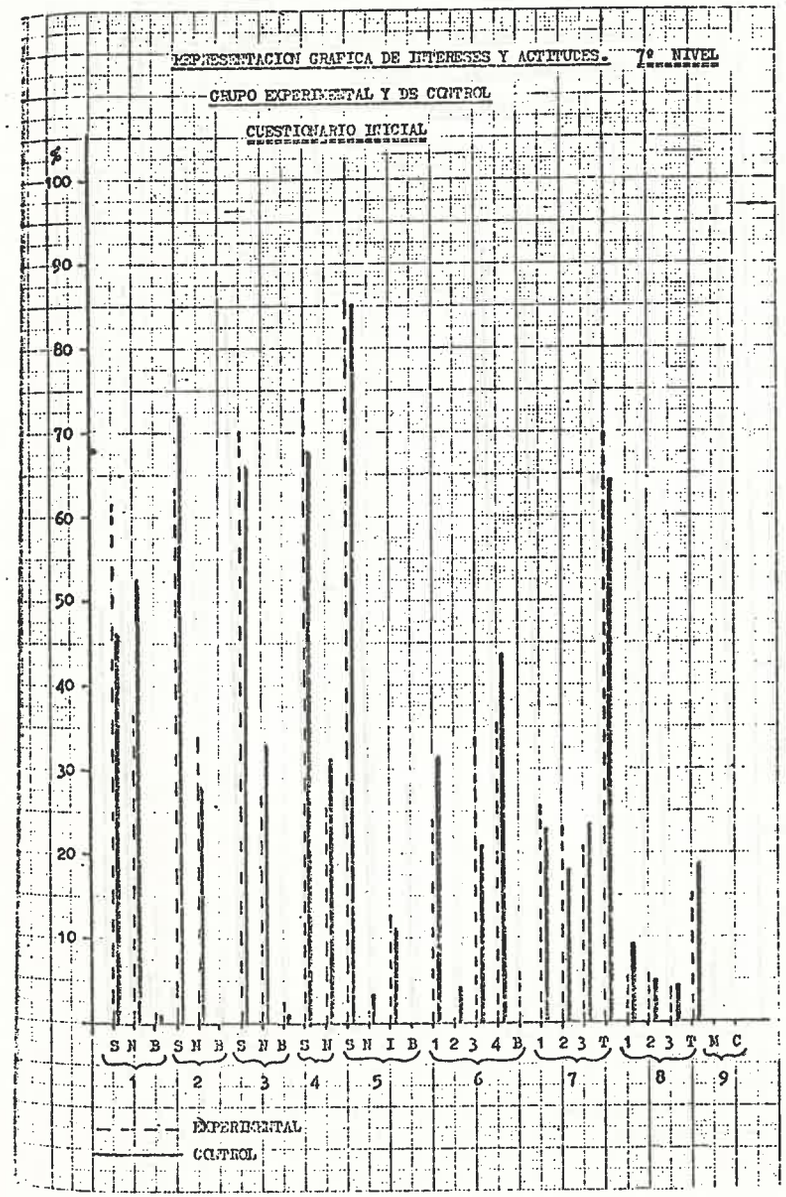
. . . . . .

(-) (Las preguntas 9, 10 y 11 no aparecen en el cuestionario inicial)

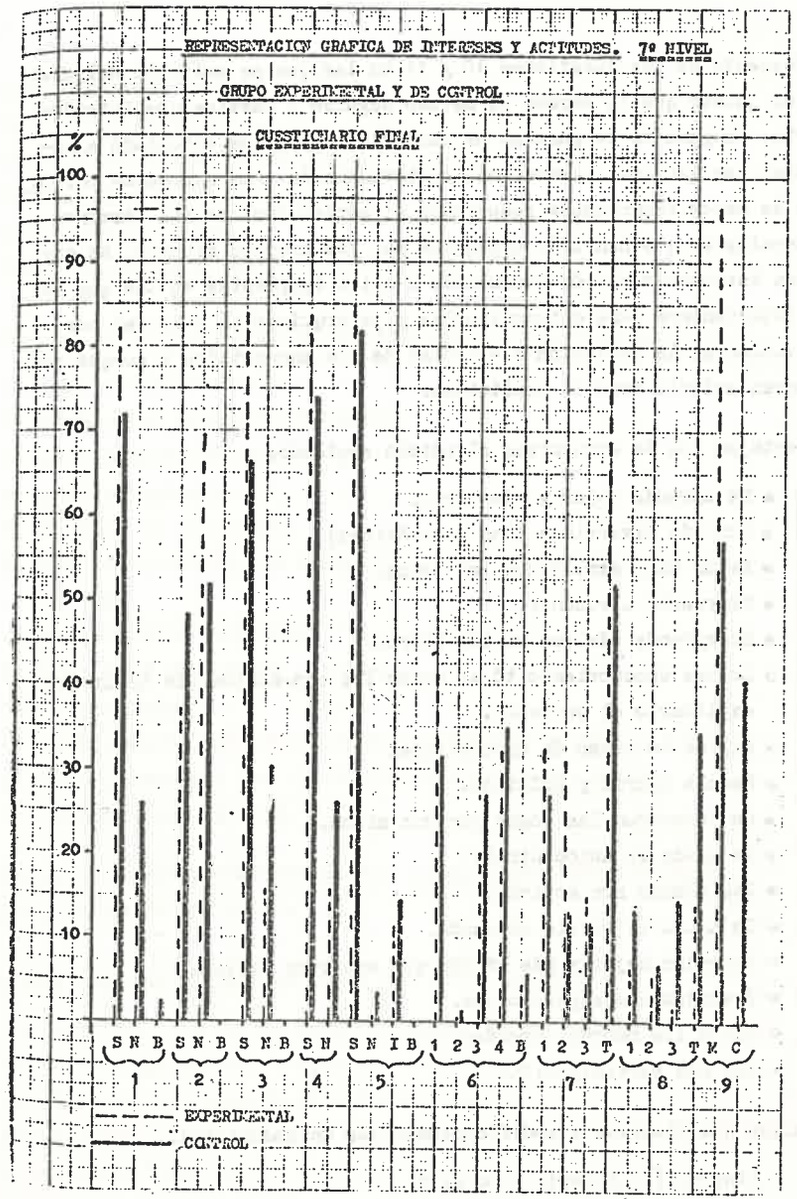

REPRESENTACION GRAFICA DE INTERESES Y ACTITUDES. 6º NIVEL
GRUPO EXPERIMENTAL Y DE CONTROL
CUESTIONARIO INICIAL
%
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
S N B S N B S N B S N B S N I B 1 2 3 4 B 1 2 3 T 1 2 3 T M C
1 2 3 4 5 6 7 8 9
EXPERIMENTAL
CONTROL




REPRESENTACION GRAFICA DE INTERESES Y ACTITUDES. 6º NIVEL
GRUPO EXPERIMENTAL Y DE CONTROL
CUESTIONARIO FINAL
%
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
S N B S N B S N B S N S N I B 1 2 3 4 B 1 2 3 T 1 2 3 T M C
1 2 3 4 5 6 7 8 9
EXPERIMENTAL
CONTROL


REPRESENTACION GRAFICA DE INTERESES Y ACTITUDES. 7º NIVEL
GRUPO EXPERIMENTAL Y DE CONTROL
CUESTIONARIO INICIAL
%
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
S N B S N B S N B S N S N I B 1 2 3 4 B 1 2 3 T 1 2 3 T M C
1 2 3 4 5 6 7 8 9
EXPERIMENTAL
CONTROL




REPRESENTACION GRAFICA DE INTERESES Y ACTITUDES. 7º NIVEL
GRUPO EXPERIMENTAL Y DE CONTROL
CUESTIONARIO FINAL
%
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
S N B S N B S N B S N S N I B 1 2 3 4 B 1 2 3 T 1 2 3 T M C
1 2 3 4 5 6 7 8 9
EXPERIMENTAL
CONTROL

Respecto de las cuestiones 10 y 11 en las que se solicita del alumno el juicio que le merece el método seguido y cambios que introduciría, la gama de respuestas es variadísima y hemos intentado agruparlas por las que aparecen más reiteradamente. Las exponemos por orden de mayor recurrencia respetando al máximo incluso los términos literales en que han sido expuestas por los propios alumnos. No queremos introducir ningún comentario a estas respuestas en las que sólo intervenimos para categorizarlas y jerarquizarlas a la vez por no violentar la intención y voluntad de los encuestados y porque nos parecen suficientemente explícitas.

Ventajas que le encuentras al método empleado.

- Se aprende mejor y más fácil.
- Son más divertidas (las Matemáticas).
- Están bien explicados los temas.
- Te enseña a razonar.
- Se aprende más que en los libros.
- Lo vas descubriendo tú al hacer los ejercicios sin tener que explicarlo el profesor.
- Sigues tu ritmo de aprendizaje.
- Mezcla teoría y práctica.
- Se descubren las cosas por uno mismo.
- Te ayuda el autocontrol.
- Las clases son activas.
- Te ayuda la puesta en común.
- Aprendes mejor y más rápido que con otro sistema.
- Trabajamos más pero mejor.
- Hasta los peores aprenden.
- Hay más participación.

Fallos que observas y modificaciones que introducirías.

Ninguna (lo dejaría como está).
Que no sean tan largos los temas.
No poner el autocontrol porque se copian.



Hacer más temas pero más cortos.
Más trabajo en grupo.
Qué haya un resumen al final de cada tema.
Mejorar el nivel de ampliación.
Quitar los controles.
Tener más horas de clase de Matemáticas.

Ventajas que le encuentras al método empleado (Grupo de control).

El profesor explica bien.
El profesor da muchas facilidades.
Se hacen muchos ejercicios.
Se aprende bastante.
El profesor es simpático.
El profesor pregunta las lecciones a diario y así las repasan.
El profesor riñe si hablan.
El libro está encadenado y ordenado.
Manda ejercicios.
Se puede recurrir al libro porque el profesor se adapta a él.
Al hacer y corregir los ejercicios se aclaran las dudas.
Los exámenes son fáciles.

Es importante observar como los alumnos centran sus comentarios en el profesor, no en su actividad.

Fallos que observas y modificaciones que introducirías.

- Utilizar sólo las Matemáticas que sirvan próximamente.
- Un sistema más moderno porque son aburridas.
- Que las explicaciones se dieran escritas.
- Poner castigos cuando uno no sabe algo.
- Poner menos deberes.
- Cambiar el libro.
- Cuesta trabajo comprenderlas (las Matemáticas).
- Que se hicieran en clase ejercicios de lo explicado.

- Más ejemplos y dibujos.
- Que los ejercicios no se hagan en casa porque si no entiendes algo no tienes quien te lo explique.
- No se entienden las cosas y al estudiar te lías.
- Son muy difíciles y aburridas.
- Que el profesor no repita tanto que se aburre.
- Se pierde mucho el tiempo.
- Si faltas un día no puedes seguir.
- No tienen aplicación práctica.

Actitud de los profesores.

La actitud de los profesores que experimentamos esta metodología es muy positiva ya que con ella hemos podido solucionar el grave problema de la motivación y por tanto de la disciplina.

El ambiente de trabajo en la clase se da como algo natural desde el principio. El profesor se ve liberado de esa tensión de "mantener el orden" y puede dedicarse tranquilamente a ayudar a quien lo necesita. Parece que así todo va por su cauce natural.

Por otra parte hemos encontrado una gran ayuda para poder personalizar el contacto profesor alumno.

En el equipo existe una gran ilusión por continuar y perfeccionar nuestra experiencia.

5.- Comentario al tratamiento didáctico dado a los siguientes temas.

5.1) Iniciación a la Lógica Matemática. (6º Nivel)

Objetivos:

1.- Adquisición de un vocabulario básico como instrumento de formalización.

2.- Cultivo de las estructuras del razonamiento.

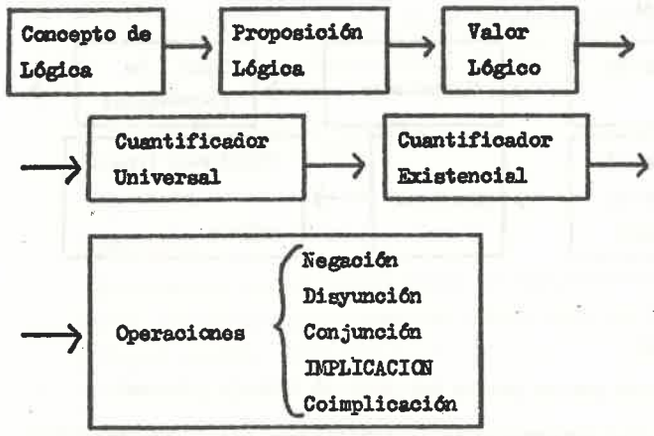


Contenidos:

1.- Utilidad de las Matemáticas. (Encuesta, libro y película "Donald en el País de las Matemágicas).

2.- Cómo se hacen las Matemáticas en contraste con las ciencias Naturales.

3.- Lógica:




Comentario:

- Los alumnos trabajan sin dificultad este tema; la utilización que de él hacen es progresiva a lo largo de todo el Ciclo Superior.

- La comprensión de este lenguaje es alcanzada fácilmente por todos los alumnos. La expresión requiere una práctica y maduración progresivas. Observamos que los alumnos de 8º y 7º niveles son capaces de formalizar las propiedades matemáticas que descubren, utilizando este lenguaje; si bien no todos los alumnos alcanzan la capacidad de expresar total y formalmente su razonamiento.

- En ningún momento se hace una introducción axiomática de este tema.

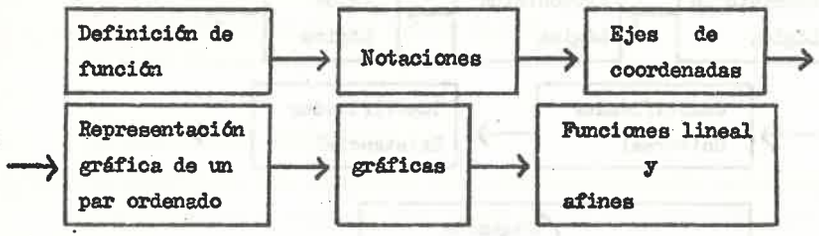
5.2) Funciones:

Objetivos:

1.- Concepto de función como abstracción de diversas situaciones vitales.

2.- Representación gráfica. Utilidad.

Contenidos:




Comentario:

- Es un tema que se presta muy bien al trabajo personal.
- Se hace una progresión de la simbología, desde una muy intuitiva a otra más abstracta.
- Es interesante comprobar las diferentes aportaciones de los alumnos en cuanto a situaciones reales expresadas mediante funciones.

5.3) Concepto de número racional.

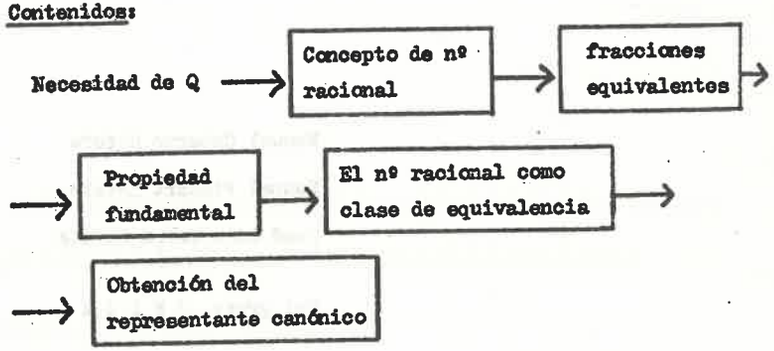
Objetivos:

1.- Sentir la necesidad de ampliar Z.

2.- Adquirir el concepto de racional como:
- fracción.
- composición de operadores.
- cociente exacto.
- clase de equivalencia.



Contenidos:




Comentario:

Pretendemos que el alumno capte la "equivalencia" existente en las múltiples expresiones del número racional: fracción, cociente exacto, etc.

Nota: Estos comentarios son muy breves ya que nos parece más oportuno que surjan en el coloquio.

En resumen, creemos que la experiencia está resultando positiva.

Como objetivos a realizar tenemos: Completar el material didáctico hasta completar el programa. También la modificación de aquellas unidades que se vea necesario perfeccionar. Estudiar la adecuación perfecta de cada unidad didáctica y el tiempo necesario en armonía con todo el programa y las capacidades de los alumnos.

La experiencia está diseñada para cuatro años, estamos en su tercera fase, y por tanto es pronto para sacar conclusiones, pero nos sentimos optimistas, debido a los ánimos que nos dan nuestros propios alumnos. Esperemos que con ella contribuyamos, al menos un poco, a que la Matemática sea una asignatura querida por los alumnos, sea algo de su mundo.

Manuel Cobarro García

Manuel Richart Zapata

José Lino Berná Rufete

Del grupo I N D I M A

Nuestra dirección es:

Grupo I N D I M A

C. N. "Narciso Yepes"
Centro Piloto I C E

Avda. Antonete Gálvez

M U R C I A



II J O R N A D A S S O B R E A P R E N D I Z A J E Y

E N S E Ñ A N Z A D E L A S M A T E M A T I C A S

(Sevilla, 15, 16 y 17 de Abril)

"El Seminario de Didáctica de las Matemáticas de EGB del ICE como medio de Perfeccionamiento didáctico e innovación".

M U R C I A

Abril de 1982

G U I O N:

1.- Introducción.

2.- Creación del Seminario.

3.- Objetivos.

4.- Organización.

5.- Medios.

6.- Dificultades y esperanzas.

- - - - - -
- - - - -
- - - -
- - -
-



1.- Introducción.

Las razones por las que el "Seminario Permanente de Didáctica de las Matemáticas de EGB" de Murcia trae esta comunicación a las II Jornadas son dobles; por una parte queríamos ofrecer nuestra organización suponiendo que, en algún caso, pudiese abrir posibilidades nuevas de realización al trabajo innovador en grupo; por otra, y fundamentalmente, queríamos contrastar nuestra corta experiencia con la de otros grupos a fin de encontrar en común respuestas estimulantes a las interrogaciones que se nos plantean.

2.- Creación del Seminario.

Durante el curso 79-80 el ICE de Murcia solicitaba la creación de este seminario de EGB, conjuntamente con la de otras áreas, tras los contactos mantenidos con el C.N. "Narciso Yepes", Centro Piloto del ICE. El Colegio tenía muy claro que había que crear un medio de intercomunicación permanente en la Región, el Colegio no podía quedar aislado de la dinámica educativa general.

Se concedió durante el curso 80-81 y para constituirse el ICE mandó una circular a todos los centros de EGB y medios de comunicación de la Región, invitando a todo el profesorado a que participase. Cada Seminario se autodotaría de un reglamento y nombraría democráticamente a sus coordinadores; el Centro Piloto participaría como un colegio más en los seminarios.

En el segundo trimestre del curso pasado (80-81) quedó constituído este Seminario.

3.- Objetivos.

3.0) El objetivo fundamental es conseguir la innovación educativa en el Area de Matemáticas.

Para conseguir este objetivo nos hemos trazado otros dos estrechamente relacionados entre sí:

3.1) La formación Permanente del Profesorado a través de:

- Encuentros en torno a alguna cuestión de didáctica Matemática.
- Cursillos organizados por el ICE a petición de los miembros del Seminario según las necesidades que a ellos se les planteen.
- Viajes. Un ejemplo lo constituye la asistencia a estas Jornadas.
- Publicación de conclusiones, si las hay.
- Impartición de "cursillos" cuando haya algo que ofrecer y a petición de los interesados.
- Contactos con profesores de otros niveles educativos.

3.2) Fomentar la experimentación didáctica; ofreciendo el Seminario todo su apoyo a los miembros que lleven a cabo experiencias.



4.- Organización.

La única condición que nos puso el ICE, y que asumimos plenamente por estar de acuerdo con ella, es que el Seminario dé fruto a ser posible y, en cualquier caso, quede constancia de su actividad durante cada curso escolar; ofreciendo los resultados a todos los compañeros interesados en conocerlos.

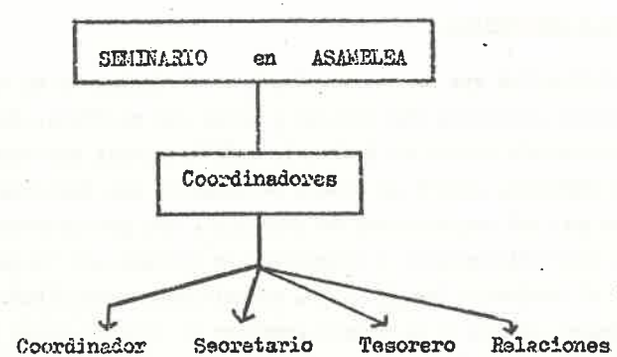
Todo profesor que lo ha deseado ha sido admitido, esté en activo o en paro, proceda de la enseñanza estatal o de la privada.

El máximo organismo decisorio es el Seminario en asamblea. Este elige cada curso escolar sus coordinadores: un coordinador propiamente dicho, un secretario, un tesorero y un responsable de relaciones.

Las reuniones son quincenales con una duración de dos horas.

El seminario dispone libremente de sus fondos.

Organigrama




De cada reunión del Seminario se levanta un "acta pedagógica" y al final de curso se redacta una memoria.

5.- Medios.

Disponemos de:

5.1) Presupuesto propio asignado por el ICE, en función de nuestras necesidades y sus posibilidades.

5.2) Infraestructura del ICE (Reprografía, citaciones, circuitos de T. V., etc.)

5.3) Cursillos del ICE organizados a petición nuestra.

Pensamos que estos medios constituyen un instrumento valioso para conseguir los objetivos del seminario, aun así de nada servirían si a sus miembros nos faltasen iniciativas y constancia.

6.- Dificultades y esperanzas.

La mayor dificultad que hemos encontrado en el Seminario es hallar actividades concretas que motivan a todos sus miembros. Actualmente la pertenencia activa al Seminario está integrada por unas veinticinco personas, aunque el número de miembros sea bastante mayor. Creemos que las espectativas de gran parte del profesorado en cuanto a su perfeccionamiento e innovación se refiere son "pasivas", esperan que el seminario les dé algo, especialmente cursillos. Hay que mentalizarse de que es el propio profesor el sujeto activo de su perfeccionamiento y de la innovación educativa; se ha de comprender que el seminario es un equipo de trabajo con una serie de medios a su alcance.



Estas son pues las dos dificultades mayores:

- Elección de los temas a estudiar.
- Actitud pasiva en parte del profesorado.

En este tiempo hemos realizado un estudio crítico de los programas renovados de Matemáticas, algunos intercambios de experiencias, entrado en contacto con el Seminario de Matemáticas de BUP, dos cursillos y estamos en el estudio de la "Geometría en la EGB".

Pensamos que a pesar de las dificultades enunciadas el futuro del Seminario es esperanzador, después de una fase de decantación, se está formando un equipo estable de trabajo, que entiende que la innovación de la didáctica Matemática y su perfeccionamiento son tareas suyas que puede y debe realizar; las satisfacciones son grandes y se encuentran en el aula, entre los niños, fuente de nuestras ilusiones.

Murcia, Abril de 1982

## RECURSOS METODOLOGICOS

Los profesores de matemáticas que presentamos esta ponencia, damos clase en Institutos de Bachillerato a nivel de B.U.P., siguiendo una misma linea de renovación pedagógica.
Una reflexión crítica de nuestra tarea nos ha llevado a plantearnos la necesidad de realizar actividades relacionadas con el programa o al margen de él, a fin de profundizar en algunos conceptos y despertar el interés de los alumnos.

Expondremos a continuación algunas de las actividades realizadas en esta línea:

-Redacción, por parte de los alumnos, de un trabajo sobre cada tema, con la finalidad de que estructuren adecuadamente los conceptos adquiridos. En este trabajo se tendrá en cuenta la calidad de expresión, la presentación, la existencia o no de un hilo conductor del tema, originalidad de los ejemplos, etc.

-Elaboración y exposición de murales con el fin de recoger de forma gráfica y concisa los conceptos fundamentales de cada tema.

-Recuperación del material didáctico ya existente:
- -Libros recreativos y didácticos para alumnos y profesores.
- -Material audiovisual.
- -Aparatos de medida (ya existentes o construidos por los alumnos): goniómetros, pantógrafos, odómetros...
- -Pasatiempos.
- -Juegos de mesa.

-Búsqueda de situaciones reales y concretas, cercanas al alumno, que faciliten encontrar el aparato matemático para entender mejor, es decir, trabajar "la matemática de las situaciones":
- -Estudio de recibos de gasto domésticos (agua, luz, teléfono...)
- -Aumento del precio de la gasolina.
- -Altura de edificios.
- -Observación de fachadas.
- -Tablas de orientación.
- -Construcción de mapas.

