

"thales

sociedad andaluza de profesores de matemáticas

ACTAS II JORNADAS MATEMÁTICAS

ACTAS II jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas

tomo II

abril 1982

sevilla

II Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas

ASPECTOS METODOLÓGICO-INTUITIVOS
EN EL ESTUDIO DE GRÁFICAS.

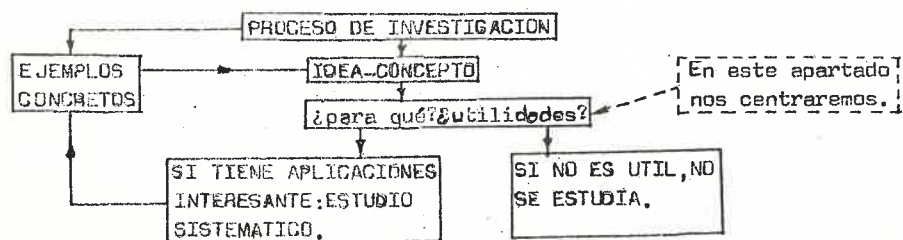
Manuel Martín Fernández,
GRUPO DIDÁCTICA DE MATEMÁTICAS
DE CÁDIZ.

ASPECTOS METODOLÓGICO-INTUITIVOS EN EL ESTUDIO DE GRÁFICAS

Nivel: 3º de Bachillerato.

Presupuestos iniciales: -Concepto geométrico de recta tangente a una curva en un punto. (Dibujo 1º)
-Concepto de Función-Gráfica. (Matemática 2º)
-Concepto de $\text{tg } x$. (Matemática 2º)

En un estudio clásico se comienza a estudiar funciones, luego concepto de derivada y, por último, aplicaciones de las derivadas al estudio de gráficas. Aquí, la metodología va a ser esencialmente distinta; Partiendo de unos ejemplos reales concretos (carretera, montaña, ...) se va a llegar al concepto de pendiente de una curva en un punto, y antes de estudiar métodos de cálculo, se va a estudiar las posibles aplicaciones-utilidades de ese concepto, ésta idea es utilizable en otros procesos de investigación - es decir, ver la necesidad de un concepto a través de sus aplicaciones antes de hacer un estudio sistemático de ese concepto, utilizando fundamentalmente la intuición y supuestos simples.



En el estudio clásico-actual de las derivadas en 3º, no se seguía el diagrama anterior, pues se veía el concepto de derivada (estudio sistemático) antes que sus aplicaciones posibles.

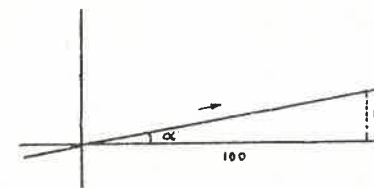
1 - LLEGAR A LA IDEA DE PENDIENTE DE UNA CURVA EN UN PUNTO.

-(llegaremos a través de ejemplos concretos).

1.º.- CARRETERA " RECTA " -

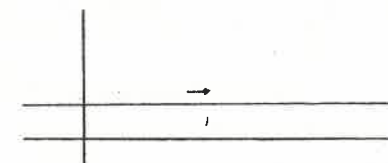
(en todos sus puntos tiene la misma pendiente).

Una carretera con pendiente del 12 % (positiva).



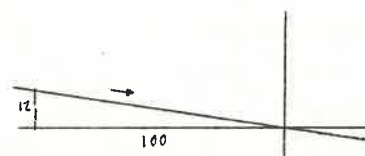
$$\text{tg } \alpha = \frac{12}{100} = 0.12$$

Una carretera con pendiente nula.



$$\text{tg } \alpha = 0 \quad (\alpha = 0)$$

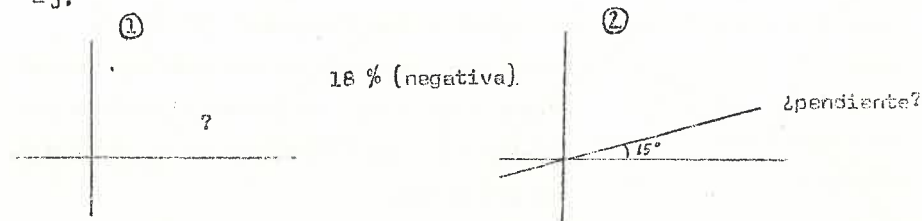
Una carretera con pendiente del 12 % (negativa).

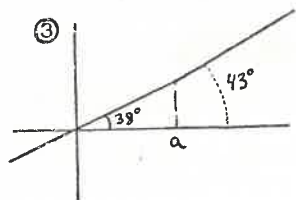


$$\text{tg } \alpha = -\frac{12}{100} = -0.12$$

-Recordar de Trigonometría $\text{tg } \alpha$, primer y segundo cuadrantes.

Ej.



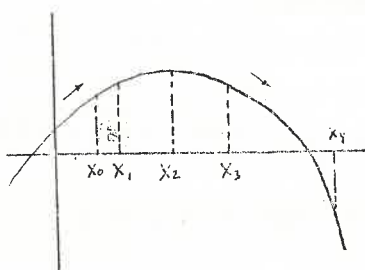
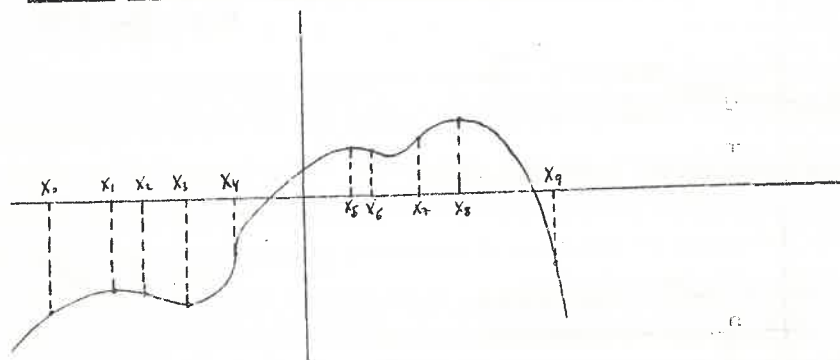


¿qué ocurre en a ? ¿y en x , $x < a$? ¿tiene la misma pendiente si $x > a$?

④ Estudia $y = |x|$.



1. b.- CARRETERA "CURVA" o MONTAÑA.-



Observemos ésta gráfica-"montaña"

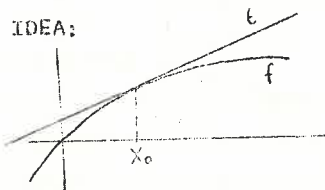
-¿existe la misma pendiente en x_1 que en x_2 ? ¿y entre x_3 y x_4 ?

-¿Cuánto vale la pendiente en x_2 ?

Supuesto que existe la misma pendiente en x_0 que en x_3 ¿en qué se diferencia?

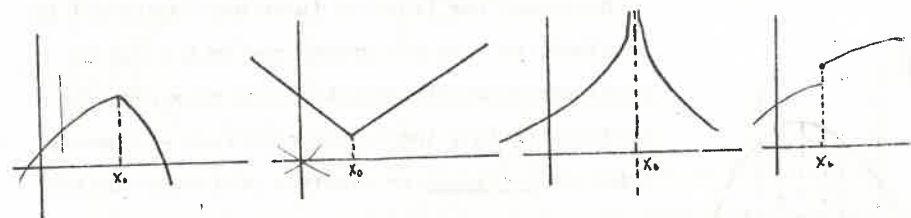
Hay dos tipos de pendiente, según "subimos" o "bajamos" ↗ ↘

IDEA:



Imaginemos superpuestas dos gráficas: una de "carretera" y otra de "montaña" pero con una particularidad: LA PENDIENTE EN x_0 ES LA MISMA EN LAS DOS.

Recordando de Dibujo el concepto geométrico de recta tangente a una curva en un punto, ¿cómo se podría definir de una forma natural el concepto de pendiente de una curva en un punto?
PEGAS: ¿qué pendiente tendría el punto en cuestión en estas gráficas?

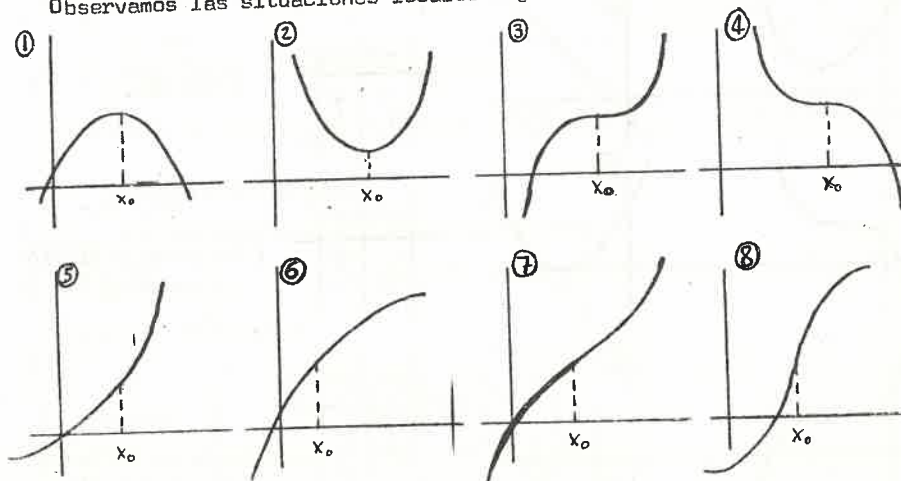


Evidentemente no tiene, y es un problema que tendremos que abordar, pero cuando se haga el estudio sistemático del concepto definido de forma intuitiva.

2. UTILIDAD DE LA IDEA.-

-(Suponemos que en los puntos a estudiar existe pendiente)

Observamos las situaciones locales siguientes:

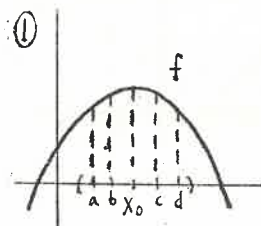


2.a.-

CARACTERIZACION DE LOS CASOS DE PENDIENTE NULA.-

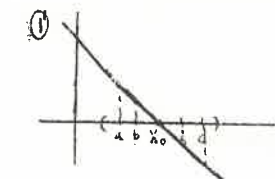
-Nivel intuitivo-

Comencemos por el caso ① :



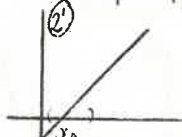
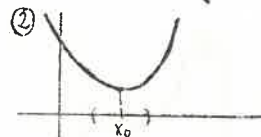
Observamos que (como si fuese una "montaña") la pendiente en a es más grande que en b, y que la pendiente decrece (siendo +) antes de x_0 , en este punto se anula y luego decrece (siendo -). Como se habla de pendiente en diversos puntos, se sugiere recoger todos estos datos en una gráfica-tabla, que será la gráfica de las pendientes: f' .

Así, en un cierto entorno de x_0 :



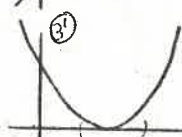
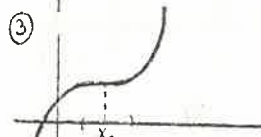
$f'(x_0)$	$x < x_0$	$x > x_0$
0	+	-

(Máximo) M



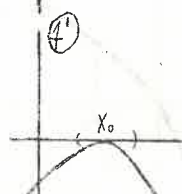
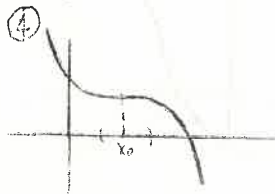
$x < x_0$	$x > x_0$
-	+

(mínimo) m



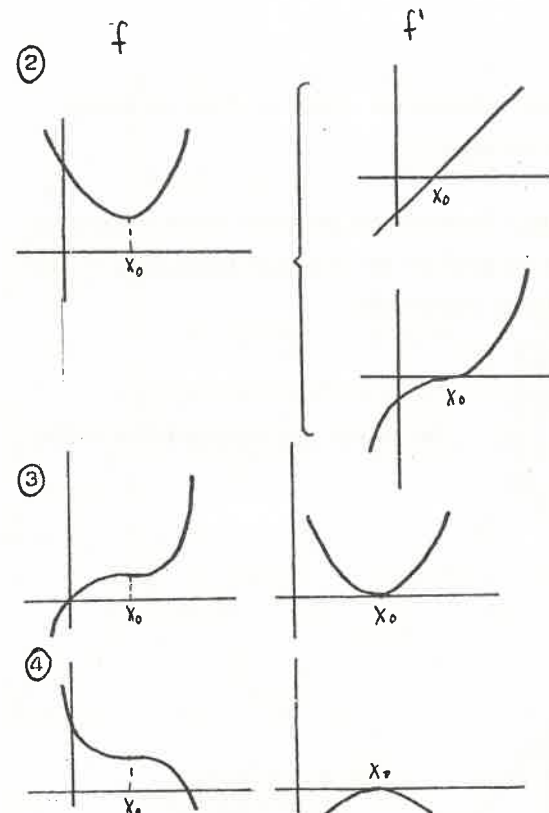
$x < x_0$	$x > x_0$
+	+

(Punto de inflexión ascendente) PIA.



$x < x_0$	$x > x_0$
-	-

(Punto de inflexión descendente) PID.



$f''(x_0) > 0$ m

-----> Análogo a 3/
/RECURRENCIA f'' ② ->
 f' ③ -> /

/RECURRENCIA f' ③ ->
 f ② -> /

/RECURRENCIA f'' ④ ->
 f' ① -> /

Observando lo citado y el cuadro de recurrencias de la página siguiente:

CONJETURA INTUITIVA:

$$f(x_0)=0 \dots \dots \dots f^{k-1}(x_0)=0$$

siendo $f^k(x_0) \neq 0$

entonces: $\begin{cases} k \text{ par} & \begin{cases} M \text{ si } f^k(x_0) < 0 \\ m \text{ si } f^k(x_0) > 0 \end{cases} \\ k \text{ impar} & \begin{cases} PIA \text{ si } f^k(x_0) > 0 \\ PID \text{ si } f^k(x_0) < 0 \end{cases} \end{cases}$

En esta caracterización hay que estudiar el signo de f'' en un entorno de x_0 para distinguir un caso de otro.

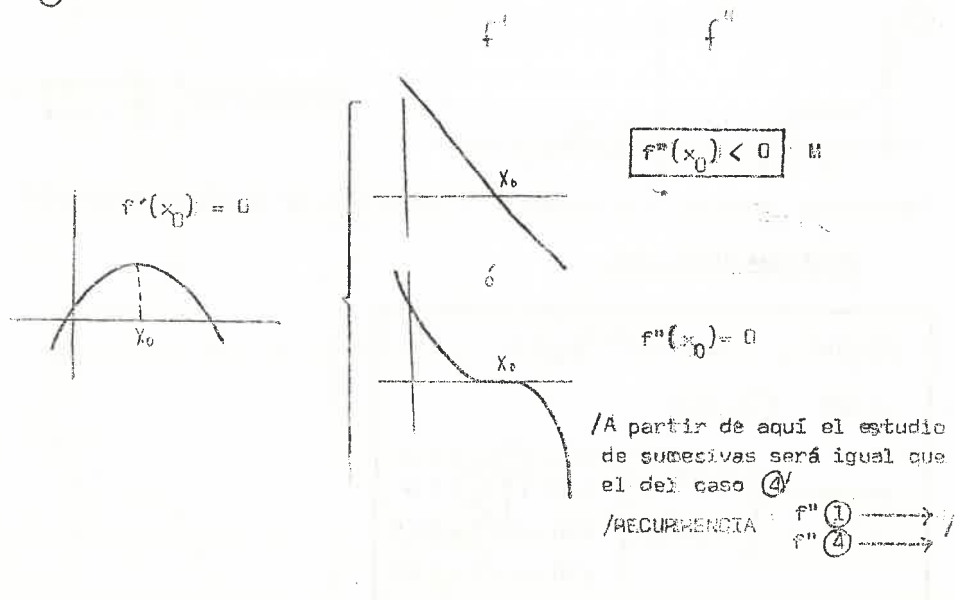
Hay otro camino a seguir: Consiste en intentar caracterizar los distintos casos recurriendo a la gráfica de f'' y sucesivas. Esto se sugiere de la observación del hecho siguiente:

- ① ~ ④'
- ④ ~ ①'
- ③ ~ ②'
- ② ~ ③'

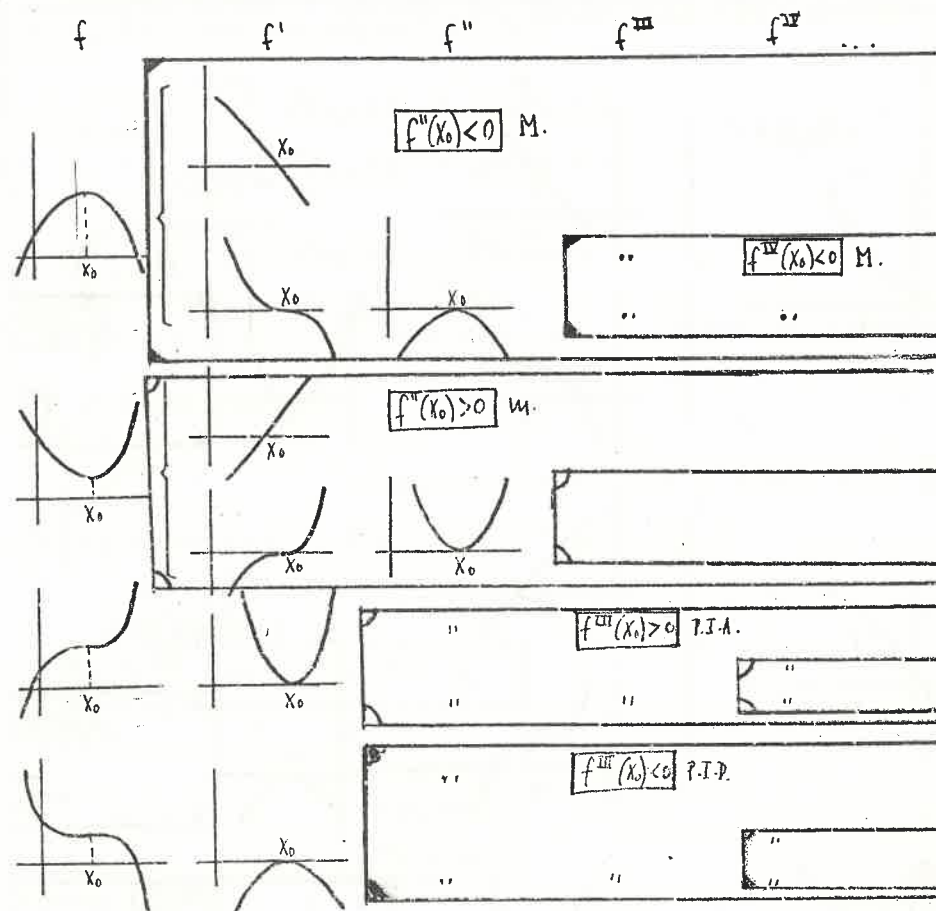
Se intuye una cierta RECURRENCIA,

Observemos que:

①

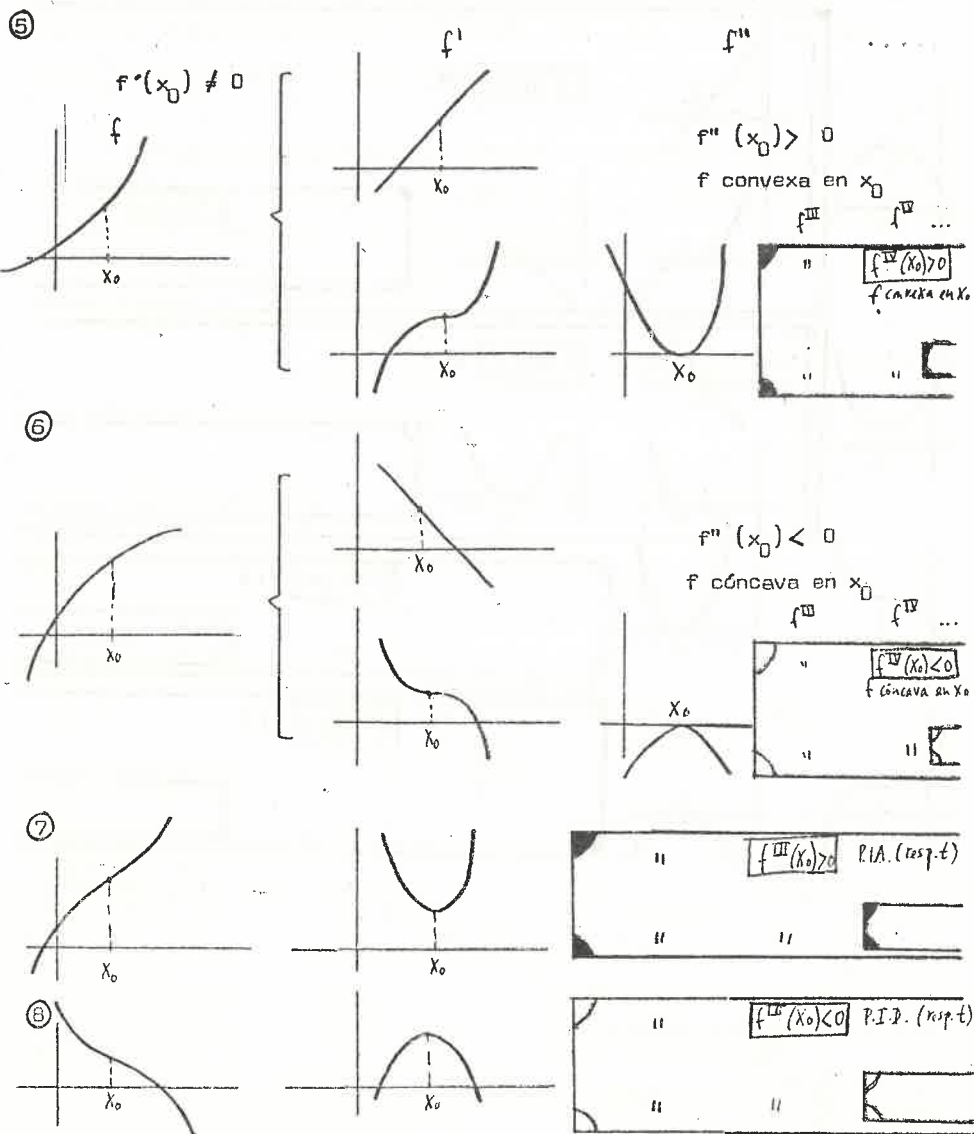


CUADRO DE RECURRENCIAS.



2.b.- CARACTERIZACION DE LOS CASOS DE PENDIENTE NO NULA.-

Un camino de trabajo sería utilizar sucesivas como el apartado anterior.



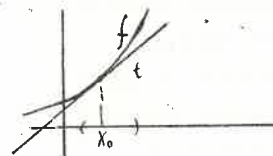
Resumiendo el cuadro de recurrencias anterior:

CONJETURA INTUITIVA:

$f'(x_0) \neq 0$ Todas las sucesivas a f' nulas en x_0 excepto la de orden k .

$$\left\{ \begin{array}{ll} k \text{ par} & \left\{ \begin{array}{ll} f^{(k)}(x_0) > 0 & f \text{ convexa en } x_0 \\ f^{(k)}(x_0) < 0 & f \text{ cóncava en } x_0 \end{array} \right. \\ k \text{ impar} & \left\{ \begin{array}{ll} f^{(k)}(x_0) > 0 & \text{PIA (respecto a } t) \\ f^{(k)}(x_0) < 0 & \text{PID (")} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Otro camino sería:



Estudiar el signo $(f - t)$ en un entorno de x_0 .

($t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$)

Sig($f - t$)

$x < x_0$	$x > x_0$	f en x_0
+	+	convexa
-	-	cóncava
+	-	PID (resp. t)
-	+	PIA (resp. t)

Nota.- Y a continuación de éste estudio se haría el desarrollo clásico de definición y cálculo de derivadas.

AUTOR: JOSE DE MIGUEL GARCIA

PROFESOR AGREGADO DE MATEMATICAS

DEL I.N.B. VIRGEN DE LA LUZ

AVILES - OVIEDO

RESUMEN.

Basándose en un círculo con la gráfica de la función coseno en coordenadas polares, que ya nos sirvió para generar el M.A.S., se compara este movimiento con el del P.M., y se llega a la función $W = f(\alpha)$ mediante la cual es posible generar un movimiento asociado al del péndulo matemático con el modelo mecánico que se describe al respecto.

Hallando las gráficas correspondientes para distintos valores de l, g y θ_0 , por comparación de las mismas, puede comprobarse la variación del movimiento pendular según las características del correspondiente P.M.