GRUP ZERO .- BARCELONA

# FICHAS SEMIPROGRAMADAS EN LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA EN PRIMERO DE B. U. P.

Pablo Flores Martínez.

## 1.- Introducción.-

El programa de 1º de B.U.P. de Matemáticas encierra un conjunto de temas que ya han estudiado los alumnos en la E.G.B. , pero que , sin embargo , manejan mas como automatismos de cálculo que como conceptos suficientemente asumidos. Intentar que mediante la clase magistral el alumno aprenda unos contenidos que el cree ya dominados , resulta poco menos que utópico. Si nos planteamos como objetivo el conseguir que el alumno sistematice estos automatismos y los relaciones entre sí, para constituir un todo con el resto de sus conocimientos y experiencias , es necesario utilizar unas actividades que "sean nuevas", pero que adviertan que se está tratando con contenidos ya estudiados.

Pues bien , el trabajo que presento, intenta contrastar hipótesis correspondientes a tipos de actividades partiendo de una determinada concepción de la enseñanza en la que se tiene especialmente en cuenta la situación real del alumno y la coordinación entre las estructuras mentales, con posibilidad de ser creadas en él, y la porción de realidad que se presenta al mismo. Esto se traduce en una busqueda de la conexión entre el interes del alumno y los contenidos instructivos , llegandose a una cierta entonación de estos últimos para lograrla .

Mediante estas nuevas actividades, la clase, deja de ser 40 individualidades , para convertirse en una serie de equipos de trabajo que elaboran su propia materia de estudio , responden a cuestiones, con la ayuda de sus apuntes y libro de texto . El profesor se baja del encerado para , paseandose entre los distintos equipos , supervisar el trabajo realizado por cada uno de ellos, el rendimiento de cada alumno y responder a las dificultades que surjan a lo largo del tratamiento.

El grupo sometido a la experiencia no presenta ninguna característica especial dentro del Instituto de San Pablo. Los resultados obtenidos por sus componentes en la prueba de sondeo, realizada en el distrito, lo cuadra como un grupo medio.

Los equipos de trabajo se han formado libremente , aunque es verdad que en Ciencias Naturales emplean un trabajo similar. (Curiosamente los equipos de trabajo de Ciencias no coinciden con los de Matemáticas , siendo los dos de libre constitución ).



## 2.- Programación corta del tema : INICIACIÓN AL ALGEBRA.-

El tema en el que se desarrolló la experiencia es el correspondiente a la parte de Algebra de 1º de BUP, Adjunto la programación corta del mismo para indicar los objetivos y la distribución de contenidos previstos.

1.-Objetivos específicos.-

1.-Hacer que el alumno conozca y distinga las expresiones algebraicas.

2.-Hacer que el alumno traduzca expresiones numéricas, al lenguaje algebraico.

3.-Conseguir que el alumno resuelva problemas numéricos de su entorno, o abstractos.

4.-Hacer que el alumno conozca el concepto de función y lo interprete como relación ideal entre magnitudes físicas.

5.-Hacer que el alumno calcule elementos de funciones polinómicas.

6.-Conseguir que el alumno resuelva inecuaciones sencillas.

2.-Objetivos operativos.- El alumno, al final del estudio:

1.1.A.- Conoce el concepto de polinomio.

1.2.A.- Conoce el concepto de frase algebraica.

1.3.A.- Conoce el concepto de ecuación.

1.4.A.- Conoce el concepto de identidad

1.5.C.-Diferencia entre sí polinomios y frases algebraicas.

1.6.D.- Diferencia ecuaciones de identidades.

2.1.B.- Expresa algebraicamente términos numéricos enunciados.

2.2.B.- Expresa algebraicamente relaciones numéricas enunciadas.

2.3.B.- Interpreta polinomios, verbalmente.

2.4.B.- Interpreta verbalmente frases algebraicas.

2.5.D.- Descubre la relación existente entre un problema y el teorema correspondiente.

2.6.B.- Traduce a expresiones algebraicas relaciones numéricas dadas en forma de enunciado.

2.7.C.-Aplica teoremas a la resolución de problemas.

2.8.D.-Reconoce la relación existente entre la solución de los problemas y su enunciado.

3.1.C.- Resuelve ecuaciones enteras de primer grado.

3.2.C.- Resuelve ecuaciones de primer grado racionales.

3.3.C.- Resuelve ecuaciones de segundo grado enteras.

3.4.C.- Resuelve ecuaciones de segundo grado racionales.

3.5.C.- Resuelve ecuaciones bicuadradas enteras.

3.6.D.- Descubre la relación que existe entre las ecuaciones de sistemas, y la existencia y número de soluciones del mismo.

3.7.C.- Resuelve sistemas de dós ecuaciones con dos incognitas.

3.8.C.-Resuelve sistemas de tres y cuatro ecuaciones con el mismo número de incognitas.

3.9.C.- Resuelve sistemas de dos ecuaciones con dos incognitas reducibles a ecuaciones de segundo grado.

3.10.A.- Conoce el concepto de sistema compatible e incompatible , determinado e indeterminado.

3.11.A.- Conoce el enunciado de una serie de teoremas y propiedades relativos a superficies , volumenes y relaciones entre lados de figuras geométricas regulares y la relación entre espacio y tiempo y velocidad en movimientos uniformes , asi como el valor de las cifras de los números.

4.1.A.- Conoce el concepto de función.

4.2.B.- Diferencia las expresiones de las funciones polinómicas de las restantes expresiones algebraicas.

4.3.A.- Conoce los siguientes elementos de las funciones: criterio , variable independiente , variable dependiente , gráfica , origen de un número e imagen de un número.

5.1.A.- Conoce el tipo de gráfica que tienen las funciones polinómicas de primer grado , segundo grado y constantes.

5.2.A.- Conoce las operaciones que hay que realizar para representar graficamente funciones polinómicas de primer y segundo grado.

5.3.B.-Representa graficamente funciones polinómicas de primer y segundo grado.

5.4.C.- Calcula imagenes y origenes de elementos dado el criterio de la función.

5.5.D.- Calcula imagenes y origenes de números,dada la representación gráfica de la función.

6.1.C.- Resuelve inecuaciones de primer grado,sencillas.



3.-Contenidos.-

Lección 5.- TRADUCCIÓN ALGEBRAICA DE FENÓMENOS NUMÉRICOS.- &1.-Problemas numéricos resolubles mediante métodos algebraicos. Dos formas de resolver problemas numéricos. &2.-Concepto de frase algebraica . &3.-Término algebraico.

Lección 6.- ECUACIONES E IDENTIDADES.- &1.-Ecuaciones e identidades. &2.-Ecuaciones equivalentes. &3.-Resolución de ecuaciones de primer grado. &4.-Resolución de ecuaciones de segundo grado.

Lección 7.- PLANTEO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS.- &1.-Planteo de problemas . Problemas directos. &2.-Planteo de problemas que exijan el empleo de teoremas o propiedades. Propiedades geométricas. Velocidad. Valor de las cifras de los números.

Lección 8.- SISTEMAS DE ECUACIONES.- &1.-Ecuaciones con mas de una incognita . &2.-Sistemas de ecuaciones . &3.- Tipos de sistemas. &4.-Formas de resolver sistemas.

Lección 9.- FUNCIONES POLINÓMICAS.- &1.-Concepto de función. Función polinómica. Elementos. &2.-Representación gráfica de funciones. &3.-Representación gráfica de funciones polinómicas de primer grado . &4.-Representación gráfica de funciones polinómicas de segundo grado. &5.-Representación gráfica de funciones constantes.

Lección 10.- INECUACIONES.- &1.-Concepto de inecuación. Desigualdad. Signos de desigualdad. &2.-Obtención de soluciones de inecuaciones de una sola incógnita. Principios de equivalencia de inecuaciones.

3.-Explicación del punto de vista adoptado en la concepción del Algebra de 1º de BUP.-

¿Por qué las ecuaciones antes que las operaciones con polinomios?.¿Cómo se puede resolver un problema algebraico sin haber hablado del planteo ?. Es decir , ¿por qué esta distribución y ordenación de contenidos ?.

La respuesta a esta pregunta está determinada por las ideas del aprendizaje desarrolladas en el punto 2 del presente trabajo . En base al analisis enunciado en el citado punto se pueden hacer las siguientes consideraciones correspondientes al tema del programa que se trata:

a) La realidad del alumno a la que corresponde el Algebra que se estudia en primer curso de BUP la constituyen los "Problemas numéricos" de resolución complicada mediante métodos operacionales.

b)La estructura que abarca esta realidad la constituye la que adoptan las expresiones que resultan de traducir las informaciones de los problemas a lenguaje algebraico.

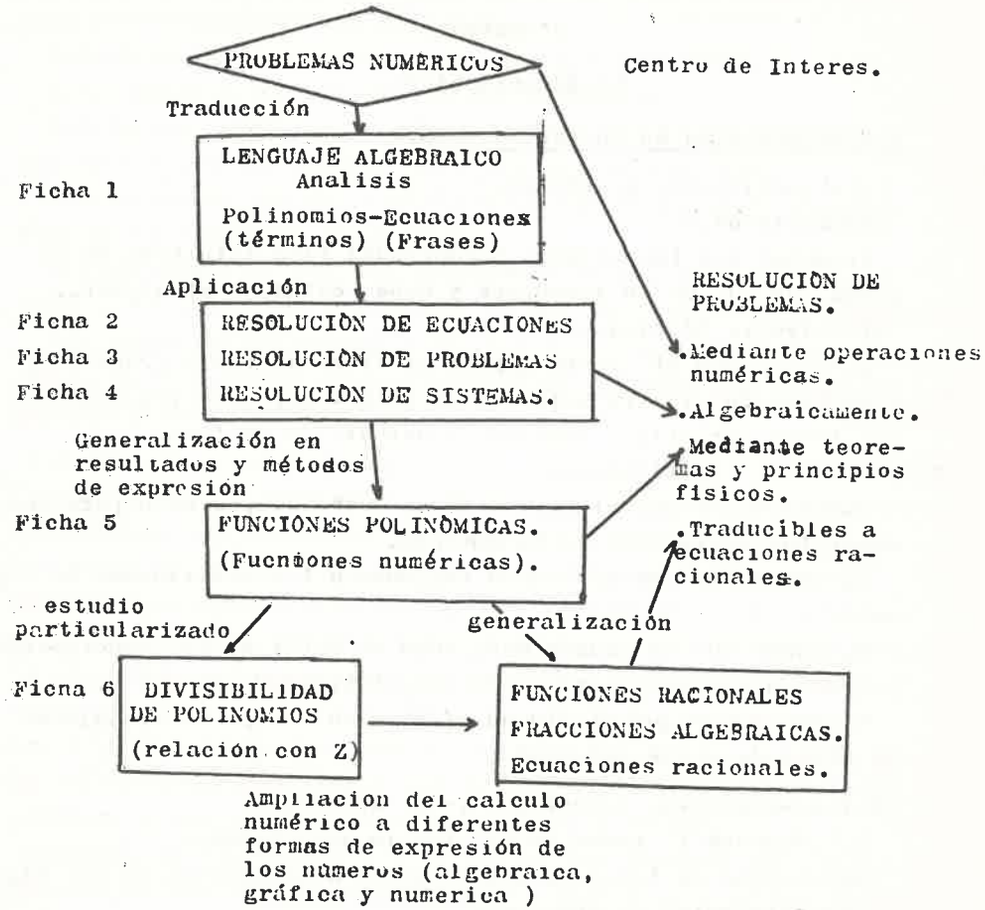
c)Los alumnos de 1º de BUP han manejado los polinomios , ecuaciones , etc , en la E.G.B. , habiendo aprendido las formas de sumar , restar, multiplicar y aun dividir estos entes abstractos a un nivel suficiente para resolver ecuaciones sencillas.

d)El concocimiento que los alumnos tienen de estos conceptos es , generalmente , abstracto e insuficientemente sistematizado . La base intuitiva es mínima . Por tanto la estructuración de ellos exige una clarificación del valor de los elementos algebraicos (diferenciación de polinomio-término de ecuación-frase y de función-relación )y una relación,con los elementos ya asumidos del lenguaje , lo mas amplia posible (la suma de polinomios es la suma de expresiones que se refieren a un mismo número , la resolución de una ecuación es la obtención de una frase equivalente a la primera que indique el valor númérico del número desconocido en principio , y la representación gráfica de una función es la traducción,al único lenguaje posible,de la existencia de una infinitud de soluciones que aparecen sistematizadas ).

e)Por tanto el organigrama de los contenidos y las operaciones intuitivas que hay que realizar para introducir y estructurar los contenidos siguientes es la :



ORGANIGRAMA DE LOS CONTENIDOS DEL ALGEBRA DE 1º de BUP.



## 2ª Parte.

## LA EXPERIENCIA.-

### 1.-Programación de la experiencia.-

1.1.1.-Objetivos generales.-

Cognocitivos.-

1.-Hacer que los alumnos alcancen una idea intuitiva de la razón por la que se introduce y debe estudiar el Algebra.

Afectivos.- Técnicas.-

2.-Hacer que el alumno emplee el libro de texto , apuntes, y utilice los instrumentos de escritura asi como intercale cuestiones prácticas durante el estudio de un tema.

Actitudes.-

3.-Conseguir que el alumno tenga buena disposición para recibir los contenidos de la materia.

4.-Conseguir que el alumno responda a las actividades de clase.

5.-Hacer que el alumno anteponga el valor de la comunicación y ayuda a sus compañeros a la competitividad con ellos.

6.-Conseguir que el alumno orgnice su tiempo de trabajo en un clima de mayor libertad .

1.1.2.-Objetivos específicos.- El alumno:

1.1.-Conoce la razón de existencia del algebra.

1.2.-Sigue la linea de razonamiento de obtencion de los distintos elementos algebraicos.

1.3.-Ordena , segun una linea intuitiva , los conceptos algebraicos y descubre las relaciones que llevan de unos a otros.

2.1.-Emplea el libro de texto en el estudio de un tema que no ha captado suficientemente en clase.

2.2.-Emplea lapiz y papel y resuelve cuestiones de aplicación, mientras estudia.

3.1.-No se cierra en la incomprensión de un concepto.

3.2.-No pierde el tiempo con otros asuntos ajenos al tema de estudio.

4.1.-Sigue el estudio de las fichas en las horas de clase previstas.



4.2.-No pierde el hilo conductor de la argumentación realizada para introducir los contenidos.

5.1.-Procura ir al mismo ritmo que sus compañeros.

5.2.-Espera a los companeros mas atrasados.

5.3.-Ayuda a los compañeros de equipo que no comprenden un concepto o que han perdido el ritmo por alguna razón.

5.4.-Colabora con sus compañeros a que el ritmo de realiaación de la ficha sea el previsto.

5.5.-Antepone el que sus compañeros de equipo resuelvan la ficha a la obtención individual de una calificación mas alta.

6.1.-Organiza su tiempo de manera adecuada a su ritmo.

6.2.-Es consciente de la libertad de elección del lugar de estudio y hora de hacerlo.

1.2.-Método y actividades.-

.Realización de unas fichas de trabajo personalizado para que los alumnos las resuelvan en equipos y , fundamentalmente,en las horas de clase.Estas fichas se realizaran de manera que puedan repartirse a cada uno de los alumnos de manera gratuita , para lo cual se realizarán a multicopista o fotocopiadora .Teniendo en cuenta que en las fichas aparecen figuras no necesariamente compuestas por lineas rectas , resulta mucho mas efectivo la fotocopiadora , en caso de que se disponga de la multifotocopiadora.(Las que presento se realizarón,las dos primeras a multicopista y las restantes a fotocopias ).

.Entrega de las fichas a cada uno de los alumnos del grupo. Trabajo de los alumnos siguiendo las directrices de las fichas durante un tiempo determinado(que resultó ser el siguiente: Ficha 1. 4 clases , ficha 2 , 5 clases; 3 , 5 clases ; 4 , 5 clases y 5 , 6 clases).

.A la vista de la marcha de la clase realizaré o no un resumen de los conocimientos encerrados en la ficha o bien dedicaré una clase a la resolución de dudas surgidas a lo largo del estudio. (En la experiencia añadí una hora de clase mas a las fichas 3 , 4 y 5 , en la que comencé por dar los resultados de los ejercicios propuestos y el resto lo dediqué a resumir los contenidos. Especialmente en el caso de los sistemas se hizo necesario esto , lo que da a entender que la ficha no es todo lo esprícita que debería.).

.Una vez transcurrido el tiempo dedicado a cada ficha realizaré un ejercicio de control , resuelto de forma individual y cuyas cuestiones contrastaran el alcance de los objetivos previstos al principio de cada ficha. (En la experiencia realicé un examen de media hora para la primera ficha dedicando la otra media hora de esa clase a la corrección colectiva de la misma. Las demas fichas fueron evaluadas mediante un ejercicio que duró la hora completa siendo de destacar que el que mas tiempo les exigió fué el de sistemas de ecuaciones , ejercicio en el cual se produjeron los resultados mas desfavorables) (Despues de las 34 clases dedicadas en total al estudio y evaluación periodica de las fichas realicé un ejercicio resumen para aquellos alumnos que habian alcanzado una calificación de insuficiente mediante los ejercicios periodicos y que generalmente habian alcanzado una calificación de insuficiente en algun nivel mínimo de los previstos en la programación larga elaborada por el seminario. Asi mismo , y como forma de contrastar los resultados alcanzados mediante las fichas , realicé un examen planteado por un compañero del seminario en base a los contenidos que yo le comunique que había tratado pero sin determinarle los objetivosque había evaluado ; la calificación de este ejercicio fué hecha por el profesor que la planteo.).

A continuación figuran las fichas entregadas para estos temas:



2.-Fichas.-

FICHA 1.-ELEMENTOS ALGEBRAICOS.-

1.-Al final del estudio del tema que comienza con esta ficha debes saber hacer:

1.-Conocer y clasificar las distintas expresiones algebraicas.

2.-Traducir expresiones numéricas al lenguaje algebraico empleando teoremas , si es necesario.

3.-Resolver problemas numéricos , tanto reales como abstractos , dados en forma de ecuación.

Una vez estudiada la ficha 1 presente y realizadas las activodades que en ella se señalan debes ser capaz de :

1.1.-Conocer el concepto de polinomio.

1.2.-Conocer el concepto de frase algebraica.

1.3.-Conocer el concepto de ecuación.

2.1.-Expresar algebraicamente términos númericosdados en lenguaje habitual.

2.2.-Expresar algebraicamente relaciones numéricas dadas en lenguaje habitual.

2.3.-Interpretar mediante palabras , polinomios y frases algebraicas.

2.-Desarrollo del tema.-

Deberás ir estudiando el Tema en los libros y apuntes que se señalan en el Guión , haciendo las cosas que se indican (que generalmente vienen señaladas con el símbolo $ y un número ) y rellenando los huecos.

Para trabajar en la presente ficha 1 dispones de cuatro clases, de manera que el tiempo que pierdas en clase lo tendrás que recuperar por tu cuenta . En la quinta clase realizaremos un ejercicio sobre lo que debes conocer al trabajar esta ficha, segun se indica en los parrafos anteriores.

3.-GUION.-

1.-Dos formas de resolver problemas numéricos.-

.Piensa en el siguiente problema:

"Según una antigua leyenda , había en un bosque un arbol que tenía el tronco hueco . Si en el tronco se depositaba una cierta cantidad de dinero , el tronco devolvía el doble. El arbol estaba escondido entre los demas y solo conocia su lugar un viejo hechicero , quien ,por hacer esta operación , cobraba 24

monedas de las que resultaban de la operación. Un señor quiso probar este hecho y le dió al hechicero una cierta cantidad de monedas , este le devolvió el doble y de él se cobró sus 24 monedas . Ilusionado el señor volvió a darle el dinero resultante y el hechicero repitió la operación .Hizo el señor, por tercera vez consecutiva , la entrega y el arbol devolvió el doble de lo que habia depositado en él , pero al cobrar el hechicero las 24 monedas resultó que no quedaba ninguna para entregar al desilusionado señor . ¿Que cantidad de monedas entregó el señor la primera vez ?. ".

($.1).-Durante cinco minutos intenta resolverlo .

.Se puede resolver de dos maneras: LA PRIMERA consiste en pensar: "Si el hechicero se quedó con 24 monedas y no devolvió nada tras la tercera operación es porque el tronco habia dado exactamente 24 monedas . Estas eran el resultado de haber doblado la cantidad colocada en segundo lugar y haberse cobrado el hechicero sus 24 monedas correspondientes, luego en la segunda ocasión el arbol dió : _____ monedas . ($.2)(Sigue haciendo el mismo razonamiento y calcula el número de monedas que el senor entregó por primera vez al hechicero rellenando el siguiente esquema:

| recibe el señor | dá el arbol | se coloca en el arbol |
|---|---|---|
| 0 monedas | ------ ---- | 3ª vez. |
| _____ | ------ ---- | 2ª vez |
| _____ | ------ ----- | 1ª vez) |

.La SEGUNDA forma consiste en suponer que la cantidad de monedasentregadas en primer lugar es un número conocido N , entonces :

1ª entrega: N el arbol dá : 2N , el hech. entrega 2N - 24

2ª entrega: 2N - 24 " 2(2N - 24) " _____

3ª entrega: _____ " _____ " _____ =0.

($.3).(Resuelvelo de esta segunda forma ).

. Tambien de estas dos formas se pueden resolver los problemas siguientes:

1)Los tres cuartos de un queso valen 300 ₥ .¿Cuanto vale el queso completo?. ($.4).(Resuelvelo numéricamente , es decir de la primera forma.).

La segunda consistirá en considerar que el queso vale x ₥ con lo que el enunciado se traduciría en la forma : (3/4).x=300 con lo que : x = 300.4/3

($.5).(Calcula la solución y comprueba que verifica la condición del enunciado.).

($.6).(Resuelve de las dos formas el problema : "Un señor tiene una cantidad de dinero que es igual al triple de la que tenía antes de cobrar 600 ₥". ¿Cuanto dinero tiene este señor ?. )

.Asi pues vemos que hay otra (la primera forma la estudiamos ya en los problemas numéricos y es a la que generalmente se le llama "la cuenta de la vieja" ) forma de resolver problemas numéricos que llamaremos ALGEBRAICA y que consiste en representar mediante una letra , a la que llamaremos incógnita (o variable segun el caso) , el número buscado y traduciendo el problema dado a una expresión en la que solo aparezcan los signos matemáticos y estas letras.





&2.-CONCEPTO DE FRASE ALGEBRAICA.-

($.7).(Expresa en forma algebraica - sustituyendo el número desconocido por una letra y las palabras de operaciones matemáticas por el signo correspondiente - las siguientes expresiones:

a)El doble de un número es igual a la suma de dicho número y 3.
b)Doce es igual al doble de un número.
c)La suma de un número y tres es igual a siete.
d)La suma de un número y seis es igual al triple de dicho número. ).

(.8).(Expresa con palabras las siguientes expresiones algebraicas:

e) x + 7 = 2x , f) 6.x = 12 , g) x + 4 = 7 , h) x + 12 = 4x ).

.Para encontrar un número que verifique cada uno de los enunciados anteriores piensa: e)¿que número hay que sumar a 7 para que resulte su doble ?.h)¿Que número hay que sumar a otro para que resulte su cuádruple ?.Efectivamente habrá que sumarle su triple. Los f) y g) son evidentes una vez traducidos a palabras.

.Observa que las expresiones algebraicas te ayudan a la resolución de problemas numéricos pero que la traducción a palabras de las expresiones algebraicas te ayuda a calcular el valor buscado en los problemas , asi como a comprobar si la solución obtenidas es válida .

(.9).(Traduce los enunciados de los problemas 2 , 3 y 6 de la página 271 del libro de texto a expresiones algebraicas , interpreta estas por medio de palabras e intenta calcular de esta forma el valor que los verifica .).

.Considera las siguientes expresiones:
a)La mitad de un número.
b)Suma del cuadrado de un número y el producto de dicho número y tres.
c)El cuadrado de la suma de un número natural y tres es menor que cinco.
d)El cubo de un número es igual a ocho.
e)La suma de un número negativo y cinco es mayor que tres.
f)Diferencia entre un número y cinco.

(.10).(¿Puedes encontrar números que verifiquen cada una de ellas?. ¿De cuales no?. ¿En que se diferencian estas de las otras?. )

.Observa que las c) , d) , e) contienen una relación . La de c) :"es menor que". ($.11).(¿cuales son las de d) y e)?.)

.A las expresiones que tienen signo de relación las vamos a llamar FRASES ALGEBRAICAS , y a las que no lo tienen TERMINOS ALGEBRAICOS.