Se proyecta igualmente otro modelo mecánico que genera el movimiento anterior mediante el giro, con velocidad angular constante, del disco donde se ha dibujado una gráfica basada en la cosinusóide, la cual varía según las características del péndulo.

Sustituyendo en $T = \frac{2\pi}{W}$ la velocidad angular por la media de las velocidades instantáneas correspondientes a un intervalo de $\alpha = [0^\circ, 90^\circ]$ se describe un método, por aproximación, para el cálculo del periodo de un P.M.

Al final se comparan los valores del factor de corrección para el cálculo de T según distintos métodos.

OBJETIVOS.

Este trabajo ha sido realizado con fines didácticos, buscando como objetivo principal que el estudiante de B.U.P. 6 C.O.U. se identifique con el movimiento pendular, tan complejo e interesante en el mundo de la Física.

La principal aportación que se hace para ello es la de los modelos mecánicos, cuya descripción se expone con toda claridad, y cuya construcción, o montaje, se recomienda; pues es mediante el trabajo de laboratorio como más se familiariza el alumno con los conceptos estudiados teóricamente en las aulas.

ESTUDIO SOBRE EL PENDULO MATEMATICO

AUTOR: JOSE DE MIGUEL GARCIA

Vamos a tratar de llegar a un estudio que nos dé una idea, lo mas clara posible, del movimiento que posee un péndulo matemático. Para ello vamos a comenzar asociando el movimiento de la masa pendular oscilante con el de su proyección ortogonal sobre la cuerda que une los puntos extremos de la trayectoria descrita por la misma. Ver fig 1.

Supongamos, en principio, que dicho movimiento se trata de un M.A.S., basándonos en que es un movimiento periódico, siempre de la misma amplitud, y que, a simple vista, se parecen ambos por cambiar de sentido el movimiento en sus extremos, ser la trayectoria recta, aumentar la velocidad desde el extremo en que es nula hasta el centro en que es máxima, para efectuar, precisamente lo opuesto, desde el centro al otro extremo. Supuesto esto, deberá verificarse en cada instante la siguiente relación:

$$V_i = -w.A.\sin w.t = -\frac{2\pi}{T}.A.\sin \frac{2\pi}{T}.t$$

siendo V_i la velocidad instantanea de la proyección referida. Pero como la masa puntual que da origen a este movimiento está sometida a g, cuando pasa por el punto de equilibrio, habrá de llevar la velocidad $V_i = \sqrt{2.g.h} =$

$$= \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}$$

la cual habrá de ser igual, en ese instante, a la V_i . Como entonces $t = \frac{1}{4}T$; y, además, $A = l.\sin\theta_0$, tendremos que deberá de cumplirse la igualdad: $\sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)} = -\frac{2\pi}{T}.l.\sin\theta_0.\sin\frac{2\pi}{T}.\frac{T}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left[\frac{\sin\theta_0}{1-\cos\theta_0}\right]} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left[\frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}}{2\sin^2\frac{\theta_0}{2}}\right]} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(\cot\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

Es ésta, pues, la fórmula que realmente deberemos de emplear para el cálculo de T en un P.M.?. La respuesta sera sí en el caso de que el movimiento estudiado sea, realmente, armónico simple; ó no, en caso contrario.

Para dar una respuesta satisfactoria al problema propuesto deberemos de acudir a la experiencia y analizar los resultados obtenidos.

A tal efecto se realizaron sendos ensayos en el laboratorio con dos péndulos, de la siguiente forma:

De un punto se fijó uno de los extremos de un fino hilo, mientras del otro se colocó una esfera de acero, de 1'2 cms. de radio. La longitud total

del péndulo, desde el punto de suspensión hasta el centro de gravedad de la esfera metálica, fué de 200 cms, haciendo que la amplitud de una oscilación fuese $\theta_0 = 19'66''$. Con el fin de fotografiar la trayectoria de una semi-oscilación con luz estroboscópica, de frecuencia un destello cada 0'02 segundos, se fijaron convenientemente dos electroimanes a cada extremo de dicha trayectoria. Uno de ellos soltaba la esfera instantes después de dada la exposición a la cámara fotográfica, mientras el otro retenía a la esfera a su llegada, instantes antes de la obturación del objetivo fotografico.

La otra fotografía, que fué obtenida de forma semejante, consistió en un péndulo de longitud total 78'99 cms. y de amplitud $\theta_0 = 59'13''$. Una fotocopia de ambas fotografías se puede ver en la fig. 2.

Para un estudio comparativo del M.A.S. con el de las proyecciones de los puntos de la masa durante su trayectoria sobre la cuerda que une los extremos de la misma, se llevaron sobre un papel dichos puntos, según las fotografías anteriormente descritas, mediante punciones con un alfiler. Se trazó la cuerda que une los extremos, y con ella como diámetro, se trazó una circunferencia. Este diámetro hará de eje de abscisas, y sobre él se proyectaron los puntos de las fotografías estroboscópicas. Con el radio del semieje positivo como diámetro, se trazó una circunferencia, representación grafica de la función

$$x = l.\sin\theta_0.\cos\alpha$$

Se contaron los intervalos entre puntos, comenzando por el extremo de donde parte la flecha, (ver laminas nº 3 y 4), y se dibujaron, con vértice en O, tantos ángulos iguales como número de intervalos existen en la fotografía. A cada uno de estos ángulos lo denominaremos α , y es el valor del ángulo que gira el disco por intervalo de tiempo entre destellos del estroboscópio con el que se impresionó la fotografía, que en este caso fué, aproximadamente, de 0'02 segundos.

Para poder reproducir el movimiento de las proyecciones de la masa pendular sobre el eje de abscisas, será necesario girar cada proyección con un ángulo igual a $M.\alpha$ y centro en O, siendo M el lugar que ocupa el punto, comenzando por el extremo A, para el que $n=0$. El sentido de estos giros habrá de ser el inverso al que lleve el disco en la reproducción del movimiento que se pretende estudiar. Puede observarse que en este trabajo se tomaron puntos alternos de la fotografía, para que fuesen mas espaciados y facilitar asi el trabajo. En realidad, lo que esto supone es que el ángulo α sea el girado en el tiempo de 2 intermitencias del estroboscópio, en lugar de una.

Hecho ésto con la primera de las fotografías, resulta ser la figura obtenida muy semejante a la gráfica cosinusoidal en coordenadas polares, lo cual quiere decir que el movimiento estudiado es muy aproximado al M.A.S. Con la segunda de las fotografías se operó de forma semejante, aunque teniendo en cuenta que el origen de arcos α está situado ahora en el extremo del semieje negativo de abscisas, ya que la semi-oscilación fotografiada fué de izquierda a derecha observando que la gráfica obtenida en esta ocasión difiere sensiblemente de la anterior, es decir, de la cosinusoidal en coordenadas polares, gráfica generatriz del M.A.S.

Según estas experiencias podremos afirmar que, si bien para oscilaciones pendulares de amplitud relativamente pequeña (en este trabajo 10° ó 20°) los movimientos estudiados son de características próximas al M.A.S., con amplitudes mayores (50° ó 60°) ya son sensibles las diferencias respecto al M.A.S.

Por lo expuesto anteriormente procede un detenido estudio de este movimiento tan interesante que abarque tanto a las pequeñas amplitudes como hasta las mayores es decir, desde $\theta_0 = 0^\circ$ hasta $\theta_0 = 90^\circ$.

Basándose, entonces, en que el movimiento asociado al pendular varía mas ó menos respecto al M.A.S., cabe pensar en obtener dicho movimiento, mediante las debidas modificaciones, a partir del mismo aparato que nos sirve de modelo para engendrar un M.A.S., que yo denominaría "cosinuscopio", y que quedó debidamente descrito en la comunicación presentada por el autor en el I Simposio sobre la didáctica de la Física y de la Matemática, su interrelación.

En principio vamos a estudiar dos posibilidades distintas totalmente lógicas ambas: Variar debidamente la velocidad angular del "cosinuscopio" en función del ángulo α para obtener el movimiento correspondiente de ley pendular, ó darle velocidad constante al "cosinuscopio", pero modificando la gráfica correspondiente.

Estudiaremos primeramente la variante $a)$, que denominaremos con "cosinuscopio a velocidad variable".

Para conseguir lo que nos hemos propuesto, deberemos de comenzar hallando una función que nos relacione la velocidad angular instantánea del "cosinuscopio" con el ángulo α girado por el mismo en cada posición. Veamos cómo puede obtenerse dicha función. Fijémosnos en la figura 1 y hagamos la siguiente deducción:

Tendremos en cuenta que la velocidad de P en cada instante cumplirá la ley

$$V_i = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)} \Rightarrow V_i = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)} \cdot \cos\theta.$$

Teniendo en cuenta que $x = OA \cdot \cos\alpha = l \cdot \sin\theta_0 \cdot \cos\alpha$ y que $x = l \cdot \sin\theta$, podremos establecer que $l \cdot \sin\theta = l \cdot \sin\theta_0 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \Rightarrow \sin\theta = \sin\theta_0 \cdot \cos\alpha$, (1); relación que consideramos de gran utilidad en el trabajo que nos ocupa, pues se relaciona una variable del péndulo con otra del "cosinuscopio" o aparato con el que pretendemos obtener un movimiento asociado al pendular.

La relación anterior la podremos también poner en la forma

$$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta_0 \cdot \cos^2\alpha \Rightarrow \sqrt{1 - \sin^2\theta_0 \cos^2\alpha} = \cos\theta,$$

y sustituyendo este valor de $\cos\theta$ en la función que nos da los valores de V_i , tendremos: $V_i = \sqrt{2gl[\sqrt{1 - \sin^2\theta_0 \cos^2\alpha} - \cos\theta_0][1 - \sin^2\theta_0 \cos^2\alpha]}$;

por otra parte

$$x = l \sin\theta_0 \cos\alpha \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -l \sin\theta_0 \sin\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt}; \frac{dx}{dt} = V_i =$$

$$= \sqrt{2gl[\sqrt{1 - \sin^2\theta_0 \cos^2\alpha} - \cos\theta_0][1 - \sin^2\theta_0 \cos^2\alpha]} = l \cdot \sin\theta_0 \sin\alpha \cdot \omega;$$

llamando ω a la velocidad angular, variable, del cosinuscopio, y de aquí, finalmente, despejando esta última variable

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot \frac{1}{\sin\theta_0 \sin\alpha} \sqrt{[\sqrt{1 - \sin^2\theta_0 \cos^2\alpha} - \cos\theta_0][1 - \sin^2\theta_0 \cos^2\alpha]}, \quad (2).$$

También puede ponerse esta expresión en función de θ mediante (1) y (2):

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot \sqrt{\frac{(\cos\theta - \cos\theta_0) \cos^2\theta}{\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta}}.$$

Con la función (2) que es la que nos resuelve el problema propuesto, por su complicación, no procede realizar un estudio analítico exhaustivo, por lo que desistimos del mismo, considerando únicamente que la función (2) es, evidentemente, periódica (de periodo $\alpha = 2\pi$) así como también simétrica respecto al origen de coordenadas.

Teniendo en cuenta el movimiento pendular referido a nuestro aparato, vemos que solamente nos es necesario un estudio de la citada función en el intervalo ($0^\circ, 90^\circ$) y considerando siempre positivos los valores de la misma, es decir, como si fuera simétrica respecto al eje de ordenadas.

El estudio en el intervalo indicado lo efectuaremos hallando los valores de la función para valores de la variable de grado en grado, como aparece en las tablas y gráficas correspondientes (láminas 5 A 17)

El problema de la indeterminación que aparece en las funciones con valores $\theta_0 < 90^\circ$ para $\alpha = 0^\circ$ lo hemos resuelto por extrapolación, según el método de Newton, así como también el problema que aparece para

$0^\circ < \alpha < 14^\circ$ cuando $\theta_0 = 10^\circ$ en que los valores de ω_i correspondientes no guardan la debida "suavidad".

Los valores hallados así de la función W_i para distintos valores del parámetro θ_0 se llevan a una gráfica, y una vez estudiada se construye la leva correspondiente (lámina 19) que deberá de emplearse para obtener el movimiento deseado de acuerdo con el aparato cuyo esquema puede ser el que aparece en la lámina 18.

Con los conocimientos anteriormente descritos podemos calcular el periodo de una oscilación pendular, sabiendo que $T = \frac{2\pi}{W}$. Claro está que, debido a que W es variable, deberemos de elegir una W constante que equivalga a la correspondiente media. Esto último lo hemos calculado mediante el teorema de la media en el intervalo $(0^\circ, 90^\circ)$ empleando el método de Simpson para hallar la integral definida, por aproximación, es decir, se ha calculado

$$W_m = \frac{1}{90} \cdot \int_0^{90} W_i d\alpha = \frac{1}{3 \cdot 90} [W_0 + W_{90} + 2(W_2 + W_4 + W_6 + \dots + W_{86} + W_{88}) + 4(W_1 + W_3 + W_5 + \dots + W_{87} + W_{89})]$$

Como dato curioso, obsérvese en la lámina 29 las gráficas de los valores obtenidos para el factor de corrección $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot F$, según distintos métodos.

Por el método que hemos expuesto, observamos de particular que se mantiene sensiblemente igual a las que figuran en las bibliografías al respecto, y a la dada por mí en el Simposio aludido, hasta los 50° de amplitud, aproximadamente, para después descender con pendiente bastante pronunciada, llegando, incluso, a valer por debajo de 1, a partir de $80^\circ - 90^\circ$.

En el trabajo actual se pretende dar un valor del citado factor para valores de θ_0 desde 0° hasta 90° .

Como dato curioso, obsérvese que para hallar la gráfica cuando $\theta_0 = 90^\circ$, todos los datos hallados para W son exactos, no habiendo discontinuidad alguna, y en este caso, para un péndulo de 200 cms y siendo $g = 980 \text{ cms/sec}^2$, se tiene que

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{200}{980}} \cdot F = \frac{2\pi}{W_m} = \frac{2\pi}{2'3874421} \Rightarrow F = \frac{2'6317644}{2'8384534} \Rightarrow F = 0'9271824$$

El segundo de los métodos que nos hemos propuesto para reproducir el movimiento asociado al P.M. consiste en girar el disco de un cosinuscopio con velocidad uniforme obtenida como queda dicho anteriormente, a base de las velocidades instantaneas calculadas según la función (2). Naturalmente que si giramos así el disco, la gráfica que figura en el mismo deberá de modificarse.

convenientemente.

Para realizar esto último nos hemos basado en el principio elemental de que los ángulos α descritos por el disco en cuestión habrán de ser siempre proporcionales a las velocidades.

Con esta idea como base, se tomó la tabla de velocidades angulares para un determinado péndulo, como quedó expuesto en el primero de los métodos, y se hallaron las velocidades medias, acumuladas de diez en diez grados, en el intervalo $(0^\circ, 90^\circ)$ por el método del teorema de la media ya expuesto, y se hicieron las siguientes proporciones: $\frac{W_m}{W_{10^\circ}} = \frac{10^\circ}{x^\circ}$; $\frac{W_m}{W_\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}$;

para después modificar la circunferencia de la gráfica, llevando sobre cada lado extremo del ángulo α el punto correspondiente de corte de la circunferencia con el lado β según un arco de radio $r = l \cdot \text{sen } \theta_0 \cdot \cos \beta$ (ver tablas y gráficas correspondientes en las láminas 20 a 28).

Naturalmente estos puntos podrían obtenerse mas unidos calculando las velocidades medias acumuladas en intervalos menores de diez grados.

Como quiera que se haga, habrán de unirse estos puntos, obteniéndose la gráfica que deberá de reproducir el movimiento asociado al pendular mediante giro del disco con velocidad uniforme, tal que $W = \frac{2\pi}{T}$. La gráfica obtenida así, completada la mitad inferior mediante simetría axial respecto al eje de abscisas, es parecida a una elipse, aunque se puede demostrar que, matematicamente, no lo es. Para amplitudes del péndulo pequeñas, la gráfica es casi una circunferencia como puede verse en las láminas correspondientes, por lo que el movimiento asociado al del P.M. es muy semejante al M.A.S.

Para amplitudes grandes, el movimiento pendular ya es distinto al M.A.S.

CASO PARTICULAR EN EL QUE $\theta_0 = 90^\circ$

En este caso, la expresión matemática (2) queda muy simplificada al ser

$\text{sen } \theta_0 = 1$, veamos:

$$W_i = \sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot \frac{\sqrt{(\text{sen } \alpha) \text{sen}^2 \alpha}}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow W_i = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\text{sen } \alpha}$$

A esta misma expresión podemos llegar igualmente, de forma mas sencilla, sin pasar por la fórmula general (2), así:

Partamos de la base que, en este caso particular, el péndulo matemático

tiene su centro de giro en el origen de coordenadas y centro del disco correspondiente al cosinuscopio, mientras que la masa pendular recorre un arco de semicircunferencia del mismo.

Por otra parte deberá de ocurrir que $\theta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - \alpha$

De ahí que la expresión (1) quede así: $\cos \alpha = \sin \theta_0 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \theta_0 = 1$$

Partiendo de estas hipótesis, razonemos de la siguiente forma:

$$w_i \cdot l = v = \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)} \Rightarrow w_i = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_i = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \alpha}$$

Cuando $\alpha = 90^\circ$; $v = w_i \cdot l = \sqrt{\frac{2g}{l}} \cdot l \Rightarrow v = \sqrt{2gl}$, evidentemente cierto.

DEMOSTRACION DE QUE LA GRAFICA QUE GENERA EL MOVIMIENTO DEL

P.M. CON MOVIMIENTO UNIFORME DEL DISCO NO ES UNA ELIPSE

Para esta demostración tomaremos dos puntos conocidos, cualesquiera, de dicha gráfica. Lo haremos con la gráfica correspondiente al péndulo de

$$l = 200 \text{ cms.}, g = 980 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}, \theta_0 = 90^\circ$$

$$\text{Cuando } \alpha = 10^\circ, \rho = 3'633'9365 \Rightarrow \rho = l \sin \theta_0 \cos 3'633'9365 =$$

$$= 199'59786$$

$$\text{Cuando } \alpha = 40^\circ, \rho = 28'6944500 \Rightarrow \rho = l \sin \theta_0 \cos 28'6944500 =$$

$$= 175'43852$$

Paso a coordenadas polares

$$y = \rho \sin \alpha \Rightarrow y = 199'59786 \sin 10^\circ \Rightarrow y = 34'659789$$

$$x = \rho \cos \alpha \Rightarrow x = 199'59786 \cos 10^\circ \Rightarrow x = 196'5655$$

$$y = \rho \sin \alpha \Rightarrow y = 175'43852 \sin 40^\circ \Rightarrow y = 112'7697$$

$$x = \rho \cos \alpha \Rightarrow x = 175'43852 \cos 40^\circ \Rightarrow x = 134'39369$$

De ser elipse, el semieje menor valdría $\frac{l}{2} \sin \theta_0 = 100$

y al semieje mayor le daremos el valor de a por lo tanto

la ecuación de la parábola que nos ocupa tendrá por ecuación:

$$\frac{(x-100)^2}{10.000} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Tomando el primero de los puntos:

$$\frac{(196'5655-100)^2}{10.000} + \frac{34'659789^2}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 17'794'283$$

Para el segundo de los puntos tendrá que cumplirse:

$$\frac{(134'39369-100)^2}{10.000} + \frac{112'7697^2}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 14.423'156$$

quedando así demostrada la imposibilidad de ser una elipse.

CALCULO DE LA VELOCIDAD MEDIA DE ACUERDO CON LA MEDIA ARMONICA DE LAS VELOCIDADES INSTANTANEAS.

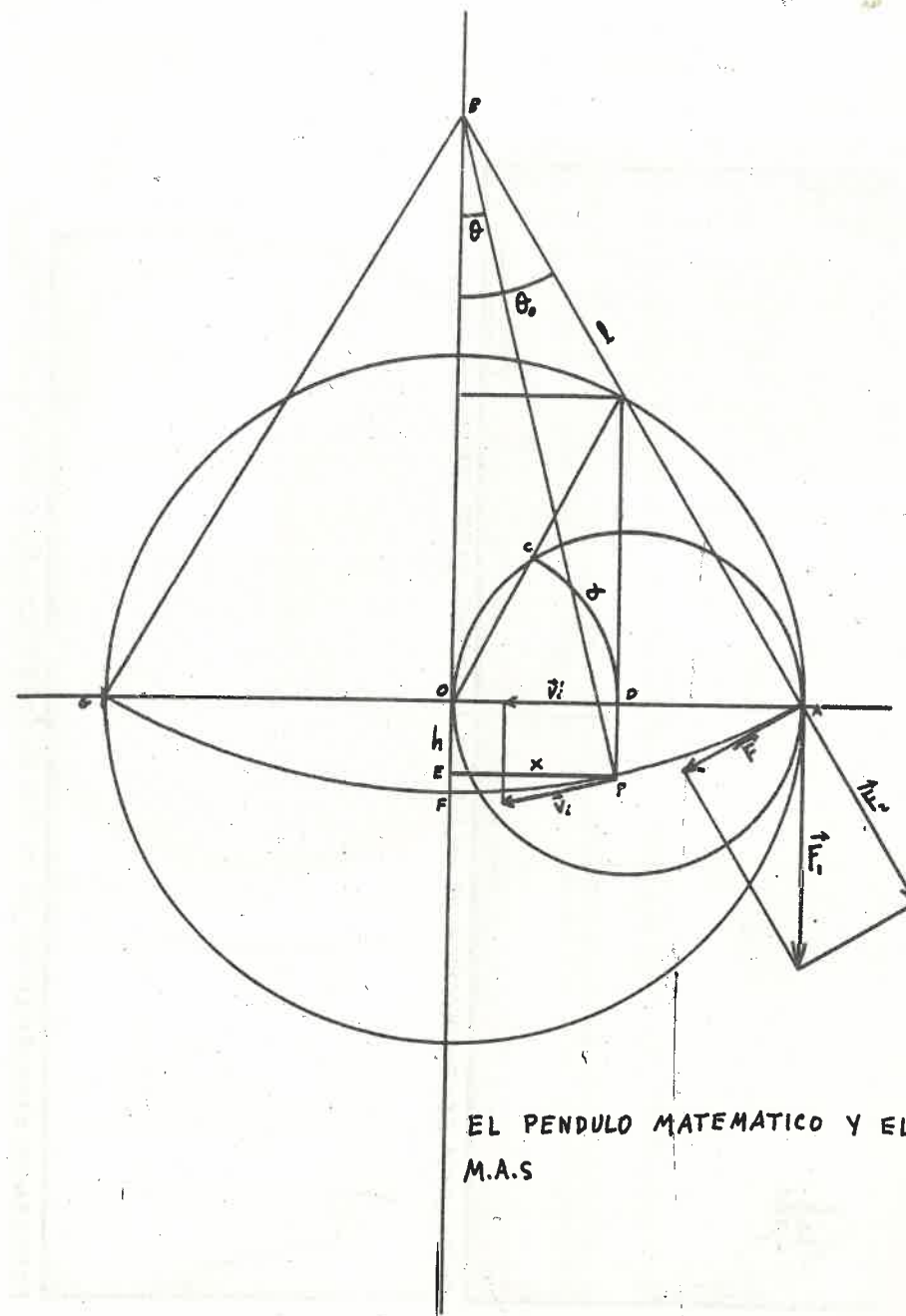
Como se ve en nuestro trabajo, hemos calculado las velocidades instantaneas del móvil que se estudia, y que quedan representadas por $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{89}, w_{90}$. Cada una de estas velocidades representará, con bastante exactitud, la existente en un entorno del punto considerado, de radio igual a $0,5^\circ$. Si consideramos, pues, las leyes del movimiento uniforme en cada grado recorrido, resulta que el tiempo empleado por el móvil en recorrer el ángulo estudiado será $t = \frac{1}{w_0} + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \dots + \frac{1}{w_{89}} + \frac{1}{w_{90}}$ por lo que $w_m = 91 / \sum (\frac{1}{w_i})$ es decir, calcularemos la velocidad media hallando la media armónica de las velocidades instantaneas. Los resultados obtenidos para los distintos factores de corrección en el péndulo matemático, mediante este método, se aproxima a los valores reales correspondientes, según puede observarse en la gráfica de la lámina 29.

De acuerdo con lo expuesto se observa que las gráficas de las láminas 23 a 28 no sufren una sensible transformación respecto a los cálculos efectuados mediante la media aritmética, pues tanto unas como otras pasan por los puntos dibujados en las láminas correspondientes.