($.12).(De las siguientes expresiones indica cuales son frases y cuales términos subrayando en las frases la relación:
a)La mitad de la edad de un hombre es 38 años.
b)La suma de la edad de un hombre y cinco.
c)La suma del cuadrado de la edad de un hombre y cinco años hacen 30.
d)

d)El doble del producto del cuadrado de unnúmero y el cubo de otro.
e)La mitad de un número es menor que su cuadrado.
Intenta encontrar alguna solución de las frases. ).

($.13).(Lee la pregunta 16.1 de la página 163 del libro de texto . CONCEPTO DE EXPRESIÓN ALGEBRAICA. ).
($.14).(¿Toda expresión algebraica es una frase ?. ¿Puedes calcular soluciones de cualquier expresión algebraica?.).

.A las frases algebraicas en las que el signo de relación es el de igualdad las vamos a llamar ECUACIONES.

.A las frases algebraicas en las que el signo de relación es el de "mayor que" , "menor que" , mayor o igual que " y menor o igual que" las llamaremos INECUACIONES.

&3.-CONCEPTO DE TÉRMINO ALGEBRAICO.-

.Trataremos de analizar los elementos que entran a formar parte de las frasesalgebraicas.
.Consideremos la frase algebraica : $2.x^3 = x + 1$ ($.15).(Expresala con palabras.).Observa que se componen de dos términos y un signo de igualdad (en este caso, pero puede ser de desigualdad si se trata de una inecuación).
($.16)(Explica brevemente en que se diferencian los términos de las frases).
.Efectivamente un término algebraico no tiene sentido completo y por tanto , no tiene sentido pretender calcular el valor del número al que se refiere la variable.

($.17)(Lee 16.3 página 166 , 167 y 168 y 16.4 página 168:Concepto de monomio . Suma y diferencia de monomios. Escribe la definición de monomios y sus elementos. Escribe la definición de grado de un monomio.)

($.18)(Señala cuales de las siguientes expresiones algebraicas son monomios y determina su grado. Subraya en rojo los coeficientes y en azul las partes literales.

$2x^3$ $\quad 3x^2 + 1$ $\quad ((2/3).x.y^2)^3$ $\quad 3 = x$ $\quad -ux^2.7$

$2 - 5a$ $\quad x.2.x^2$ $\quad x + 1 = 3$ $\quad 2.xy$ $\quad 3^3.x$ )

($.19)(Resuelve los ejercicios 16.1 página 173 del libro de texto y 16.3 página 174.).

($.20)(Lee 17.1 página 178 . CONCEPTO DE POLINOMIO. Escribe la definición de polinomio y grado de polinomio. Resuelve 17.1 página 184).

($.21)(¿es un polinomio una frase completa? ¿Por qué?¿Que signo de relación aparece en él ?¿Es un término ?. )

($.22)(Traduce a palabras el siguiente polinomio y calcula el valor de "x"que lo satisface : $x^2 - x + 3$ )

($.23)(¿En que se diferencian los polinomios de las ecuaciones?)

($.24).(Determina el grado , coeficientes y parte literal de los siguientes monomios y polinomios:
a)Doble del cuadrado de un número. b)Mitad del producto de dos números.
c)Suma del cuadrado de un número y 3
d)Triple del producto del cuadrado de un número y el cubo de otro.



FICHA 2.- ECUACIONES.-

1.-Al final del estudio del tema en la ficha debes saber hacer:

1.4.-Conocer el concepto de IDENTIDAD.

1.6.-Diferenciar las ecuaciones de las identidades.

3.1.-Resolver ecuaciones de primer grado.

3.3.-Resolver ecuaciones de segundo grado.

3.5.-Resolver ecuaciones trinomias.

2.-GUION.-

&1.-ECUACIONES E IDENTIDADES.-

($.1)(Expresa en lenguaje habitual la frase $2.x = \frac{6}{3} . x$ . Intenta resolverla. ¿De que grado es el monomio del primer miembro?¿Y el del segundo ?. ¿En que se diferencian ambos monomios?.).

.En efecto esta frase viene a decir : "El doble de un número es igual al doble de ese número ". (¿Que número verifica esto?)

.A las frases algebraicas de este tipo se les llama IDENTIDADES.

($.2)(Lee en página 256 la preguna 24.1 :ECUACIONES E IDENTIDADES y explica la diferencia que existe entre una ecuación y una identidad. ).

($.3).(¿Cuales son las soluciones de una identidad?¿Cuantas ?).

($.4).(De las siguientes expresiones algebraicas señala las ecuaciones e identidades y explica la diferencia resolviendo las ecuaciones:

a) $a + b + c = 3.(\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3})$ $\quad$ b) $2.x + 5 = 2.x + 7$.

c) $3.x - 2 = 5.x - 2$ $\quad$ d) $x^2 - 7 = -7 + x^2$ e) $x + 5 - 5 = x$. )

&2.-ECUACIONES EQUIVALENTES.-

.La frase :"El doble de un número vale 10" la podemos decir tambien de la forma : "La suma del doble de un número y una vale once" . ($.5)(Traduce ambas expresiones algebraicas y resuelve las ecuaciones que resultan. ).

.Sea ahora la frase : "El cuadrado de un número vale trece". ¿Como la dirías de otra forma?. ($.6)(Expresa esta y la que tu encuentres en forma de ecuación . Haz lo mismo con la siguiente : "La mitad de un número vale 17". ).

($.7)(Copia de la página 256 la pregunta 24.2 la definición de ecuaciones equivalentes ).

.Para obtener una ecuación equivalente a otra tendremos que realizar operaciones que se contraresten entre si . Como cada ecuación tiene dos miebros , las operaciones que podremos hacer en una ecuación para obtener otra equivalente seran :
S).Sumar un mismo número a los dos miembros de la ecuación:
La $2x - 1 = 5$ es equivalente a la $2x = 6$ ¿Que número hemos sumado?.
R).Restar un número a los dos miembros de la ecuación:
La $3x + 2$ es equivalente a la $3x =$ _____.
M).Multiplicar los dos miembros de la ecuación por un mismo número:
La $\frac{x}{2} = 5$ es equivalente a la $x =$ _____.

D).Dividir los dos miembros de la ecuación por un mismo número:
La $3x = 4$ es equivalente a la $x =$ _____.
P).Elevar al mismo exponente los dos miembros completos de la ecuación :
La $\sqrt[3]{x} = 5$ es equivalente a la $x =$ _____.
Ra).Extraer la raiz del mismo indice de los dos miembros de la ecuación:
La $x^2 = 7$ es equivalente a la $x =$ _____.

(\$.8)(Une con flechas las ecuaciones de estas dos columnas que sean equivalentes:

| | |
|---|---|
| $3(x - 2)$ . | . $x^2 = 3$ |
| $4x = \frac{21}{9}$ . | ."El triple del número b es igual a la diferencia entre el quíntuplo de a y 12" |
| $5a + 3b = 12$ . | ."La suma de un número y su doble es igual a cero". |
| "Suma del cuadrado de un número y dos es igual a cinco" | . $12x - 7 = 0$ |
| | . $5a = 12 - 3b$ |
| "Cuadrado de la suma de un número y su doble es igual a cero" | . $6x - 12 = 14$. |

Coloca sobre cada flecha la letra correspondiente a las operaciones que hay que realizar para pasar de la ecuación de la izquierda a la de la derecha. ).

## &3.-RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.-

. Gracias a las operaciones S,R,M,D,P y Ra la resolución de ecuaciones se hace mas sencilla , ya que mediante ellas se puede pasar de una ecuaciónde expresión complicada a otra cuya solución sea mas evidente.

.La ecuación :"La suma entre el cuádruple de un número y ocho vale diez y seis" , es dificil de resolver sin simplificar (\$.9)(Intenta resolverla mentalemente sin reducir el enunciado) Pero si la expresamos en forma algebraica , resulta : _____ que es equivalente a la "$x + 2 =$ _____".(\$.10)(¿Mediante que operación se pasa de la primera a la segunda?/)y esta al traducirla al lenguaje habitual es de solución evidente. (\$.11)(Escribela y trata de resolverla mentalemente ahora ).

(\$.12)(Estudia en la página 257 , la preguna 24.3 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO. ).

(\$.13)((Resuelve los problemas 24.2: 1), 2) , 4) y 5) de la página 267 ).(En todos ellos ,, y un paso antes de despejar las incógni tas, traduce al lenguaje habitual la ecuación resultante y trata de calcular la solución mentalemente ; despues despeja y contrasta los resultados obtenidos. ).

NOTA IMPORTANTE.- La raya de fracción actua como paréntesis, de manera que cuando aparezca un signo menos delante de una fracción deberas considerar que afecta a todo el numerador de la misma.

## &4.-RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.-

.La ecuación de segundo grado "$x^2 = 4$" se traduce , empleando la operación P en $x = 2$ y $x = -2$ (ya que "números cuyo cuadrado es cuatro son tanto 2 como su simétrico ).

.La $x^2 - 4$ es equivalente a la $x^2 = 4$ .(En virtud de la operación _____ )y ya está resuèlta.

.La $x^2 - 2x = 0$ es equivalente a la $x^2 = 2x$ que se leería :"_____".

(\$.14)(¿Cual es el número que al elevarlo al cuadrado coincide con su doble? ¿Por que número hay que multiplicar "x" para que resulte su cuadrado?. Luego , si "El producto de "x" por "x" es igual al producto de "x" por dos " será porque $x =$ _____. )

(\$.15)(Traduce al lenguaje habitual la "$x^2 + 2.3x + 3^2 = 0$)
Será : "El cuadrado de un número mas el doble producto de dicho número y tres , mas _____ es igual a cero".
Luego se podría expresar de la forma:
$(x + 3)^2 = 0$ , es decir : $x + 3 = 0$ y de aquí : $x =$ _____.

.La $(x + 3)^2 = 16$ aparecerá expresada en forma de ecuación en la forma : $x^2 + 6x + 9 = 16$ ---- $x^2 + 6x +$ _____ $= 0$.

.Pero $(x + 3)^2 = 16$ --- $(x + 3)^2 = 4^2 = (-4)^2$ -- $x + 3 = 4$
$x + 3 = -4$
que son ecuaciones de primer grado facilmente resolubles.

.Luego si las ecuaciones de segundo grado se pudieran reducir a cuadrados de binomios , mediante la extracción de la raiz cuadrada de los dos miebros de las ecuaciones resultantes,quedarían reducidas a ecuaciones de primer grado que ya sabemos resolver. Vamos a intentar convertir una ecuación de segundo grado cualquiera en el cuadrado de un binomio:

.Consideremos la $x^2 - x - 6 = 0$ , para tomarla como cuadrado de un binomio tendremos que considerar que , en ese binomio , $x^2$ es el cuadrado del primer monomio ( es decir,"el cuadrado del primero" ), y "$-x$" : "menos el doble producto del primero (x) por el segundo ", luego el segundo monomio será 1/2 , para que "$-2.x.(1/2) = -x$ " , entonces la ecuación la podremos escribir en la forma:

$$x^2 - 2.\frac{1}{2}.x + (\frac{1}{2})^2 = 6 + (\frac{1}{2})^2 \text{ --- } (x - \_\_\_\_)^2 = \frac{7}{4}$$

$$\text{---- } x - \frac{1}{2} = +\sqrt{\frac{7}{4}} \quad \text{y} \quad x - \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{7}{4}}$$

(\$.16)(Intenta resolver de esta forma las $x^2 - 2x + 1 = 0$ y la $x^2 - 4x + 3 = 0$ )

.Para resolver en general consideremos la "$ax^2 + bx + c = 0$" y realicemos las operaciones anteriores:
"$ax^2$" , será "el cuadrado del primero".
"bx" será el doble producto del primero por el segundo".
Luego el primer término del binomio será $\sqrt{a}$ . x .
Como "$(2.\sqrt{a}.x)$.(segundo término) = b.x ",deberá ser este segundo término igual a $b/(2\sqrt{a})$ con lo que quedará:

$$(\sqrt{a}.x)^2 + 2\sqrt{a}.x.\frac{b}{2.\sqrt{a}} + (\frac{b}{2.\sqrt{a}})^2 = -c + (\frac{b}{2.\sqrt{a}})^2 ,$$

es decir: $(\sqrt{a}.x + \frac{b}{2.\sqrt{a}})^2 = -c + (\frac{b}{2.\sqrt{a}})^2$. Ahora bien si el segundo miembro de esta igualdad resultara negativo - teniendo en cuenta el valor de "a" , "b" y "c" - no podrá veri

ficarse esta última igualdad , ya que el primer miembro es positivo . En este caso la ecuación no tendría solución.
Supongamos que es positivo , por la operación Ra, resulta:

$$\sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{2.\sqrt{a}} = \pm\sqrt{-c + \left(\frac{b}{2.\sqrt{a}}\right)^2}$$

y despejando y haciendo operaciones , resulta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

(\$.17)(Reduce la expresión anterior hasta obtener esta.).

.Observa quesi hemos considerado que "$ax^2$" es "el cuadrado del primero" deberá ocurrir que "a" sea positivo, luego al aplicar esta fórmula exigiremos que el coeficiente de "$x^2$" sea positivo. En caso de que una ecuación lo tenga negativo obtendremos una equivalente,a la que se le pueda aplicar la fórmula , multiplicando por (-1) .

(\$.18)(Investiga si las ecuaciones siguientes tiene solución:

$2x^2 + 5x - 1 = 0$ $\quad 3x^2 + 7x + 1 = 0$ $\quad x^2 + \sqrt{5}.x + \sqrt{2} = 0.$

(\$.19)(Resuelve las ecuaciones de la página 287 , ejercicio 25.1, 5) y 4) ,6), 7) , 9) y 20) .).

(\$.20)(Lee en la página 283 la pregunta 25.10: ECUACIONES TRINOMIAS. Resuelve los problemas 25.13 , 1) , 2) y 3). ).



## FICHA 3.- PLANTEO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS

1.-Al final de estudio y resolución de las actividades de la ficha debes saber hacer:

2.5.-Descubrir el teorema o la propiedad que hay que utilizar para resolver cada problema.

2.6.-Traducir a expresiones algebraicas enunciados de problemas numéricos resolubles mediante el Algebra.

2.7.-Aplicar teoremas y propiedades para resolver problemas,

2.8- Reconocer la relación existente entre la solución de las ecuaciones que aparezcan en la traducción algebraica de un problema y el enunciado del mismo.

2.-GUION.-

### G1.-PLNATEO DE PROBLEMAS.-

(\$.1)(Lee en la página 263 , la pregunta 24.7 , "PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA", y la 24.8, EJEMPLOS DE RESOLUCION.)

(\$.2).(Resuelve los ejercicios 24.2, 24.3,24.4,24.5,24.7 y 24.8 página 270. Ademas 24.9 - empleando la incógnita para representar el número de anos que deben transcurrir -, 24.10 - empleando como incognita la edad del hijo - , 24.11 - tomando como incognita el número de gailinas - , 24.14 ,24.15 y 24.16 empleando la incognita para representar a uno solo de los números, y 24.17 . Con todos ellos elebora , mientras los resuelves , un cuadro como el que viene a continuación:

| nº Problema | Datos | Magnitud desconocida | Ecuación | Solución del problema |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

### G2.-PLANTEO DE PROBLEMAS QUE EXIJAN EL EMPLEO DE TEOREMAS O PROPIEDADES.-

.Recuerda e interpreta los siguientes teoremas y fórmulas.
(\$.3).(Aprendetelos de memoria durante la semana que dediques al estudio de la ficha . Para ello leelos con atención y repitelos cuidando , sobre todo , de relacionar los datos conocidos, en cada uno de ellos,con los desconocidos. En caso de que alguno se te olvide facilmente , copialo unas cuantas veces. Durante cinco minutos cada miembro del equipo se deberá someter a preguntas de los otros miembros acerca de estos teoremas . (Por ejemplo:¿Cuanto vale la suma de los ángulos de un triangulo cualquiera ?)).

(\$.4)(Interpreta el significado de las letras que anteceden a cada uno de los teoremas y propiedades siguientes:

PROPIEDADES. TEOREMAS.-

Tr.S.- Superficie de un triangulo = $\frac{(\text{longitud base} \times \text{longitud altura})}{2}$

Tr.A.-La suma de los ángulos de un triangulo vale 180º.

Tr.P.-Teorema de Pitagoras.- En los triangulos rectángulos se verifica que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Re.S.-Superficie de un cuadrilátero rectángulo = Longitud de la base x longitud de la altura.

Po.S.-Superficie de un polígono regular = $\frac{1}{2}$(longitud perímetro x apotema ).

C.L.-Longitud de la circunferencia = 2. . Longitud radio.

C.S.-Superficie del círculo = .(longitud radio)$^2$.

Pr.V.-Volumen prisma = Superficie base x longitud altura

Ci.V.-Volumen cilindro = Superficie base x longitud altura.

Pi.V.-Volumen Pirámide= $\frac{1}{3}$(superficie base x longitud altura)

Co.V.-Volumen Cono = $\frac{1}{3}$(superficie base x longitud altura )

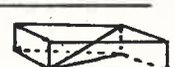
Es.V.-Volumen esfera = $\frac{4}{3}$(longitud radio)$^3$.$\pi$ .

Es.S.-Superficie esfera = 4.(longitud radio)$^2$.$\pi$ .

Vm.-Velocidad media = $\frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}}$.

Cif.N.-El número 325 = 3.100 + 2.10 + 5 . El número ABC (es decir , en el que A es la cifra de las centenas , B la de las decenas y C de las unidades ) = A.100 + B.10 + C

(\$.5).(Indica que propiedad o teorema deberas utilizar para resolver problemas en los que :

| Conozcas | te pidan | Propiedad |
|---|---|---|
| .Longitud de dos lados de un triangulo rectángulo | longitud del otro | |
| .Superficie de un cuadri. rectángulo y relación numérica entre las longitudes de los lados | longitudes de los lados | |
| .Superficie de un trian. rectángulo y longitud de un lado (o relación numérica entre los lados ) | longitudes de los otros dos lados. | |
| .Longitud de una circunferencia | Superficie del circulo contenido. | |
| .Longitud de los lados de un cuadrilatero rectángulo | Longitud de la diagonal. | |
| .Longitud de las aristas de un prisma rectangular | Diagonal del prisma |  |
| .Espacio recorrido por un movil y velocidad que lleva | Tiempo que emplea en recorrerlo | |



| Conozcas | Te pidan | Propiedad |
|---|---|---|
| .Valor de las cifras de un número y valor del número | .Lugar que ocupan las cifras en el número | |
| .Longitud de la generatriz de un cono y volumen del mismo | Radio de la base y altura. | |
| .Longitud de las aristas de una pirámide recta de base cuadrada | .Volumen de la pirámide | |
| .Superficie lateral de un cilíndro recto y altura | .Volumen del cilíndro. | |
| .Volumen de una bola y superficie que se puede pintar con una lata de pintura | .Número de latas de pintura que se emplearan en pintar la bola | |
| .Longitud del lado de un triangulo equilatero. | .Superficie y altura del mismo. | |

(\$.6)(Pon un ejemplo de cada uno de estos problemas y resuelvelo . Para ello imgina datos de acuerdo con lo que pone en la columna de elementos conocidos. )

(\$.7)(Resuelve los problemas 24.21 , 22 , 23 , 24, 25 , 26 , 28 y 18 - tomando como incognita la distancia que hay desde Madrid al punto de encuentro . ¿Que coche tardará mas en recorrer la distancia?¿Cuanto tarda el primero ?¿Cuanto vale la incognita?¿Cuanto tarda el segundo ?¿Cual es la velodidad del segundo?.Resuelve el 19 tomando como incognita la distancia entre la ciudad de la que parte el coche que lleva una velocidad menor y el punto de encuentro. ¿De que ciudad estará mas cerca el punto de encuentro?.¿Será la incógnita mayor que 300?. Resuelve tambien el 12. ).

.Para resolver los ejercicios de (\$.7) situalos en un cuadro como el que se dió en la primera hoja de esta ficha , añadiendo una columna en la que indiques la propiedad o propiedades que debes utilizar para relacionar los datos con la incognita.

## FICHA 4.- SISTEMAS DE ECUACIONES.-

1.-Al final del estudio de la ficha debes saber hacer:

3.10.-Conocer los tipos de sistemas y sus definiciones.

3.6.-Estudiar si un sistema tiene o no solución y determinar si el número de ellas es limitado o ilimitado.

3.7.-Resolver sistemas de primer grado de dos ecuaciones con dos incognitas.

3.9.-Resolver sistemas de segundo grado de dos ecuaciones con dos incognitas.

2.6.-Plantear problemas algebraicos mediante sistemas.

2.-GUIÓN.-

### &1.-ECUACIONES CON MAS DE UNA INCOGNITA.-

(\$.1)(Lee en la página 357 , 31.3 : PROBLEMAS CON DOS O MAS INCOGNITAS. ).

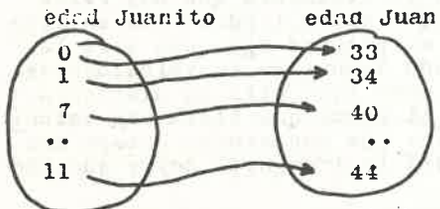
(\$.2)(Plantea los problemas de la página 361: 31.1y 31.2 , empleando ecuaciones con mas de una incógnita).

### &2.-SISTEMAS DE ECUACIONES.-

Las frases utilizadas ahora tienen dos variables y por tanto no tendrán solución única , sino que cada variable toma un valor al darle alguno a la otra . Así por ejemplo , en el problema siguiente:

Problema P.- Juan ha sido padre en el año 82 , teniendo entonces 33 anos ¿Dentro de cuantos anos la edad de Juan será el cuádruple que la de su hijo Juanito , recien nacido en el año 82 ?.

La primera relación la escribiriamos : " $y = x + 33$ " , siendo $y$ la edad de Juan y $x$ la de Juanito , lo cual significa que:




y obteniendo edades relacionadas observamos que cuando Juanito tiene 11 anos , su padre tiene 44 , que es su cuádruple, luego dentro de 11 años ( es decir en 1993) se verificarán las dos condiciones del problema.

¿Le recuerda algo este gráfico?. ¿Recuerdas como se llaman los diagramas de conjuntos que utilizan la linea cerrada (mas o menos redonda) para meter dentro de ella sus elementos?. Efectivamente DIAGRAMAS DE VENN.

Efectivamente este gráfico corresponde a una relación entre conjuntos numéricos representantes de edades y ligados mediante la frase: "La edad de Juan (y) es la suma de 33 años y la edad de Juanito (x) " , o bien : "Juan es 33 años mayor que su hijo Juanito" , o : " $y = x + 33$ ".

(\$.3).(Lee en la página 340 , 30.1 ; ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS.)(Expresa la relación que existe entre la edad de Juan y la de Juanito en forma IMPLICITA y determina su grado.).

(\$.4)(Lee 30.2 : SISTEMAS DE ECUACIONES. Página 341 ).



(\$.5)(Expresa los ejercicios de la página 361 , 31.7 y 31.8 y el problema P como sistemas. ).

.Cada ecuación del sistema determina una relación.

(\$.6).(Expresa estas relaciones correspondientes a los problemas anteriores ; dibuja los diagramas de Venn y determina tres pares de números relacionados mediante las relaciones de los problemas 7, 8 y P con el -1 .).

### &3.-TIPOS DE SISTEMAS.-

.Supongamos que leemos en una revista de cotilleo que:
i)Henry Kissinger y Maria Sarmiento tienen entre los dos 160 anos.
y que en otra revista,no menos de fiar que la anterior , leemos que:
ii)Maria Sarmiento nació en el final del siglo XVIII.
¿Que diremos de estas dos informaciones?.

.Supongamos ahora que la portera de nuestra casa nos dice:
i)Entre la Tomasa y su hija Federica tienen 60 anos.
pero que la frutera del barrio , que sabe todo , nos dice:
ii)La Tomasa y la Federica tienen entre las dos 85 años .
(\$.7)(Traduce ambas frases a expresiones algebraicas y forma un sistema .¿Que soluciones tendrá este sistema?¿Como podremos decir que son las informaciones entre sí ?. )

.Pues bien , en casos como este se dice que el sistema es INCOMPATIBLE (Es decir , igual que las informaciones entre sí ).

(\$.8)(Estudia si son compatibles o no los siguientes sistemas: leyendolos e intentando resolverlos:

$$\begin{matrix} x + y = 3 \\ x + y = 7 \end{matrix} \; a),b) \begin{matrix} x+2y = 5 \\ 2x+2y = 1 \end{matrix}, c) \begin{matrix} x-2y = 3 \\ 2x+4y = 1 \end{matrix}, d) \begin{matrix} 2x-3y = 7 \\ 4x+6y = 5 \end{matrix}, e) \begin{matrix} x=y - 3 \\ x=y + 5 \end{matrix}$$

Igualmente estudia si los sistemas derivados de la traducción de las siguientes informaciones son compatibles o no:

f)i.-Tengo el doble de gallinas que de cortijos . ii.-Tengo el triple de cortijos que de gallinas.
g).i.-Sevilla tiene 3.208.584 habitantes menos que Madrid.ii.-Entre Sevilla y Madrid tienen 6.165.206 habitantes.
h)Dos kilos de peras y tres kilos de naranjas me han costado 295 ₧ .ii.-A mi hijo le he dado 500 ₧ para comprar tres kilos de peras y dos de naranjas y me ha devuelto 100 ₧ .¿Se ha quedado con algun dinero ?¿Es compatible el sistema?¿Me puedo fiar de mi hijo ?. )

.Supongamos ahora las informaciones siguientes:
i.-Entre el hijo y el padre ganan 3.500 ₧ cada dia.
ii.-A la semana ,tras cinco dias de trabajo , entre el padre y el hijo ganan 17.500 ₧.
(\$.9)(Trata de calcular , con estas informaciones , lo que ganan el padre y el hijo por separado. ¿Tenemos suficiente información para determinar estas ganacias?.¿Como dirias que quedan las cantidades?. Traduce estas informaciones a sistema y trata de resolverlo. ).

¿Como llamarás a este tipo de sistemas ?. Efectivamente estos sistemas son COMPATIBLES , pero no tenemos suficiente información para determinar sus soluciones, por lo que se llaman indeterminados

($.10)(Distingue los sistemas incompatibles e indeterminados de los siguientes:

$2x+3y=5$ ; $x-y=4$ ; $x+2y=5$ ; $3x-y=4$ ; $2x+5y=7$
$x+y=3$ ; $3x-3y=4$ ; $2x+4y=10$ ; $-3x-y=4$ ; $x+y=2$

Traduce los siguientes problemas al lenguaje algebraico y señala el tipo de sistema a que dan lugar:

a)i.-De Córdoba a Sevilla hay doble distancia que de Sevilla a Ecija. ii.-Ecija está a mitad de camino de Sevilla a Córdoba. iii.-He ido de Sevilla a Córdoba y he vuelto y he recorrido el cuadruple de la distancia que hay entre Sevilla y Ecija. ¿Cuantos kilómetros Hay de Sevilla a Córdoba?¿Y a Ecija?.

b)i.-La diferencia entre dos números vale 0. ii.-La mitad de la diferencia entre esos dos números vale 0.

c)i.-Por 7 botellas vacias de Coca-Cola y 3 de zumo me han dado 28 ... ii.-Por 14 botellas de Coca-Cola y ninguna de zumo me han dado 56 ...¿Cuanto me da por cada botella de Coca-Cola y cuanto por cada una de zumo?. ¿Se ha equivocado el comprador?)

($.11)(Escribe las diferencias que existen entre los sistemas incompatibles y sistemas indeterminados completando el siguiente cuadro:

sistemas
- NO tiene solución A) _____
- SI tiene solución B) _____
  - Tiene un número limitado de soluciones C) _____
  - Tiene un número ilimitado de soluciones D) _____

Ejemplos:

A) B) C) D)

## 4.-FORMA DE RESOLVER LOS SISTEMAS.-

($.12)(Lee en la página 343 , 30.5: MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR SUSTITUCIÓN. 30.6.-MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR IGUALACIÓN. 30.7.-MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR REDUCCIÓN. Al tratar el método de reducción recuerda los principios de equivalencia entre ecuaciones y las operaciones que se pueden hacer con una ecuación para obtener otra equivalente a ella- es decir , que tenga las mismas soluciones que la primera - que trataste en la ficha 2.)

($.13)(Resuelve 30.2, 1),3),4),5),6),7) y 31.8,31.11pág. 362)

($.14)(Resuelve 31.25,31.30,31.35,página 363, previa lectura de 31.1 página 351.)

($.15)(Resuelve 31.1:1) , 4) ,10) página 360 ).



## FICHA 5.- FUNCIONES POLINÓMICAS.-

1.-Al final del estudio del tema debes saber hacer:

4.2.-Diferenciar la expresión de una función polinómica de las demas expresiones algebraicas.

4.3.-Conocer los elementos de las funciones : Criterio, Variable independiente . Variable dependiente , Oreigen , Imagen.

5.1.-Conocer la forma de la gráfica de las funciones polinómicas de grado cero , uno y dos.

5.2.-Saber las operaciones que hay que realizar para representar graficamente funciones polinómicas de grados cero , uno y dos.

5.3.-Representar graficamente funciones polinómicas de grados cero , uno y dos.

5.4.-Calcular imagenes y origenes de elementos mediante una función en la que se conozca su criterio o su representación gráfica.

## 2.-GUIÓN.-

### 21.-CONCEPTO DE FUNCIÓN. FUNCIÓN POLINÓMICA. ELEMENTOS.-

.Las ciencias experimentales estudian la naturaleza investigando de que forma se relacionan sus elementos. Así la Metereología trata de descubrir la relación existente entre la presión atmosférica , velocidad del viento ,.. etc y la situación atmosférica (el tiempo que "va a hacer" ). La Medicina estudia la relación existente entre el estado de los organos y las enfermedades , bien para predecirlas , bien para buscar los medios para curarlas.

.De esta forma la Física ha descubierto que la altura en metros que alcanza un proyectil al lanzarlo con un cañón es igual a la suma del opuesto del producto de 5 y el cuadrado del número de minutos empleado y treinta veces el número de minutos empleado. Gracias a esta relación podemos calcular la altura que tiene el proyectil sobre el suelo a cualquier hora.

($.1)(Determina la altura que tiene el proyectil a los tres minutos de haberlo lanzado . Supón que el lanzamiento lo hemos realizado a las nueve de la mañana, determina en estas condiciones :a)Altura que alcanza a las nueve y un minuto y a las nueve y tres minutos y medio. b)Hora a la que su altura es : 3m.,15m. 45 m. y llega al suelo. )
(Escribe la relación que liga el número de minutos despues de las nueve horas (utiliza la letra "x" para representar ese número) con el número de metros de altura que alcanza en ese número de minutos (emplea la letra "y" para representar el número de metros ).
(¿Que tipo de expresión algebraica resulta?. ¿Un polinomio?. ¿Una ecuación ? )

.Efectivamente es una ecuación con DOS INCOGNITAS , es decir, similar a las que empleaste en los problemas con dos incognitas (Recuerda que cuando estudiaste los sistemas interpretaste como RELACIONES cada una de las ecuaciones del sistema ).

.A las relaciones que , como en la anterior , el valor de una magnitud determina de manera única el valor de la otra , las vamos a llamar FUNCIONES.

.Por ejemplo , son funciones las relaciones que existen entre las siguientes magnitudes:

a)Radio de una circunferencia y longitud de la misma.

b)Edad tuya y la de tu padre .

c)Longitud de un cateto de un triangulo rectángulo de hipotenusa 3 cm y longitud del otro cateto.

d)Número de palabras de un telegrama y número de pesetas que cuesta enviarlo.

.NO lo son las siguientes:

e)La que relaciona el número de quinielas que tú haces cada semana con el número de pesetas que ganas con ellas.

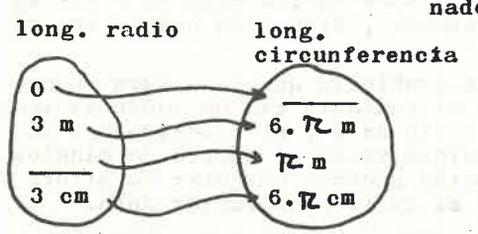
f)La que relaciona el número de habitantes de las ciudades españolas y el número de hombres (habitantes masculinos )de las mismas.

g)La que relaciona el número de metros que hay de distancia de un piso a la plaza de San Francisco y elnúmero de pesetas que su dueño pide po él.

h)Cantidad de cigarrillo que un senor fuma al dia y número de dias que dura vivo este señor.

.Las relaciones que son funciones las vamos a notar de tres formas:

1ª)Mediante unas tablas de valores que escribiremos en forma de diagrama de Venn situando una flecha los elementos relacionados entre sí:




($.2)(Completa el diagrama adjunto , correspondiente a la función a) ).

2ª)Mediante una expresión algebraica que expresa la forma de relacionarse .A esta la llamaremos CRITERIO DE LA FUNCIÓN. En el caso de la función del proyectil , el criterio es:

$$y = -5x^2 + 30x$$

($.3)(Escribe los criterios, d e las funciones correspondientes a los ejercicios a),b) y c) . Para escribir la del d) empieza por preguntar en una oficina de Correos o llamando por teléfono a cuanto cobran la palabra en los telegramas. ).

.En los criterios de las funciones se emplean generalmente las dos letras "x" e "y" . La "x" se emplea para representar la magnitud que se puede variar a voluntad. Asi en a) será el radio , en d) el número de palabras . En el ejemplo del proyectil , la hora a la que medimos la altura . Por esta razón a la letra "x" del criterio de la función se la llama VARIABLE INDEPENDIENTE. Por su parte a la "y" se le llama VARIABLE DEPENDIENTE



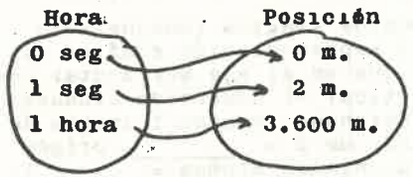
($.4)(Explica brevemente la razón de estos dos nombres y apellidos de las letras del criterio. ).

($.5)(Recuerda el experimento realizado en clase con el muelle y las pesas . Explica si es una función la relación estudiada y señala cuales son las megnitudes . Determina el criterio si es que existe , .Indica que magnitud representará la variable dependiente y cual la independiente. )

3ª)Mediante una gráfica (Esto lo haremos mas adelante. ).

.A las funciones cuyo criterio es una ecuación con dos incógnitas tal que expresada en forma explicita tiene la expresión $y = p(x)$ , siendo $P(x)$ un polinomio , se le llama FUNCIONES POLINÓMICAS.

.Supongamos un coche que recorre una carretera recta vertical que se encuentra numerada de manera que los metros de la parte superior son positivos y los de inferior negativos , con una velocidad de 2 metros cada segundo , y que a las cero horas está en el punto de partida (0 m.)




($.6)(¿En que metro se encontrará a la hora y media de haber salido del punto 0?¿Y al haber transcurrido 13 segundos ? )

Si $x = 1$ ---- $y = 2$ , o sea al segundo de partir está en el m.2.

Si $x = \sqrt{2}$ --- $Y = 2\sqrt{2}$ , o sea , a los raiz de dos segundos de partir esta en el punto $2.\sqrt{2}$.

Tambien se dice : imagen de "1" es "2" , o bien : Origen de 2 es 1.

imagen de $\sqrt{2}$ es ____ , o bien:Origen de $2.\sqrt{2}$ es $\sqrt{2}$.

imagen de 0'7 es ____ , o bien, origen de ____ es 0'7.

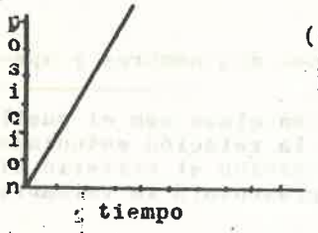
.Cada uno de los pares de valores de "x" e "y" relacionados , es decir (origen ,imagen ) se llama SOLUCIÓN DE LA FUNCIÓN. ¿Cuantas soluciones tiene esta función ?.

($.7)(Resuelve el ejercicio 1ª de la hoja de Ejercicios de funciones polinómicas y determina en él la imagen de 3 y el origen de 37 . El 3 corresponderá con la edad de _____ y su imagen con la de _____. El 37 con la edad de _____ y su origen con la de _____. ).

## &2.-REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES.-

.La tercera forma de expresar funciones es mediante una representación gráfica .. Para ello en unos ejes coordenados (dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto al que llamamos 0 de ambos y que tengan igual longitud de unidades ), se toma la magnitud correspondiente a "x" en el eje horizontal y la correspondiente a "y" en el vertical y se dibujan todos los puntos determinados por los valores de "x" e "y" que están relacionados.

.Asi la representación gráfica de la función correspondiente al movimiento del coche , es la de la figura adjunta.




($.8)(Dibuja la gráfica de la función del problema 1 de la hoja de EJERCICIOS DE FUNCIONES POLINÓMICAS.).

($.9)(La siguiente gráfica corresponde a una función . Escribe

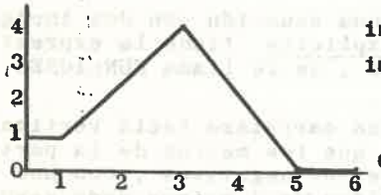



imagen de 2 ------- _____

imagen de 0'5 ----- _____

3 ------ _____

6 ------ _____

Origen de 2 , 4 y 0 _____

.Si no sabes calcular estos elementos imagina (aunque solo sea para ayudarte ) que esta es la representación gráfica de los resultados de un examen en el que en el eje horizontal estan las calificaciones y en el vertical el número de alumnos que obtienen cada calificación . Entonces imagina ¡ imagen de 2 = número de alumnos que han sacado un 2 = _____. Origen de 0 = calificación que no la saca ningun alumno = _____.

.En este curso vamos a estudiar las funciones polinómicas , y por tanto , vamos a representar estas.

## &3.-REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES POLINÓMICAS DE 1º GRADO.-

.Las funciones polinómicas de primer grado tienen un criterio de la forma y = ax + b ( es decir , el polinomio del criterio es de primer grado ).

($.10)(Lee en página 297 , 26.4).

.La representación gráfica de una función polinómica de primer grado es una recta. Para representarla obtén dos puntos por los que pase , mediante la obtención de las imagenes de dos valores de "x".

.Así , el problema 26.8 , 2) : y = 2 - x se representará calculando , por ejemplo : imagen de 0 ---- 2 luego pasa por (0,2)
imagen de 2 ---- 0 (2,0)

($.11)(Resuelve 26.6,1) y 26.8 , 1) pág-301 )

.Si consideramos un par de funciones de primer grado , podemos interpretarlas como un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas . Luego un sistema de ecuaciones con dos incognitas se puede transformar en un par de rectas y viceversa . De esta forma la obtención de la solución del sistema consistirá en determinar las soluciones comunes a las dos ecuaciones , o los puntos comunes a las dos rectas.

($.12)(Resuelve 26.10 , 1)y 2) mediante las dos formas : punto de corte y solución de los sistemas . ).



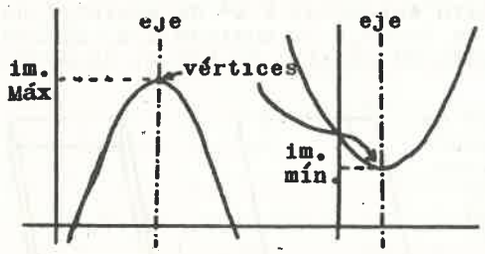
($.13)(¿Como tienen que ser las rectas para que el sistema sea incompatible ?¿Y para que sea indeterminado ?.Escribe ecuaciones de rectas:

| paralela a la | se corte con la | Forme sis. Incom. | Sis Com.Ind. |
|---|---|---|---|
| Y = 33 - 1 | y = x + 2 | y = 2x - 5 | y = x + 7 |

## &4.-FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO.-

($.14)(Intenta representar graficamente la función del problema del proyectil . Para ello representa en el plano diez puntos de la misma. Observa que su gráfica no puede ser una recta,ya que , al ir aumentando el tiempo va aumentando la altura , llegará un momento en que alcance la máxima altura y comience a bajar hasta llegar al suelo. ).

.A la curva que representa a una función de segundo grado se le llama PARÁBOLA y se caracteriza por ser simetrica respecto a una recta que pasa por la mitad y que se llama EJE , y el punto de corte de la curva con el eje es el correspondiente al valor de "x" que tiene mayor o menor imagen de todos , y se le llama VÉRTICE de la parábola.




Para dibujar la gráfica de una función polinómica de segundo grado habrá que calcular , siempre , el valor de "x" por el que pasa el eje de la parábola , así como el punto que nace de vértice de la misma.

($.15)(Lee 27.1 , página 302 , 303 y 304 . FUNCIONES CUADRÁTICAS. 27.2. EJE DE LA PARÁBOLA. 304,305 y 306 . 27.3 VÉRTICE DE LA PARÁBOLA . 307, y 27.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PARÁBOLA,páginas 307 y 308 ).

($.16)(Resuelve 27.1 1),2) y 4) , 27.2 1),3) página 311. 27.6 1) , 2) y 6) página 312 ).

## &5.-REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES CONSTANTES.-

($.17)(Lee en página 296 , 26.3 . Resuelve 26.4 1) y 2) )

($.18)(¿Que pasaría con un coche que llevara un movimiento dado por la función Y = 1 ?¿Donde se encontrará a las 2 horas de haber empezado el movimiento?. ).

($.20)(Busca una relación entre magnitudes cuyo criterio sea una función constante. )

($.21)(Resuelve los ejercicios 2 , 3 , 4 , 5 y 6 de la hoja de problemas EJERCICIOS DE FUNCIONES POLINÓMICAS. ).

## &6.-INECUACIONES.-

($.1)(Lee en página 315 . INECUACIONES . DESIGUALDADES. Resuelve 28.4 ,1),2),3),4) y 5) ).

($.2)(Lee en página 317 , 28.2 :PRINCIPIOS QUE RIGEN LAS DESIGUALDADES. Resuelve 28.4 6),8) .28.3 1),2),3),5) y 7) )

¿Puede ser x = 0 una solución de algnno de ellos?¿Y la x = 1/2?.

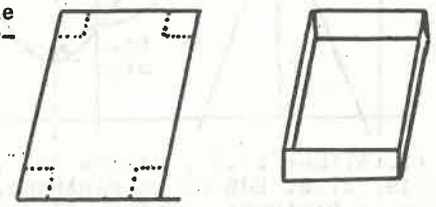
($.3)(Compruebalo y dibuja el conjunto solución )

## Anexo 1.-
## EJERCICIOS DE FUNCIONES POLINÓMICAS.

Ejercicio 1.-Una mujer da a lúz el mismo dia que cumple 25 años. ¿Que edad tendrá la madre cuando el hijo tenga 20 anos?. ¿Y cuando tenga 37 ?.Determinar una función que nos dé la edad de la madre dependiendo de la edad del hijo .

Ejercicio 2.- Se dispone de losetas cuadradas de 20 cm de lado.¿Cuantas son necesarias para enlosetar 1 $m^2$ de suelo?¿Y una habitación cuadrada de 4 m. de lado?¿Y si tuviese x m. de lado? Resolver la misma cuestión para un pasillo de 1'6 m. de ancho y "x" m. de largo.

Ejercicio 3.- A un restángulo de cartón de 20x30 cm. se le recorta un cuadrado de 2 cm. de lado de cada esquina , para formar una caja .¿Que volumen tendrá la caja?.¿Y si se recorta un cuadrado de 5 cm. de lado?.



Determinar una función que nos dé el volumen de la caja obtenida al cortar un cuadrado de "x" cm. de lado de cada esquina. ¿Que condiciones deberá cumplir el dominio de la función?.

Ejercicio 4.- Un franco frances vale actualmente 17'50 ₣.¿Cuantos francos podemos comprar con 1000 ₣.?. (Tengase en cuenta que el banco cobra 100 ₣ por hacer la operación ).Determinar una función que nos dé el número de francos que podemos comprar con "x" ₣.

Ejercicio 5.- Los grados Celsius o centigrados ,Cº , se miden sobre una escala graduada desde 0º (Punto de congelación del agua) hasta 100º (punto de ebullición del agua ); para los grados Fahrenheit se toma otra sustancia patrón , de modo que 0ºC = 32º F. y 100º C = 212º F. Determinar unas funciones de transformación de un tipo de unidades a otros .

Ejercicio 6.- Una compañía de alquiler de coches tiene establecidos dos procedimientos de alquiler :
A) 4.200 ₣ diarias , sin límite de kilometraje.
B) 1000 ₣ diarias , mas 3 ₣. por Km. recorrido.
Supongamos que queremos hacer un viaje de 10 dias .Estudiar que fórmula de pago nos interesa , en función de los kilometros que pensemos recorrer (Indicación : es posible que ayude algo el hacer una representación gráfica del proceso , estableciendo un eje para los kilometros y otro para el precio ).



### 3.-Evaluación.-

#### 3.1.-COGNOSCITIVA.-

Los examenes realizados al finalizar cada ficha son los que figuran a continuación .

Las calificaciones están reflejadas en cada uno de ellos.

Ademas la tabla 2 indica el número de alumnos que ha resuelto suficientemente las cuestiones de los diferentes examenes. La clasificación de los objetivos está realizada mediante la ya citada taxonomía , con lo que las letras simbolizan: A.Conocimiento (capacidad de repetición ), B-Comprensión (traducción en interpretación ), C-Aplicación (cálculo , aplicación de propiedades y teoremas ) y D - Analisis (estudio de problemas , interpretación de un lenguaje no habitual , etc ).

En la tabla 2 observamos que las conductas mas alcanzadas de cada categoria son :

A. 3.10.- Examen ficha 4.- Conocimiento de las definiciones de las distintas clases de sistemas. (36 suficientes de 37alumnos examinados ).

B. 2.1.- Ex. Ficha 1 .- Traducción algebraica de frases expresadas en lenguaje habitual. (34 de 39 ).

C. 3.1.-Ex. Ficha 3 .- Resolución de ecuaciones resultantes de traducciones de problemas numéricos de la realidad cuya información está dada unicamente por el enunciado. (30 de 35 )

D. 1.6.- Ex. Ficha 2 .- Diferenciar los términos de las frases y dentro de ellas las que son ecuaciones y las que son identidades. (26 de 37 ).

Las menos alcanzadas son:

A. 3.11.-Ex. Ficha 3.- Conocer los teoremas que hay que aplicar ( 11 de 35 ).

B. 4.2.-Ex. Ficha 5.- Diferenciar términos de ecuaciones y de funciones polinómicas . (18 de 36 ).

C. 2.7.-Pregunta 3 del examen de la ficha 3.-Aplicar teoremas a la resolución de problemas (13 de 35 ).

D. 3.6.-Pregunta 3 del examen de la Ficha 4.-Deducir si un sistema es compatible o incomptible , determinado o indeterminado a partir de la observación de las ecuaciones que lo forman. (10 de 37 ).

Hay que observar que :

a)En el ejercicio 2 del examen de la ficha 3 he considerado suficiente al alumno que ha sido capaz de expresar algebrai-

camente uno de los enunciados y que su expresión en forma de ecuacion es muy sencilla.

b)La calificación de la aplicación de los teoremas es independiente (hasta cierto punto ) del conocimiento del enunciado de esos teoremas , ya que aunque califiqué de manera independiente una conducta de otra es cierto que el alumno que desconoce un teorema no intenta aplicarlo . Pero , por otra parte , hay que tener en cuenta que considero cubierto suficientemente el objetivo 3.11 si se enuncia , al menos , dos teoremas , mientras que el 2.7 exigía , para lo mismo , el resolver al menos un enunciado de los f) , g) y h).

c)El examen de la ficha 5 se hizo a una distancia de un mes respecto del examen de la ficha 1 , y en la ficha inicial se hizo mas incapie en la diferenciación de los distintos elementos del algebra que en la ficha 5 . Al realizar el examen de la ficha 5 los alumnos se quejaron de la existencia de una cuestión que no esta ba avisada y que correspondía - segun ellos - a un examen anterior; esta es la 4.2 , que, de todas formas , y no aceptando ningún error,para ser declarada suficiente, fúe respondida satisfactoriamente por el 50 % de los alumnos examinados.

En cuanto a las restantes cuestiones , los resultados sistematizados figuran en la tabla 3.

La tabla 4 muestra los resultados obtenidos en el examen realizado por un compañero del seminario y calificado por él.

El gráfico 1 muestra una idea gráfica de los resultados obtenidos en los examenes de las fichas.



SEMINARIO DE MATEMATICAS.
SAN PABLO.
EJERCICIO FICHA 1.-

NOMBRE : _____ Nº _____,

Observaciones:

1.1.-Rodea con un círculo la respuesta correcta:

.¿Un polinomio es un término algebraico ?. SI NO.
.¿Un polinomio es una frase algebraica ?. SI NO
.¿Un polinomio es una ecuación ?. SI NO.

SUFICIENTES ; 29 . Insuficientes : 10.

1.2.-Explica cuando una expresión algebraica es una FRASE :

SUFICIENTES : 30 Insuficientes : 9.