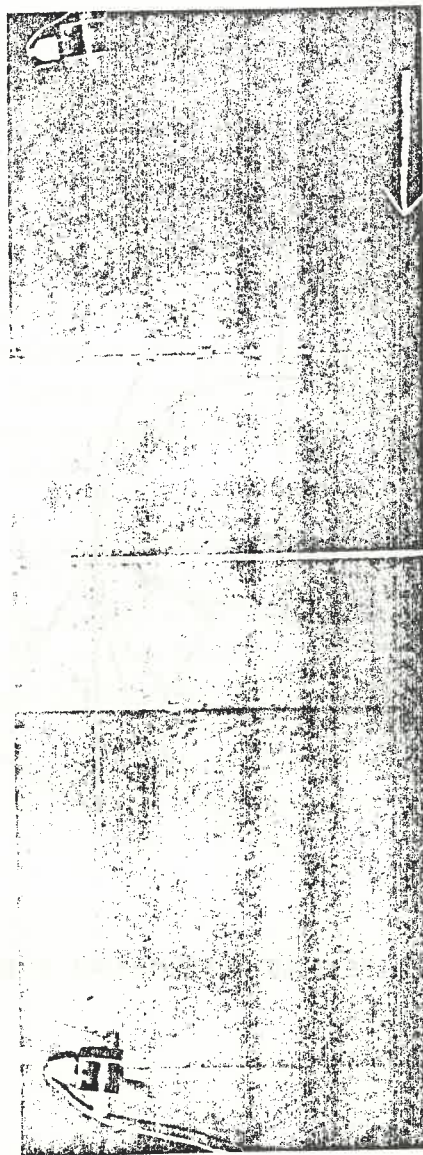
De forma semejante a como se hizo en la página 7, puede demostrarse ahora que la gráfica generadora del movimiento asociado al del péndulo matemático con movimiento uniforme del disco no es una elipse.

Quiero resaltar en este trabajo la necesidad de elegir la media mas apropiada de acuerdo con nuestros objetivos, razón por la cual existen distintos tipos de promedio.

Alfonso



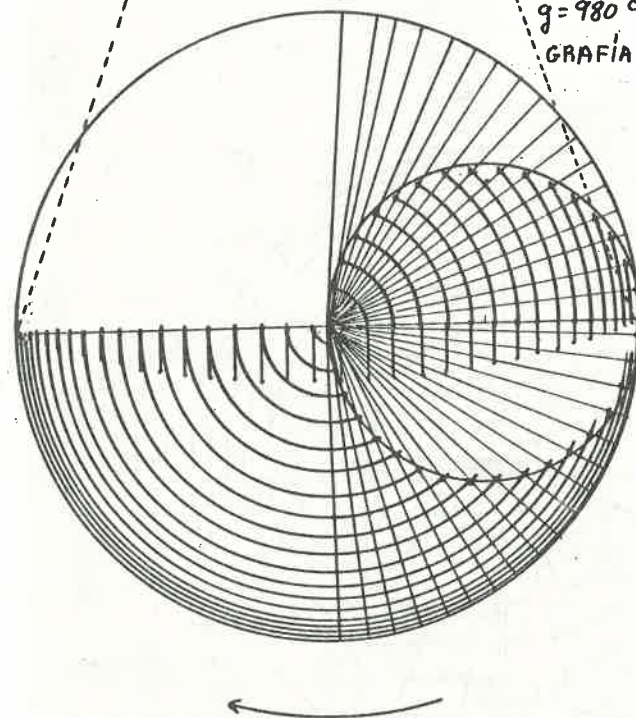
EL PENDULO MATEMATICO Y EL M.A.S



FOTOGRAFIA ESTROBOSCOPICA DE UN P.M. DE $l = 200 \text{ CMS}$, $g = 980 \text{ CMS/SEC}^2$, $\theta_0 = 19'656223''$

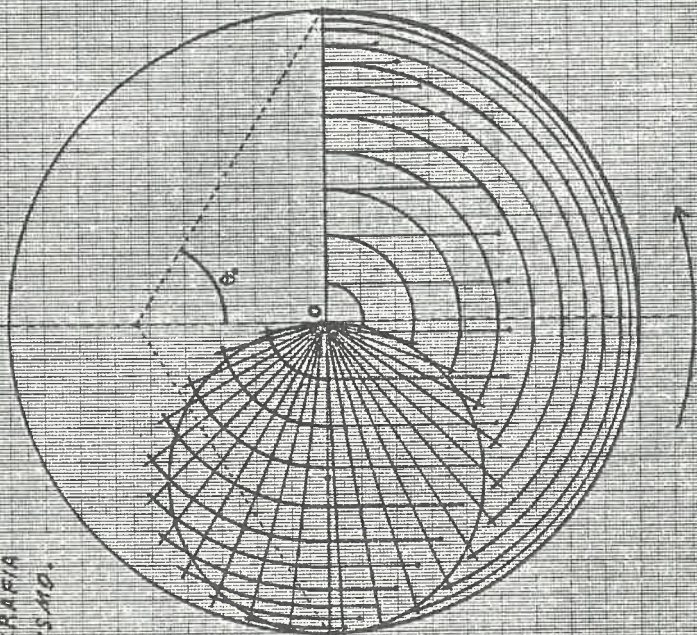


FOTOGRAFIA ESTROBOSCOPICA DE UN P.M. DE $l = 78'99 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 51'295''$, $g = 980 \text{ CMS/SEC}^2$



CONSTRUCCION DE LA GRAFICA PARA RE-
PRODUCIR EL MOVIMIENTO ASOCIADO A UN
P.M. DE $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 19'656223''$,
 $g = 980 \text{ CMS/SEC}^2$, BASANDOSE EN UNA FOTO
GRAFIA ESTROBOSCOPICA DEL MISMO.

CONSTRUCCION DE LA GRAFICA PARA REPRODUCIR EL MOVIMIENTO ASO-
CIADO A UN P.M. DE $l = 78.986156$, $\theta_0 = 59.295^\circ$, $g = 980 \text{ cm/sec}^2$, BA-
SANDOSE EN UNA FOTOGRAFIA
ESTROBOSCOPICA DEL MISMO.



EXTRAPOLACION, POR EL METODO DE NEWTON, DESDE $Q = 9.7^\circ$ A LOS VA-
LORES DE $\alpha = 14^\circ, 13^\circ, 12^\circ, \dots, 2^\circ, 1^\circ, 0^\circ$, PARA UN PENDULO MATEMATICO DE
 $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 10^\circ$, $g = 980 \text{ cm/sec}^2$. LOS VALORES HALLADOS POR LA EXTRA-
POLACION SON LOS DE LAS VELOCIDADES INSTANTANEAS w_i CORRESPON-
DIENTES A LOS ANGULOS ANTERIORMENTE CITADOS.

θ	α	w_i	Δ'	Δ''	w_i
7'0000000	45'426987	2'2096424	-0'0010839	-0'0000507	2'2096424
7'3000000	42'967864	2'2085585	-0'0011346	-0'0000324	2'2085585
7'6000000	40'391540	2'2074239	-0'0011670	-0'0000695	2'2074239
7'9000000	37'673002	2'2062569	-0'0012365	-0'0000124	2'2062569
8'2000000	34'778089	2'2050204	-0'0012489	-0'0000700	2'2050204
8'5000000	31'657495	2'2037715	-0'0013189	-0'0000426	2'2037715
8'8000000	28'235499	2'2024526	-0'0013615	-0'0000122	2'2024526
9'1000000	24'384414	2'2010911	-0'0013737	-0'0000305	2'2010911
9'4000000	19'854742	2'1997174	-0'0014042		2'1997174
9'7000000	14'000977	2'1983132			2'1983132
9'7000361	14'000000	2'1983367			2'1983367
9'7411575	13'000000	2'1981484			2'1981182
9'7792955	12'000000	2'1979172			2'1979370
9'8144259	11'000000	2'1977867			2'1977696
9'8465420	10'000000	2'1976514			2'1976163
9'8756311	9'000000	2'1976988			2'1974770
9'9016867	8'000000	2'1976286			2'1973521
9'9246964	7'000000	2'1973130			2'1972416
9'9446539	6'000000	2'1972420			2'1971455
9'9615526	5'000000	2'1979662			2'1970642
9'9753806	4'000000	2'1984276			2'1969975
9'9861490	3'000000	2'1985539			2'1969455
9'9938401	2'000000	2'1999088			2'1969084
9'9984537	1'000000	2'2054101			2'1968861
10'000000	0'000000	%			2'1968785

EXTRAPOLACION, POR EL METODO DE NEWTON, DESDE $\theta = 19^\circ$ HASTA $\theta = 19'656223''$, QUE SE CORRESPONDE CON $\alpha = 0^\circ$, PARA UN PENDULO MATEMATICO DE $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 19'656223''$, $g = 980 \text{ CMS/seg}^2$. LOS VALORES HALLADOS POR LA EXTRAPOLACION SON LOS DE LA VELOCIDAD INSTANTANEA W_i CORRESPONDIENTE AL ANGULO ANTERIORMENTE CITADO.

θ	α	W_i	Δ'	Δ''	W_i
10'000000	58'920134	2'2211368	-0'0053401	-0'0005166	2'2211368
11'000000	55'441360	2'2157967	-0'0058567	-0'0005063	2'2157967
12'000000	51'822977	2'2099400	-0'0063630	-0'0005173	2'2099400
13'000000	48'029415	2'2035770	-0'0068803	-0'0005105	2'2035770
14'000000	44'011431	2'1966967	-0'0073908	-0'0005147	2'1966967
15'000000	39'696910	2'1893059	-0'0079055	-0'0005038	2'1893059
16'000000	34'971965	2'1814004	-0'0084093	-0'0005247	2'1814004
17'000000	29'636313	2'1729911	-0'0089340	-0'0005052	2'1729911
18'000000	23'268182	2'1640571	-0'0094392		2'1640571
19'000000	14'563375	2'1546179			2'1546179
19'656223	0'000000	%			2'1481492

EXTRAPOLACION, POR EL METODO DE NEWTON, DESDE $\theta = 51^\circ$ HASTA $\theta = 51'1295''$, QUE SE CORRESPONDE CON $\alpha = 0^\circ$, PARA UN PENDULO MATEMATICO DE $l = 78'986156 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 51'1295''$, $g = 980 \text{ CMS/seg}^2$. LOS VALORES HALLADOS POR LA EXTRAPOLACION SON LOS DE LA VELOCIDAD INSTANTANEA W_i CORRESPONDIENTE AL ANGULO ANTERIORMENTE CITADO.

θ	α	W_i	Δ'	Δ''	W_i
40'000000	34'3502140	3'2324840	-0'0347971	-0'0009476	3'2324840
41'000000	32'5789690	3'1976869	-0'0357447	-0'0009556	3'1976869
42'000000	30'7463030	3'1619422	-0'0367003	-0'0009589	3'1619422
43'000000	28'8403970	3'1252419	-0'0376592	-0'0009694	3'1252419
44'000000	26'8454980	3'0875827	-0'0386286	-0'0009787	3'0875827
45'000000	24'7399770	3'0489541	-0'0396073	-0'0009879	3'0489541
46'000000	22'4926370	3'0093468	-0'0405952	-0'0010021	3'0093468
47'000000	20'0557300	2'9687516	-0'0415973	-0'0010032	2'9687516
48'000000	17'3493900	2'9271543	-0'0426005	-0'0010147	2'9271543
49'000000	14'2203880	2'8845538	-0'0436152	-0'0009301	2'8845538
50'000000	10'2898490	2'8409386	-0'0445453		2'8409386
51'000000	3'4614950	2'7963933			2'7963933
51'1295000	0'0000000	%			2'7905567

EXTRAPOLACION, POR EL METODO D. NEWTON, DESDE $\theta = 79^\circ$ HAS. $\theta = 80^\circ$, QUE SE CORRESPONDE CON $\alpha = 0^\circ$, PARA UN PENDULO MATEMATICO DE $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 80^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/seg}^2$. LOS VALORES HALLADOS POR LA EXTRAPOLACION SON LOS DE LA VELOCIDAD INSTANTANEA W_i CORRESPONDIENTE AL ANGULO ANTERIORMENTE CITADO.

θ	α	W_i	Δ'	Δ''	Δ'''	Δ''''	W_i
70	17'4098510	1'4910071	-0'0485225	-0'0015337	-0'0000920	-0'0000132	1'4910071
71	16'2387870	1'4424846	-0'0500562	-0'0016257	-0'0001052	-0'0000201	1'4424846
72	15'0437090	1'3924284	-0'0516819	-0'0017309	-0'0001253	-0'0000042	1'3924284
73	13'8185020	1'3407465	-0'0534128	-0'0018562	-0'0001295	-0'0000288	1'3407465
74	12'5542330	1'2873337	-0'0552690	-0'0019857	-0'0001583	-0'0000152	1'2873337
75	11'2378000	1'2320647	-0'0572547	-0'0021440	-0'0001735	-0'00000340	1'2320647
76	9'8482875	1'1748100	-0'0593987	-0'0023175	-0'0002075		1'1748100
77	8'3493047	1'1154113	-0'0617162	-0'0025250			1'1154113
78	6'6672873	1'0536951	-0'0642412				1'0536951
79	4'6061246	0'9894539					0'9894539
80	0'0000000						0'9224462

TABLA DE VELOCIDADES INSTANTANEAS ANGULARES ω_i PARA MODELO DE PENDULO MATEMATICO, DE $l=200$ CMS, $\theta_0=10^\circ$, $g=980$ CM²/SEG²

α	ω_i	α	ω_i	α	ω_i	α	ω_i
0	2'1968785	23	2'2006479	46	2'2098995	69	2'2188226
1	2'1968861	24	2'2009587	47	2'2103458	70	2'2191164
2	2'1969084	25	2'2013285	48	2'2107481	71	2'2193847
3	2'1969455	26	2'2016555	49	2'2112153	72	2'2196543
4	2'1969975	27	2'2019999	50	2'2116556	73	2'2199056
5	2'1970642	28	2'2023792	51	2'2120909	74	2'2201419
6	2'1971455	29	2'2027515	52	2'2125221	75	2'2203680
7	2'1972416	30	2'2031136	53	2'2129472	76	2'2205813
8	2'1973521	31	2'2035148	54	2'2133583	77	2'2207802
9	2'1974770	32	2'2038919	55	2'2137782	78	2'2209617
10	2'1976163	33	2'2042994	56	2'2141844	79	2'2211369
11	2'1977696	34	2'2047110	57	2'2145986	80	2'2212839
12	2'1979370	35	2'2051219	58	2'2149859	81	2'2214294
13	2'1981182	36	2'2055392	59	2'2153828	82	2'2215591
14	2'1983367	37	2'2059581	60	2'2157629	83	2'2216711
15	2'1985274	38	2'2063854	61	2'2161379	84	2'2217728
16	2'1986828	39	2'2068210	62	2'2165149	85	2'2218551
17	2'1989826	40	2'2072655	63	2'2168741	86	2'2219154
18	2'1992016	41	2'2077051	64	2'2172225	87	2'2219745
19	2'1994974	42	2'2081263	65	2'2175648	88	2'2220100
20	2'1997736	43	2'2085680	66	2'2178904	89	2'2220343
21	2'2000524	44	2'2090127	67	2'2182119	90	2'2220537
22	2'2003309	45	2'2094653	68	2'2185228		

TABLA DE VELOCIDADES INSTANTANEAS ANGULARES ω_i PARA MODELO DE PENDULO MATEMATICO, DE $l=200$ CMS, $\theta_0=19'656223''$, $g=980$ CM²/SEG²

α	ω_i	α	ω_i	α	ω_i	α	ω_i
0	2'1481492	23	2'1637281	46	2'2001122	69	2'2343791
1	2'1482788	24	2'1650185	47	2'2018219	70	2'2354732
2	2'1487396	25	2'1663467	48	2'2035245	71	2'2365161
3	2'1488369	26	2'1677089	49	2'2052190	72	2'2375165
4	2'1490775	27	2'1691149	50	2'2069068	73	2'2384684
5	2'1490807	28	2'1705615	51	2'2085769	74	2'2393698
6	2'1493067	29	2'1720301	52	2'2102307	75	2'2402260
7	2'1497489	30	2'1735332	53	2'2118724	76	2'2410262
8	2'1502129	31	2'1750742	54	2'2134950	77	2'2417769
9	2'1507181	32	2'1766259	55	2'2150964	78	2'2424776
10	2'1512523	33	2'1782152	56	2'2166759	79	2'2431222
11	2'1519189	34	2'1798249	57	2'2182279	80	2'2437154
12	2'1526004	35	2'1814512	58	2'2197582	81	2'2442500
13	2'1533240	36	2'1830909	59	2'2212567	82	2'2447333
14	2'1541476	37	2'1847571	60	2'2227294	83	2'2451601
15	2'1550188	38	2'1864334	61	2'2241692	84	2'2455329
16	2'1559215	39	2'1881240	62	2'2255777	85	2'2458455
17	2'1569101	40	2'1898222	63	2'2269479	86	2'2461028
18	2'1579204	41	2'1915313	64	2'2282860	87	2'2463017
19	2'1589799	42	2'1932402	65	2'2295874	88	2'2464465
20	2'1601021	43	2'1949598	66	2'2308455	89	2'2465323
21	2'1612610	44	2'1966775	67	2'2320667	90	2'2465644
22	2'1624680	45	2'1983977	68	2'2332443		

TABLA DE VELOCIDADES INSTANTANEAS ANGULARES ω_i PARA MODELO DE PENDULO MATEMATICO, DE $\ell = 78'986156 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 51'1295^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/SEC}^2$

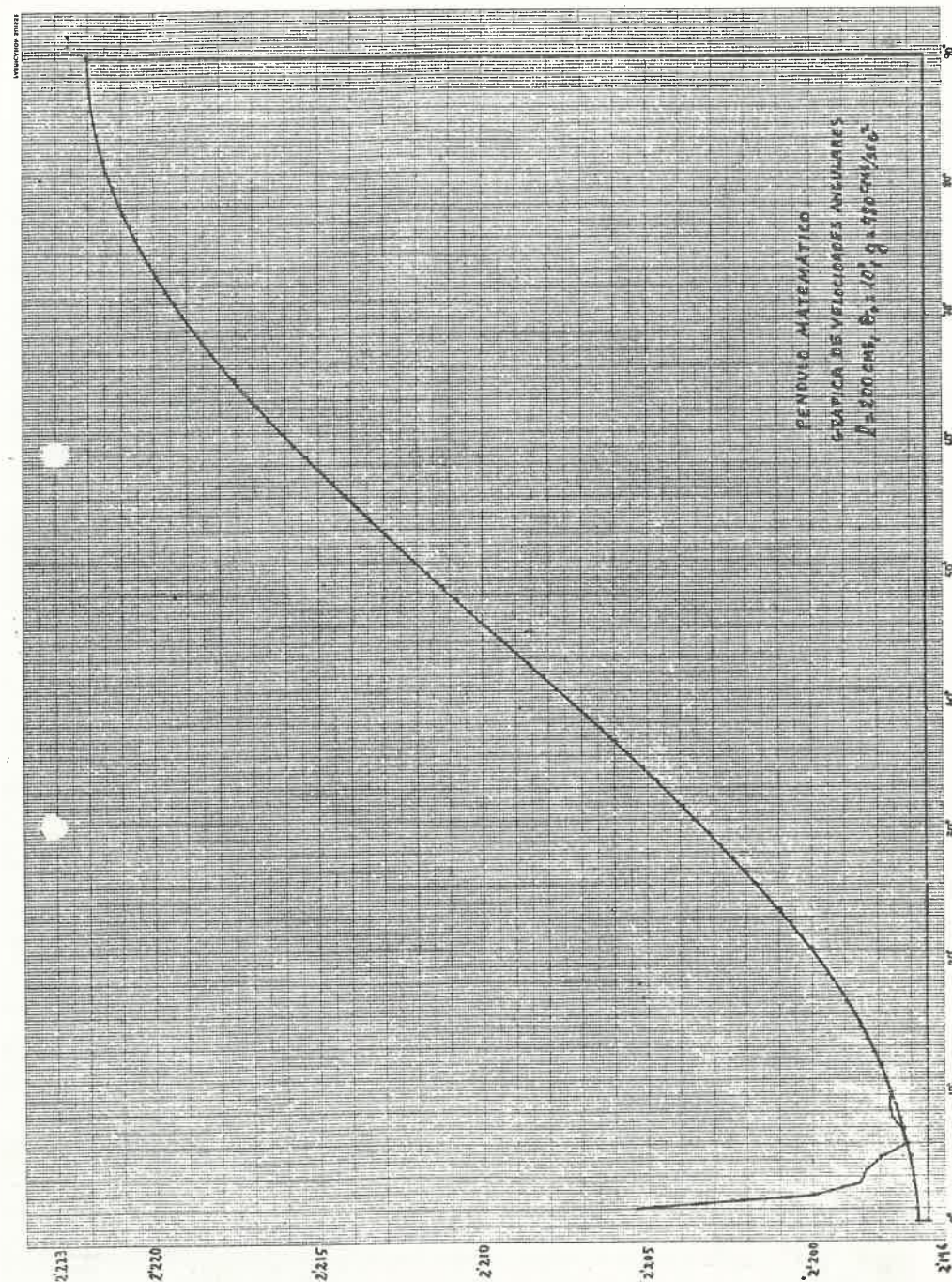
α	ω_i	α	ω_i	α	ω_i	α	ω_i
0	2'7905567	23	3'0181218	46	3'4573965	69	3'7962002
1	2'7929396	24	3'0357080	47	3'4757187	70	3'8061379
2	2'7929562	25	3'0536552	48	3'4938019	71	3'8156211
3	2'7951769	26	3'0719202	49	3'5116294	72	3'8246418
4	2'7983596	27	3'0904692	50	3'5291871	73	3'8331976
5	2'8026919	28	3'1092727	51	3'5464607	74	3'8412848
6	2'8079306	29	3'1282923	52	3'5634372	75	3'8488998
7	2'8141681	30	3'1475036	53	3'5801029	76	3'8560380
8	2'8212994	31	3'1668663	54	3'5964456	77	3'8626983
9	2'8293354	32	3'1863590	55	3'6124558	78	3'8688750
10	2'8382060	33	3'2059421	56	3'6281187	79	3'8745685
11	2'8479269	34	3'2255932	57	3'6434265	80	3'8797733
12	2'8584479	35	3'2452813	58	3'6583683	81	3'8844896
13	2'8697395	36	3'2649817	59	3'6729349	82	3'8887152
14	2'8817982	37	3'2846705	60	3'6871173	83	3'8924469
15	2'8945590	38	3'3043183	61	3'7009083	84	3'8956841
16	2'9080048	39	3'3239024	62	3'7143968	85	3'8984259
17	2'9220878	40	3'3434007	63	3'7272769	86	3'9006706
18	2'9367778	41	3'3627902	64	3'7398410	87	3'9024177
19	2'9520521	42	3'3820514	65	3'7519833	88	3'9036653
20	2'9678526	43	3'4011588	66	3'7636956	89	3'9044144
21	2'9841608	44	3'4201000	67	3'7749737	90	3'9046651
22	3'0009254	45	3'4388520	68	3'7858096		