1.3.-Explica cuando una expresión algebraica es una ecuación.

SUFICIENTES ; 27 Insuficientes : 12.

1.5.-Dadas las siguientes expresiones algebraicas , subraya con un solo trazo los POLINOMIOS y con tres trazos las FRASES.

a) $3x^2.y + 1$ b) $2.x + 5 = 3$ c) $x - 1 \leq 3$ d) $(x^2 + 5x) - 3x^3$

e) Doble del cuadrado de un número.
f) Cuadrado de la suma del doble de un número y tres.
g) El cubo de la suma de un número y tres es menor que cinco.
h) La mitad de un número vale trece.

SUFICIENTES : 27 Insuficientes : 12.

2.1. y 2.2.-Expresa algebraicamente (cambiando los números desconocidos por la letra "x" y las operaciones y relaciones por los signos matemáticos correspondientes ) las expresiones e), f) , g), h) del ejercicio anterior.

e) f) g) h)

SUFICIENTES ; 34 Insuficientes : 5.

2.3. y 2.4 .-Expresa con palabras las expresiones a) , b) , c) y d) del ejercicio 1.5.

SUFICIENTES : 20 Insuficientes : 19.

## EJERCICIO FICHA 2. ECUACIONES.-

1.6.-Coloca una E a las ecuaciones y una I a las identidades que existan entre las expresiones siguientes:

$3x = x - 1$ $\quad 3x.\frac{6}{2}$ $\quad 3x^2 - 1 = (3x)^2 + \frac{5}{5}$

$x + 2 - 2$ $\quad x + 3 = 3 + x$ $\quad x + 1 = -1$

SUFICIENTES : 26 Insuficientes : 11.

3.1.-Resuelve las siguientes ecuaciones :

$x + 3 = 0$ (Suf.36, In.1) $\quad 2.x = x$ (Suf. 34 , Ins. 3)

$x + 3 = 7$ ( 34 , 3 ) $\quad 3x - 1 = 2x$ (35 , 2 )

$2x = -6$ ( 34 , 3 ) $\quad 3x + 4 = x + 6$ (36 , 1 )

$-x + 5 = 4$ ( 32 , 5 ) $\quad 3(x - 6) = 2x$ (34 , 3 )

$3x + 5 = 8$ (35 , 2 ) $\quad 5 - 3(x - 5) = 3 + 4x$ (24 , 13)

$2x + 7 = 1$ (36 , 1 ) $\quad x - 3 = -3 + 6x$ (23 , 4 )

$3x - 18 = -x - 18$ (34 , 3 )

SUFICIENTES : 27 Insuficientes : 10.

32.- Resuelve:

$\frac{3}{2}(x - 1) - \frac{2}{3}(x + 2) = \frac{x}{2}$ (S:19, I:18). $\frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{3} = \frac{x-4}{4}$ (14,23)

SUFICIENTES ; 25 Insuficientes : 12.

3.3.-Resuelve .-

$x^2 + 6x + 9 = 0$ (31,6) $\quad x^2 + 3x = 0$ (27,10 )

$2x^2 - 3 = 0$ (22,15) $\quad 2x^2 + 2x - 4 = 0$ (29,8 )

SUFICIENTES : 28 Insuficientes : 9.

3.4.-Resuelve: $x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$

SUFICIENTES : 28 Insuficientes / 9.

3.5.-Resuelve : $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$.

Resolución y cálculo de $x^2$: SUFICIENTES : 28. Insuficientes :9

Cálculo de "x" : Suficientes : 16. INSUFICIENTES :21.

## EJERCICIO FICHA 3.- PROBLEMAS ALGEBRAICOS.-

1.-Calcula los números que verifican:

a)La mitad de la suma de seis veces un número y dos es igual a la diferencia entre el triple de dicho número y su quinta parte.

b)Los tres medios de la suma de un número y ocho es igual a la diferencia entre el triple de dicho número y sus tres décimas partes.

c)La suma de un número y su doble es igual a su cuadrado.

2.6.-Plantea : SUFICIENTES : 29 Insuficientes : 6.

3.1.-Resuelve :SUFICIENTES : 22 Insuficientes : 13.

2.-Resuelve los siguientes problemas:

d)Llevo recorrido los siete quinceavos de un camino y me queda un tercio de kilómetro para llegar a la mitad. Calcula la longitud del camino.

e)La entrada a la piscina cuesta el doble a un adulto que a un niño. Una familia compuesta por los padres y los tres niños ha pagado por entrar 245 ₧ en total. Calcula el precio de la entrada de adultos y niños.

2.6.-Planteo : SUFICIENTES : 29 Insuficientes : 6.

3.1.-Resolución : SUFICIENTES : 30 Insuficientes : 5.

3.-Resuelve los siguientes problemas:

f)De un triangulo rectángulo se conoce que la hipotenusa mide 6 cm y un cateto 3 cm . Calcula la longitud del otro cateto , la superficie del triangulo y la medida de los ángulos del triangulo si uno de ellos mide 30º.

g)Un tubo de ensayo tiene forma cilíndrica rematado por una semiesfera . Determina el volumen de agua que le cabe si su altura total es de 15 cm y el radio de 1 cm.

h)Entre dos pueblos A y B hay 132 km. Dos ciclistas salen de una y otra hacia la contraria a las 10 de la mañana . El que sale de A lleva una velocidad de 19 km/h. Calcula la distancia que existe entre el pueblo A y el punto de encuentro asi como la hora a la que lo hacen.

3.11.-Conoce el teorema: Suficientes : 11 , INSUFICIENTES ; 24.

2.7.-Aplica el teorema : Suficientes : 13 , INSUFICIENTES : 22.

## EJERCICIO FICHA 4. SISTEMAS.-

1.-Completa:

Un sistema es COMPATIBLE DETERMINADO Si:
Si un sistema NO tiene ninguna solucion se llama :

3.10 SUFICIENTES 36 Insuficientes : 1.

2.-Escribe ecuaciones que, junto con las dadas, determinen sistemas de los tipos que se indican en cada uno de ellos:

| Compatible determinado | Incompatible | Compatible indeterminado |
|---|---|---|
| $x - y = 0$ | $x + 3y = 7$ | $3x - y = 5$ |

3.6.-
SUFICIENTES 24 Insuficientes : 12.

3.-Resuelve , si es que se puede , los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=7 \end{cases}$ ( ), b) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-3y=5 \end{cases}$ ( ), c) $\begin{cases} 5x-3y=0 \\ 10x+7y=0 \end{cases}$ ( ), d) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 6x+2y=0 \end{cases}$ ( ).

e) $\begin{cases} x+3(y-1)=2x \\ 3x-1+(y-3)=x \end{cases}$ ( ) f) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y-2}{3}=3 \\ \frac{x}{3}-\frac{y+1}{2}=5 \end{cases}$ ( ) g) $\begin{cases} 3x+y=3 \\ x+\frac{y}{3}=1 \end{cases}$ ( ).

Situa en los paréntesis alguna de las letras correspondientes a: C.D.:Compatible determinado. C.I.:Compatible Indeterminado. I: Incompatible.

3.6.-Estudia sistemas: Suficientes : 10 INSUFICIENTES : 27.

3.7.-Resuelve Suficientes : 16 INSUFICIENTES : 21.

4.-Resuelve los siguientes sistemas:

h) $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x+y=5 \\ x.y=-1 \end{cases}$

3.8.- SUFICIENTES ; 19 Insuficientes : 18.

5.-Resuelve los siguientes problemas :

j)Un librero vendió 84 libros a dos precios distintos , unos a 450 ₧ cada uno y otros a 360 ₧ cada uno . Si en la venta obtuvo 31.050 ₧ ¿Cuantos libros vendió de cada clase?.

k)En un triangulo rectángulo se conoce que la hipotenusa es el triple de un cateto y que su superficie vale 5 $cm^2$. Calcula la longitud de los tres lados del triangulo.

Si te queda tiempo intenta resolver el siguiente problema:

l)Con la tercera parte de un círculo de cartón de radio 5 cm se construye un cucurucno en forma cónica uniendo dos radios. Calcula el volumen de este cucurucno.

3.9.-SUFICIENTES ; 25 Insuficientes : 12
(Al menos uno correcto ).



## EJERCICIO FICHA 5 . FUNCIONES POLINOMICAS.

1.-Dadas las siguientes expresiones algebraicas escribe una T si son términos , Fr si son frases , P :Polinomios , M : Monomios , Fu : Funciones , E: Ecuaciones , I: Identidades.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $3x^2+1$ | $3x+1=1+3x$ | $3x^3+5=y$ | $x+y-xy=0$ | |
| $x^3-3x$ | $3x^2$ | $x^2+5x=7$ | $x^2+5x-7$ | $x-1$ |

4.2.- SUFICIENTES ; 18 INSUFICIENTES : 18.

2.-Dada la función que liga el número de kilómetros que hace un coche con el número de litros de gasolina que gasta , cuyo criterio es : y = (100.x):5'5 . Indica:
.Magnitud que representa la variable independiente "x" :
.Magnitud que esta representada por la variable dependiente "y":
.Al número que resulta de sustituir "x" por 3 se le llama _____ de 3.
.Al sustituir y por 5 y despejar la "x" resulta un número al que se le llama _____ de 5.
.Expresión algebraica que determina la forma en que están relacionados los valores de una y otra magnitud se le llama ___

4.3.-SUFICIENTES : 18 INSUFICIENTES : 18.

3.-Completa las siguientes frases:
.La gráfica de una función polinómica de primer grado es:
.La gráfica de una funciónpolinómica de segundo grado es :
.La gráfica de una función constante es :

5.1.-SUFICIENTES : 34 Insuficientes : 2.

4.-Para representar graficamente funciones de _____ grado cuya gráfica es una recta se _____
.Para representar graficamente funciones de ___ grado cuya gráfica es una parábola se determina el eje , para lo que___ _____ y el vértice , para lo que _____

5.2.-SUFICIENTES : 25 Insuficientes : 11.

5.-Representa graficamente las siguientes funciones:

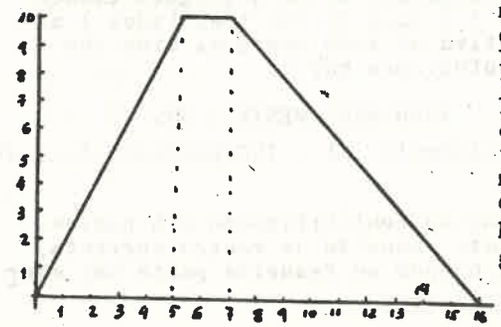
(a) $y = -x + 5$ (b) $y = -4x^2 + 16x - 7$ (c) $y = -3$.

5.3.- SUFICIENTES : 19 Insuficientes : 17.

6.-Calcula la imagen de 0 y el origen de -1 mediante las funciones (a) , (b) y (c) del ejercicio anterior.

5.4.-SUFICIENTES : 19 Insuficientes : 17.

7.-La gráfica siguiente representa la función que liga el número de sardinas (valor de "x") que un envasador coloca en una lata con las ganancias que obtiene con la venta de esta (valor de "y" ).Calcula las ganancias que se obtiene con la venta de una lata de siete sardinas , y el número de sardinas que debe poner para ganar dos pesetas



5.5.-SUFICIENTES : 23
Insuficientes : 13

## EJERCICIO RESUMEN 1.

(Propuesto y calificado por otro miembro del Seminario.)

Ejercicio 1.- Descomponer el número 200 en dos partes , de modo que al dividir una entre otra , se obtenga 3 de cociente y 28 de resto .

Planteo : Correcto : 21 . INCORRECTO : 26.

Resolución : Correcto : 20 .INCORRECTO : 27.

Ejercicio 2.- Representar sobre un mismo sistema de ejes las funciones polinómicas:

1º) $y = x - 10$

2º) $y = x^2 - 3x - 10$

Indicar claramente las coordenadas de los puntos de corte de las gráficas con los ejes , las de los puntos de corte de las gráficas entre sí , y las del vértice de la parábola.

Representa recta : Correcta : 3 INCORRECTA : 34.

Representan parábola : Correcta : 2 . INCORRECTA : 35.
(incorrecto solo el cálculo del vértice : 2 ).

Ejercicio 3.- Un cliente compra en una frutería tres cuartos de kilo de peras y medio kilo de plátanos , pagando por todo ello 105 ₧ . Otro compra kilo y cuarto de peras y dos kilos de plátanos , y paga 280 ₧ . ¿Cuanto vale el kilo de peras ? ¿Y el de plátanos ?.

Un tercer cliente compra medio kilo de peras y kilo y medio de plátanos , y le cobran 90 ₧ . ¿Cual es ahora el precio de las peras y de los plátanos ?.

Plantean : Correctamente : 13 . INCORRECTAMENTE : 24.

Plantean y resuelven : Correctamente : 2 . INCORRECTAMENTE : 35.

Descubren indeterminación : CORRECTAMENTE : 28. Incorrectos :9.

Ejercicio 4.- Calcular las dimensiones de un triangulo isósceles sabiendo que el perímetro ( = suma de los tres lados ) mide 32 m. y que la altura relativa al lado desigual mide los 2/3 de dicho lado ¿Cuantas soluciones hay ?.

Plantean : Correctamente : 2 INCORRECTAMENTE : 35.

Plantean y resuelven : Correctamente : 1 . INCORRECTAMENTE : 36.

(La calificación global se realiza contabilizando 2'5 puntos por cada ejercicio completamente resuelto de manera correcta, y fracción de esta puntuación cuando se resuelve parte del ejercicio ).



## EJERCICIO RESUMEN II

RECUPERACIÓN .ECUACIONES. FUNCIONES. 1º BUP.

1º.-Resuelve las siguientes ecuaciones:

$3(x - 5) - 3(x + 2) = x$

$\frac{x - 3}{2} - \frac{4x}{5} + 3 = \frac{x + 2}{10}$

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

$\frac{3x^2 - x}{3} = -x + 1$

2º.-Indica si los siguientes sistemas tienen solución y resuelvelos en caso afirmativo:

a) $3x - 5y = 7$
$x + 3y = 2$

b) $2x - 7y = -3$
$-4x + 14y = 6$

3º.- Plantea y resuelve los siguientes problemas:

c) Calcular el número que verifica : "La diferencia entre la mitad de la suma de su triple y siete y uno es igual a dicho número ".

d)En unareunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos .¿Cuantos hombres , mujeres y niños hay si en total suman 312 manos y no hay ningún manco entre los asistentes?.

4º.-Representa graficamente las funciones:

$y = -x^2 - 3x + 4$ y calcula :

i) Imagen de -3 =

ii) Origen de -6 =

Número de alumnos que han sido declarados suficientes, en cada nivel mínimo, durante los ejercicios nivelados.

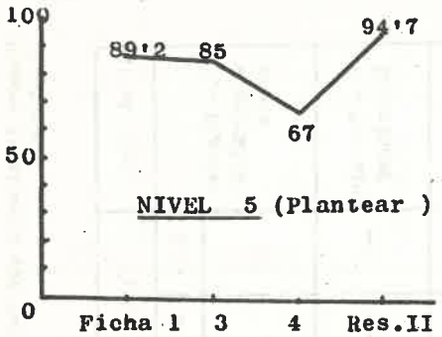
| Nivel mínimo | Ficha 1 | | Ficha 2 | | Ficha 3 | | Ficha 4 | | Ficha 5 | | Examen II | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Suf. | Ins. | Suf. | Ins. | Suf. | Insu. | Suf. | Ins. | Suf. | Insu. | Suf. | Ins. |
| 5.- Plantea Algebraicamente | 33 | 4 | — | — | 30 | 5 | 24 | 12 | — | — | 18 | 1 |
| 6.- Resuelve Ecuaciones | — | — | 23 | 14 | 22 | 13 | 23 | 11 | — | — | 14 | 5 |
| 12.- Opera con expresiones algebraicas | (Solo se ha controlado la expresión negativa en el ejercicio ficha 4) | | | | | | — | 12 | — | — | — | — |
| 13.- Representar funciones polinómicas | — | — | — | — | — | — | — | — | 20 | 16 | 7 | 12 |
| | | | | | | | | | | | | |
| Total alumnos que en cada examen han sido declarados | 18 | 19 | 21 | 16 | 20 | 15 | 16 | 21 | 20 | 16 | 6 | 13 |

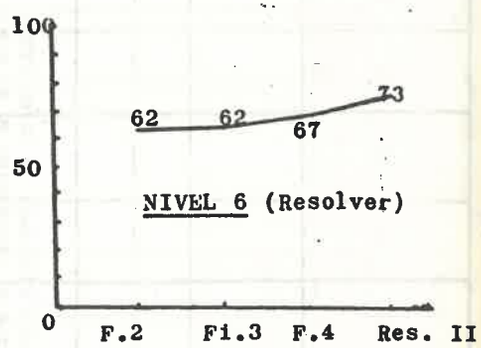
número alumnos declarados suficientes / Número total alumnos en cada ejercicio, clasificados por objetivos

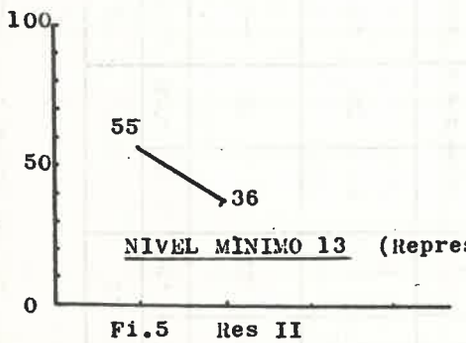
Tabla 2

| Conducta | Objetivo | Ficha 1 | Objetivo | Ficha 2 | Objetivo | Ficha 3 | Objetivo | Ficha 4 | Objetivo | Ficha 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1.1. | 29/39 (74) | | | 3.11. | 11/35 (31) | 3.10. | 36/37 (97) | 4.3. | 18/36 (50) |
| | 1.2. | 30/39 (75) | | | | | | | 5.1. | 34/36 (94) |
| | 1.3. | 27/39 (69) | | | | | | | 5.2. | 25/36 (69) |
| B | 2.1. 2.2. | 34/39 (87) | | | 2.6. | 29/35 (82) | 3.9. | 25/37 (67) | 4.2. | 18/36 (50) |
| | 2.3. 2.4. | 20/39 (51) | | | 2.6. | 29/35 (82) | | | 5.3. | 19/36 (52) |
| C | 1.5. | 37/39 (69) | 3.1. | 27/37 (72) | $3.1_1$ | 22/35 (62) | 3.7. | 16/37 (43) | 5.4. | 19/36 (52) |
| | | | 3.2. | 25/37 (67) | $3.1_2$ | 30/35 (85) | 3.8. | 19/37 (51) | | |
| | | | 3.3. | 28/37 (75) | 2.7. | 13/35 (37) | | | | |
| | | | 3.4. | 28/37 (75) | | | | | | |
| | | | 3.5. | 28/37 (75) | | | | | | |
| D | | | 1.6. | 26/37 (70) | | | $3.6_2$ | 24/37 (64) | 3.5. | 23/36 (63) |
| | | | 3.5. | 16/37 (43) | | | $3.6_3$ | 10/37 (27) | | |

Polígonos de porcentajes de alumnos que han cubierto suficientemente cada nivel a lo largo de los ejercicios de las fichas y el Resumen II.




Polígono de porcentajes de Suficientes en cada uno de los ejercicios realizados

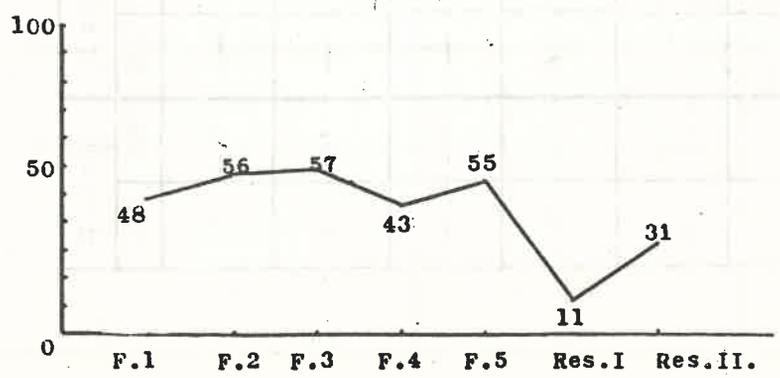




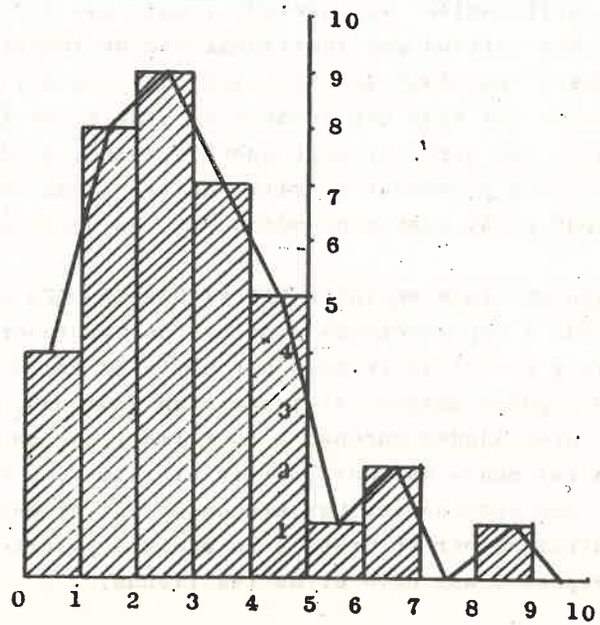

Tabla. 4.-

Resultados obtenidos en el Ejercicio Resumen 1.

| Calificación | nº alumnos | nº/% totales | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | | |
| 0'5 | 2 | | |
| 1 | 4 | | |
| 1'5 | 4 | | |
| 2 | 1 | 30 / 81 | |
| 2'5 | 8 | | |
| 3 | 5 | | 33/89 |
| 3'5 | 2 | | |
| 4 | 2 | | |
| 4'5 | 3 | | |
| 5 | 1 | | |
| 5'5 | 0 | | |
| 6 | 1 | | |
| 6'5 | 1 | 7 / 19 | |
| 7 | 0 | | 4/11 |
| 7'5 | 0 | | |
| 8 | 1 | | |
| Total | 37 | | |

Nota Media 2'75.

Gráfica 2.-



3.2.-EVALUACIÓN AFECTIVA.-

Para contrastar la consecución de los objetivos del experimento que no corresponden al dominio cognoscitivo , puramente, realice un test anónimo en el que intente contrastar la consecución de estos objetivos . El test figura a continuación . Las respuestas se reflejan en el número indicado a continuación de cada items .

Es de resaltar que al evaluar el test se denunciaron una serie de incorrecciones del mismo que hacen relativamente util su papel , pero de todas formas , resultados son y así están.

Las opiniones acerca del método de las fichas son diferentes y se desvirtuan a partir de la identificación con el trabajo en equipos . Este último es peor visto por los alumnos . Es decir en general se está de acuerdo con el método de estudiar rellenando fichas semiprogramadas intercalando exposiciones orales del profesor y siempre que el tema se preste a ello, por su aplicabilidad . Sin embargo se rechaza por parte del grupo de alumnos que mantiene un ritmo individual y cuyo afán es el de alcanzar una calificación mas elevada , asi como por aquel que mantiene una actitud mas individualista de inactividad (desinteresados y "pasotas" )el trabajar en equipos , y muchas de las respuestas del test que indican el :"no mayor interes de la materia" , "no aprender algo nuevo" , etc , están acompañadas de un : "no preocupar el ritmo de trabajode los compañeros de equipo" y "si cambio de método " . Es decir , se detecta un:

SI al trabajo en clase mediante LAS FICHAS RESUMEN y tras ( o intercalando ) explicaciones teoricas del profesor.

Indiferencia ( e incluso rechazo por parte de un 30 % de los alumnos ) y muy pocos adeptos al trabajo en equipos , que impide el que los aventajados marchen a su ritmo y que no facilita demasiado , a los menos dotados , el ir al ritmo , a ser poco atendidos por sus compañeros. Los alumnos de nivel medio se sienten mas atraidos por el trabajo en equipos y defienden a ultranza su empleo , asi como el de las fichas.



TEST EVALUATIVO DEL MÉTODO.-

1.1.-Pon una cruz en una de las razones siguientes que tú cres que justifica que se estudien estos temas (Ecuaciones, Funciones , Sistemas , Inecuaciones ).

Van a ser utiles para cursos posteriores 18 respuestas.
Nos dan un método mas sencillo para la resolución de problemas 10.
Forman parte de las Matemáticas y hay que estudiarlos por eso 6.
Dan cultura. 5.

1.2.-De los siguientes pasos , indica cual es el primero o del que derivan todos los demas . Ordenalos todos :

.(a).-Resolución de ecuaciones y sistemas.
.(b).-Enunciado de problemas numéricos.
.(c).-Traducción de frases numéricas.
.(d).-Obtención de soluciones de problemas numéricos.
.(e).-Estudio y representación gráfica de funciones .

b),c),a),e),d).. 7 Respuestas.
b),c),a),d),e).. 7 respuestas.
Otras ordenaciones : 20 respuestas.

2.1.-Escribe,en el siguiente esquema,el nombre de las asignaturas cuyos libros de texto :

| Utilizas para estudiar la asignatura como único objeto. | Estudias en ellos determinados temas , pero la mayor parte de los temas los estudias por apuntes. | No los empleas nunca para estudiar. |
|---|---|---|
| Inglés : 21<br>Dibujo : 11<br>Ninguno : 6 | Historia : 30<br>Matemáticas : 34<br>Ciencias 21<br>Lengua 25<br>Inglés 7<br>Dibujo 7. | Religión 29.<br>Música 27.<br>Ciencias 13.<br>Lengua 5.<br>Historia 3. |

2.2.-Describe brevemente las cosas que haces para estudiar una lección de Matemáticas.

Lugar : Cuarto propio : 30 , Cocina : 3 , Otros : 1.
Material que empleas : Papel y lapiz : 17 , Apuntes : 19 . Fichas : 11.
¿Recitas en voz alta ?. SI : 7 , NO : 21.
¿Escribes mientras estudias ?/ SI : 27 , NO : 6.
¿Siempre lo has hecho asi ?. SI : 24 , NO : 8.

3.1.-Si al estudiar aparece una cuestión que no la entiendes ¿que haces ?.

Vuelves a leerla : 32 . Preguntas a alguien próximo : SI :27 .NO: 6.
La dejas para preguntarla al profesor el dia siguiente: SI:18 NO:10

Te aprendes el texto de memoria : SI : 1. NO : 29.
Pasas de ella. SI : 3 , NO : 29.

3.2.-Indica la cantidad de tiempo de clase que atiendes a tu trabajo:
Menos de 10 minutos (0) .Entre 10 y 20 (0) .Entre 20 y 30 (8)
Entre 30 y 40 (9) Mas de 40 (7) Depende de lahora (23)

3.3.-Indica el tiempo que dedicas en casa al estudio de las Matemáticas:
Menos de 30 min.(11).Entre 30 y 45 (6) . Entre 45 y 60 (7).
Mas de 60 (0) . Todos los dias (6). Un dia si y otro no (2).
Solo cuando hay examenes (16). Algún dia (6).

4.1.-Señala con una cruz la respuesta que te corresponde :

(18).Has acabado de rellenar la ficha el dia previsto .
( 4). Has acabado mucho antes.
(10).No has acabado una ficha pero las demas si.
( 1).No has acabado dos fichas pero las demas si.
( 1).No has acabado mas de dos fichas.

4.2.-Responde si o no a las siguientes preguntas tachando la que no vale:

Mediante la ficha ¿has relacionado mejor los conceptos? SI (28) NO ( 5)
¿Has aprendido algo nuevo con las fichas ?. SI (31) , NO ( 4)
¿Te ha resultado menos aburrida la clase ? SI (28) , NO ( 7)
¿Te has interesado mas por la materia?. SI (23) , NO (12)

5.1.-¿Te has preocupado por enterarte por que parte de la ficha iban tus compañeros de equipo?. SI (29) , NO ( 5)

5.2.-¿Has esperado a tus compañeros de equipo que iban por detras de tí ?. SI (29) , NO ( 5)

5.3.-¿Ha sido mas importante para tí la calificación que podias obtener , y el acabar de hacer los ejercicios de la ficha , que procurar que tus compañeros de equipo resuelvan sus dudas ?. SI (24) NO (10)
¿Te ha ayudado el trabajo en equipos ? SI (30) NO ( 5)
¿Crees que tus compañeros de equipo pueden ayudarte a resolver problemas de la asignatura ? SI (29) NO ( 5)
¿Crees que tus compañeros de equipo pueden ayudarte a resolver problemas personales ? SI (19) NO (15)

5.4.-¿Has colaborado con tus compañeros de equipo a que el trabajo previsto se acabe en la fecha adecuada ?SI (27) NO ( 6)

6.1.-¿Te has sentido mas libre en la organización de tu tiempo de estudio?. SI (27) NO ( 7)

6.2.-En caso de respuesta afirmativa ¿te ha beneficiado esta libertad ?. SI (20) NO (12)

RESUMEN .-

¿Te gustaría seguir utilizando el método ? SI (28) NO ( 5)

¿Lo encuentras util para determinados temas pero no para otros? SI (16) NO (17).



En caso de respuesta afirmativa indica la caracteristica de los temas en los que encuentras util el empleo de las fichas y el trabajo en equipos :

Prácticos :(4). Fáciles (2) . Definiciones .(1). Los que llevamos (1). Todos (1).

¿Prefieres otro método?. SI (10) , NO (24)

En caso de respuesta afirmativa , indica el tipo de método que prefieres :

Primero explicar la teoria y despues fichas : (2)

Individual (1). Tradicional (1). Alternado (1). El que yo quiera (1) . Explicar solo (1) . Explicar y "mandar" ejercicios (1).

## *LAS TRANSPARENCIAS EN CLASE DE MATEMATICAS*

*-Las transparencias, como cualquier medio audiovisual, son un método didáctico auxiliar de la palabra.*

*Creemos que las ventajas que presenta su utilización en la clase de matemáticas son importantes. Entre ellas podríamos destacar:*

*-La facilidad de los alumnos para seguir una exposición en imágenes.*

*-La implicación de los alumnos en el trabajo de clase como creadores de material: a) para ilustrar explicaciones*

*b) para comparar gráficos de diferentes grupos de trabajo.*

*-El disponer de gráficos de funciones con una precisión que no puede obtenerse en la pizarra.*

*-La posibilidad de superponer transparencias y así ilustrar propiedades matemáticas.*

*-Como ayuda al alumno en un intento de recopilar y estructurar los conceptos fundamentales de cada tema.*

*GRUP ZERO .- BARCELONA*

# L I M I T E  D E  S U C E S I O N E S

**Martí Casadevall. Joan Estafanell. (Grup Zero).**

## PRESENTACION

El límite es sin duda uno de los temas tradicionalmente calificados como difíciles en las matemáticas de la enseñanza media. Sin embargo, no es un concepto nuevo para los alumnos pues ya lo han utilizado e incluso comprendido, casi sin darse cuenta, en múltiples ocasiones.

Se trata por lo tanto de poner de manifiesto lo que hay de común detrás de una serie de situaciones matemáticas, de una serie de problemas que desde mucho antes fueron resueltos con más o menos precisión. Los números decimales periódicos y los irracionales, las progresiones geométricas decrecientes, el estudio de algunas funciones como la de proporcionalidad inversa, la exponencial i la logarítmica, la introducción a la derivada,... han familiarizado al alumno con la idea de límite y su cálculo.

La dificultad surge en el intento de definir el concepto con una cierta precisión. El alumno no ve que esto le aporte nada nuevo, ni que le resuelva problema alguno. La necesidad de precisión en el análisis matemático aparece históricamente para clarificar unas situaciones especialmente difíciles y confusas que no se plantean a nivel de enseñanza media. De ahí que una opción del enseñante pueda ser el prescindir de la formalización del límite sin que por ello tenga que resentirse la capacidad del alumno para enfrentarse con el estudio de funciones y el cálculo diferencial e integral.

De todos modos, si el nivel de la clase y la disponibilidad de tiempo lo permiten puede resultar interesante plantear el problema de la definición de límite. Y también es cierto que para los alumnos que en la enseñanza superior hayan de profundizar en el análisis, les puede resultar provechoso un primer acercamiento a la definición correcta de límite.

Para ello es importante:

- Haber trabajado ampliamente el concepto intuitivo.
- Utilizar un lenguaje lo más comprensible y sugerente posible.

- La progresiva introducción de las definiciones de dificultad creciente: empezando por las sucesiones divergentes, las positivas de límite cero, las de límite cero en general y finalizando por las convergentes cualesquiera.
- La realización de problemas que ilustren la idea de la definición.

Se trata pues de dar amenidad y coherencia al tema del límite con una primera aproximación a las definiciones correctas sin que por ello se entorpezca la visión y cálculo intuitivo.
Este tema puede ser un momento muy interesante en un método cíclico de enseñanza ya que permite desde repasar e incluso redefinir los números reales, hasta introducir la integral definida, pasando por el intento de dar una formalización correcta del concepto.



## DESCRIPCION DEL CONTENIDO DEL TEMA

El tema "LIMIT DE SUCCESSIONS" está dividido en siete apartados. Cada uno de ellos empieza con un fragmento de "Alicia en terra de maravelles" de Lewis Carroll (Ed. Joventud, Barcelona, versión de Josep Carner). La intención de estos fragmentos es la de ser motivo de discusión en clase ya que refuerzan o bien contradicen las ideas que se trabajan en el correspondiente apartado. Veremos, en las clases, hasta qué punto esta discusión es posible y rica o si estos fragmentos quedan como simples motivos decorativos.

- I quantes hores al dia dàveu lliçons? -digué Alícia, amb pressa de canviar aquella conversa.
- Deu hores el primer dia -digué la Falsa Tortuga de Mar-, nou el segon i així successivament.
- Quin sistema tan curiós! -va exclamar Alícia.

Lewis Carroll

# INTRODUCCIÓ

D'una successió $a_n$, allò que interessa d'estudiar-ne és el seu comportamenr per valors grans de n, o dit d'una manera més exacta, el comportament dels seus termes per valors grans de n. En definitiva, SI TÉ LIMIT O NO EN TÉ.

La necessitat d'introduir el concepte de límit d'una successió ve motivada pel fet que, en moltes situacions, matemàtiques o no, no podem determinar el valor exacte d'una certa magnitud sinó que únicament el que podem es determinar-ne una aproximació. Però si no ens quedem amb una sola aproximació sinó que en fem tot un reguitzell, de manera que cada una sigui més precisa que l'anterior, podrem, de l'anàlisi de la successió d'aproximacions fetes, determinar unívocament el valor exacte de la magnitud, tot dient que aquest és el límit d'aquella successió d'aproximacions.

Els quatre problemes que ara segueixen volen il.lustrar el que acabem de dir al mateix temps que serviran per introduir-nos en l'estudi del comportament d'una successió per valors grans de n.

El primer apartado, "INTRODUCCIÓ", pretende, a partir de ciertos problemas históricamente importantes, insistir en la idea de que el concepto de límite de una sucesión permite definir ciertos números y de aquí su importancia y la importancia de saber calcular su valor.

2. Per una successió definida com en el problema anterior però per els rectangles construïts sota el gràfic de la funció $g(x)=x^2+3$ entre $x=2$ i $x=10$, trobar el valor dels termes $a_1$, $a_2$, $a_4$ i $a_{10}$.

   a) A mesura que n agafi valors més i més grans, $a_n$ creixerà "sense límit"? O bé, el valor de $a_n$ no sobrepassarà mai d'un cert valor? Per exemple, de quin?

   b) Si la successió $a_n$ té límit, què representarà aquest valor límit?

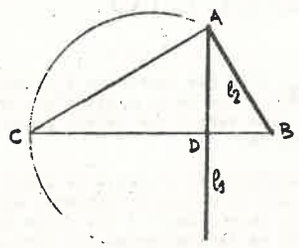
La resposta a la segona questió del problema anterior té la seva importància: el fet de pensar que el valor límit de la successió $a_n$ sigui l'àrea limitada per la paràbola (veure la figura 3), ens porta a la necessitat de buscar mètodes per tal de poder calcular el límit d'una successió, car en aquest cas concret, això significaria poder calcular l'àrea esmentada, cosa que per mètodes elementals ens es impossible de fer.

3. Agafem una circumferència de radi unitat, r=1. Designem per $a_1$ el perímetre de l'hexàgon inscrit a dita circumferència i per $a_2$ el perímetre del polígon obtingut en doblar el nombre de costats.

   a) Calcular el valor de $a_1$ i $a_2$.

   b) Buscar una expressió per tal de calcular el costat $l_2$ del polígon regular inscrit obtingut en doblar el nombre de costats d'un polígon regular de costat $l_1$ conegut.

   (Veure la figura i utilitzar el fet que els triangles ABC i ADC són semblants.)




   c) Si $a_3$ és el perímetre del polígon regular inscrit obtingut en doblar el nombre de costats del que té perímetre $a_2$, i així successivament, calcular el valor de $a_3$ i de $a_4$.

   d) Trobar un valor aproximat del nombre $\pi$.



4. La successió

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

és l'anomenada SUCCESSIÓ DE FIBONNACCI.

Qué els hi passa als termes d'aquesta successió si n agafa cada vegada valors més grans?
Et sembla possible trobar un terme de la successió que sigui més gran que 1.728.356?
I que sigui més gran que

$$1.728.356^{12} \ ?$$

En el terreny que estem (l'estudi de les successions i del comportament dels seus termes per valors grans de n), les preguntes que ens podem fer, doncs, són:

A. Donada una successió, quin és el comportament dels seus termes per valors grans de n? Es a dir, té límit o no en té?

B. Si una successió té límit, quin és el valor d'aquest límit?

C. Una successió, si té límit, els seus termes s'acosten cap aquest límit; però, com s'hi acosten?

No hi ha cap procediment general per tal de respondre a aquestes preguntes. Veurem diferents tipus de successions, veurem diferents técniques, introduirem un vocabulari adequat i nous conceptes, i de mica en mica, anirem acumulant idees i experiència que ens permetran d'acarar-nos a les preguntes que ens hem fet.

Si que cal dir d'entrada que la millor situació inicial d'acarar-nos a les preguntes anteriors serà de dispossar del terme general de la successió donada, car ell contè tota la informació referent a la successió.

En el segundo apartado, "SUCCESSIONS DE LÍMIT INFINIT", introducimos para su estudio el concepto clave de <u>número-control</u>. Después de 3 problemas, de los cuales reproducimos el segundo, llegamos a la primera definición:

2. Donada la successió $a_n=6n+7$

   a) A partir de quin terme tots els termes són més grans que 100?

   b) Trobar un valor p tal que per tots els valors de n més grans que p es compleixi $a_n > 10.000$.

   c) Quin és el primer terme de la successió més gran que 1.476.970?

   d) Hi haurà sempre un terme a partir del qual tots els termes de la successió siguin més grans que un nombre-control K establert per endavant? Quin és el camí per trobar aquest terme?

Aquests problemes ens porten a la següent definició:

DEFINICIÓ

Direm que una successió $a_n$ té límit més infinit si, establert qualsevol nombre-control K, a partir d'un cert terme, tots els termes de la successió són més grans que K.
Si una successió $a_n$ té límit més infinit, escriurem

$$a_n \longrightarrow +\infty \qquad \lim a_n = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Siguen un total de siete problemas para introducir los conceptos de "límite menos infinito" y de "límite infinito". Uno de estos problemas está relacionado con el tema de progresiones ya trabajado en cursos anteriores en un intento de que los diversos temas se vayan trabajando de manera cíclica.
Las "SUCCESSIONS DE TERMES POSITIUS DE LÍMIT ZERO" las estudiamos a partir de las sucesiones de límite infinito: si una sucesión de términos positivos tiene límite más infinito, la sucesión de sus inversos tiene límite cero.
Después de introducir el concepto de micro-control, el otro concepto clave dentro del tema, llegamos a la siguiente definición:

DEFINICIÓ

Una successió $b_n$ de termes positius direm que té límit zero si per tot micro-control k, a partir d'un cert terme, tots els termes de la successió són més petits que k.
Si $b_n$ té límit zero escriurem $\lim b_n = 0$.

Es cierto que, desde el punto de vista matemático, el adjetivo "micro" que acompaña al término "control" es irrelevante, pero creemos que desde el punto de vista didáctico es útil, puesto que sitúa rápidamente al alumno en un determinado contexto y aporta un lenguaje que, sin dejar de ser riguroso, refleja perfectamente las ideas intuitivas que el alumno tiene.
Después de introducir el "criterio de comparación" como un método que permite economizar esfuerzos a la hora de estudiar el límite de sucesiones de términos positivos, siempre y cuando se tenga un cierto número de sucesiones ya estudiadas, hay un problema de aplicación:



18. El subministrament d'aigua d'una ciutat es fa des d'un embassament situat a uns 25 km d'ella. L'aigua embassada conté, segons les anàlisis fetes, un 2‰ d'una certa substància patògena, mentre que per a poder ser consumida només en pot contenir un 0'5‰. La companyia que té a càrrec seu el subministrament de l'aigua, instal·la uns filtres per tal d'eliminar-ne la substància indicada fins a fer-la potable. Aquests filtres permeten reduir la quantitat de substància patògena que conté l'aigua en un 12% quan aquesta passa per un d'ells. Com que només amb un filtre no és possible de reduir la quantitat de dita substància a la permesa, s'instal·len diversos filtres en sèrie, de manera que l'aigua passi d'un a l'altre.

a) Quants filtres s'hauran d'instal·lar?

b) Si determinats estudis fets pel Departament de Sanitat obliguen a prendre la decisió d'exigir que l'aigua contingui només un 0'25‰ de la citada substància patògena, caldrà doblar el nombre de filtres?

c) Quants filtres caldria instal·lar per tal d'eliminar del tot la substància patògena esmentada?

Es importante decir que la mayoría de problemas de aplicación que hemos encontrado, problemas que se mueven en un contexto físico por ejemplo, nos han llevado siempre a sucesiones muy particulares: progresiones geométricas. Esto refuerza nuestra idea de que el tema "límite de sucesiones" es un tema que debe trabajarse relativamente tarde, en tercero de BUP o incluso en COU, ya que muchos problemas como el indicado pueden resolverse, y los alumnos deberían saber resolver, sin conocer una definición rigurosa de límite de una sucesión.
El apartado que sigue generaliza el estudio al caso de "SUCCESSIONS DE LÍMIT ZERO", introduciendo el concepto de "micro-entorno", que generaliza el de "micro-control":

2. Quin és el límit de les successions

a) 0, 1/2, -1, 1/4, -2, 1/6, -3, ...

b) 1, 1/2, -1, 1/4, 1/5, -1, 1/7, 1/8, -1, ...

Hem vist a l'apartat anterior què vol dir que una successió de termes positius té límit zero. I si la successió no és de termes positius, és a dir, no té tots els termes positius? Qué voldrà dir que té límit zero?

22

Amb l'introducció de la noció d'entorn centrat d'un punt, podem donar la següent definició de quan una successió té límit zero:

DEFINICIÓ

Una successió $a_n$ té límit zero si per qualsevol micro-entorn centrat del zero és possible trobar un terme a partir del qual tots els termes de la successió estiguin dintre d'ell.

Nos pareció conveniente no quedarnos con una sola definición de sucesión de límite cero ya que el concepto de "cola de una sucesión" es suficientemente intuitivo como para no desaprovecharlo :

24

La definició de successió de límit zero pot ara quedar redactada així:

DEFINICIÓ

Una successió $a_n$ té límit zero si qualsevol entorn centrat del zero conté una cua de la successió.

És cler que aquesta definició és equivalent a aquesta altra:

DEFINICIÓ

Una successió $a_n$ té límit zero si per qualsevol entorn centrat del zero, tots els termes de la successió, excepte un nombre finit, estan dintre d'ell.

Al apartado "LÍMIT D'UNA SUCCESSIÓ" los alumnos llegan con un bagaje que facilita enormemente el trabajo. La idea de "micro-



entorno", ahora de un punto cualquiera, continúa siendo lo suficientemente intuitiva como para generalizar con facilidad las definiciones. De todos modos, a partir de este momento utilizamos el término "entorno" sin adjetivar.

Miraré, vejam, si sé totes les coses que solia saber. A veure: quatre per cinc és dotze, i quatre per sis és tretze, i quatre per set és ... Ave Maria! Mai no arribaré a vint per aquest camí! La taula de multiplicar, però, no vol dir res: provem la Geografia.

Lewis Carroll

# LÍMIT D'UNA SUCCESSIÓ

1. Quin és el límit de la successió $a_n = \frac{n+1}{n}$?

I de la $b_n = \frac{3n+1}{2n}$ ?

Dóna raons de les teves respostes.

DEFINICIÓ

Una successió $a_n$ té límit L si per a qualsevol entorn centrat de L establert per endavant, és possible trobar un terme a partir del qual tots els termes de la successió estiguin dintre d'ell.

Direm que L és el límit de la successió $a_n$ i escriurem

$$\lim a_n = L$$

A continuación ponemos en relación las "sucesiones de límite L" con las "sucesiones de límite cero", relación importante para poder estudiar (más adelante, seguramente después del COU) las propiedades aritméticas de las sucesiones a partir

de las propiedades de las sucesiones nulas.

DEFINICIÓ

Una successió $a_n$ té límit L si la successió $b_n = a_n - L$ és una successió que té límit zero.

Todavía quedan en este apartado unos nueve problemas más, alguno de los cuales se aprovecha para discutir la idea de "demostración":

6. Calcular els límits següents:

$$\lim \frac{2n(n-1)}{n^2-1} \qquad \lim \frac{2n+1}{3n} \qquad \lim \frac{(3n-1)^2}{7n^2+3}$$

En aquest problema caldrà, com ja vàrem fer en problemes anteriors:

a) Conjecturar quin és el límit de cada una de les successions. Cal tenir clar que la definició de quan

30

una successió $a_n$ té límit L no ens diu <u>com trobar</u> L; l'únic que deixa clar es, donat un nombre L, com poder esbrinar si és o no el límit de la successió. Per tant, cal conjecturar, en primer lloc, el límit de cada una de les successions, i per a fer-ho caldrà utilitzar l'experiència treta de l'estudi d'altres successions, diagrames o representacions d'un nombre finit de termes, idees intuïtives sobre el comportament del terme general de la successió per valors grans de n, ...

b) Justificar que el límit de cada successió és el valor conjecturat.

Finalmente quedan dos apartados. Uno de ellos, "SUCCESSIONS MONÒTONES, SUCCESSIONS ACOTADES", permite entablar múltiples discusiones en clase cuando el alumno intuye que los conceptos de acotación, monotonía, convergéncia,... estan interelacionados.

El último apartado está dedicado al estudio de "EL NOMBRE e" a partir del problema

1. Si imposem 1 pta al 100% anual en un banc, quin saldo tindrem al cap d'un any?



Por último deberíamos decir que todo el tema viene ilustrado con algunas historietas de Charlie Brown con la intención de introducir pausas en la lectura de un texto que de cualquier modo puede resultar árido para algunos alumnos. Dichas historietas estan sacadas de la edición que de las mismas viene haciendo Edicions 62 de Barcelona. Reproducimos la que aparece en la página 36:

## OBSERVACIONES DESPUÉS DE HABER TRABAJADO EL TEMA

La duración del tema ha sido de 14 horas, y los conceptos más sugerentes :

- para las sucesiones divergentes, la idea de número control, y
- para las sucesiones convergentes, las de micro-control y de cola de una sucesión, especialmente para la demostración de la unicidad del límite,

Hemos constatado que la definición correcta del límite prácticamente no ayuda a la comprensión del concepto ni al cálculo. Es precisamente la visión intuitiva, trabajada en cursos anteriores, la que permite entender la definición correcta, que de todos modos no resulta fácil para una mayoría de alumnos para los cuales la idea intuitiva del límite es lo suficientemente clara como para que no vean la necesidad de su correcta definición.

---

GRUP ZERO



## BIBLIOGRAFIA


-ALGEBRA WITH APPLICATIONS, Mathematics Applicable, Schools Council Sixth Form Mathematics Project

-UNDERSTANDING INDICES, Mathematics Applicable, Schools Council Sixth Form Mathematics Project

-¿QUE ES LA MATEMATICA? Courant y Robbins. Ed. Aguilar.

-MATEMATICAS 2 Grupo Cero de Valencia.

-SUCESIONES Y SERIES INFINITAS, Curso programado de Cálculo, The Committee on Educational Media. Ed. Reverté.

-CALCULO Ceder y Outcalt. Ed. Fondo Educativo Interamericano.

-ELS NOMBRES I ELS HOMES Enciclopèdia ULISSES 6

II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA

DE LAS MATEMATICAS. SEVILLA, ABRIL DE 1982

# INTRODUCCION AL NUMERO "e" (UN EJEMPLO DEL USO DE LA HISTORIA)

Ponencia nº 23

JOSE Mª MARTINEZ BLANCO

"INTRODUCCION DEL NUMERO "e" (UN EJEMPLO DEL USO DE LA HISTORIA)"

José Mª Martínez Blanco INB "Santa Irene" VIGO (Ponencia nº 23)

## 1. Introducción.

La presente ponencia pretende explicar una forma de introducir el número "e" en el Bachillerato. No tiene la pretensión de ser la forma de introducirlo, pues existen varias. Cada profesor deberá decidir en cada caso concreto si tiene sentido tratar el tema y, en su caso, optar por una de las distintas formas de introducirlo.