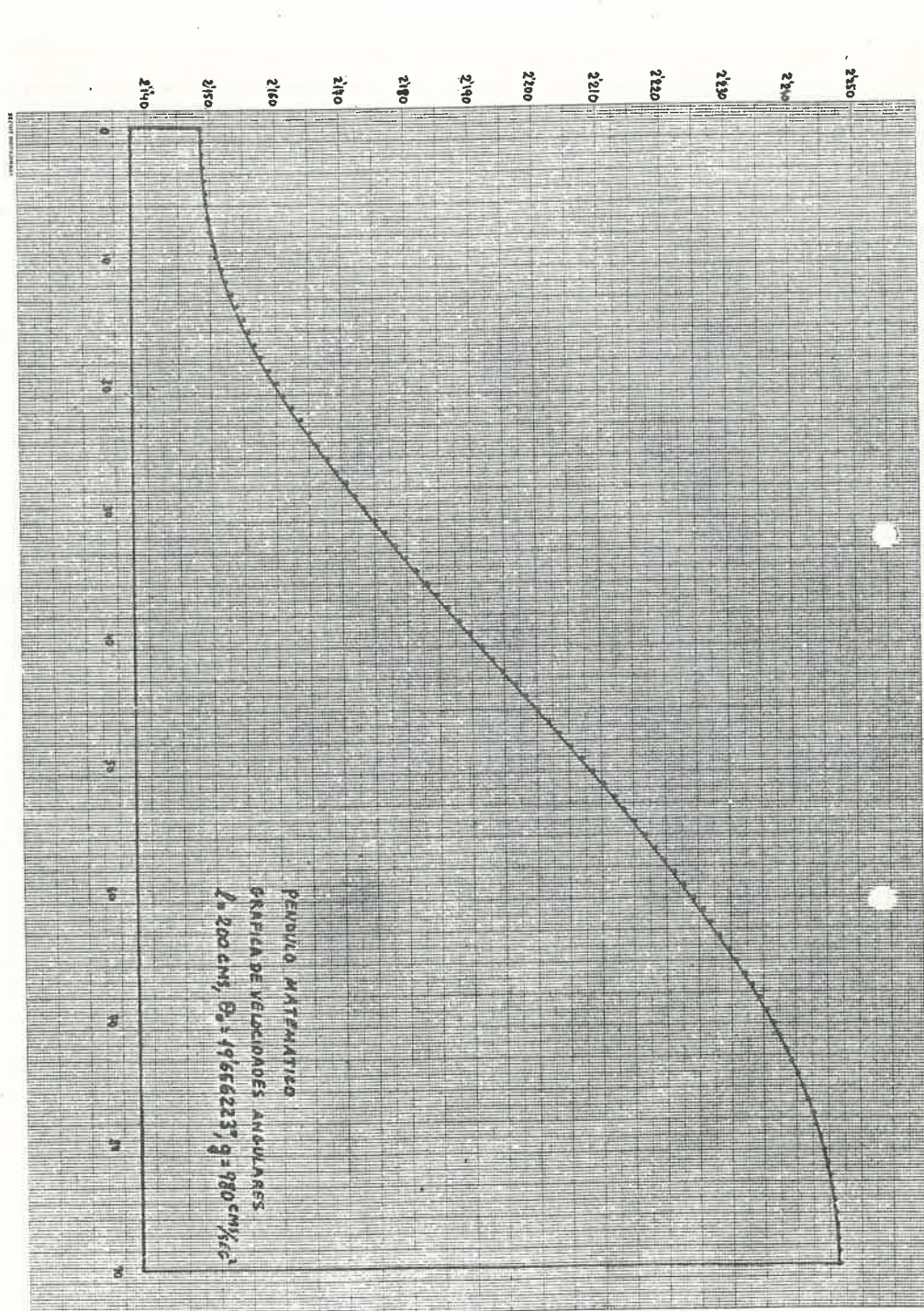
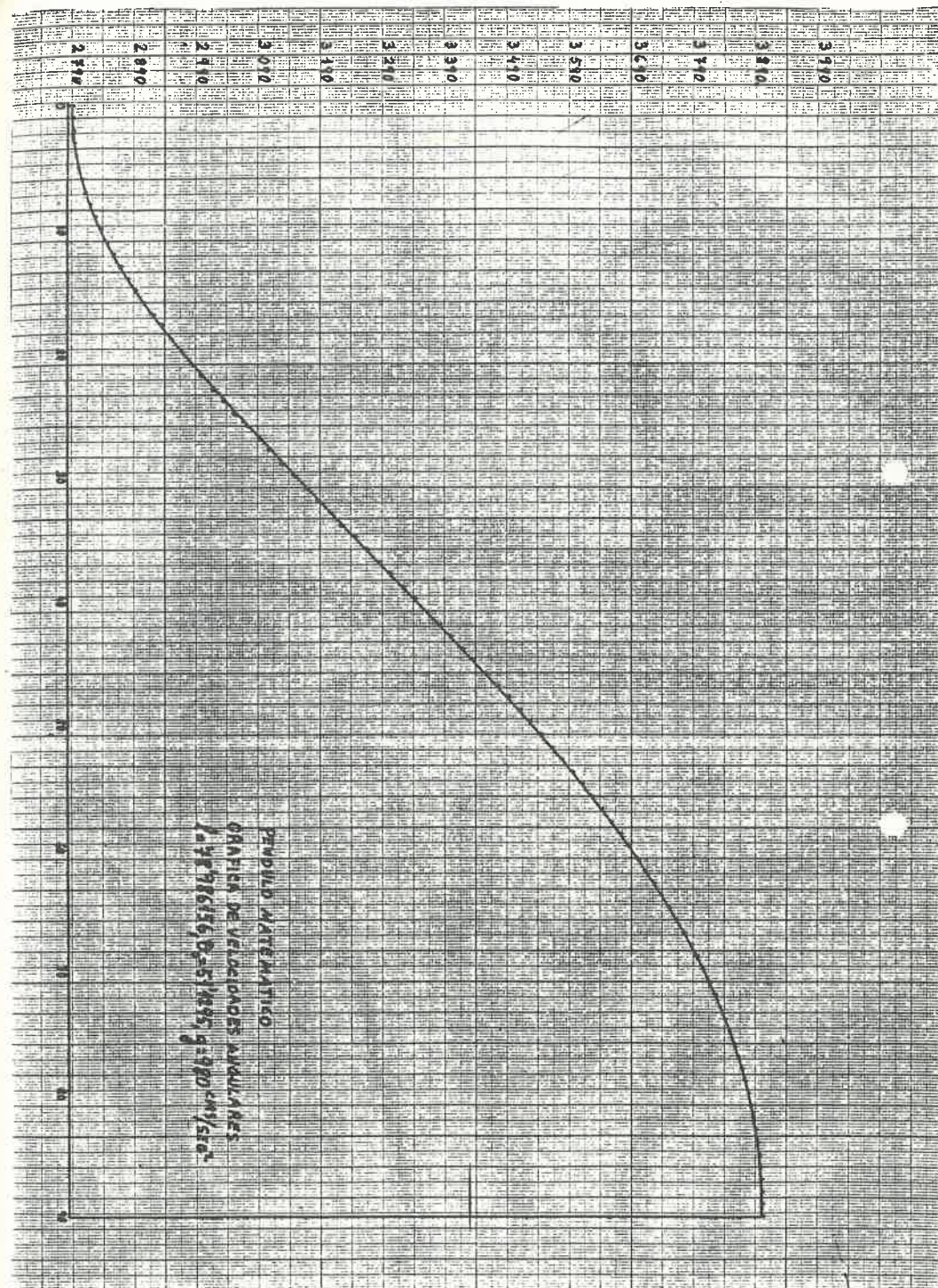
TABLA DE VELOCIDADES INSTANTANEAS ANGULARES ω_i PARA MODELO DE PENDULO MATEMATICO, DE $\ell = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 80^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/SEC}^2$

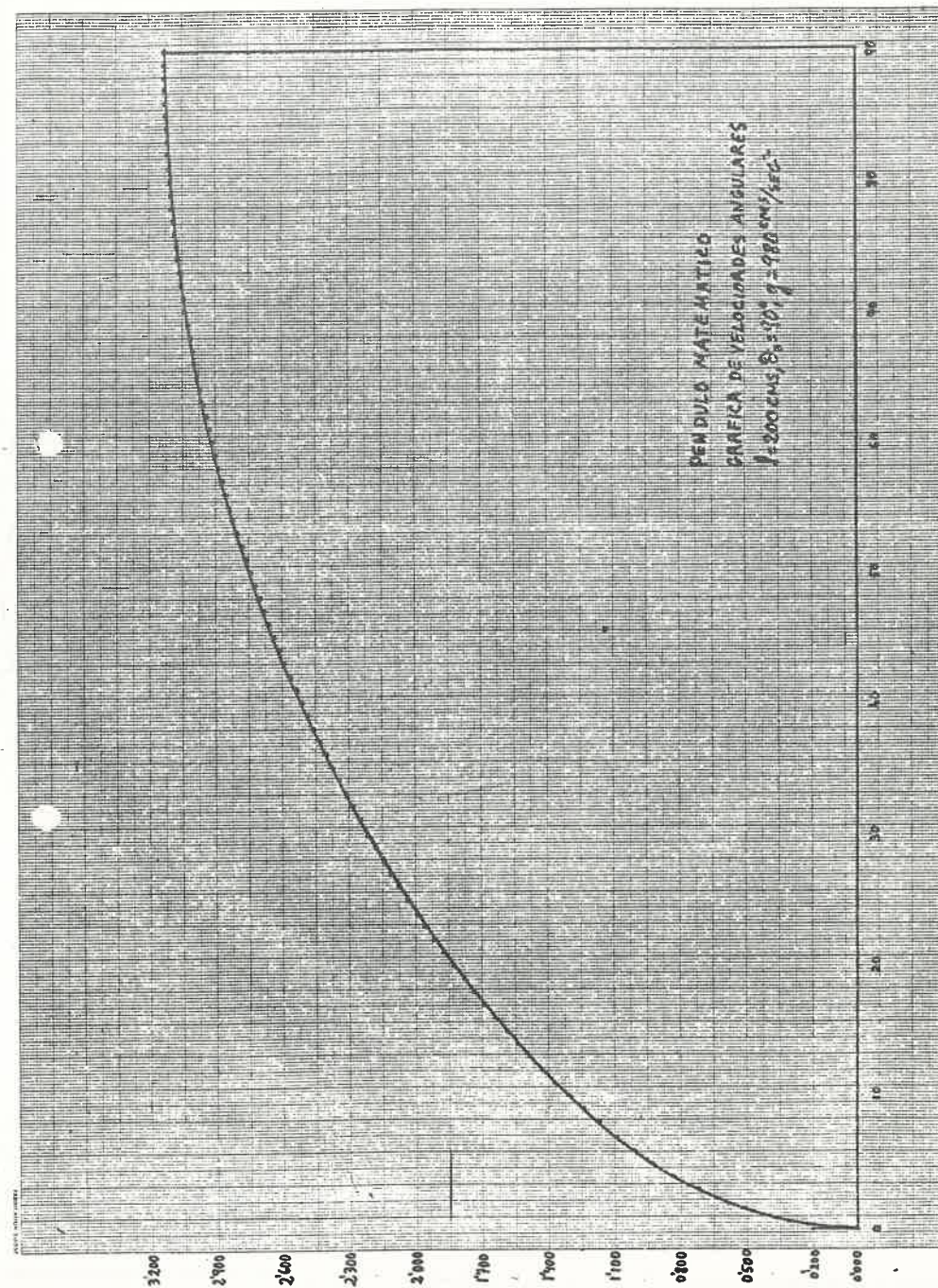
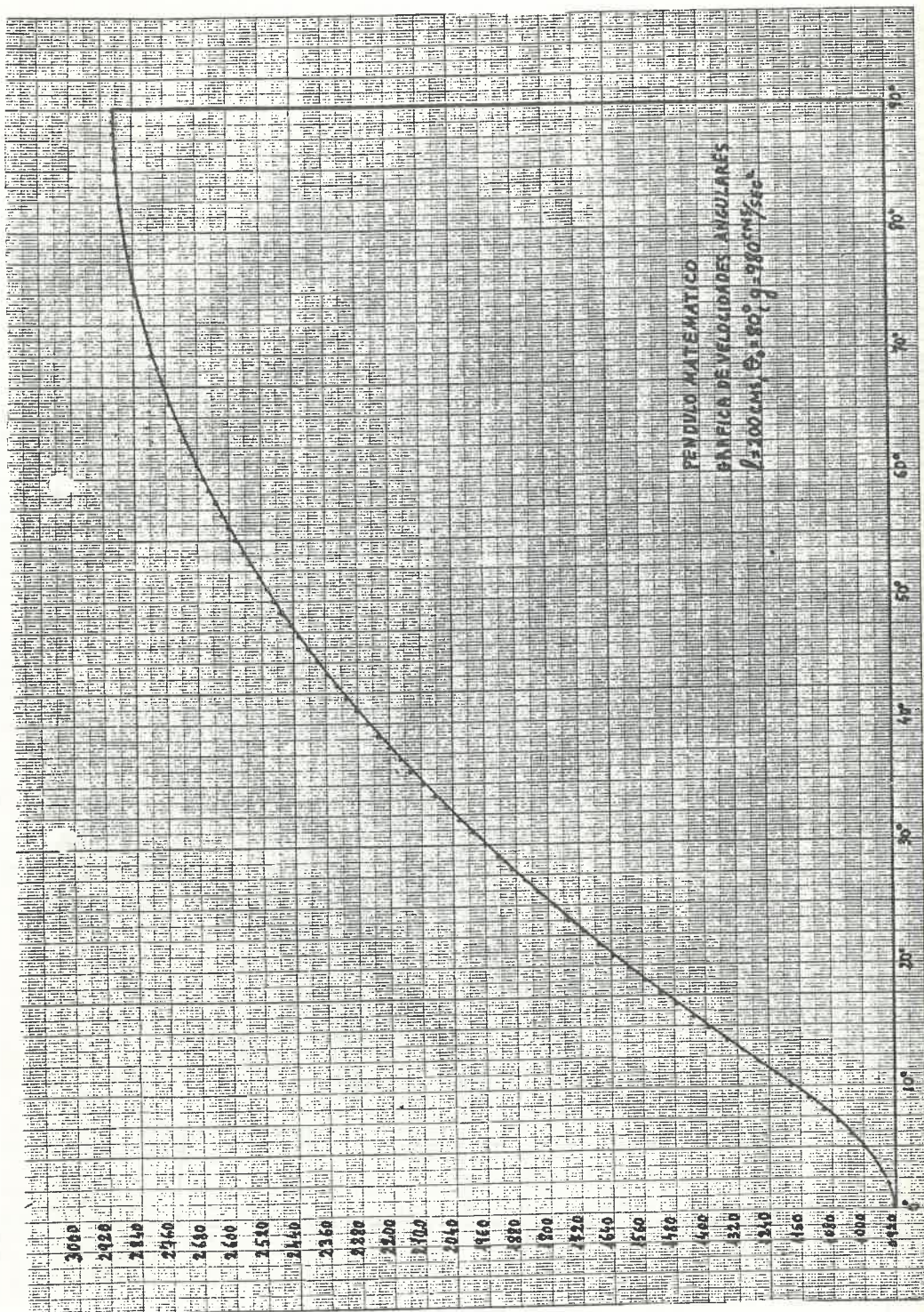
α	ω_i	α	ω_i	α	ω_i	α	ω_i
0	0'9224462	23	1'7121378	46	2'4028000	69	2'7810123
1	0'9261304	24	1'7495624	47	2'4252831	70	2'7911624
2	0'9359071	25	1'7862981	48	2'4471888	71	2'8008077
3	0'9520577	26	1'8223379	49	2'4685212	72	2'8099488
4	0'9738274	27	1'8576813	50	2'4892861	73	2'8185886
5	1'0004955	28	1'8923265	51	2'5094878	74	2'8267274
6	1'0312584	29	1'9262799	52	2'5291305	75	2'8343675
7	1'0653675	30	1'9595404	53	2'5482182	76	2'8415083
8	1'1020893	31	1'9921149	54	2'5667551	77	2'8481531
9	1'1408059	32	2'0240083	55	2'5847466	78	2'8543007
10	1'1809821	33	2'0552280	56	2'6021942	79	2'8599541
11	1'2221876	34	2'0857803	57	2'6191028	80	2'8651129
12	1'2639905	35	2'1156696	58	2'6354757	81	2'8697778
13	1'3061559	36	2'1449057	59	2'6513155	82	2'8739502
14	1'3484132	37	2'1734946	60	2'6666250	83	2'8776299
15	1'3905891	38	2'2014442	61	2'6814088	84	2'8808181
16	1'4325201	39	2'2287593	62	2'6956681	85	2'8835152
17	1'4740968	40	2'2554490	63	2'7094056	86	2'8857215
18	1'5152169	41	2'2815195	64	2'7226248	87	2'8874369
19	1'5558204	42	2'3069762	65	2'7353272	88	2'8886621
20	1'5958491	43	2'3318276	66	2'7475148	89	2'8893969
21	1'6352619	44	2'3560772	67	2'7591905	90	2'8896421
22	1'6740334	45	2'3797334	68	2'7703554		

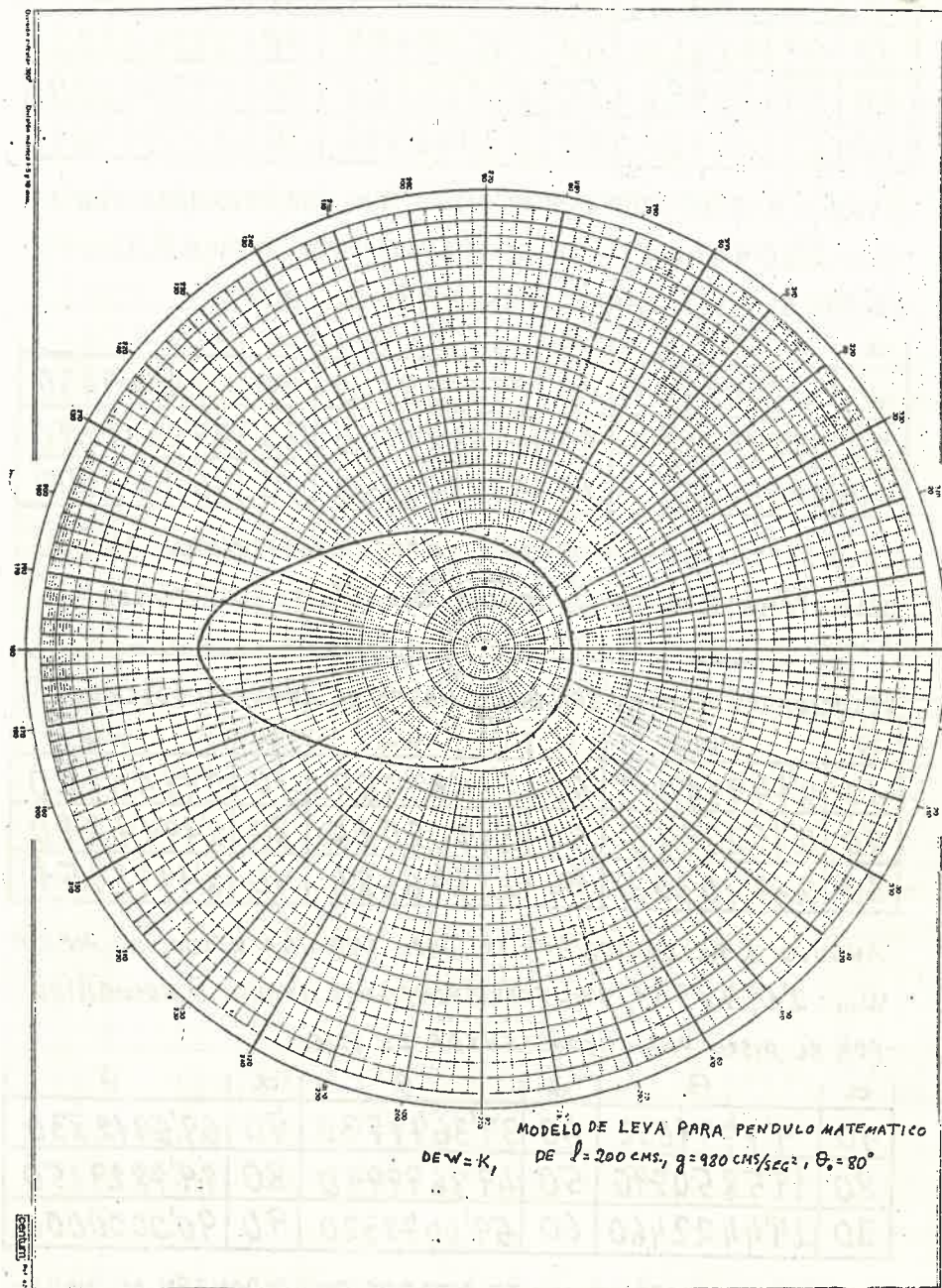
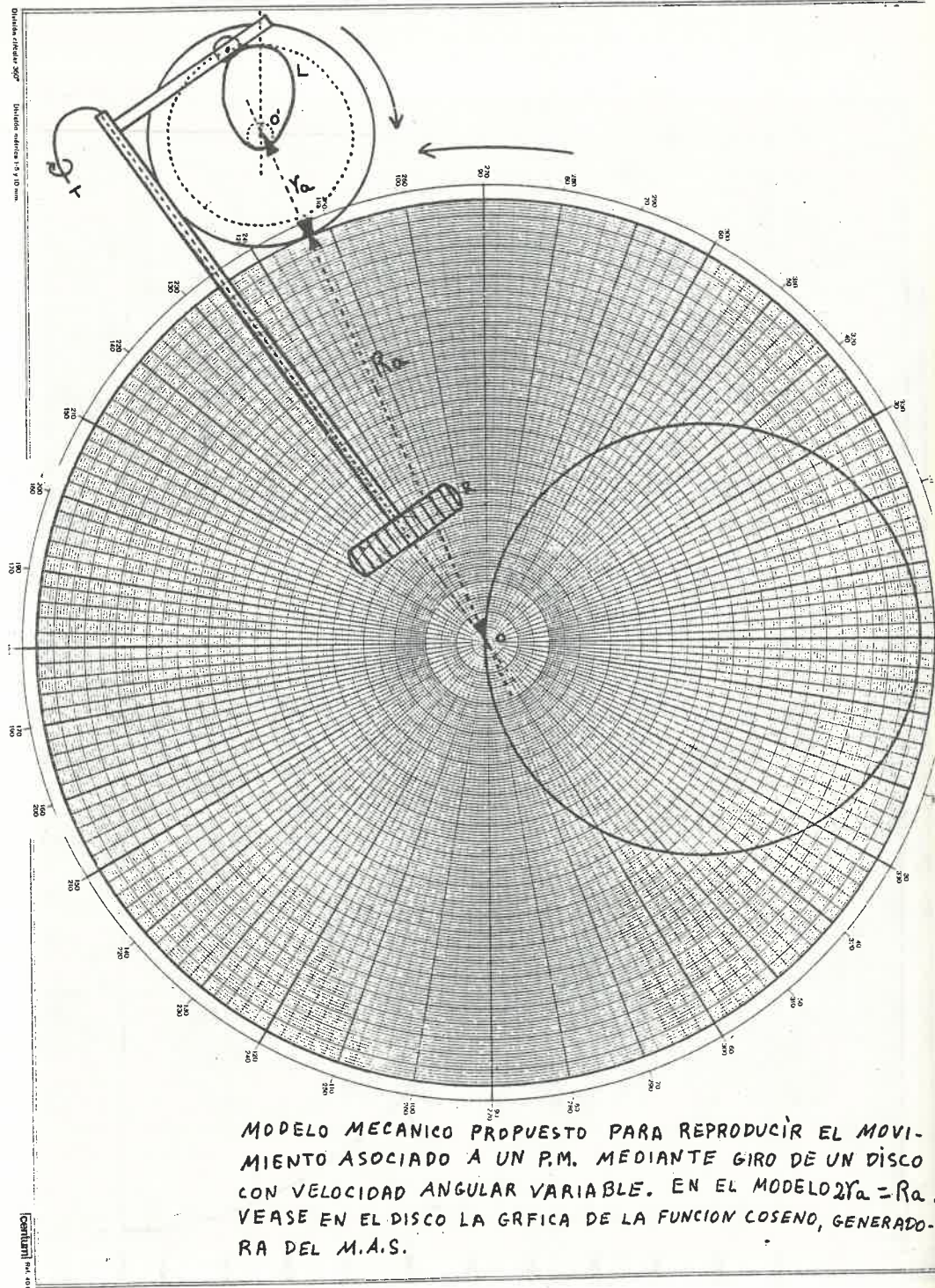
TABLA DE VELOCIDADES INSTANTANEAS ANGULARES ω_i PARA MODELO DE PENDULO MATEMATICO, DE $l = 200$ CMS, $\theta_0 = 90^\circ$, $g = 980$ CMS/SEG²

α	ω_i	α	ω_i	α	ω_i	α	ω_i
0	0'0000000	23	1'9568249	46	2'6550949	69	3'0247457
1	0'4135618	24	1'9965014	47	2'6771749	70	3'0346312
2	0'5848196	25	2'0351063	48	2'6986695	71	3'0440236
3	0'7161646	26	2'0726879	49	2'7195866	72	3'0529251
4	0'8268085	27	2'1092903	50	2'7399332	73	3'0613371
5	0'9241891	28	2'1449523	51	2'7597151	74	3'0692610
6	1'0121156	29	2'1797095	52	2'7789392	75	3'0766981
7	1'0928489	30	2'2135940	53	2'7976107	76	3'0836497
8	1'1678596	31	2'2466354	54	2'8157354	77	3'0901173
9	1'2381665	32	2'2788608	55	2'8333175	78	3'0961016
10	1'3045117	33	2'3102947	56	2'8503624	79	3'1016034
11	1'3674528	34	2'3409591	57	2'8668745	80	3'1066241
12	1'4274218	35	2'3708748	58	2'8828579	81	3'1111642
13	1'4847622	36	2'4000613	59	2'8983166	82	3'1152248
14	1'5397512	37	2'4285357	60	2'9132537	83	3'1198058
15	1'5926159	38	2'4563144	61	2'9276734	84	3'1249084
16	1'6435465	39	2'4834126	62	2'9415787	85	3'1295330
17	1'6927025	40	2'5098440	63	2'9549726	86	3'1266796
18	1'7402199	41	2'5356215	64	2'9678577	87	3'1283491
19	1'7862157	42	2'5607575	65	2'9802372	88	3'1295412
20	1'8307911	43	2'5852624	66	2'9921134	89	3'1302565
21	1'8740342	44	2'6091474	67	3'0034890	90	3'1304951
22	1'9160229	45	2'6324217	68	3'0143656		









VELOCIDADES MEDIAS DEL DISCO HASTA EL ANGULO INDICADO ^{2A}

α	W_m	α	W_m	α	W_m
10	2'19741252	40	2'2005439	70	2'2061302
20	2'1978498	50	2'2023268	80	2'2079030
30	2'1990108	60	2'2042318	90	2'2094461

ANGULO α RECORRIDO POR EL DISCO CON UNA VELOCIDAD MEDIA $W_m = 2'2094461$, Y EL CORRESPONDIENTE ANGULO β RECORRIDO POR EL DISCO PARA REPRESENTAR EL P.M.