A la hora de optar, pesa de modo decisivo, el contexto en el que se pretende explicar el tema. En efecto, usualmente se explica dentro del tema de sucesiones de números reales una vez tratado el concepto de límite. El presente trabajo está pensado fuera de tal contexto, concretamente, se introduce dentro del tema de las funciones elementales y en conexión con el logaritmo. Por ello es coherente tratarlo en 2º de BUP (pero no obligatorio) y no es preciso haber tratado con anterioridad el concepto de límite ni el tema de sucesiones de números reales. También es posible encontrar otros temas en los que, de forma natural, aparece el número "e", como por ejemplo el tema de estadística y probabilidad (por ceñirnos a temas matemáticos y no hablar de la física, por ejemplo).

No obstante, de todas las formas posibles de introducir el número "e", ésta se basa en una metodología en cierto modo privilegiada: utiliza las mismas ideas que llevaron al hombre a "descubrir" el número "e". Al adoptar este punto de vista, gran parte de los problemas que originan los tratamientos formalizados que enmascaran el sentido (y utilidad) de las teorias que se explican, desaparecen. En efecto, al analizar el proceso histórico de una teoría, lo que aparece en primer plano es la necesidad de su descubrimiento al tiempo que nos proporciona, frecuentemente, el camino más natural de introducirlo. Por todo ello desearía que se tomara esta ponencia como un ejemplo de la utilización de la historia con fines didácticos y que suscitara reflexión sobre el tema.

He preferido presentar directamente los materiales del alumno y no redactarla en forma de comunicación entre colegas. Al hacerlo así pienso que facilito la visión didáctica aunque sacrifique otro tipo de reflexiones, por ejemplo, la metodológica. También he decidido no suprimir las referencias a otras partes de los materiales que caen fuera de la ponencia para que sugieran por sí mismos el antes y después que debe tener este tema.



## 2. Las primeras tablas de logaritmos y el número "e".

Ya hemos hablado de Neper y Bürgi al tratar los logaritmos. Para poder entender mejor la exponencial y el logaritmo vamos a recorrer a grandes pasos el proceso seguido por estos dos grandes matemáticos para confeccionar sus tablas de logaritmos.

### 2.1. Las primeras tablas de logaritmos.

Cuando hicimos nuestra "tabla" de logaritmos en base 2, avanzamos muy rápidamente por tener detrás, inconscientemente, un instrumental sofisticado: las calculadoras. En efecto, las potencias de dos que pudimos calcular con facilidad fueron las de exponente entero, es decir, es muy fácil construir la "tabla":

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| ... 0,125 | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 | ... |

Pero la tabla de logaritmos que podemos deducir de estas potencias presenta tantos "huecos" que no nos ayuda en nada para cálculos prácticos. Para poder completarla nos vimos obligados a considerar las potencias con exponente fraccionario. Pero esto es un procedimiento inservible de no contar con las calculadoras.

¿Cómo se las arreglaron Neper y Bürgi para hacer unas tablas de logaritmos que fueran útiles a la hora de cálculos prácticos?. En otras palabras, ¿cómo se las arreglaron para hacer unas tablas que no presentaran "huecos" grandes sin emplear potencias de exponente fraccionario?. Ambos tuvieron la feliz idea de tomar bases muy proximas a la unidad (Bürgi tomó 1,0001 y Neper 0,9999999 ) con lo que las potencias enteras de estas bases dan números muy proximos entre sí. Sigue habiendo "huecos", pero ahora de mucho menor tamaño que los de nuestra base 2.

Estudiemos con más calma la idea de Bürgi. Formó lo que hoy llamamos una tabla de valores para $1{,}0001^n$ (con "n" entero) y escribió los exponentes con tinta roja y los resultados con tinta negra. Por ello llamó números rojos a lo que Neper (y nosotros) denominó logaritmos.

Intentemos hacer esa tabla de valores:

| n | $1{,}0001^n$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1,0001 |
| 2 | 1,00020001 |
| 3 | 1,000300030001 |
| 4 | 1,0004000600040001 |
| 5 | 1,00050010001000050001 |
| 6 | 1,000600150020001500060001 |
| 7 | 1,0007002100350035002100070001 |
| 8 | |
| 9 | |

Para calcular, por ejemplo, $1{,}0001^4$ tenemos que multiplicar 1,0001 cuatro veces por sí mismo (o dos veces 1,00020001). Este proceder permite calcular la tabla anterior en un tiempo razonable, pero para exponentes mayores los cálculos serán agobiantes. Cabe preguntarse: ¿existe algún procedimiento que nos permita hallar las potencias mediante sistemas más rápidos y cómodos?.

Veamos como puede hacerse: consideremos una potencia cualquiera, $p = 1{,}0001^n$. La siguiente será $1{,}0001^{n+1}$ y será igual a p más un cierto aumento que podemos llamar $p+\Delta p$. Dicho aumento podemos calcularlo por sustracción de las dos potencias, es decir:

$$\Delta p = (p+\Delta p) - p = 1{,}0001^{n+1} - 1{,}0001^n = 1{,}0001^n(1{,}0001-1) =$$
$$= 1{,}0001^n \cdot 0{,}0001 = p \cdot 10^{-4}$$

De este modo, si conocemos la potencia n-ésima de 1,0001 podemos calcular la siguiente <u>sumándole</u> $\Delta p = p/10^4$. Comprobémoslo:

| | |
|---|---|
| n = 5 | 1,0005 0010 0010 0005 0001 |
| | + 0,0001 0005 0010 0010 0005 0001 |
| n = 6 | 1,0006 0015 0020 0015 0006 0001 |
| | + 0,0001 0006 0015 0020 0015 0006 0001 |
| n = 7 | 1,0007 0021 0035 0035 0021 0007 0001 |
| | + 0,0001 0007 0021 0035 0035 0021 0007 0001 |
| n = 8 | 1,0008 0028 0056 0070 0056 0028 0008 0001 |
| | + 0,0001 0008 0028 0056 0070 0056 0028 0008 0001 |
| n = 9 | 1,0009 0036 0084 0126 0126 0084 0036 0009 0001 |

Este método es muy sencillo pero lento ya que nos obliga a ir de uno en uno. ¿Existirá algún otro procedimiento que permita avanzar más deprisa?. Para contestar esta pregunta observa las potencias que ya hemos obtenido, ¿se pueden encontrar tendencias que nos permitan, por inducción, deducir potencias de exponentes más altos sin necesidad de ir una a una?.

Te habrás fijado que las potencias anteriores son de la forma:

$1{,}0001^n = 1{,}\ 000\ \boxed{1^o}\ 000\ \boxed{2^o}\ 000\ \boxed{3^o}\ 000\ \boxed{4^o} \ldots$ en donde cada una de los recuadros representa un cierto número (que cuando es de más de una cifra "ocupa" los ceros necesarios de su izquierda). Por ejemplo,

$1{,}0001^9 = 1{,}000\ 9\ 0036\ 0084\ 0126\ 0126 \ldots$ etc.
1º 2º 3º 4º 5º ...

Veamos, pues, quienes son esos primeros, segundos, terceros, etc números:

Los "primeros números" son: para n = 1 el primer número es 1
2 — 2
3 — 3
4 — 4
... — ...
para n el primer número es n



Los "segundos números" son: para n = 1 el segundo número es 0
2 — 1
3 — 3
4 — 6
5 — 10
6 — 15
... — ....
para n el segundo número es ?

Si aplicas los métodos que ya hemos estudiado para tratar una tabla de valores te darás cuenta (por diferencias finitas) que se trata de una función polinómica y, además, de 2º grado. Si trabajas bien obtendrás que: los "segundos números" son (1/2).n.(n-1)

Los "terceros números" son: para n = 1 el tercer número es 0
2 — 0
3 — 1
4 — 4
5 — 10
6 — 20
... — ....
para n el tercer número es ?

Si repites el procedimiento verás que se trata de una polinómica de tercer grado cuya fórmula es: $\frac{n.(n-1).(n-2)}{3.2}$

De forma análoga se obtiene que los "cuartos números" son de la forma:

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{4.3.2}$$

Reitera el proceso cuantas veces haga falta y verás que los p-ésimos números de la potencia $1{,}0001^n$ son de la forma:

$$\frac{n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .(n-(p-1))}{p!}$$

Sentado esto podemos calcular cualquier potencia, por ejemplo $1{,}0001^{50}$:

el "primer número" es 50

el "segundo" es (50.49)/2 = 1225

el "tercero" es (50.49.48)/6 = 19600

el "cuarto" es (50.49.48.47)/24 = 230300

etc.

Por lo tanto, $1{,}0001^{50}$ = 1, 0050 (ojo con la superposición de cifras)
1225
1 9600
23 0300 ...

= 1, 0050 1226 9623 0300 ...

de las que son fiables hasta la cifra ¿....?.

(Por comodidad separamos, contra lo que es habitual, las cifras decimales en grupos de cuatro)

<u>Ejercicio</u>

Calcula mediante este procedimiento con cuatro cifras decimales fiables las

potencias $1{,}0001^{629}$ $1{,}0001^{1000}$ y $1{,}0001^{10000}$

. . . . . .

**Observación:**

Cuando afrontamos el problema de buscar métodos más rápidos para calcular las potencias de 1,0001, hemos optado por uno,dejando, por tanto, otros muchos en la cuneta. Entre ellos está la interpolación lineal, profusamente usado por Bürgi.

Es curioso que nuestra búsqueda nos ha llevado a encontrar los números combinatorios (por cierto lejos de donde los libros de texto suelen explicarlos). Como sabes los números combinatorios pueden obtenerse colocando debajo de cada par de ellos su suma y obtenemos el triángulo de Pascal:

```
              1
            1   1
          1   2   1
        1   3   3   1
      1   4   6   4   1
    1   5  10  10   5   1
              etc.
```

que es en esencia lo mismo que nosotros hemos hecho.

Pero también son los coeficientes de la famosa fórmula del binomio de Newton. En efecto, si desarrollas de acuerdo con ella la potencia

$$(1 + 0{,}0001)^n$$

obtendrás el mismo resultado.

Por no salir de curiosidades, fíjate que tanto los números combinatorios como la fórmula del binomio fueron formulados en una época inmediatamente posterior a la de Bürgi.

. . . . . .

En resumen, del modo indicado, podemos construir, no sin trabajo, la tabla de logaritmos en base 1,0001, es decir, los primeros números de esa tabla serían:

| N | $n = \log_{1{,}0001} N$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 1,0001 | 1 |
| 1,0002 0001 | 2 |
| 1,0003 0003... | 3 |
| 1,0004 0006... | 4 |
| etc. | etc. |

La principal ventaja de esta tabla es que puede ser calculada "manualmente", pero ello a cambio de un inconveniente que se pone de manifiesto al calcular, por ejemplo:



$\log_{1{,}0001} 2 = 6931{,}81183$ o también $\log_{1{,}0001} 250 = 55217{,}36988$

es decir, que el logaritmo en esta base de un número razonable resulta enorme. Esto es un defecto puesto que los cálculos con dicha tabla serán bastante incómodos. Afortunadamente este problema tiene fácil arreglo: la fuente de este defecto radica en haber considerado una base "microscópica", por tanto, se podrá superar si contamos con una base más grande. Consideremos la nueva base $1{,}0001^{10000}$. El motivo de elegir esta nueva base queda en claro si consideramos el $\log_{1{,}0001^{10000}} 2$.

$\log_{1{,}0001^{10000}} 2$ será un cierto número N tal que:

$1.0001^{10000\,N} = 2$ pero $1{,}0001^{10000\,N} = (1{,}0001)^{N.10000} = 2$ luego

$N.10000 = 6931{,}81183$ o bien $N = 0{,}693181183$.

En resumen, nuestra tabla "desproporcionada" (la de base 1,0001) podemos convertirla en "equilibrada" cambiando la base por $1{,}0001^{10000}$. Pero lo más afortunado en este cambio es que no hay que hacer nuevas operaciones, sino, solamente dividir los logaritmos primitivos por $10^4$. Así pues, la tabla que se obtiene es:

| N | $\log_{1{,}0001^{10000}} N$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 1,0001 | 0,0001 |
| 1,00020001 | 0,0002 |
| 1,00030003... | 0,0003 |
| 1,00040006... | 0,0004 |
| 1,00050010... | 0,0003 |
| etc. | etc. |
| 2 | 0,6931 |
| etc. | etc. |
| 250 | 5,5217 |
| etc. | etc. |

Pero un momento; para poder hacer una tabla de logaritmos sin otra ayuda que las cuatro reglas aritméticas, hemos tenido que recurrir a la base: (Atención señoras y señores... !! ALE-HOOP!!) $1{,}0001^{10000} = 2{,}718145926$ ...

Queda por aclarar qué ocurre al considerar la base de Neper. Tú mismo puedes reproducir los razonamientos seguidos anteriormente pero trabajando con la base: $0{,}9999999^x = (1 - 0{,}0000001)^x$ (x entero). Si lo haces, encontrarás que la ecuación de diferencias para dos potencias enteras consecutivas es, en este caso, $\Delta p = -p/10^7$ lo cual conduce a la base

$(1 - 10^{-7})^{10^7} = 0{,}3678794412\ldots$ .

A pesar de las apariencias, esta base y la que hemos encontrado siguiendo a Bürgi están estrechamente relacionadas. En efecto:

$$\frac{1}{0{,}3678794412} = 2{,}718281828$$

es decir, son prácticamente inversas la una de la otra. (Las diferencias están a partir de la milésima y son debidas a la mayor aproximación de Neper a la unidad).

Pero el hecho de que Neper se aproximara a la unidad por valores menores a ella no es caprichoso, tiene su explicación. Bürgi llegó a sus "Números Rojos" desde especulaciones directamente algebraicas (o,si prefieres, aritméticas), sin embargo Neper comprendió enseguida la importancia que tenía su descubrimiento para la astronomía y la trigonometría (baste decir que anticipó, antes de ser publicados, sus hallazgos al famoso astrónomo Tycho Brae y que Kepler, quien desempeño un papel decisivo en la difusión de los logaritmos, se puso en contacto muy pronto con Neper y Briggs). Por tanto, al interesarle los logaritmos de fracciones propias (seno y coseno) lo más indicado es tomar una base menor que la unidad ya que, como sabes, en esa base los logaritmos de números menores que la unidad son positivos.

Con frecuencia se dice que Neper es el "inventor" de los logaritmos naturales (en base e, es decir, en base 2,71182818). Como se pone de manifiesto más arriba, esto no es exacto, pero no resta en nada el mérito de su labor (¡que le llevó 25 años!) y, en reconocimiento, a los logaritmos en base "e" se denominan neperianos.

Por último, hay que advertir que aquí no se ha contado la historia del descubrimiento de los logaritmos tal y como se realizó. Para empezar, ni Bürgi ni Neper se preocuparon para nada de la base en la que estaban trabajando (que fue aclarada bastante más tarde, en el siglo XVIII, por Euler). Además, ni las notaciones, ni el instrumental, ni, sobre todo, nuestras preocupaciones, coinciden con las de aquellos. Lo que hemos hecho es una reconstrucción de la historia adaptada a unos intereses muy concretos: entender cómo se trabajó para explicarnos mejor el porqué de nuestro modo de trabajar.



## 2.2. El número "e" de Euler.

Ya hemos comentado que la tabla de logaritmos en base $1{,}0001^{10000}$, o escrita de mejor manera $(1+1/10^4)^{10^4}$ no es todo lo perfecta que cabe esperar. En efecto, al construir las potencias enteras de $1+1/10^4$ la diferencia entre dos consecutivas es $\Delta p = p/10^4$ lo cual provoca que la tabla de logaritmos en base $(1+1/10^4)^{10^4}$ presente "huecos". Estos "huecos" para valores bajos de p no son importantes pero aumentarán según vayamos considerando potencias cada vez mayores. Este comentario plantea la siguiente pregunta: ¿cómo podemos mejorar nuestra tabla de logaritmos?. La lógica de la respuesta es sencilla: considerando bases cada vez más próximas a la unidad. Más explícitamente, el proceso de mejora de la tabla será como sigue:

| Las potencias enteras de: | Dan "huecos": | La tabla de logaritmos resultante tiene por base: |
|---|---|---|
| $1+\frac{1}{10^4} = 1{,}0001$ | $\Delta p = p/10^4$ | $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4} = 2{,}7181459 26\ldots$ |
| $1+\frac{1}{10^5} = 1{,}00001$ | $\Delta p = p/10^5$ | $\left(1+\frac{1}{10^5}\right)^{10^5} = 2{,}718268237\ldots$ |
| $1+\frac{1}{10^6} = 1{,}000001$ | $\Delta p = p/10^6$ | $\left(1+\frac{1}{10^6}\right)^{10^6} = 2{,}718280469\ldots$ |
| $1+\frac{1}{10^7} = 1{,}0000001$ | $\Delta p = p/10^7$ | $\left(1+\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = 2{,}718281828\ldots$ |
| - - - - - - - | - - - - | - - - - - - - - - |
| $1+\frac{1}{n}$ | $\Delta p = \frac{p}{n}$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ |

¿Cuál será la base "más precisa" que se puede considerar?, o si se prefiere, ¿cuándo se conseguirá que la tabla de logaritmos no presente "huecos"?. Es evidente que la respuesta no puede fijar un valor de "n" ya que, de hacerlo así, siempre se podría afinar más tomando las potencias n+1, n+2, n+3, etc. Se impone,por tanto, el paso al límite. Esta es la respuesta: la base más precisa que podemos considerar es:

$\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ ya que de este modo la tabla de logaritmos en esta base no presentará "huecos" (p/n tenderá a cero cuando n tiende a $\infty$), o dicho en otras palabras, su crecimiento será <u>continuo</u>.

Por la sucesión de valores de $(1+1/n)^n$ dada anteriormente podemos deducir que el valor de ese límite es:

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = 2{,}718281828\ldots \quad \text{(dado con 9 cifras decimales).}$$

El gran matemático del siglo XVIII Leonhard Euler (1707-1783) designó a este número con la letra "e" ("Ponamus autem brevitatis gratia pronumero hoc 2,71828... constanter litteram e ..." en su obra "Introductio in analysin infinitorum" Lausanne,1748).

Ejercicio.

Prepresenta gráficamente las funciones $y = e^x$ e $y = \ln x$.

Ejercicio.

Teniendo en cuenta que $\lim_{u \to \infty} (1 + \frac{1}{u})^u = e$ calcula los siguientes límites:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} \qquad \lim_{u \to \infty} \left(1 + \frac{2}{u}\right)^{u} \qquad \lim_{u \to \infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{u} \qquad \lim_{u \to \infty} \left(1 + \frac{x}{u}\right)^{u}$$

$$\lim_{u \to 0} (1+u)^{1/u} \qquad \lim_{u \to 0} (1+au)^{1/u} \qquad \lim_{u \to 0} (1-u)^{b/u}$$

Ejercicio.

Representa gráficamente las funciones:

$$y = e^{-x} \qquad y = -3e^{x} \qquad y = e^{2(x-1)} \qquad y = L(4+x) \qquad y = 2 + Lx$$

En resumen: por todo lo visto anteriormente, cabe definir el número e y la exponencial $e^x$ por medio de distintas formas equivalentes:

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n \quad \text{o de modo equivalente} \quad e = \lim_{n \to 0} (1 + n)^{1/n}$$

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{n \to 0} (1 + xn)^{1/n} = \lim_{n \to 0} (1 + n)^{x/n}$$

Lo más sorprendente (si cabe) de toda esta historia es qué existen muchos fenómenos, naturales y sociales, que pueden ser descritos de forma satisfactoria empleando el modelo matemático que encierra el número "e". Por ello, todo lo que hemos aprendido anteriormente dista mucho de ser un juego intelectual; el número "e" nos ayuda a entender hechos y a predecir resultados. En lo que sigue se pondrá de manifiesto.

(En lo que debería seguir si se extendiera la ponencia).

Referencias:

Félix Klein, "Matemática elemental desde un punto de vista superior" Biblioteca matemática Rey Pastor, Madrid.

James R. Newman "SIGMA, El mundo de las matemáticas" Grijalbo, Barcelona.

R. Courant-H. Robbins "Qué es la Matemática" Aguilar, Madrid.

JOSE Mª MARTINEZ BLANCO, ABRIL de 1982.



# ALGUNOS PROBLEMAS DIDACTICOS DE LA MATEMATICA EN PRIMER CICLO UNIVERSITARIO CON ALUMNOS REPETIDORES

- I - I -

Eugenio Fedriani Martín

ALGUNOS PROBLEMAS DIDACTICOS DE LA MATEMATICA EN PRIMER CICLO UNIVERSITARIO CON ALUMNOS REPETIDORES.

Vamos a intentar hacer un estudio no exaustivo de problemas que surgen, ponen de manifiesto y/o desencadenan los alumnos repetidores en un curso de Matemática de primer ciclo universitario de una carrera en la que la Matemática sea una "asignatura auxiliar". Posteriormente vamos a presentar un intento de darles solución en un ejemplo concreto.

Algunos de los problemas que vamos a describir no son evidentemente de la Matemática, ni específicos del primer ciclo universitario pero desde luego la coincidencia de estas circunstancias crea un caldo de cultivo idoneo para su desarrollo. El referirnos a carreras no directamente conectadas con nuestra ciencia se debe a que la base matemática, la aptitud específica y las motivaciones son muy diferentes, en líneas generales, para los alumnos de Escuelas Universitarias, Farmacia, Biológicas, Económicas, Empresariales,..., y para los de Matemáticas, Fisicas, etc.

Los alumnos repetidores están,, por desgracia, presentes en cualquier curso de Cálculo, Algebra, Análisis,..., de primer ciclo universitario, pero a veces abundante y conflictivamente.

Vamos a reflexionar sobre los problemas que estos alumnos tienen y sobre algunas de las respuestas de los mismos en función de su psicología y condicionantes sociales.



A) Podemos encontrar un tipo de alumnos repetidores que reconoce haber tenido un mal aprovechamiento el curso anterior, tiene tiempo para estudiar(no lo simultanea con un trabajo absorvente), base y capacidad sugicientes. Generalmente son alumnos dispuestos a dedicarse "más en serio" al estudio de la asignatura.

Problemas en estos alumnos pueden ser:

1) Hacer una autoevaluación demasiado optimista e intentar abarcar demasiadas asignaturas de un curso superior, para terminar posiblemente con una crisis de la propia estimación en el último trimestre. Muchos de los alumnos que abandonan sus estudios universitarios nos parece que corresponden a este grupo.
2) Algunos alumnos se valoran con pesimismo y dedican el curso entero a una o dos asignaturas pendientes, renunciando a cursar otras que son incompatibles o de horario coincidente.
3) La existencia de una convocatoria en febrero anima a un buen porcentaje de alumnos a iniciar un esfuerzo importante preparando simultáneamente medio programa en clase (y acudiendo a parciales) y otro medio programa por su cuenta. En estas condiciones el alumno suele confiar totalmente en el material de estudio acumulado del curso anterior: apuntes, colección de problemas, etc y abandonar las clases repetidas para asistir a algu-

de otro curso o bien estudiar en la biblioteca "perdiendo meno tiempo"-dice-. El resultado final suele ser malo porque el material que no sirvió para aprobar en septiembre es posiblemente defectuoso, incompleto o mal interpretado sistemáticamente. Además muchos de los alumnos repiten como consecuencia de un"desfondamiento" de final de curso y son otra vez los últimos temas los que tiene que preparar en peores condiciones.

B) Para otro tipo de alumnos su fracaso es consecuencia de una gran falta de base, algunos de ellos simultanean trabajo y estudio después de un largo paréntesis.Aprovecharían el trabajo que de hecho suelen hacer si se sintieran con la libertad suficiente para interrumpir la marcha de las explicaciones y "molestar" a unos compañeros que las están copiando.

C) Un tercer tipo de alumnos lo constituyen los que se consideran repetidores "como consecuencia de una injusticia"; por calificación excesivamente dura; por "mala suerte" en los temas motivo del último exámen o por "un mal dia" para resolver los problemas. Este conjunto de alumnos no tiene menos dificultades que los dos anteriores para superar la asignatura, pero además con cierta frecuencia provoca problemas en la marcha del curso normal.