α	β	α	β	α	β
10	9'9442353	40	39'8388330	70	69'8949430
20	19'8950290	50	49'8388890	80	79'9441270
30	29'8583080	60	59'8583960	90	90'0000000

LOS DATOS ANTERIORMENTE CITADOS CORRESPONDEN AL MODELO PARA P.M. DE $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 10^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/SEG}^2$

VELOCIDADES MEDIAS DEL DISCO HASTA EL ANGULO INDICADO

α	W_m	α	W_m	α	W_m
10	2'1493575	40	2'1631559	70	2'1850620
20	2'1522975	50	2'1702016	80	2'1919310
30	2'1570323	60	2'1776684	90	2'1978951

ANGULO α RECORRIDO POR EL DISCO CON UNA VELOCIDAD MEDIA $W_m = 2'1978951$, Y EL CORRESPONDIENTE ANGULO β RECORRIDO POR EL DISCO PARA REPRESENTAR EL P.M.

α	β	α	β	α	β
10	9'7791632	40	39'3677730	70	69'5912830
20	19'5850790	50	49'3699990	80	79'7829150
30	29'4422460	60	59'4478320	90	90'0000000

LOS DATOS ANTERIORMENTE CITADOS CORRESPONDEN AL MODELO PARA P.M. DE $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 19'656223^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/SEG}^2$

VELOCIDADES MEDIAS DEL DISCO HASTA EL ANGULO INDICADO

α	W_m	α	W_m	α	W_m
10	2'8069032	40	3'0011542	70	3'2576896
20	2'8521441	50	3'0885226	80	3'3313430
30	2'9197606	60	3'1756052	90	3'3941221

ANGULO α RECORRIDO POR EL DISCO CON UNA VELOCIDAD MEDIA $W_m = 3'3941221$, Y EL CORRESPONDIENTE ANGULO β RECORRIDO POR EL DISCO PARA REPRESENTAR EL P.M.

α	β	α	β	α	β
10	8'2698945	40	35'3688390	70	67'1862300
20	16'8063720	50	45'4981060	80	78'5202860
30	25'8072080	60	56'1371400	90	90'0000000

LOS DATOS ANTERIORMENTE CITADOS CORRESPONDEN AL MODELO PARA P.M. DE $l = 78'986156 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 51'1295^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/SEG}^2$

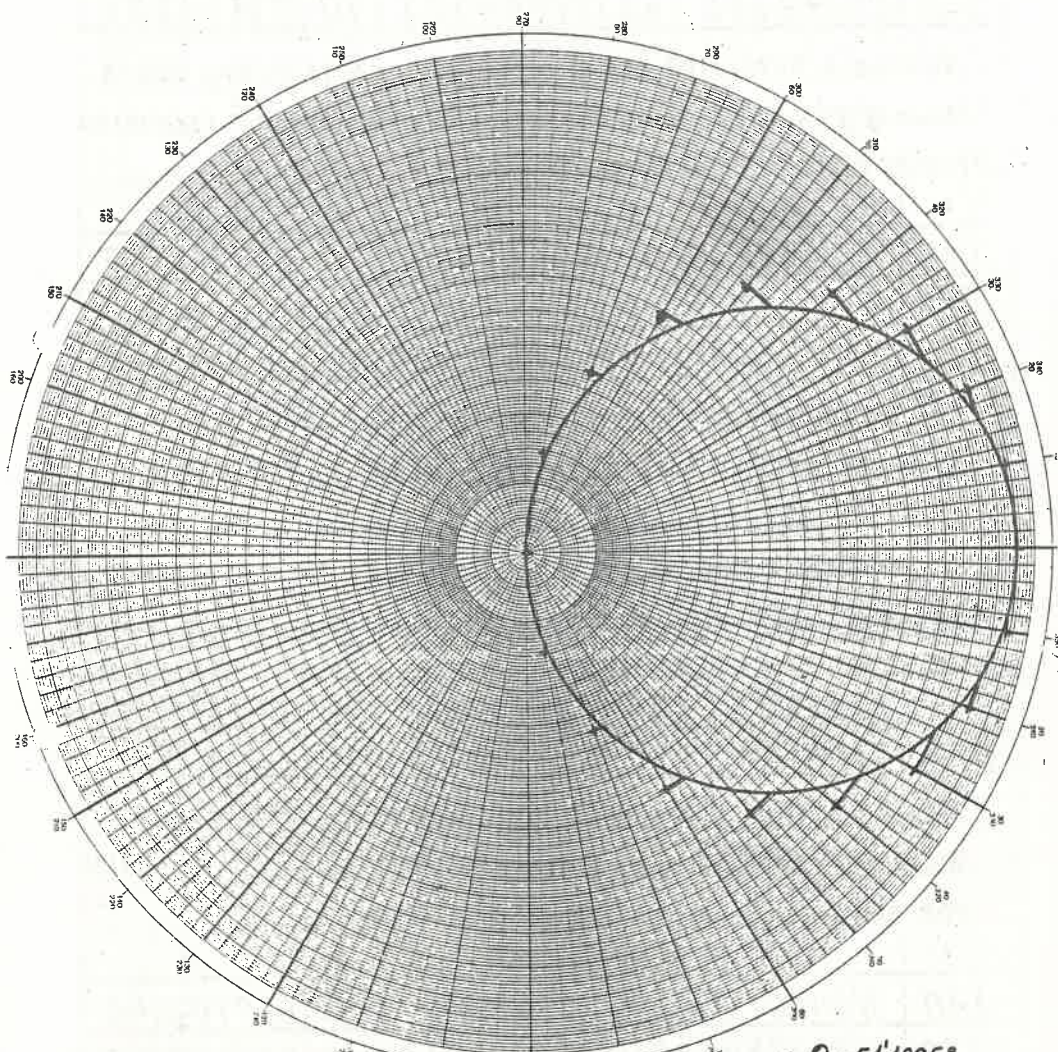
VELOCIDADES MEDIAS DEL DISCO HASTA EL ANGULO INDICADO

α	W_m	α	W_m	α	W_m
10	1'0176340	40	1'5759365	70	1'9995272
20	1'2036921	50	1'7362050	80	2'1036225
30	1'3969340	60	1'8772513	90	2'1900501

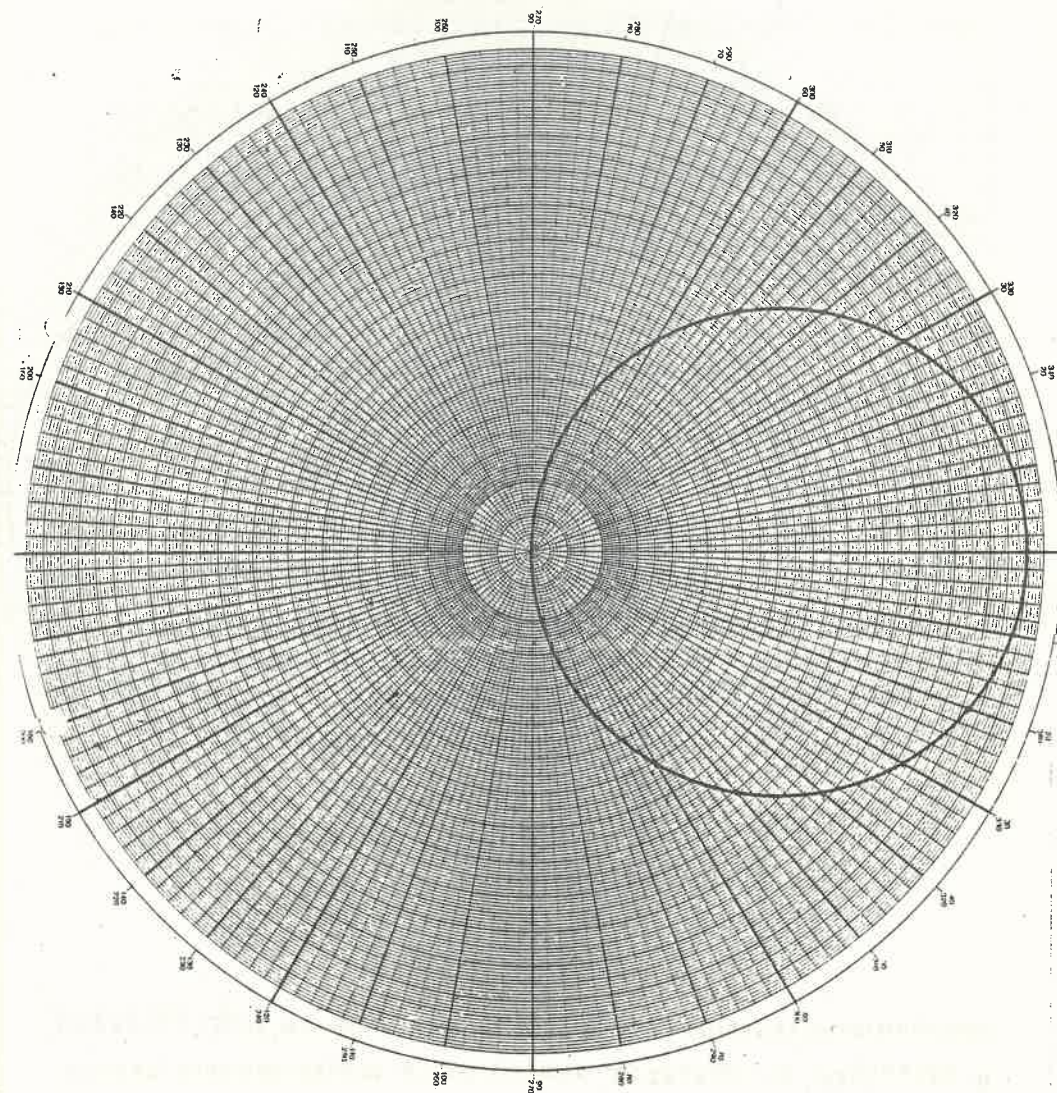
ANGULO α RECORRIDO POR EL DISCO CON UNA VELOCIDAD MEDIA $W_m = 2'1900501$, Y EL CORRESPONDIENTE ANGULO β RECORRIDO POR EL DISCO PARA REPRESENTAR EL P.M.

α	β	α	β	α	β
10	4'6466242	40	28'7835690	70	63'9103540
20	10'9923700	50	39'6384760	80	76'8429040
30	19'1356440	60	51'4303620	90	90'0000000

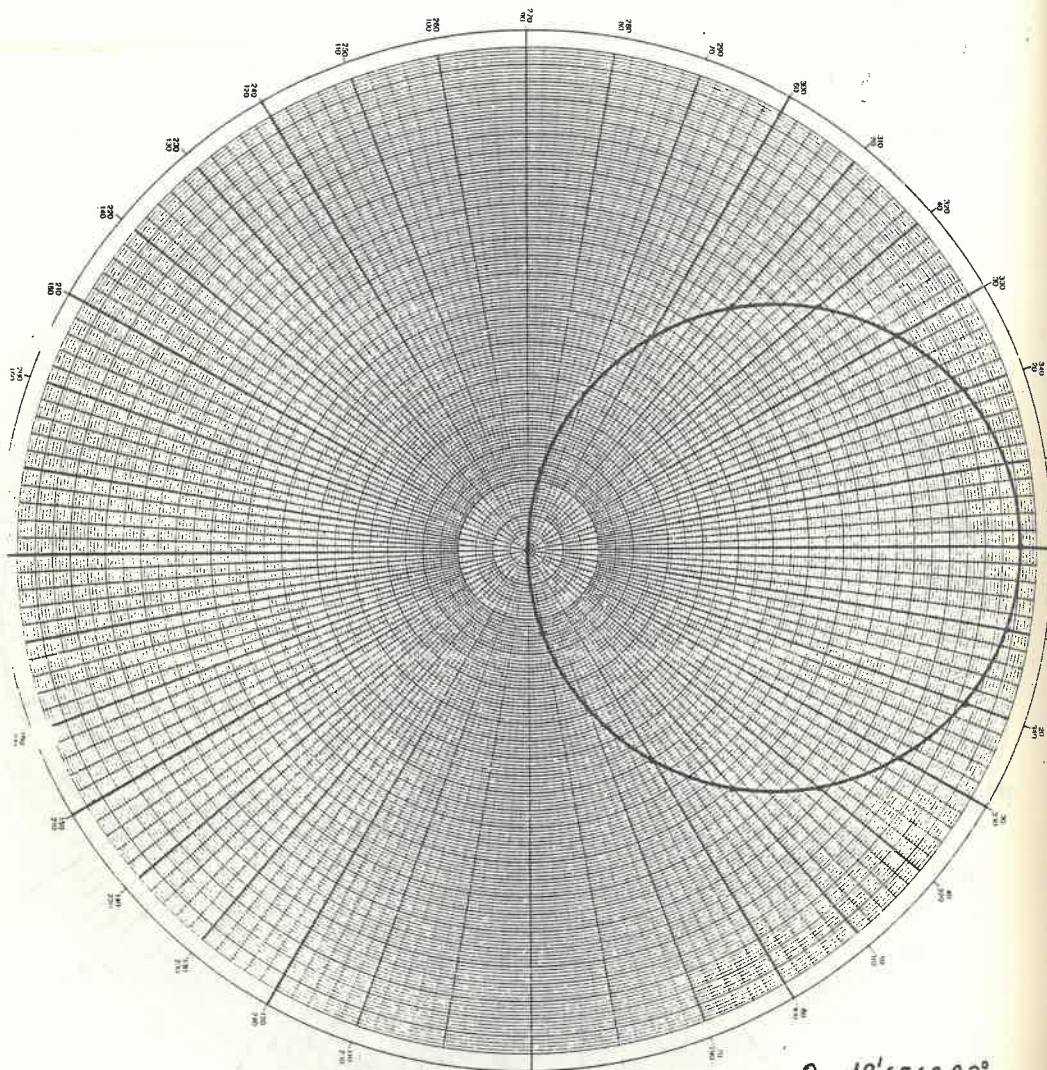
LOS DATOS ANTERIORMENTE CITADOS CORRESPONDEN AL MODELO PARA P.M. DE $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 80^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/SEG}^2$



CONSTRU DE LA GAFICA PARA ~~MODELO MECANICO~~ DE PENDULO M , $\theta_0 = 51'1295''$,
 $l = 78'986156\text{CMS}$, $g = 980\text{CMS/SEG}^2$, A PARTIR DE LA GAFICA GENERADORA DEL M.A.S.
 OBSERVESE LA NOTORIA DIFERENCIA DE AMBAS CURVAS.



CONSTRUCCION GRAFICA PARA MODELO MECANICO DE PENDULO M , DE $\theta_0 = 10^\circ$, $l = 200\text{CMS}$.
 Y $g = 980\text{CMS/SEG}^2$ A PARTIR DE LA DEL M.A.S., CON LA QUE, PRACTICAMENTE,
 COINCIDE.



CONSTRUCCION DE LA GRAFICA PARA MODELO MECANICO DE P.M. DE $\theta_0 = 19'656223''$,
 $g = 980 \text{ CMS/SEG}^2$, $\theta_0 = 19'656223''$, A PARTIR DE LA CORRESPONDIENTE GRAFICA
 GENERADORA DEL M.A.S.- A SIMPLE VISTA, TAMBIEN AQUI PARECEN COINCIDIR
 AMBAS CURVAS

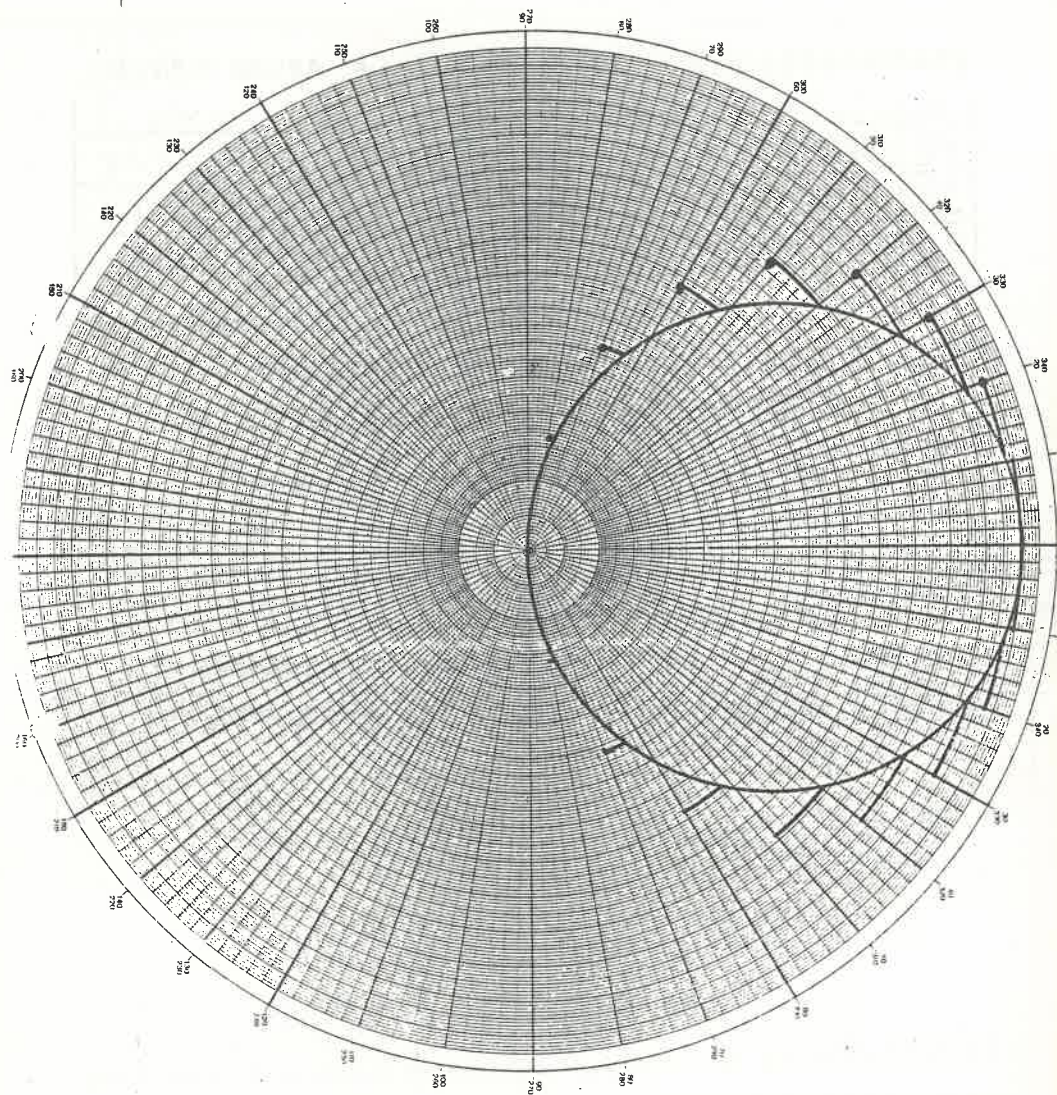
VELOCIDADES MEDIAS DEL DISCO HASTA EL ANGULO INDICADO.

α	W_m	α	W_m	α	W_m
10	0'8675813	40	1'4126585	70	2'1842519
20	1'2259936	50	1'8961094	80	2'2955547
30	1'4942687	60	2'0519372	90	2'3874421

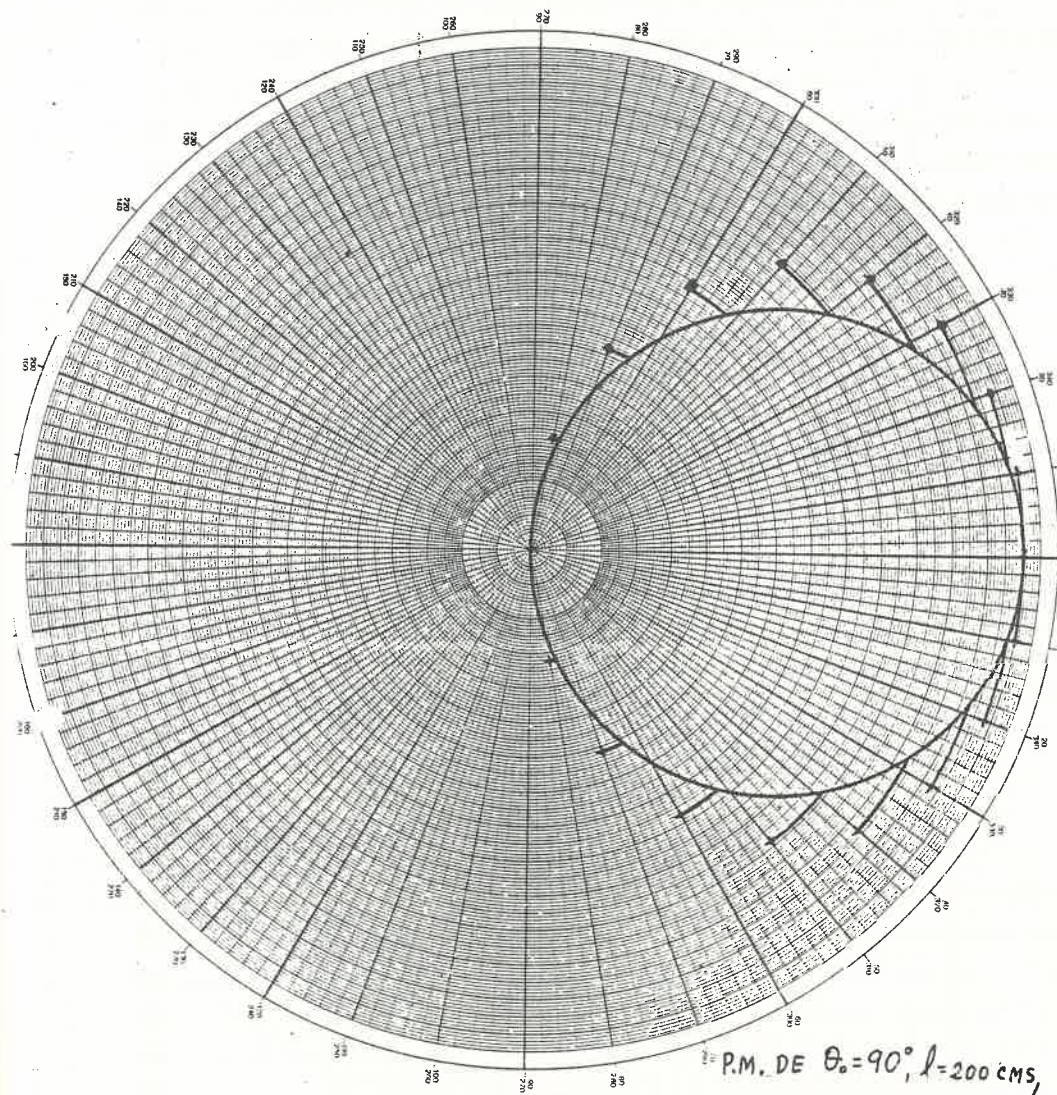
ANGULO α RECORRIDO POR EL DISCO CON UNA VELOCIDAD MEDIA
 $W_m = 2'3874421$, Y EL CORRESPONDIENTE ANGULO β RECO-
 RRIDO POR EL DISCO PARA REPRESENTAR EL P.M.

α	β	α	β	α	β
10	3'6339365	40	28'6944500	70	64'0424450
20	10'2703520	50	39'4100600	80	76'9209730
30	18'7766060	60	51'5682570	90	90'0000000

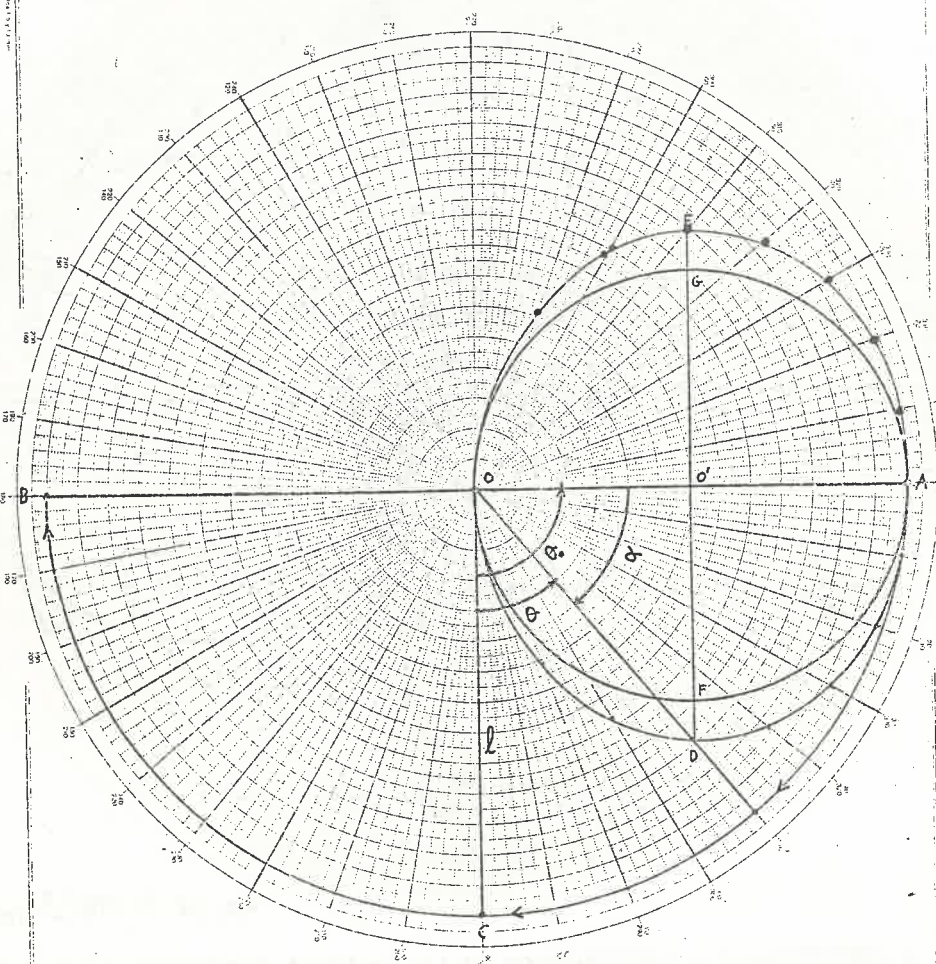
LOS DATOS ANTERIORMENTE CITADOS CORRESPONDEN AL
 MODELO PARA P.M. DE $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 90^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/SEG}^2$



CONSTRUCCION DE LA GRAFICA PARA MODELO MECANICO DE P.M.
DE LAS SIGUIENTES CARACTERISTICAS, $l=200$ CMS, $\theta_0=80^\circ$, $l=200$ CMS.

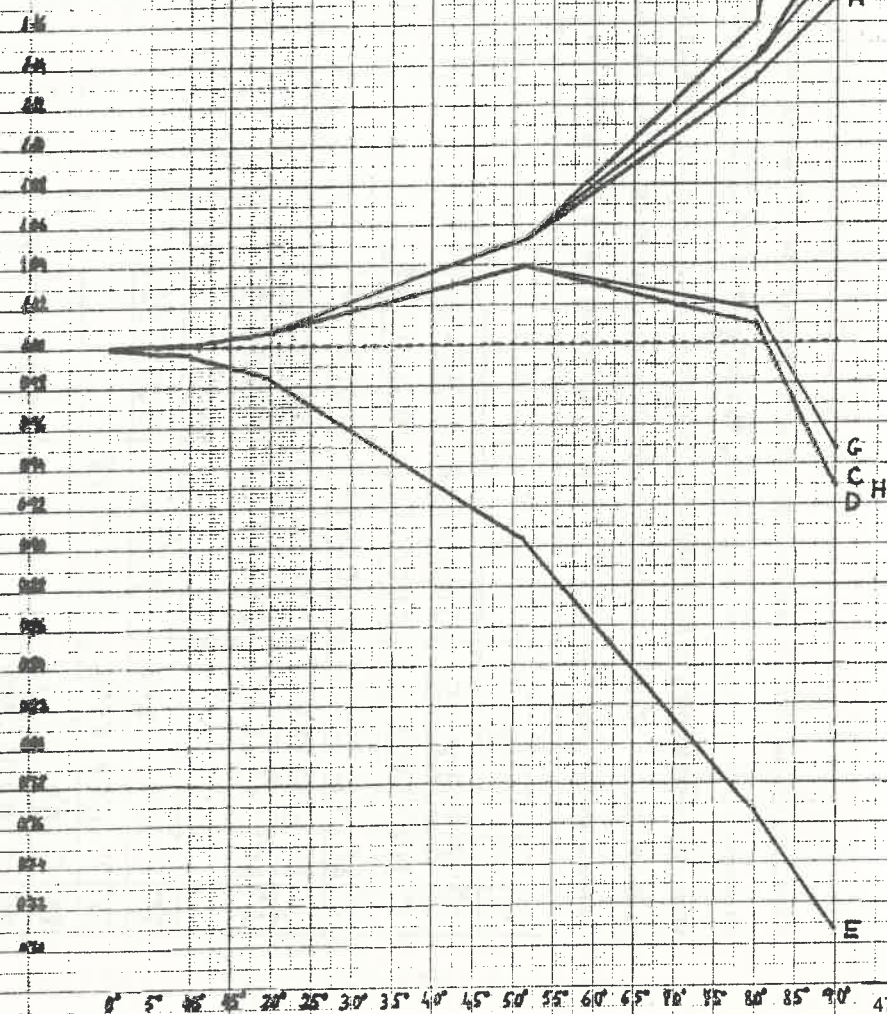


P.M. DE $\theta_0=90^\circ$, $l=200$ CMS,
 $g=980$ CMS/SEG². - CONSTRUCCION DE LA GRAFICA CORRESPONDIENTE A
PARTIR DE LA DEL M.A.S.



EADO: GRAFICA PARA MODELO MECANICO DE P.M.
CON $W_m = K$, $l = 200 \text{ CMS}$, $g = 980 \text{ CMS/SEG}^2$, $\theta_0 = 90^\circ$
OBSERVESE DIFERENCIA CON LA GRAFICA PARA EL M.A.S.

- 128 A=CONSTANTE SEGUN DICCIONARIO DE LA FISICA M.FRANKE-ED-LABOR SA - 1967
- 129 B=CONSTANTE HALLADA POR MEDIA EXTREMOS VELOCIDADES ANGULARES
- 130 C=CONSTANTE HALLADA POR MEDIA VELOCIDADES DE GRADO EN GRADO
- 131 D=CONSTANTE HALLADA POR TEOREMA MEDIA, SEGUN METODO SIMPSON, DE 1 EN 1 GRADO
- 132 E=CONSTANTE PARTIENDO HIPOTESIS DE QUE EL P.M. ES UN M.A.S.
- 133 F=CONSTANTE SEGUN COMUNICACION PRESENTADA EN SIMPOSIO FIS Y MAT (INCIE-1980)
- 134 G=CONSTANTE HALLADA POR MEDIA ARITMETICA VELOCIDADES ANG, DES, EN 5 GRADOS
- 135 H=CONSTANTE HALLADA POR TEOREMA MEDIA (SIMPSON), DE 5 EN 5 GRADOS
- 136 NOTA- LOS LIMITES DE INTEGRACION HAN SIDO SIEMPRE 0° Y 90°
- 137 J=CONSTANTE HALLADA POR MEDIA ARMONICA DE LAS VELOCIDADES ANGULARES, DE GRADO EN GRADO.



EXTRAPOLACION, POR EL METODO DE NEWTON, DESDE $\theta = 0^\circ$ HASTA $\theta = 90^\circ$, QUE SE CORRESPONDE CON $\alpha = 0^\circ$, PARA UN PENDULO MATEMATICO DE $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 90^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/SEG}^2$. EL VALOR HALLADO POR LA EXTRAPOLACION ES EL DE LA VELOCIDAD INSTANTANEA CORRESPONDIENTE AL ANGULO $\alpha = 0^\circ$. SEGUN LOS CALCULOS CORRESPONDIENTES, ESTA VELOCIDAD ES DE 0.20555. LA RAZON DE ESTA EXTRAPOLACION ES LA DE PODER HALLAR LA VELOCIDAD UNIFORME SEGUN LA MEDIA ARMONICA DE LAS VELOCIDADES INSTANTANEAS, MUCHO MAS EXACTA QUE EMPLEANDO LA MEDIA ARITMETICA.

θ	α	W_i	Δ'	Δ''
0°	90°	3'1304951	-0'0002386	-0'0004767
1°	89°	3'1302565	-0'0004153	-0'0004768
2°	88°	3'1295412	-0'0011921	-0'0004774
3°	87°	3'1283491	-0'0016695	-0'0004771
4°	86°	3'1266796	-0'0021466	-0'0004780
87°	3°	0'4161646	-0'1313450	-0'0399128
88°	2°	0'5848196	-0'1712578	
89°	1°	0'4135618		
90°	0°	0'2055500		

VELOCIDADES MEDIAS DEL DISCO HASTA EL ANGULO INDICADO

31

α	W_m	α	W_m	α	W_m
10°	2'1971377	40°	2'2005817	70°	2'2061350
20°	2'1978717	50°	2'2023593	80°	2'2078890
30°	2'1990481	60°	2'2042526	90°	2'2094120

ANGULO α RECORRIDO POR EL DISCO CON UNA VELOCIDAD MEDIA

$W_m = 2'2094120$, Y EL CORRESPONDIENTE ANGULO θ RECORRIDO POR EL DISCO PARA REPRESENTAR EL PENDULO MATEMATICO

α	θ	α	θ	α	θ
10°	99'44453	40°	39'8401330	70°	69'7961750
20°	19'8955350	50°	49'8403910	80°	79'9448540
30°	29'8592760	60°	59'8598850	90°	90'0000000

LOS DATOS ANTERIORMENTE CITADOS CORRESPONDEN AL MODELO

PARA P.M. DE $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 10^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/SEG}^2$ Y LAS W_m HAN SIDO HALLADAS POR LA MEDIA ARMONICA

VELOCIDADES MEDIAS DEL DISCO HASTA EL ANGULO INDICADO

α	W_m	α	W_m	α	W_m
10°	2'1494000	40°	2'1632257	70°	2'1847832
20°	2'1523868	50°	2'1701921	80°	2'1915022
30°	2'1571338	60°	2'1775372	90°	2'1973347

ANGULO α RECORRIDO POR EL DISCO CON UNA VELOCIDAD MEDIA

$W_m = 2'1973347$, Y EL CORRESPONDIENTE ANGULO θ RECORRIDO POR EL DISCO PARA REPRESENTAR EL PENDULO MATEMATICO

α	θ	α	θ	α	θ
10°	9'7818507	40°	39'3790840	70°	69'6001470
20°	19'5908870	50°	49'3823720	80°	79'7876490
30°	29'4511400	60°	59'4594120	90°	90'0000000

LOS DATOS ANTERIORMENTE CITADOS CORRESPONDEN AL MODELO

PARA P.M. DE $l = 200 \text{ CMS}$, $\theta_0 = 19'556223^\circ$, $g = 980 \text{ CMS/SEG}^2$ Y LAS W_m HAN SIDO HALLADAS POR LA MEDIA ARMONICA

VELOCIDADES MEDIAS DEL DISCO HASTA EL ANGULO INDICADO

α	W_m	α	W_m	α	W_m
10°	2'8075179	40°	2'9927199	70°	3'2232154
20°	2'8523818	50°	3'0720210	80°	3'2893676
30°	2'9171196	60°	3'1499872	90°	3'3467560

ANGULO α RECORRIDO POR EL DISCO CON UNA VELOCIDAD MEDIA

$W_m = 3'3467560$, Y EL CORRESPONDIENTE ANGULO β RECORRIDO POR EL DISCO PARA REPRESENTAR AL PENDULO MATEMATICO

α	β	α	β	α	β
10°	8'3887737	40°	35'7686030	70°	67'4160500
20°	15'0456510	50°	45'8955020	80°	78'6281990
30°	26'1487800	60°	56'4723660	90°	90'0000000

LOS DATOS ANTERIORMENTE CITADOS CORRESPONDEN AL MODELO PARA P.M. DE $l = 78'986156 \text{ cms}$, $\theta_0 = 51'1295^\circ$, $g = 980 \text{ cms}^2/\text{seg}^2$ Y LAS W_m HAN SIDO HALLADAS POR LA MEDIA ARMONICA

VELOCIDADES MEDIAS DEL DISCO HASTA EL ANGULO INDICADO

α	W_m	α	W_m	α	W_m
10°	1'0140044	40°	1'4504969	70°	1'7764661
20°	1'1673436	50°	1'5713871	80°	1'8623544
30°	1'3158533	60°	1'6797045	90°	1'9377216

ANGULO α RECORRIDO POR EL DISCO CON UNA VELOCIDAD MEDIA

$W_m = 1'9377216$, Y EL CORRESPONDIENTE ANGULO β RECORRIDO POR EL DISCO PARA REPRESENTAR EL PENDULO MATEMATICO

α	β	α	β	α	β
10°	5'2329725	40°	29'9423140	70°	64'1746570
20°	12'0486200	50°	40'5472870	80°	76'8884180
30°	20'3721720	60°	52'0107060	90°	90'0000000

LOS DATOS ANTERIORMENTE CITADOS CORRESPONDEN AL MODELO PARA P.M. DE $l = 200 \text{ cms}$, $\theta_0 = 80^\circ$, $g = 980 \text{ cms}^2/\text{seg}^2$ Y LAS W_m HAN SIDO HALLADAS POR LA MEDIA ARMONICA

VELOCIDADES MEDIAS DEL DISCO HASTA EL ANGULO INDICADO 33

α	W_m	α	W_m	α	W_m
10°	0'6465142	40°	1'2665493	70°	1'6498712
20°	0'9021804	50°	1'4104117	80°	1'7501248
30°	1'1004988	60°	1'5372130	90°	1'8389871

ANGULO α RECORRIDO POR EL DISCO CON UNA VELOCIDAD MEDIA

$W_m = 1'8389871$, Y EL CORRESPONDIENTE ANGULO β RECORRIDO POR EL DISCO PARA REPRESENTAR EL PENDULO MATEMATICO

α	β	α	β	α	β
10°	3'5155994	40°	27'5488450	70°	62'8014080
20°	9'8117099	50°	38'3475140	80°	76'1342910
30°	17'9529980	60°	50'1541200	90°	90'0000000

LOS DATOS ANTERIORMENTE CITADOS CORRESPONDEN AL MODELO PARA PENDULO MATEMATICO DE $l = 200 \text{ cms}$, $\theta_0 = 90^\circ$, $g = 980 \text{ cms}^2/\text{seg}^2$ Y LAS W_m HAN SIDO HALLADAS POR LA MEDIA ARMONICA

CALCULO DE UN DETERMINANTE MEDIANTE UNA CALCULADORA DE BOLSILLO PROGRAMABLE

Ricardo Robles Díaz (*),

RESUMEN Se describe un programa para una calculadora de bolsillo programable TI-59, que permite calcular el determinante de una matriz cuadrada mediante el método del pivote. El problema se resuelve inicialmente en la calculadora de mesa programable HP-85 en el lenguaje de programación BASIC y se transcribe posteriormente su diagrama de flujo mediante el conjunto de instrucciones de la calculadora de bolsillo TI-59.

El procedimiento pretende ilustrar ciertas técnicas de programación de diagramas de flujo con calculadoras de bolsillo programables y además obtiene valores exactos para determinantes de matrices cuyos elementos sean números enteros.

INTRODUCCION

Desde hace algunos años parece claro, a través de publicaciones, comunicaciones e incluso prensa (1-3), la necesidad de introducir en los Institutos de Bachillerato (Centros de Formación Profesional) instrumentos de cálculo adecuados que hagan más eficaz el aprendizaje de las matemáticas y además puedan servir para enseñar ciertas técnicas básicas informáticas en la medida de lo posible. De este modo en algunos Institutos comienzan a divulgarse cal

(*) Profesor Agregado de Matemáticas
I.8. Antonio Machado (Sevilla)

culadoras de bolsillo programables, tipos TI-59 y HP-41C, y se crea una asignatura opcional EATP en la que se describe su uso, mediante una programación aún poco evolucionada.

Vivimos una época en la que la etapa intermedia entre una calculadora de bolsillo programable y las calculadoras de mesa de probada potencia, está cubriéndose por los "microprocesadores", cada vez más sofisticados y de precio más accesible para un Instituto de Bachillerato. Ciertos microprocesadores de hoy no solo permiten resolver problemas de cálculo en lenguajes de bajo nivel ("assemblers") sino también usan lenguajes de alto nivel como BASIC e incluso interacción entre éstos. Tienen además posibilidades de almacenamiento y transmisión de información (monitor de T.V., conexión a un cassette, acoplamiento a una impresora, a floppy disc, etc.), y una serie de posibilidades que superan, con uso adecuado, el ámbito de aplicación del cálculo en matemáticas. Por todo, parecen, desde nuestro punto de vista, los instrumentos idóneos para complementar el desarrollo y aprendizaje de ciertas técnicas.

En esta comunicación hemos pretendido solucionar un problema típico para un alumno de COU: el cálculo de un determinante. Para ello hemos utilizado el algoritmo del método del pivote que hemos programado en un diagrama de flujo y posteriormente lo hemos implementado con una calculadora de mesa HP-85 en BASIC y con una calculadora de bolsillo programable TI-59.

Nuestra intención es mostrar un ejemplo de cómo abordar un problema susceptible de ser programado en una calculadora y resolverlo con dos medios distintos. Hacemos énfasis, naturalmente, en la facilidad que provee esta calculadora de mesa, si bien es de precio mucho más elevado que la calculadora de bolsillo, pero también hay que hacer notar que muy a su nivel están los microprocesadores y son considerablemente más económicos.

CALCULO DE UN DETERMINANTE

El determinante de una matriz cuadrada se presenta por primera vez a los alumnos de Instituto en el COU (4-5), estableciéndose su definición y ciertas propiedades (el intercambio entre sí de dos filas (columnas) cambia el signo del determinante; si dos filas entre sí (columnas) son proporcionales, el determinante es nulo, etc.), que pueden ser aprovechadas de manera muy práctica en el cálculo manual del determinante.

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

su determinante, $\det(A)$, es el número real definido por:

$$\det(A) = \sum_{n!} \epsilon_s a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot a_{3i_3} \cdot \cdot \cdot a_{ni_n}$$

siendo e_s la signatura de la permutación $i_1 i_2 \dots i_n$ de los índices $123 \dots n$.

El algoritmo de cálculo del determinante de una matriz cuadrada utilizando la definición anterior es factible de programarse en una calculadora, si bien es claro que a medida que se incrementa el orden, n , de la matriz A , el número de operaciones a realizar aumenta considerablemente: $n!$ sumandos de productos de n factores cada uno. Por tanto interesa considerar otros métodos de cálculo que reduzcan el número de operaciones a realizar. Es importante hacer notar al alumno que las propiedades a ser usadas para simplificar el cálculo manual de un determinante son muy prácticas pero muy difíciles de sistematizar en un programa de calculadora.

Aplicando reiteradamente el desarrollo por adjuntos, puede reducirse el cálculo de un determinante de orden n al cálculo de numerosos determinantes de segundo orden. Es evidente que también en este caso el número de operaciones aritméticas crece excesivamente cuando aumenta n . Un método de cálculo de determinantes, que requiere un número mucho menor de operaciones aritméticas, es el llamado método del "pivote" (6). Vamos a desarrollarlo.

METODO DEL PIVOTE

Partamos la matriz A , de orden n , en la forma:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$$

donde la submatriz A_{11} es de orden m , $1 \leq m < n$. Supongamos que A_{11} es no singular. En este caso, existe su inversa y A puede descomponerse factorialmente del modo siguiente, siendo U una matriz unidad del orden que corresponda:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline A_{21} A_{11}^{-1} & U \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} U & A_{11}^{-1} A_{12} \\ \hline 0 & U \end{array} \right]$$

La validez de esta descomposición factorial puede establecerse efectuando las multiplicaciones de matrices indicadas y obteniendo A como resultado.

Las matrices primera y tercera son triangulares y sus determinantes es claro que valen la unidad. La matriz central, además, puede descomponerse en la forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & U \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{array} \right]$$

Por tanto podrá escribirse finalmente:

$$\det(A) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$$

Si tomásemos como A_{11} el escalar $a_{11} \neq 0$, la expresión anterior se reduciría a esta otra:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(A_{22} - \frac{1}{a_{11}} A_{21} A_{12}) =$$

$$= a_{11} \cdot \det(\frac{a_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}}{a_{11}})$$

Según las propiedades de los determinantes, multiplicando cada fila de una matriz por la constante $1/a_{11}$, el determinante de la matriz queda multiplicado por $1/a_{11}^m$ donde m es el orden de la matriz. Como la matriz del segundo miembro cuyo determinante se busca es de orden $n-1$, se tendrá finalmente:

$$\det(A) = (1/a_{11}^{n-2}) \cdot \det(a_{11} A_{22} - A_{21} A_{12})$$

Esta es la relación matemática asociada al método del pivote. Se puede lograr siempre que el elemento a_{11} sea distinto de cero, a menos que sean nulos todos los elementos de la primera fila o columna, en cuyo caso $\det(A)=0$. Eliminando este caso, en la posición (1,1) podrá colocarse siempre un elemento no nulo permutando otra fila con la primera u otra columna con la columna 1. Una tal permuta lleva consigo un cambio de signo.

La aplicación reiterada de la fórmula anterior reduce el cálculo del determinante de A al de una matriz de orden 2.

PROGRAMACION DEL ALGORITMO

El algoritmo anterior que supone el método del pivote para el

cálculo de un determinante es factible de ser programado sobre una calculadora de mesa utilizando un lenguaje de alto nivel, por ejemplo BASIC. La figura 1 muestra el diagrama de flujo (u organigrama, como suele denominarse también) del algoritmo anterior utilizando instrucciones BASIC. En la siguiente página se muestra un simple programa BASIC para calcular determinantes según este método, desarrollado en una calculadora de mesa HP-85, y posteriormente se indican dos ejemplos.

Varios detalles del algoritmo son de destacar. En primer lugar, como puede verse en los ejemplos, en cada iteración se determinan los coeficientes de una matriz de un grado menos que la matriz anterior, que se almacena usando los registros de memoria previamente utilizados para almacenar coeficientes de matrices en iteraciones anteriores. Por tanto esto supone un ahorro de memoria considerable que es fundamental para una calculadora de bolsillo programable.