El alumno que se considera "injustamente suspendido" en sus conversaciones con "los novatos" puede ser causante de una desmoralización de una parte de éstos (creemos que sigue



siendo frecuente en primer curso de Escuelas Técnicas). Si considera que las pruebas fueron excesivamente duras pretenderá (en particular en las clases de problemas) que se omitan los ejercicios elementales para hacer "problemas de exámen". Esta propuesta con frecuencia planteada en clase puede provocar tensiones entre los alumnos medianamente dotados y que cursan la asignatura por primera vez por una parte y los repetidores, alineados con una minoría de alumnos muy bien dotados, por otra.

D) En cada curso suelen aparecer también otro tipo de alumnos, ciertamente minoritarios, formado por aquellos repetidores que se esfuerzan por demostrar, a la menor ocasión, "sus muchos conocimientos" o bien que "este curso sí que están trabajando". Son alumnos que, por ejemplo, pueden hacer preguntas relacionadas con el tema siguiente. Algunas veces pueden ser oportunos y servir de introducción para otras cuestiones que el profesor pensaba tratar en ese momento, pero frecuentemente o hay que responderles en un momento en la mayoría del aulario no entenderá la respuesta, ni posiblemente capta el sentido de la pregunta, o hay que contestar con la muletila de "en un próximo dia veremos". En este caso la pregunta sólo habrá servido para perder la marcha prevista en las explicaciones.

Todos estos problemas y situaciones se han presentado entre los alumnos repetidores de Análisis Matemático I de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Sevilla de la que nos vamos a ocupar a modo de ejemplo en lo que sigue.

En los últimos años el porcentaje de alumnos repetidores de dicha asignatura oscila entre un 30% y un 40% del total. De este porcentaje algunos alumnos no aparecen nunca por clase y otros no aparecieron casi nunca el curso anterior, por lo que se les puede considerar como nuevos a los efectos que nos interesan. Un 20% aproximadamente de alumnos son repetidores que comienzan asistiendo a clase y que al menos los 2 primeros trimestres del curso anterior también asistieron con relativa normalidad. Para estos alumnos consideramos interesante:

1º. Un horario que les permitiera asistir a las clases de determinadas asignaturas del curso siguiente.

2º. Unos grupos lo menos masificados posible en los que fuese viable una relativa personalización.

3º. Una programación en la que se dedicase más atención relativa a los últimos temas del cuestionario y a cuestiones de base de cursos anteriores, aunque fuese en detrimento de los temas más conocidos para la mayoría (generalmente los primeros).



4º. Un reparto de horas en el curso que hiciese más fácil la preparación para una eventual concurrencia a los exámenes de Febrero.

5º. Un encauzamiento de la participación teniendo en cuenta que algunos alumnos tienen especial interés por demostrar sus conocimientos o su esfuerzo.

En un intento de responder a estas consideraciones nació el "Curso de Repetidores de Análisis Matemático". Vamos a intentar describir algunos aspectos del mismo a la vez que hacemos un poco de historia sobre como cristalizó la idea de su implantación experimental.

En la Facultad de CEYE de Sevilla al existir cursos de mañana y de tarde el problema de coincidencia de horarios ofrecía posibilidades para su solución. Como los alumnos que simultanean el trabajo con el estudio en esta Facultad suelen tener las tardes disponibles, y si tienen pendientes asignaturas de 1º suelen abandonar las incompatibles de 2º, a estos alumnos les interesarían las clases en huecos dejados por estas asignaturas y horario de tardes. Los alumnos más jóvenes prefieren generalmente tener sus clases por las mañanas pero en gran proporción quieren cursar asignaturas de 2º curso. Pensando en su horario de estudio personal parecía oportuno que las clases correspondientes se impartieran por las tardes pero sin obligarles a acudir a la Facultad más de 3 tardes.

Un curso especial para los alumnos repetidores no estaba previsto administrativamente y por consiguiente era muy importantetener en cuenta los medios humanos disponibles. (Por fortuna no había problemas de locales en edificio de la Facultad). La asignatura de Análisis Matemático se impate por dos profesores con encargo de curso "B" y una profesora de clases prácticas. Oficialmente y como consecuencia del número de alumnos matriculados, están previstos dos grupos de alumnos en grupos de mañanas y dos en turnos de tardes. El horario de la Facultad es rígido por no existir huecos en el mismo. La asignatura tiene asignadas 5 horas de clase (3 para teoría y 2 para prácticas). Naturalmente con estos condicionantes es imposible que un profesor imparta las clases a los grupos de la mañana y otro a los de la tarde. En los primeros cursos de existencia de la Facultad los profesores encargados de curso se repartían el programa tanto por la mañana como por la tarde, pero ésto creaba problemas de coordinación de las clases prácticas. Estas dificultades y la problemática superpuesta de los alumnos repetidores nos llevó a la solución actual: reunir a los alumnos, tanto de la mañana como de la tarde, en dos de las horas de teoría y una de prácticas. En las horas en que quedan separados los cuatro grupos (reducidos además por la separación de repetidores) es posible mantener un imprescindible diálogo y turnos de preguntas y respuestas, que naturalmente hay que limitar en



las horas en que estos grupos se encuentran juntos de dos en dos. De esta forma con un mínimo inconveniente, por otra parte casi inevitable en algún grado, el profesorado puede dedicar 4 horas teóricas y 2 prácticas (en 3 bloques de 2 horas) a los alumnos repetidores.

En realidad decidimos hacer un reparto no constante de estas horas a lo largo del curso y así dedicamos una hora más de teoría y una más de problemas en el primer cuatrimestre(luegouna menos en el 2º), para intentar avanzar los programas cuanto antes procurando de esta forma facilitar el trabajo de los alumnos que se van a presentar en Febrero o que necesitan determinados conocimientos como base para otras asignaturas. Un ritmo rápido en la exposición de muchos temas y la omisión o aplazamiento de los más conocidos, vienen permitiendo hacer una visión de los más interesantes antes de terminar el mes de Febrero.

Para motivar el trabajo de los alumnos se les ofrece la opción de adelantar los tres exámenes parciales, que realizan los alumnos de los diferentes grupos de la asignatura, a fechas convenidas de mutuo acuerdo. El alumno que no realiza uno o más parciales en estas fechas puede hacerlo con el grupo de mañana o de tarde en el que estuviese originariamente encuadrado.

Veamos ahora como se organiza el trabajo y la participación de los alumnos en las clases teóricas. Establecido con anterioridad el tema que se va a estudiar en una jornada, el alumno habrá podido hacer una preparación personal mediante los apuntes del curso anterior y la bibliografía recomendada. Como cabe suponer, esta preparación será muy irregular, pero a partir de ella mediante intervenciones de los alumnos se intentan establecer los conceptos básicos que aparecen en el tema. El profesor, procura limitarse -en principio- a poner de manifiesto los defectos en las definiciones, subrayar notas esenciales y poner ejemplos que aclaren dichos conceptos.

Al tratar con alumnos repetidores, a los que ya se les han dictado, en cursos anteriores, teoremas con sus demostraciones y los desarrollos de los temas, las explicaciones se pueden dedicar principalmente a los puntos que ellos presentan como más dificiles.

El trabajo de las clases teóricas, una vez revisados los conceptos fundamentales que aparecen ene el tema, a partir de las definiciones que los alumnos recuerdan o leen de sus propios apuntes, se centran en la preparación y estudio de ejemplos y contraejemplos de los consiguientes conceptos y propiedades, para procurar finalmente centrarse en el estudio de aplicaciones de todo lo estudiado. Naturalmente cuando un tema es necesario explicarlo totalmente, por descubrirse



graves dificultades en el estudio de los alumnos o inadecuación de su material de trabajo, no se puede terminar en el tiempo previsto, motivo por el que la programación del curso no puede ser rígida sino que se va revisando cada día.

Cuando el tema tratado lo permite, nos gusta terminar la clase dictando 4 ó 5 cuestiones relativas al mismo que obliguen al alumno a reflexionar en algunos puntos de su estudio. Son cuestiones como: condiciones de aplicación de los teoremas, búsqueda de contraejemplos, diferencias entre un c concepto y otro. A veces hemos pedido ejemplos imposible de encontrar (comou un conjunto que verifique los axiomas de espacio vectorial menos la conmutatividad de la ley interna, un número complejo no nulo que no tenga inverso,...). El alumno a veces confiesa que tras su infructuosa búsqueda ha revisado la teoría y captado mejor el sentido y la aplicación de un teorema relacionado con la cuestión. Las preguntas a que nos venimos refiriendo son contestadas por el profesor posteriormente si algún alumno lo pide. En alguna ocasión una cuestión no resuelta en clase ha servido para ser propuesta en un exámen parcial posterior.

Acabados los temas que se han considerado de mayor interés por su importancia o dificultad relativa las clases teóricas dejan sitio para unos seminarios en los que se estudian temas inicialmente considerados complementarios o más

fáciles y se repasan lo que se puede, procurando, al elegirlos, compaginar el criterio de los alumnos y de los profesores (teniendo presente las lagunas detectadas en la preparación de aquellos que han realizado parciales anticipados. En cada seminario un alumno voluntario, valiéndose de un guión preparado por él, hace una exposición esquemática del tema que luego ampliará en los puntos que sus compañeros le señalen. El profesor o los profesores asistentes procuramos intervenir lo menos posible, pero naturalmente no siempre nos podemosl limitar a hacer nuestras anotaciones en el fichero para mejor evaluar los conocimientos y el grado de participación de los alumnos.

Estas anotaciones las solemos tener en cuenta a la hora de calificar en Junio alumnos con algún parcial "compensable" (es decir con medio punto por debajo de la calificación de aprobado). Esta "deferencia" nos parece justificada en cuanto que supone un importante estímulo, como deducimos del entusiasmo por participar de un buen porcentaje de los alumnos asistentes al curso.

Dejamos para otro trabajo el comentario de los métodos de trabajo empleados en las clases prácticas, de tanta importancia en un curso de Matemática y más al tratarse de alumnos para los que interesan por lo menos tanto los aspectos prácticos como los teóricos.



Con este breve trabajo hemos intentado manifestar nuestras reflexiones sobre un problema concreto de enseñanza de la Matemática y la forma en que venimos tratándolo. Es posible que esta memoria esté señalando un camino equivocado, pero si hace pensar a alguien que tenga planteado un problema parecido, habrá alcanzado el objetivo que le teníamos encomendado.

Eugenio Fedriani Martín

Sevilla, Abril de 1.982

## COMO HEMOS TRABAJADO EN 1º DE BUP ESTE CURSO 1981-82, UTILIZANDO EL MATERIAL ELABORADO POR EL GRUP ZERO.

Carles Lladó Casablancas. (Grup Zero)

### 1. INTRODUCCION

Lo que sigue es la "memoria" del trabajo hecho en dos grupos de primero de BUP, los grupos 1ºC y 1ºD, del Institut de Batxillerat "Joan Oliver" de Sabadell, durante parte de este curso 1981-82, concretamente desde principio de curso hasta mediados del mes de Febrero.

En dicha "memoria" hemos intentado sistematizar a posteriori el trabajo que realmente hemos hecho en la clase de matemáticas, sin que ello signifique que no partiéramos de una "programación" mínima que habíamos elaborado antes de iniciar el curso.

Hemos de decir que compartimos la opinión de que no existe una manera de enseñar un tema, o un concepto, que sea la más adecuada y que, en consecuencia, parte de nuestro trabajo como profesores de matemáticas debería consistir en experimentar y evaluar continuamente distintas presentaciones de los temas, nuevas motivaciones y métodos de trabajo para, posterior y colectivamente, discutir y clarificar las distintas maneras de entender la enseñanza de las matemáticas. Pensamos que, en realidad, el problema más importante que tenemos planteado los profesores de matemáticas en estos momentos no es qué enseñamos (o qué enseñaremos, o cuales son los programas alternativos a los actuales) sino cómo enseñamos.

Dicho esto, creemos que la presentación de esta "memoria" puede ser de interés por dos razones por lo menos:

A) Puede aportar algunos elementos para una discusión previa a cualquier elaboración de nuevos programas de matemáticas y que

intente dar respuesta a los tres interrogantes que Pere Puig Adam cita en una de sus obras:

- ¿Qué hace falta que el alumno aprenda?
- ¿Qué puede aprender el alumno?
- ¿Cómo hacer que el alumno quiera aprender?

B) Es una experiencia concreta de utilización del material del Grup Zero como material de trabajo utilizado en clase, no esporádicamente, sino de manera continuada. En este sentido, el trabajo que hemos hecho en la clase de matemáticas en los dos grupos de alumnos citados, parte de la utilización del libro "Funcions lineals i quadràtiques" del Grup Zero (publicado por Vicens Vives, Barcelona, 1981) en función de unas pautas metodológicas en consonancia con las características propias de los alumnos de los primeros cursos de BUP y que podríamos resumir en tres puntos:

- respetar al máximo el ritmo de los alumnos: su ritmo de aprendizaje, de asimilación, suele ser más lento de lo que los profesores creemos. La mayoría de las veces, la necesidad de "ver" todo el programa nos "obliga" a imprimir a nuestras clases un ritmo tal que impide a la mayoría de alumnos un aprendizaje correcto.
- buscar, al mismo tiempo, una cierta agilidad en el tratamiento de los temas, variando los centros de interés y cambiando el punto de vista desde donde abordarlos.
- aprovechar todas las oportunidades posibles para buscar centros de interés interdisciplinares, intentando romper la excesiva compartimentación en materias que se da en el BUP.

## 2. ¿COMO SE PRESENTA LA "MEMORIA" ?

Se presenta en forma de cuadro, intercalando algunas observaciones que creemos de interés. El cuadro sigue el orden cronológico del trabajo hecho en clase y tiene distintas columnas en un intento de



clarificar aquellos aspectos que tuvimos en cuenta a la hora de elaborar la "programación" del curso, pero incluyendo también aquellos que han surgido a partir de la propia dinámica de los grupos de alumnos con los que hemos trabajado, a sus intereses, a las situaciones coyunturales que han podido darse, ect. y que eran imprevisibles a priori.

En la columna SITUACIONES se indican aquellos problemas o centros de interés a partir de los cuales se han trabajado ciertos temas o conceptos. La mayoría de los problemas que se citan pertenecen al libro "Funcions lineals i quadràtiques" citado.

En las CUESTIONES A TRABAJAR se detallan aquellas cuestiones que hemos procurado que, implícita o explícitamente, fueran objeto de trabajo, análisis, discusión, ..., a lo largo de las clases, y que estan directamente ligadas a un cierto CONCEPTO.

La mayoría de "programas" detallan los temas y conceptos a estudiar pero dejan de lado muchos otros aspectos, quizas más importantes para la "formación" de los alumnos, que nosotros hemos incluido en la columna HABILIDADES.

Por último, en OTRAS CUESTIONES, incluimos aquellos temas o aquellas cuestiones que a partir de la propia dinámica de las clases se han tratado pero que inicialmente no estaban "previstas".

## 3. "MEMORIA"

A)

| SITUACIONES | CUESTIONES A TRABAJAR | CONCEPTOS | HABILIDADES | OTRAS CUESTIONES |
|---|---|---|---|---|
| Problemas:<br>-peso de un recién nacido<br>-tasas de correos<br>-cambio de moneda<br>-horas de luz | Interdependencia de magnitudes variables<br><br>La "regla" que nos da la imagen de un valor de la variable independ. puede ser<br>- una tabla<br>- un gráfico<br>- una expresión verbal<br>- una fórmula | Función | Lectura de tablas<br><br>Graduación de la recta.<br><br>Construcción de gráficos.<br><br>Interpretación y crítica de gráficos | Unidades de medida.<br><br>Volumen de un cilindro |

Observaciones: Inicialmente los alumnos mantenían una situación de dependencia respecto al profesor, sin entender que éste no "explicara" en primer lugar la "lección" para pasar después a resolver problemas de aplicación. El presentar a los alumnos desde un principio problemas a resolver, les obliga a tomar una actitud más comprometida con el trabajo que se hace en la clase. Sin embargo, no es fácil conseguir que los alumnos pasen a tener una actitud realmente activa ya que esta sólo puede darse cuando existe una motivación profunda que, la mayoría de las veces y por razones muy diversas (ambiente en que viven los alumnos, valores socio-culturales dominantes, la propia estructura escolar,...) es difícil de descubrir.

Desde un punto de vista matemático es importante que los alumnos, que ya saben la mayoría de ellos representar una función del tipo $f(x)=ax+b$, se den cuenta que uno de los problemas importantes a resolver es precisamente el recíproco, es decir, dada una colección



de puntos o una gráfica, hallar la expresión algebraica de la función correspondiente.

Es de notar la gran dificultad que los alumnos tienen de trasladar los valores de una tabla a una gráfica debido a las dificultades que tienen para graduar correctamente los ejes de coordenadas.

B)

| SITUACIONES | CUESTIONES A TRABAJAR | CONCEPTOS | HABILIDADES | OTRAS CUESTIONES |
|---|---|---|---|---|
| Problemas:<br>-movimiento uniforme<br>-cambio de moneda<br>-variación de la presión<br>-variación de la temperatura según la altura | Distinguir cuando dos magnitudes que dependen una de otra son proporcionales<br><br>Significado físico e interpretación geométrica del parámetro de la función $f(x)=ax$ | Función de proporcionalidad | Construcción de gráficos de funciones de proporcionalidad | Razón de dos magnitudes<br><br>El número $\pi$<br><br>Proporcionalidad de magnitudes |
| | | | Construcciones geométricas: división de un segmento<br><br>Localización gráfica y física del baricentro. Construcción de alturas. | El teorema de Thales<br><br>Geometría del triángulo: medianas, baricentro y alturas.<br><br>Triángulos semejantes<br><br>Relaciones métricas en el triang. rectángulo. Teorema de Pitágoras |
| | | | Habilidades de tipo manual: construcción de un aparato para medir alturas i/o distancias.<br><br>Exactitud de las medidas efectuadas con la cinta métrica, doble decímetro, transportador. | Cálculo de alturas<br><br>Cálculo de distancias. Limitaciones |
| Estudio de la sombra proyectada por una meridiana | | | Construcción de meridianas | Cálculo de alturas utilizando las sombras.<br><br>Media proporcional. |

Observaciones: Uno de los problemas que pronto se plantearon en las clases fue el de la dificultad de operar con fracciones. Sin embargo, a diferencia de otros años, hemos optado por no dedicar tiempo alguno a "repasar" el cálculo con fracciones; nos hemos limitado a respetar el que ciertos alumnos trabajen casi siempre con números decimales y que otros lo hagan con fracciones, resolviendo en cada momento las dudas que surgen y haciendo observar todos aquellos casos en que el uso de fracciones facilita el cálculo i/o la exactitud del mismo. En general, la experiencia nos ha llevado a pensar que es inútil intentar conseguir un nivel mínimo homogéneo en la clase en una primera fase del curso (para pasar "después" a ver los temas propios del nivel) y que es más útil, aunque más difícil, buscar nuevos temas y nuevas formas de presentarlos para que todos los alumnos tengan la oportunidad de adoptar una actitud más abierta hacia la asignatura y encuentren motivos suficientes para iniciar un trabajo serio, personal y, subjetivamente para cada uno de ellos, de interés.

Ha sido interesante constatar las dificultades de los alumnos para trabajar con el concepto de razón (a la pregunta de qué es el número $\pi$, la mayoría de alumnos contesta que $\pi$ es 3'14; nadie dijo que es la razón del perímetro de la circunferencia al diámetro de la misma), sobre todo si pensamos que uno de los temas básicos de la segunda etapa de EGB es el de proporcionalidad.

Las relaciones que existen entre los lados de triángulos semejantes se utilizó, en la práctica, para calcular alturas (de edificios, por ejemplo) y después para el cálculo de distancias. Hay que hacer observar, y así surgió en algunas discusiones en las clases, que muchos problemas que aparecen en los libros de texto sobre el cálculo de distancias mediante triángulos semejantes implican la utilización de métodos que no son viables en la práctica. El intento de superar las deficiencias que estos métodos pre-



sentan supone la introducción de las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo; es decir, supone la introducción de la trigonometría. Si bien es cierto que no iniciamos en esta ocasión su estudio, disponemos ahora de situaciones y de problemas que podrían utilizarse muy bien en otro momento para motivarlo.

Previamente a la utilización de las sombras proyectadas por ciertos objetos para el cálculo de alturas (a la manera de Thales), se hizo el estudio de la sombra que proyecta una meridiana (un tablero de madera de unos 50 cm x 70 cm, con una aguja de unos 15 cm clavada en él). A raíz de este estudio se ha formado un equipo de alumnos que construye diversos tipos de relojes de Sol, construcción que requiere ciertas ideas de astronomía y de dibujo nada triviales.

C)

| SITUACIONES | CUESTIONES A TRABAJAR | CONCEPTOS | HABILIDADES | OTRAS CUESTIONES |
|---|---|---|---|---|
| Problemas: - aumento de la presión - alargamiento de un muelle - coste de impresión | Generalización al caso de magnitudes cuyas variaciones son proporcionales | Función afín. | | |
| | Interpretación física y significado geométrico de los parámetros de la función $f(x)=ax+b$ | | Construcción de gráficos de funciones afines. | |
| | Cálculo de antimágenes | | Resolución de ecuaciones de primer grado | Planteamiento de ecuaciones de primer grado. |
| | Intersección del gráfico de una función con los ejes de coordenadas. | | | |
| | Interpolación: función afín que se ajusta a unos datos | | Resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Problemas: rutas o trayectorias sobre mapas | Recta que pasa por dos puntos | Geometría de coordenadas: ecuación de la recta | |
| | Paralelismo de rectas | | |
| | Intersección de dos rectas | | Resolución de sistemas lineales |

Observaciones: El estudio de la función afín, es decir, el estudio de la interdependencia de dos magnitudes cuyas variaciones son proporcionales, supone una primera aproximación al concepto de variación de una función y de tasa de variación y, por lo tanto al de número-derivada que se ve en segundo curso de BUP.
Es interesante hacer constar las dificultades que encuentran los alumnos a la hora de distinguir dos situaciones que desde el punto de vista algebraico son equivalentes: a)hallar la función afín $y=ax+b$ conocidas las imagenes de dos valores de la variable independiente, b) hallar el punto de intersección de dos rectas. Cabe la posibilidad que las dificultades nazcan de la diferencia entre el concepto de "variable" y el concepto de "incógnita", conceptos que, incluso históricamente, aparecieron por separado.

D)

| SITUACIONES | CUESTIONES A TRABAJAR | CONCEPTOS | HABILIDADES | OTRAS CUESTIONES |
|---|---|---|---|---|
| Discusión sobre el eclipse de Luna del 9-1-82 | Utilización de triangulos semejantes para el cálculo de distancias Tierra-Sol-Luna y de sus diámetros | | | Aristarco<br>Evolución de la concepción del sistema solar<br>Eratóstenes |



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Trabajo sobre mapas:<br>-Sabadell 1:10000<br>-La Mola 1:50000<br>-La Mola 1:25000<br>-El vallés 1:100000 | Escalas | Función de proporcionalidad | | |
| | Cálculo de distancias | | | Cálculo de altitudes: curvas de nivel |
| | | | Cálculo de longitudes de trayectos no rectilíneos, de áreas de figuras no regulares: descomposición en figuras regulares, utilización del papel milimetrado | Pendiente de un trayecto<br>Cambio de unidades cuadráticas |
| | | | | Densidade de población |
| | | | Habilidades de tipo gráfico: ampliación o reducción de un mapa. Pantógrafo. | Orientación<br>Cortes topográficos |

Observaciones: La discusión de los temas de astronomía señalados, originada por el eclipse de Luna del dia 9 de Enero de este año, pudo apoyarse a su vez en la visita que habiamos hecho antes de Navidad al Planetario del Museu de la Ciència de Barcelona, que ya había despertado en algunos alumnos el interés por esta materia. En estos momentos, un equipo de diez alumnos intenta reproducir los cálculos de Eratóstenes sobre el radio de la Tierra en colaboración con el Instituto de Novelda (Alacant).
El trabajo con mapas, como aplicación de la función de proporcionalidad, se ha hecho conjuntamente con la asignatura de Ciencias Naturales. Se trabajaron mapas de la ciudad y de su comarca. El cálculo de longitudes de trayectos no rectilíneos o de áreas de figuras no regulares supone en el fondo una primera aproximación al tema de la integral. A partir de los cortes topográficos que elaboraron los alumnos es posible introducir el concepto de pendiente de una curva y por lo tanto aproximarnos, un poco más, a concepto de número-derivada.
En la línea de trabajo interdisciplinar, el trabajo sobre mapas de la ciudad llevó a la clase, incluso, a plantearse algunas cuestiones de historia local.