En segundo lugar, es de hacer notar la disminución de errores en el cálculo mediante este método y el hecho de la obtención de resultados exactos para determinantes de matrices cuyos elementos sean números enteros. Esto se debe a las operaciones realizadas en el cálculo. Los elementos de las matrices intermedias se determinan mediante una resta de dos sumandos que son productos de dos factores. Las potencias en que están implicados los pivotes tienen exponentes naturales, por lo que se calculan por sucesivas multiplicaciones. Finalmente se realiza un cociente entre el elemento a_{nn} y el producto de todas las potencias de los pivotes, que es la operación que

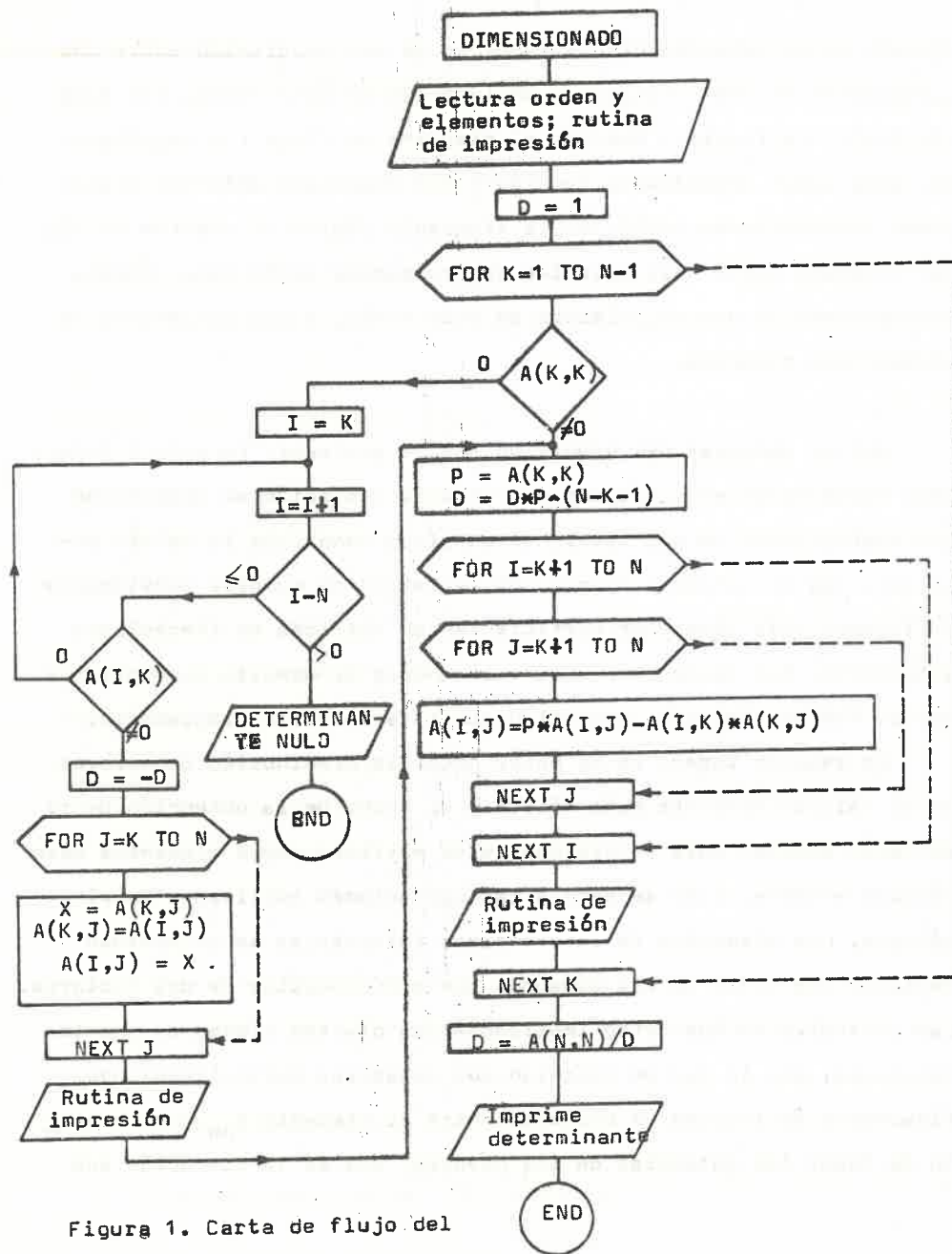


Figura 1. Carta de flujo del algoritmo del pivote.

```

220 ! * permutacion filas K e I*
230 D=-D
240 FOR J=K TO N
250 ! * determinacion pivote *
260 X=A(K,J)
270 A(K,J)=A(I,J)
280 A(I,J)=X
290 NEXT J
300 GOSUB 460
310 P=A(K,K)
320 D=D*P^(N-K-1)
330 ! * determinacion de los
    nuevos elementos matriciales
    *
340 FOR I=K+1 TO N
350 FOR J=K+1 TO N
360 A(I,J)=P*A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)
370 NEXT J
380 NEXT I
390 GOSUB 460
400 NEXT K
410 D=A(N,N)/D
420 DISP
430 DISP "DETERMINANTE=";D
440 END
450 ! * subrutina de impresion
    de resultados *
460 IF K=0 THEN DISP @ GOTO 480
470 DISP @ DISP "K=";K @ DISP
480 FOR I=1 TO N
490 FOR J=1 TO N
500 DISP A(I,J);
510 NEXT J
520 DISP
530 NEXT I
540 RETURN

*****
10 OPTION BASE 1
20 DIM A(10,10)
30 ! * lectura del orden y ele-
    mentos por filas *
40 INPUT N
50 DATA 0,2,3,4,5,6,7,8,9
60 FOR I=1 TO N
70 FOR J=1 TO N
80 READ A(I,J)
90 NEXT J
100 NEXT I
110 K=0
120 GOSUB 460
130 D=1
140 ! * comienzo de las N-1
    iteraciones *
150 FOR K=1 TO N-1
160 IF A(K,K)=0 THEN 180 ELSE 310
170 ! * A(K,K)=0 *
180 I=K
190 I=I+1
200 IF I-N>0 THEN DISP "DETERMIN
    ANTE NULO" @ END ELSE 210
210 IF A(I,K)=0 THEN 190
  
```

EJEMPLO 1

?

```

2 -1 5 0
1 0 0 4
-3 5 1 2
4 1 -1 6

```

K= 1

```

2 -1 5 0
1 1 -5 8
-3 7 17 4
4 6 -22 12

```

K= 2

```

2 -1 5 0
1 1 -5 8
-3 7 52 -52
4 6 8 -36

```

K= 3

```

2 -1 5 0
1 1 -5 8
-3 7 52 -52
4 6 8 -1456

```

DETERMINANTE=-364

EJEMPLO 2

?

```

0 2 3
4 5 6
7 8 9

```

K= 1

```

4 5 6
0 2 3
7 8 9

```

K= 1

```

4 5 6
0 8 12
7 -3 -6

```

K= 2

```

4 5 6
0 8 12
7 -3 -12

```

DETERMINANTE= 3

introduce más error. Ahora bien, en el caso de elementos enteros los resultados a dividir deben ser múltiplos y el cociente será entero.

Por último, una comparación entre el número de operaciones aritméticas realizadas mediante este método y la programación directa del cálculo según la definición de determinante muestra claramente el ahorro de operaciones en el primero. En efecto, designando por " p_2 " una operación de producto de 2 factores, " s_2 " una suma de 2 sumandos y " c_2 " un cociente de dos números, se tiene, para una matriz de orden n , que el número de operaciones a realizar por el cálculo según la definición es,

$$m_1 = (n-1)n!p_2 + (n!-1)s_2$$

y según el método del pivote,

$$m_2 = \frac{1}{6}(n(n-1)(2n-1))(2p_2 + s_2) + ((n-3)! + (n-3))p_2 + c_2$$

$n \leq 3$

Basta hacer el cálculo de m_1 y m_2 para algunos valores de n para comparar el ahorro de operaciones que supone el método del pivote frente a la aplicación directa de la definición.

n	m_1	m_2
3	$12p_2 + 5s_2$	$10p_2 + 5s_2 + c_2$
5	$480p_2 + 119s_2$	$64p_2 + 30s_2 + c_2$
7	$30.240p_2 + 5.039s_2$	$210p_2 + 91s_2 + c_2$
9	$2.903.040p_2 + 362.879s_2$	$1134p_2 + 204s_2 + c_2$

TRANSCRIPCION A LA CALCULADORA TI-59

La TI-59 es una calculadora de bolsillo programable con 120 registros seleccionables para almacenar datos o instrucciones, según se desee. En la partición de memoria que provee más registros de almacenamiento de datos se dispone para ello de 100 de estos registros y los 20 restantes para almacenar instrucciones. Por cada registro se pueden almacenar 8 instrucciones, lo que permite en esta partición 160 instrucciones. Cualquier otra partición seleccionable requiere fijar el número de grupos de 10 registros de datos que se desee y el resto de los registros podrán usarse para instrucciones.

El programa diseñado en la TI-59 ocupa 334 instrucciones, por lo que se necesitan por lo menos 50 registros para instrucciones y quedarían 70 registros de almacenamiento de datos. Como aparte de los elementos de la matriz cuyo determinante queremos calcular es necesario almacenar variables accesorias (en total 11) quedarían 60 registros, lo que permite almacenar como máximo una matriz de orden 7. Por tanto, finalmente la partición elegida para el funcionamiento del programa tiene 60 registros de datos, 49 para los elementos matriciales y 11 para datos accesorios, y 60 registros para instrucciones. Dicha partición es la partición usual al conectar la calculadora.

a) distribución registros de memoria

Los elementos matriciales se almacenan ordenadamente por filas

en los registros 1-49. El registro de memoria que almacena el elemento a_{ij} será el $N.(i-1) + j$, siendo n el orden de la matriz.

El resto de los datos necesarios en el cálculo se almacenan en los registros que se indican:

00 - n : orden de la matriz

50 - k

51, 52, 53 - registros accesorios

54, 55 - índices 1 y 2 para rutina de decodificación de dirección de elemento matricial

56, 57 - índices de los dos "FOR" de cálculo de los nuevos elementos matriciales

58 - pivote

59 - D: valor del determinante

b) descripción del programa de la TI-59

El programa en la TI-59 se va construyendo a partir del diagrama de flujo anteriormente referenciado utilizando instrucciones de la TI-59. En las siguientes páginas se expone el listado comentado del programa mostrando el paso de programa, el código numérico de la instrucción correspondiente y el nombre mnemotécnico de la instrucción.

Pueden apreciarse partes del programa que pueden considerarse típicas como la rutina de almacenamiento de elementos matriciales, la rutina de decodificación de dirección, y otras.

	000	76	LBL
	001	11	R
	002	42	STD
	003	00	00
	004	01	1
Entrada	005	42	STD
de	006	50	50
datos	007	91	R/S
	008	76	LBL
	009	16	R
	010	72	ST*
	011	50	50
	012	01	1
	013	44	SUM
	014	50	50
	015	43	RCL
	016	50	50
	017	91	R/S
	018	16	R
	019	76	LBL
	020	13	C
	021	01	1
D = 1	022	42	STD
	023	59	59
	024	25	CLR
	025	42	STD
K = 0	026	50	50
	027	76	LBL
	028	13	C
	029	43	RCL
	030	00	00
	031	32	XIT
	032	01	1
	033	44	SUM
	034	50	50
	035	43	RCL
	036	50	50
¿ K=N ?	037	67	EQ
Final	038	10	E
	039	42	STD
	040	58	56
	041	42	STD
	042	55	55
	043	76	LBL
	044	35	1/X
	045	01	1
	046	52	EE
	047	01	1
	048	03	3
	049	94	+/-

	050	32	XIT
	051	22	INV
	052	52	EE
	053	53	(
	054	53	(
	055	43	RCL
	056	50	50
	057	75	-
	058	01	1
Determinación	059	54)
A(K,K)	060	65	x
	061	43	RCL
dirección:	062	00	00
	063	85	+
58	064	43	RCL
	065	50	50
	066	54)
	067	42	STD
	068	58	58
	069	73	RC*
	070	58	58
A(K,K) - 58	071	42	STD
	072	58	58
	073	50	I×I
¿ A(K,K) - 10 ⁻¹³ ?	074	22	INV
	075	77	GE
	076	33	X²
	077	35	1/X
pivote ≠ 0	078	25	CLR
	079	32	XIT
	080	43	RCL
	081	58	58
¿ A(K,K) ?	082	77	GE
	083	17	B
	084	94	+/-
pivote negat.	085	42	STD
	086	58	58
	087	43	RCL
	088	59	59
	089	94	+/-
	090	42	STD
D = -D	091	59	59
Rutina de	092	76	LBL
	093	34	FX
cambio de sig.	094	43	RCL
	095	56	56
fila si	096	42	STD
	097	54	54
pivote negat.	098	15	E
	099	94	+/-

	100	72	ST*
	101	53	53
	102	43	RCL
	103	00	00
	104	32	XIT
	105	43	RCL
	106	55	55
	107	77	GE
	108	17	B
	109	01	1
	110	44	SUM
	111	55	55
	112	61	GTD
	113	34	FX
cálculo de	114	76	LBL
D=D×P _A (N-K-1)	115	17	B
	116	53	(
	117	53	(
	118	43	RCL
	119	58	58
	120	45	YX
	121	53	(
	122	43	RCL
	123	00	00
	124	75	-
	125	43	RCL
	126	50	50
	127	75	-
	128	01	1
	129	54)
	130	54)
	131	65	x
	132	43	RCL
	133	59	59
	134	54)
	135	42	STD
	136	59	59
FOR I=K+1, N	137	76	LBL
	138	12	B
	139	43	RCL
	140	00	00
	141	32	XIT
	142	43	RCL
	143	56	56
	144	67	EQ
	145	18	C
	146	01	1
	147	44	SUM
	148	56	56
	149	43	RCL

	150	50	50
	151	42	STD
	152	57	57
FOR J=K+1, N	153	76	LBL
	154	14	D
	155	43	RCL
	156	00	00
	157	32	XIT
	158	43	RCL
	159	57	57
	160	67	EQ
	161	12	B
	162	01	1
	163	44	SUM
	164	57	57
	165	43	RCL
	166	56	56
	167	42	STD
cálculo de	168	54	54
A(I,J) =	169	43	RCL
P×A(I,J) -	170	57	57
	171	42	STD
	172	55	55
-A(I,K)×A(K,J)	173	53	(
	174	15	E
	175	65	x
	176	43	RCL
	177	58	58
	178	75	-
	179	43	RCL
	180	53	53
	181	42	STD
	182	52	52
	183	53	(
	184	43	RCL
	185	56	56
	186	42	STD
	187	54	54
	188	43	RCL
	189	50	50
	190	42	STD
	191	55	55
	192	15	E
	193	65	x
	194	43	RCL
	195	50	50
	196	42	STD
	197	54	54
	198	43	RCL
	199	57	57

	200	42	STD
	201	55	55
	202	15	E
	203	54)
	204	54)
	205	72	ST*
	206	52	52
	207	61	GTD
	208	14	D
Final:	209	76	LBL
	210	10	E'
D=A(N,N)/D	211	53	(
	212	43	RCL
	213	00	00
	214	33	X²
	215	42	STD
	216	52	52
	217	73	RC*
	218	52	52
	219	65	x
	220	43	RCL
Imprime	221	59	59
	222	35	1/X
	223	54)
resultado	224	99	PRT
	225	91	R/S
Rutina de	226	76	LBL
	227	15	E
decodificación	228	53	(
	229	53	(
de	230	43	RCL
	231	54	54
dirección	232	75	-
	233	01	1
	234	54)
	235	65	x
	236	43	RCL
	237	00	00
	238	85	+
	239	43	RCL
	240	55	55
	241	54)
	242	42	STD
	243	53	53
	244	73	RC*
	245	53	53
	246	92	RTN
Pivote cero;	247	76	LBL
	248	33	X²
cambio de	249	43	RCL
filas			

	250	50	50
	251	42	STD
	252	51	51
	253	76	LBL
	254	19	D'
	255	01	1
	256	44	SUM
I = I + 1	257	51	51
	258	43	RCL
	259	51	51
	260	32	XIT
	261	43	RCL
	262	00	00
	263	77	GE
	264	23	LNK
Determinante	265	25	CLR
	266	52	EE
nulo	267	00	0
	268	00	0
	269	91	R/S
	270	76	LBL
	271	23	LNK
	272	43	RCL
	273	51	51
	274	42	STD
	275	54	54
	276	43	RCL
	277	50	50
	278	42	STD
	279	55	55
	280	15	E
	281	50	1xI
	282	32	XIT
	283	01	1
	284	52	EE
	285	01	1
	286	03	3
	287	94	+/-
	288	77	GE
	289	19	D'
	290	43	RCL
	291	59	59
	292	22	INV
cambio signo	293	52	EE
	294	94	+/-
determinante	295	42	STD
	296	59	59
	297	43	RCL
	298	50	50
	299	42	STD

	300	55	55
Cambio de filas	301	76	LBL
	302	38	SIN
	303	43	RCL
	304	50	50
	305	42	STD
	306	54	54
	307	15	E
	308	32	XIT
	309	43	RCL
	310	53	53
	311	42	STD
	312	57	57
	313	43	RCL
	314	51	51
	315	42	STD
	316	54	54
	317	15	E
	318	72	ST*
	319	57	57
	320	32	XIT
	321	72	ST*
	322	53	53
	323	43	RCL
	324	00	00
	325	32	XIT
	326	43	RCL
	327	55	55
	328	67	EQ
	329	35	1/X
	330	01	1
	331	44	SUM
	332	55	55
	333	61	GTD
	334	38	SIN

Ejemplo-2	0	2	3
	4	5	6
	7	8	9

DETERMINANTE =

3.

Como ejemplo se ha pasado el ejemplo-2 anteriormente mencionado y el programa proporciona impreso el resultado. A pesar de que pueden imprimirse resultados intermedios, no se hace para no incrementar las dimensiones del programa.

Digamos finalmente que todo programa, una vez escrito y probado, puede ser optimizado y no ha sido nuestra intención depurarlo excesivamente sino solo ilustrar su diseño a partir del diagrama de flujo.

CONCLUSIONES

Se resuelve el cálculo de un determinante por el método del pivote y se programa su solución utilizando un lenguaje de alto nivel como BASIC en una calculadora HP-85 y un lenguaje propio en una calculadora de bolsillo TI-59. El método proporciona valores exactos para determinantes de matrices cuyos elementos sean números enteros.

BIBLIOGRAFIA

1. Ricardo Aguado y otros, "Microordenadores y educación", Revista de Bachillerato, nº 17, Enero-Marzo 1981, pp.12-15.
2. Cuaderno monográfico sobre matemáticas. Revista de Bachillerato, suplemento al número 13, Enero-Marzo 1980.
3. Primeras Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Barcelona, 7-9 Mayo 1981.

4. Ricardo Aguado y Salvador F. Cutillas, "Matemáticas COU", Ceipsa, 1979.

5. A.Lentin, J.Rivaud, "Algebra moderna", Aguilar, 1969.

6. H. Bestougeff y otros, "La technique informatique", tomo II, Ed. Masson, 1975.


```

100 C.....DIMENSIONES MAXIMAS DE LA MATRIZ A
200
300 DIMENSION AC(10,10)
400
500 C.....LECTURA E IMPRESION DE DATOS:
600 C.....ORDEN, N, DE LA MATRIZ A, Y SUS ELEMENTOS
700
800 READ(5,*) N
900
1000 WRITE(6,120)
1100 120 FORMAT(1H1, 10X, 'CALCULO DE UN DETERMINANTE POR EL'
1200 * ' METODO DEL PIVOTE'/' 9X,57('*/))
1300
1400 DO 200 I=1,N
1500 READ(5,*)(AC(I,J),J=1,N)
1600
1700 WRITE(6,100) (AC(I,J),J=1,N)
1800 100 FORMAT(/5X,10F13.2)
1900
2000 200 CONTINUE
2100
2200 C.....INICIALIZACION DE VARIABLES
2300
2400 DET=1.
2500 E=1.E-13
2600
2700 C.....COMIENZO DE LAS N-1 ITERACIONES
2800
2900 DO 300 K=1,N-1
3000 IF(ABS(AC(K,K))-E) 205,205,250
3100 205 I=K
3200 210 I=I+1
3300 IF(I=N) 220,220,215
3400 215 WRITE(6,110)
3500 110 FORMAT(10X,'DETERMINANTE NULO')
3600 STOP
3700
3800 220 IF(ABS(AC(I,K))-E) 210,210,225
3900
4000 C.....PERMUTACION DE LAS FILAS K E I
4100
4200 225 DET=-DET
4300 DO 250 J=K,N
4400 X=AC(K,J)
4500 AC(K,J)=AC(I,J)
4600 AC(I,J)=X
4700 CONTINUE
4800 230 WRITE(6,107)
4900 107 FORMAT(/' **INTERCAMBIO DE FILAS**'/)
5000 DO 230 I=1,N
5100 230 WRITE(6,100) (AC(I,J),J=1,N)
5200
5300 C.....DETERMINACION PIVOTE
5400
5500 230 P=AC(K,K)
5600 DET=DET*(P*(N-K-1))
5700 C.....DETERMINACION DE LOS NUEVOS ELEMENTOS MATRICIALES
5800

```

```

5900 DO 260 I=K+1,N
6000 DO 260 J=K+1,N
6100 AC(I,J)=P*AC(I,J)-AC(I,K)*AC(K,J)
6200 260 CONTINUE
6300 WRITE(6,105) K
6400 105 FORMAT(/' K=' ,I2/)
6500 DO 255 I=1,N
6600 255 WRITE(6,100) (AC(I,J),J=1,N)
6700 300 CONTINUE
6800
6900 DET=AC(N,N)/DET
7000
7100 WRITE(6,140) DET
7200 140 FORMAT(/10X,'DETERMINANTE=' F10.2/)
7300 STOP
7400 END

```

CALCULO DE UN DETERMINANTE POR EL METODO DEL PIVOTE

0.00	-1.00	5.00	2.00
4.00	0.00	0.00	1.00
2.00	5.00	1.00	-3.00
6.00	1.00	-1.00	4.00

INTERCAMBIO DE FILAS

4.00	0.00	0.00	1.00
0.00	-1.00	5.00	2.00
2.00	5.00	1.00	-3.00
6.00	1.00	-1.00	4.00

K = 1

4.00	0.00	0.00	1.00
0.00	-4.00	20.00	8.00
2.00	20.00	4.00	-14.00
6.00	4.00	-4.00	10.00

K = 2

4.00	0.00	0.00	1.00
0.00	-4.00	20.00	8.00
2.00	20.00	-416.00	-104.00
6.00	4.00	-64.00	-72.00

K = 3

4.00	0.00	0.00	1.00
0.00	-4.00	20.00	8.00
2.00	20.00	-416.00	-104.00
6.00	4.00	-64.00	23196.00

DETERMINANTE= 364.00

LOS PROGRAMAS RENOVADORES EN LA E.G.B.

MODIFICACIONES Y METODOLOGIA

POR:

MA DOLORES DE PRADA VICENTE

La publicación de los programas renovados ha provocado como es lógico discrepantes opiniones en el profesorado de todos los niveles y críticas más o menos fundadas.

Algunos opinan que no ha cambiado nada (los mismos perros con distintos collares), otros opinan que para poder asimilar los cambios, es necesaria una actualización y perfeccionamiento del profesorado antes de que se pongan en vigor los nuevos programas.

Hay quien -voz aislada- opina que los programas carecen de toda estructura y que no hay coordinación entre unos niveles y otros, confundiendo el que así habla ciclo con nivel y objetivos con programación.

Otros, más en número, opinan que se ha hecho un esfuerzo de adaptación a la situación actual y que los nuevos programas, mejoran sensiblemente los anteriores.

La realidad, es que analizándolos seriamente y comparándolos con las Orientaciones de 1.970, hay que afirmar que hay cambios reales, detectables y evidentes, pero no tan alarmantes que no puedan asimilarse con buena voluntad y una dosis de esfuerzo.

NECESIDAD DE ESTA RENOVACION.

La primera pregunta que surge es ¿por qué cambiar? ¿hay motivos suficientes para que sea necesario el cambio? ¿se va a mejorar con ello?.

Después de 10 años de implantación de las Orientaciones para la E.G.B., era necesario hacer una evaluación de su eficacia. Evaluación que si siempre es necesaria lo es más en una época en perpetua transformación como la que vivimos y en la que la educación -preparación para la vida- no puede permanecer estática.

Se han verificado en estos últimos años, cambios concretos, locales y mundiales, que han influido en la transformación, supresión o creación de nuevos contenidos (la Constitución Española, la educación vial, la educación para el consumo, la defensa del medio ambiente, la irrupción de la infor-

matica; son una muestra de que es necesario introducir nuevos contenidos en la E.G.B.).

Todo esto justifica el cambio, pero no podemos olvidar que la misma forma de aprender y los intereses y motivaciones también han cambiado y la educación tiene que dar una respuesta actual y eficaz a estos cambios.

Las razones y modos de hacer el cambio, se han basado en un diagnóstico de la situación. Este diagnóstico se ha obtenido, a partir de los datos suministrados por la labor diaria del profesor, informes, documentos, encuestas y evaluaciones a lo largo de los 7 años de implantación del nuevo bachillerato.

Los datos obtenidos pueden clasificarse en:

Datos esporádicos, dispersos y no sistematizados. La labor diaria del profesor ha venido detectando dificultades en la enseñanza de esta materia y las evaluaciones realizadas a título experimental o con motivo de los exámenes/ de graduado escolar o de exploración inicial a la entrada en los I.B. confirman fallos y lagunas en el aprendizaje.

Datos generalizados y sistematizados

Se han obtenido mediante:

- Los informes de las visitas de los inspectores a los seminarios didácticos de los I.B. o a los centros de E.G.B.
- Los informes de los seminarios permanentes de profesores
- Los documentos sobre coordinación EGB y BUP elaborados por los ICES de Santander, Oviedo, Barcelona, Córdoba, Valladolid y La Laguna.

(1)

- Los informes de las comisiones que a nivel nacional, convocó la Dirección General de Educación Básica para el estudio y renovación de los programas de EGB.
- Los documentos, artículos y notas escritos en las revistas especializadas, tanto de EGB como de Bachillerato.
- Los programas de otros países, especialmente de la C.E.E.

Datos que provienen de fuentes capaces de ser cuantificados

Se han obtenido de:

- La encuesta sobre evaluación de 1º de Bachillerato que en el año 1975 realizó la Inspección de Bachillerato para la evaluación del primer curso. Se envió esta encuesta al total de la población de I.B. y C.H. (2).
- La encuesta sonda que el año 1979-80 elaboró la Inspección de Bachillerato para la evaluación de programas en cuanto a la conexión EGB-BUP. Se envió a un tercio de la población de I.B. y C.H. (3).
- Las pruebas de evaluación hechas a nivel nacional, para 2º y 8º de EGB sobre conocimientos y automatismos en Matemáticas (4).

Los resultados de las evaluaciones de Junio y Septiembre en Matemáticas, recogidos de todos los I.B. durante el año 1979-80 y 1980-81 (5).

Las evaluaciones que a título particular han realizado algunos profesores en su Instituto, con un proyecto de seguimiento del rendimiento durante varios años (6).

El estudio de todas estas fuentes de información han puesto de manifiesto una serie de deficiencias que, centrándonos ya únicamente en el campo de las programaciones, revelan por una parte una inadecuación de algunos contenidos y por otra un aprendizaje mal asimilado.

Con relación a las matemáticas, el estudio de los informes y evaluaciones, han puesto de manifiesto que las principales deficiencias encontradas en cuanto a conocimientos y técnicas instrumentales eran las siguientes:

Incorrecta formalización de los conjuntos, relaciones y estructuras

Fallos en los automatismos del cálculo con números racionales y radicales.

Fallos en los mecanismos de simplificación y de resolución de ecuaciones

Fallos en el manejo operatorio de la geometría del plano.

Ausencia o conocimiento incorrecto de la geometría del triángulo, ángulos, segmentos, paralelismos y perpendicularidad, - con todo lo que supone respecto al proceso de resolución de problemas.

Conocimiento incorrecto del concepto de función, dominio y - rango.

Dificultad para hacer una lectura comprensiva y seguir un razonamiento

Dificultad en la capacidad de representación gráfica y plástica.

- (1) Ver : Monográfico Nº 5 de la Revista de Bachillerato. Servicio de Publicaciones del MEC y también: Coordinación Didáctica y Sistema Educativo ICE de Santander Reentrenamiento del profesorado de EGB en el ejercicio de su profesión para una educación técnica. Documentos del ICE de Oviedo
- (2) Publicada en Documentos de trabajo de la Inspección de Bachillerato, nº 2 octubre 1976. Servicio de Publicaciones del MEC.
- (3) Publicada en Documentos de trabajo de la Inspección de Bachillerato, nº 9 curso 1979-80. Publicaciones del MEC
- (4) Publicados en Estudios y Experiencias Educativas Serie Evaluación nº 1. Publicación del MEC.
- (5) Publicados en Documentos de trabajo de la Inspección de Bachillerato. Informe anual sobre funcionamiento de los Institutos de Bachillerato.
- (6) Ver artículos en Revista de Bachillerato, nº 11 y 21

El análisis e interpretación de los datos suministrados por estas informaciones, nos ha permitido detectar algunas de las causas del fracaso escolar. Dejando a un lado las que superan el marco de los programas, nos centraremos en éstas últimas.

CRITERIOS QUE SE HAN SEGUIDO EN LA RENOVACIÓN

El estudio de las finalidades de la E.G.B. nos lleva a pensar en una matemática básica y para todos, matemática del sentido común y de la vida práctica; pero matemática formativa que no olvida sus enormes posibilidades en la organización de las estructuras mentales, la adquisición y precisión del vocabulario y el desarrollo de las capacidades intelectuales, del pensamiento y de la creatividad. Esta matemática básica para todos nos conduce a la eliminación de aquellos contenidos que superan el nivel de capacidad de los alumnos y la adopción de una metodología que la haga más comprensible.

Pero también, la eficacia de una programación hay que contemplarla en clave de: las exigencias de la sociedad y los imperativos de la ciencia que se imparte.

Tenemos así tres ejes, en torno a los cuales girará la renovación de los programas de Matemáticas: el alumno, la ciencia y la sociedad.

El alumno. Los nuevos programas tienen en cuenta el desarrollo evolutivo del niño, basándose en los experimentos realizados por la escuela de Ginebra y en los descubrimientos más recientes de que sirven como contraste a ellos de Slater, Springer, Bradley, Ogilvie, Hyde y Lovell, que han hecho el estudio experimental del camino que siguen los conceptos matemáticos desde la percepción hasta la comprensión. También los nuevos programas tienen en cuenta, en sus orientaciones metodológicas, los procesos mentales que se realizan en el acto enseñanza-aprendizaje, siguiendo las teorías de Brunner, Gagné y Bugelski.

Con todo esto pretendemos aproximarnos a lo que el niño puede aprender, cómo enseñárselo y para qué desarrollar dicho aprendizaje. Los objetivos propuestos giran en torno a las capacidades básicas que hay que desarrollar, afianzar o iniciar en cada momento educativo. En el Documento de apoyo al profesor que se publicó en la Colección Estudios y experiencias educativas, ^{serie EGB nº 3} Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación se expone a título orientativo, la metodología más adecuada para conseguir dichos objetivos.

La ciencia. La estructuración de los contenidos matemáticos se ha hecho teniendo en cuenta, además de lo expuesto en el punto anterior, la coherencia y sistematización de la ciencia matemática y su secuencialidad. La distribución por bloques indica cuáles son los conceptos matemáticos fundamentales y en torno a los cuales se integran los contenidos de la E.G.B. Se ha intentado también incorporar o potenciar los contenidos básicos en que más incidían los nuevos avances de la ciencia, así como las relaciones interdisciplinarias y descargar algunos contenidos quizá demasiado formalizados para estas edades, a fin de ofrecer un tiempo para el desarrollo de actividades de descubrimiento y creatividad que puedan potenciar vocaciones científicas o investigadoras. Se han tenido en cuenta también las finalidades de la enseñanza de la matemática en estos niveles. La matemática se presenta como un lenguaje, como un método de organización y elaboración de las estructuras mentales y como un conjunto de técnicas instrumentales básicas. En cada uno de los ciclos se explicita la carga que de cada una de estas partes se le asigna a la enseñanza de la matemática. Por ejemplo: en el ciclo inicial lo importante es hacer que en las mentes infantiles se inicie el proceso de pensamiento, se desarrollen las estructuras operatorias

se organice su universo físico, se afiance su lenguaje, se desarrollen las operaciones lógicas que el niño está construyendo en el paso de las intuiciones a las operaciones concretas, se inicie el proceso de la automatización.

La sociedad. La selección de contenidos y la formulación de objetivos, ha tenido en cuenta además, las exigencias y prioridades de la sociedad hoy, en orden a la formación integral del hombre, para que sea capaz de vivir plenamente en un mundo tecnológico y cambiante que exige una autoformación permanente. Se ha evitado en la selección de los contenidos la tentación de incluir aquellos que nos enseñaron y por tradición seguimos enseñando, si no están justificados desde el punto de vista del alumno, la ciencia y la sociedad. Se han incluido en cambio, algunos contenidos olvidados en las programaciones anteriores pero esencialmente formativos.

De acuerdo con todo esto, los grupos que han trabajado en la renovación de los programas (formados por profesores de EGB y de Bachillerato, Inspectores de EGB y Bachillerato, psicólogos y pedagogos) han considerado oportuno introducir algunas modificaciones en las Orientaciones Pedagógicas para la EGB, publicadas en Vida Escolar nº 124-126, 128-130.

MODIFICACIONES QUE SE HAN INTRODUCIDO

Distinguiremos tres aspectos: estructura, contenidos y metodología.

Pero antes de entrar a analizar los programas es necesario hacer unas puntualizaciones:

1. Unos programas no son un curso de perfeccionamiento del profesorado. La formación de los profesores no se le puede pedir ni por tanto achacar a los programas. Los objetivos no pueden incluir dentro de sí el proceso de aprendizaje ni la metodología a seguir.
2. Los programas renovados constan de: Los niveles básicos de referencia, iguales para todos los alumnos y obligatorios a fin de conseguir unos niveles mínimos uniformes. Las introducciones a los bloques temáticos y a los temas que orientan sobre procesos de aprendizaje y líneas didácticas y que no son obligatorias, porque a nadie se le puede imponer una determinada metodología; dichas introducciones ayudan a entender mejor los objetivos. Las actividades para cada objetivo que son a título orientativo y no son obligatorias. Los Documentos de apoyo que indican el alcance y delimitación de cada uno de los objetivos, la metodología adecuada y sugerencias de actividades de proacción y retroacción.
3. Los verbos que definen los objetivos hay que entenderlos en su verdadero significado y no en otro. Por ejemplo: no se debe confundir iniciar con conseguir, ni identificar con definir. Los verbos que definen los objetivos indican por un lado que conducta pretende conseguir el objetivo y en que grado de profundidad y en cierto sentido indican que tipo de actividades hay que hacer y qué metodología emplear. Por ejemplo: si se dice: construir.....

quiere decir que el nivel de profundización es de tipo intuitivo y que la metodología esta basada en la actividad del alumno y en la realización de experiencias concretas.

MODIFICACIONES EN LA ESTRUCTURA

1. Delimitación de los contenidos. La diferencia fundamental de estos programas respecto a las Orientaciones Pedagógicas de 1970 es, que se sustituyen los grandes temas de aprendizaje por objetivos concretos que limitan los contenidos y son fáciles de evaluar. Estos objetivos se desglosan en actividades que orientan sobre el alcance y delimitación de cada objetivo y se evalúan al final del ciclo y no de año en año, lo cual favorece el respeto al ritmo personal y a las diferencias individuales.

No se ha pretendido hacer una jerarquización rígida de los objetivos que daría lugar a un acorsetamiento de la tarea educativa; si hay una jerarquización de tipo "psicológico", pues los objetivos están pensados en función del niño y no en función de las taxonomías tan en boga. Esta jerarquización "psicológica" quiere decir que el logro de los objetivos tiene que tener en cuenta el proceso de formación de los conceptos en el niño y el desarrollo evolutivo de las capacidades, por ello se empieza a veces por objetivos de tipo intuitivo y muy concretos que pueden asemejarse a actividades, para luego ir complicándolos a medida que el mismo proceso de formación de los conceptos se va haciendo complejo en la mente de los niños.

2. Programación de "mínimos". La palabra "mínimos" quiere decir que hay que tomarla en otro sentido al usual, estos objetivos son de un nivel básico, de manera que todos los alumnos deben adquirirlos para realizar el paso de un ciclo a otro, lo cual permite establecer puntos de referencia para la promoción de alumnos. Están concebidos de manera que no se agote con ellos el tiempo escolar, lo cual permitirá al profesor espacios y tiempos para actividades nuevas más abiertas y flexibles que desarrollen la creatividad y las capacidades de los mejor dotados y simultáneamente actividades de refuerzo para los que no hayan llegado al nivel mínimo. También permitirá tiempos para actividades específicas del entorno y de fomento de las relaciones interdisciplinarias.

3. Interconexión entre los temas de los distintos bloques y entre los bloques

Los objetivos se agrupan en temas de trabajo y los temas en bloques o núcleos de integración. Bloques que se mantienen a lo largo de los tres ciclos. De esta manera se le proporciona al profesor una visión vertical y cíclica de los contenidos, integrando en los bloques nuevos contenidos o profundizando en ellos a medida que se avanza en curso, edad y maduración de los alumnos, lo cual no quiere decir que los bloques estén incomunicados entre sí ya que la misma

programación hace necesaria su interrelación constante.

Los bloques son los siguientes:

CICLO INICIAL	CICLO MEDIO	CICLO SUPERIOR
Conjuntos y Relaciones	Conjuntos y Relaciones	Conjuntos y Relaciones
Numeración. Operaciones con números	Conjuntos numéricos	Conjuntos Numéricos Divisibilidad
Topología y Geometría	Topología y Geometría	Geometría Plana Geometría del espacio
Medida	Medida	Proporcionalidad de Magnitudes Estadística

El primer bloque, que en el ciclo inicial y medio se reduce a experiencias con conjuntos se desglosa en el ciclo superior en el estudio de las funciones y los polinomios y enlaza con el bloque segundo, tercero y cuarto.

El segundo bloque, que en el ciclo inicial y medio se dedica fundamentalmente al estudio de los números naturales y sus operaciones elementales (adición, sustracción, multiplicación y división) se amplía en el ciclo superior a los números enteros, los racionales y los decimales no racionales, se interrelaciona constantemente con el bloque primero.

El tercer bloque se refiere a los aspectos topológicos y geométricos en el plano y en el espacio (recta, semirrecta, segmento, ángulos, polígonos, paralelismo, perpendicularidad, etc) va profundizando en cada uno de los ciclos hasta llegar a las relaciones de perpendicularidad y paralelismo en el espacio y al estudio de áreas y volúmenes de poliedros y cuerpos redondos. Se relaciona con los bloques primero y cuarto.

El bloque cuarto, en el ciclo inicial se reduce a experiencias de medir que se prolongan en el ciclo medio hasta llegar a la automatización del S.M.D. y las medidas de tiempo y precio. En el ciclo superior se estudia la proporcionalidad de magnitudes "aritméticas" y "geométricas" y enlaza con el bloque anterior en el estudio de los volúmenes.

4. Integración entre las experiencias con conjuntos, el cálculo y otras partes de la matemática.

Esta integración se manifiesta a lo largo de todos los objetivos, en el tratamiento de las operaciones en que se parte de experiencias conjuntistas de unión, intersección y partición y se incide sobre su comprensión y propiedades antes de llegar a la automatización; en el tratamiento de la geometría estudiando los conjuntos con elementos geométricos; en la integración en torno al concepto de proporcionalidad de toda la aritmética comercial y la semejanza.

5. Primacia de la aproximación sobre la exactitud

Se pretende desarrollar una matemática (en el ciclo inicial y medio) basada en las experiencias y no en las definiciones axiomas o teoremas; por eso es mas importante la abstracción de lo esencial a partir de la experiencia que la exactitud en la definición o el axioma. Se insiste más en la aproximación en el orden de la magnitud que en el número que da su medida, exacta; en la evaluación de la aproximación decimal (el número de decimales que hay que obtener en una operación dada) que en la exactitud del calculo, aunque sin desprestigiar éste.

IFICACIONES EN LOS CONTENIDOS

1. Conjuntos y relaciones

En el Ciclo Inicial y Medio se eliminan todos los aspectos formalizados, la enumeración y demostración de propiedades en las relaciones de orden y equivalencia, las clasificaciones de las aplicaciones, las definiciones, el exceso de vocabulario novedoso y terminología específica.

Las experiencias con conjuntos (que no teoría de conjuntos como falsamente se ha dicho) pretenden ser un vehiculo y un medio para el tratamiento de las nociones matemáticas, dichas experiencias y el lenguaje que llevan anexo son la base de los contenidos a impartir en todos los bloques y no deben estudiarse como algo independiente.

En el ciclo superior, se eliminan las construcciones de conjuntos cocientes, las estructuras de grupo, anillo y cuerpo. Se estudian las funciones que se concretan en las lineales y cuadráticas y de aquí se deriva el estudio de las ecuaciones. Se introducen los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y coeficientes en Q .

Se introduce también el estudio de los polinomios, sin formalizar, sino sólo bajo el punto de vista operatorio y a fin de que obtengan los mecanismos del cálculo, simplificación y transformación de unas expresiones en otras, en casos sencillos (sacar factor común, completar cuadrados, etc). Las operaciones con polinomios llegan hasta la división por el binomio ($x-a$), pero esto último así como todo el tema de polinomios está en revisión en esta fase experimental.

2. Conjuntos numéricos

En el ciclo Inicial y Medio se eliminan las construcciones mas o menos formales del número natural y se insiste en la comprensión del Sistema de numeración decimal y en la adquisición de los automatismos de las operaciones con números naturales, dichos automatismos se conseguirán en el ciclo Medio y no en el ciclo Inicial. Se inician las fracciones y los decimales, pero la automatización de las operaciones con fracciones y decimales se pospone al ciclo Superior donde se estudiará el número racional.

En el ciclo Superior se elimina la construcción de los conjuntos numéricos como

extensiones algebraicas, las estructuras y los isomorfismos entre N y Z^+ y la construcción rigurosa del conjunto Q . Se intensifica en los mecanismos de calculo que supone previamente la adquisición de los procesos que llevan a tales mecanismos y la profundización en el planteo y resolución de problemas.

La eliminación de estos contenidos que ocupaban gran parte de las programaciones anteriores y muchas horas de trabajo, se ha hecho teniendo en cuenta la experiencia de los profesores y sus iniciativas, especialmente a través de las encuestas y de otros documentos que citamos al principio.

Si bien bajo el punto de vista matemático estos temas cumplen un objetivo importante como es el desarrollo del poder de abstracción, es obvio que es más importante que en estos niveles, el alumno adquiera unos conocimientos básicos y unas técnicas instrumentales. Bien es verdad que la técnica implica un automatismo lógico y esto supone conocer y aplicar bien las propiedades, lo cual se propicia en este nivel pero no necesariamente llegar a abstraer la noción de estructura, para lo cual el alumno no tiene que haber manejado muchos casos particulares, de no ser así se pone al niño en contacto con un lenguaje vacío y formalizado que no comprende a qué puede referirse.

La práctica con alumnos nos ha llevado a pensar que las construcciones formalizadas de los conjuntos numéricos no han llevado al alumno a familiarizarse con los números, sino al contrario, ya que los ven como algo alejado de la realidad y no capta el sentido y el rigor matemático de dichas construcciones. Por ello consideremos que su lugar adecuado es en niveles superiores a la EGB.

El tema de Divisibilidad se pasa del ciclo Medio al ciclo Superior, ampliando el concepto de múltiplo y divisor (que aparecía en 5º de EGB) al estudio del m.c.d y del m.c.m. necesario para poder operar con fracciones.

3. Topología y Geometría

Se introducen en el ciclo Inicial aspectos topológicos que no se habían tenido en cuenta en las programaciones anteriores. Las primeras experiencias geométricas que tienen el niño son topológicas, y estos aspectos topológicos los descubre el niño antes que los proyectivos y que los métricos.

Se elimina en el ciclo Medio el estudio de los movimientos en el plano y se intensifica en la geometría del plegado.

Se estudian algunas características de tipo topológico de las figuras planas y cuerpos en el espacio.

Se explicita mucho mas de lo que estaba la geometría plana, ya que se había llegado al desconocimiento de conceptos tales como alturas, bisectriz, etc.

La geometría tiene en los ciclos Inicial y Medio un carácter intuitivo, descriptivo y constructivo lo que se puede notar por los verbos que se utilizan en la redacción de los objetivos: reconocer, identificar, dibujar, describir, etc y no: definir, comprobar o demostrar.

La utilización del plegado, las construcciones de modelos y el uso de

instrumentos para la construcción de figuras geométricas son actividades que a la vez que cultivan la intuición espacial, permiten al alumno ejercitarse en el dibujo y en los trabajos manuales.

Se elimina en el ciclo superior el estudio de los semigrupos de segmentos y ángulos generales y se sustituye por un estudio intuitivo de los ángulos, clasificación medida y relaciones entre ángulos.

Se explicita la introducción de algunos conceptos geométricos fundamentales como bisectrices, mediatrices, alturas y medianas de las que se pide una definición, además de reconocimiento y construcción.

Se explicita el estudio del círculo y de la circunferencia, el estudio de arcos y cuerdas, ángulos inscritos, circunscritos, etc y las figuras circulares.

Se reincorpora al programa la geometría del triángulo que había desaparecido y se introduce en este tema las primeras demostraciones que se piden en EGB.

La riqueza de situaciones de esta geometría permite al alumno ejercitarse en el desarrollo de la intuición creadora y en la formulación de conjeturas que favorezcan su creatividad, así como en la adquisición de hábitos correctos de pensar, en la iniciación en el razonamiento lógico y en la comprensión de lo que es una demostración, en el momento en que debe distinguirse conscientemente entre la verdad intuitiva y la obtenida por razonamiento.

4. Magnitudes y Medidas

En el Ciclo Inicial este bloque se reduce a experiencias de medir.

Se elimina en el ciclo Medio el estudio de las magnitudes y se intensifica en la comprensión y automatización del S.M.D. llegando a iniciar las unidades de superficie. El objetivo más importante del estudio de este bloque es llegar a la idea de aproximación, de manera que los alumnos puedan estimar medidas aproximadas antes de medirlas con los instrumentos adecuados.

En el ciclo superior se introduce la proporcionalidad de segmentos que no se contemplaba en los programas anteriores y su aplicación a la semejanza de triángulos. Se unifican en torno al concepto de caracterización de proporcionalidad todos los problemas clásicos de aritmética comercial y los conceptos geométricos de igualdad y semejanza. Se justifica su introducción por las múltiples aplicaciones que tiene en la solución de los problemas de la vida real y por sus relaciones interdisciplinarias con otras materias del currículum escolar.

El estudio de la Estadística, se ciñe en este ciclo a la clasificación y agrupación de datos estadísticos para confeccionar tablas al cálculo de las medidas centrales y algunas de dispersión a la interpretación de gráficos, dada la utilidad que tiene la estadística descriptiva en el estudio de los fenómenos y su cuantificación y su amplio campo de acción y de relaciones interdisciplinarias.

MODIFICACIONES EN LA METODOLOGIA

Los principios metodológicos acordes con la filosofía que subyace en estos programas son los de: actividad del alumno, respecto al ritmo personal y adaptación.

Para cumplir estos principios todos los conceptos que se introduzcan deben ir precedidos de experiencias que permitan familiarizar al alumno con las fases de abstracción generalización y que sirvan de motivación. Estas experiencias deben producir actividad en el alumno, actividad sensorial e intelectual que se desarrollará antes, en y después del aprendizaje del concepto o automatismo.

A fin de respetar los diferentes ritmos de aprendizaje (objetivo fundamental en la estructuración por ciclos), los maestros deben flexibilizar los grupos de alumnos en la clase de matemáticas, con el fin de enseñar en forma individual a los alumnos que estén preparados para un nuevo proceso sin tener que esperar al resto de la clase. En este sentido hay que tener en cuenta que no todos los niños están preparados al mismo tiempo para emprender un proceso de aprendizaje. Un alumno puede ser uno de los primeros en comprender la resta y quizá puede ser de los últimos al estudiar los polígonos. Por ello, el respeto al ritmo personal incluye una atención individualizada y una presentación de las experiencias de forma distinta para unos que para otros. Como esto es bastante penoso cuando se tienen cuarenta alumnos en clase, es imprescindible buscar los niveles comunes de aprendizaje para reducir al mínimo los grupos y para que estos sean intercambiables.

Por ejemplo: Una vez introducidos los conceptos básicos, se pueden mantener reunidos a los de nivel medio y a los lentos para conseguir los automatismos y a los más avanzados se les puede preparar uno o varios programas especiales con actividades dirigidas hacia un trabajo más independiente.

La adaptación al alumno, supone que el profesor sabe lo que el alumno puede aprender y cómo enseñárselo. En este sentido los programas están elaborados siguiendo.

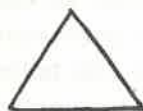
las orientaciones de los maestros de la psicología evolutiva y las experiencias y sugerencias de los profesores que trabajan con niños de este nivel, que permiten una aproximación al QUE puede aprender el alumno.

La adaptación supone también saber el COMO enseñárselo. Para esto y de acuerdo con la filosofía que subyace en los programas, sugiero dos líneas directrices: la presentación de las experiencias y la utilización del método de descubrimiento sobre dichas experiencias que llevará al alumno a la formación del concepto.

Según investigaciones recientes no se puede afirmar nada con certeza respecto a la formación del concepto en el niño, parece sin embargo, que se elabora a partir de la percepción mediante la abstracción y la generalización. Abstraer significa "sacar de", es decir que se han presentado al alumno distintas experiencias para que a partir de ellas "descubra" la ley interior que les es propia y así llegar a la generalización.

¿Pueden todos los niños llegar a esta generalización? Todo dependerá del número de experiencias, de la adecuación de ellas y de la orientación del profesor.

La presentación de experiencias
Bienes sugiere que las experiencias deben someterse a los principios de variabilidad perceptiva y de variabilidad matemática. Según el principio de variabilidad perceptiva, la condición para extraer una estructura matemática es que ésta se encuentre en una cantidad de situaciones diferentes para que el niño perciba sus cualidades puramente estructurales. La negación de este principio se realiza cuando el maestro presenta los conceptos de manera que produce percepciones parciales en los alumnos. Por ejemplo: Cuando se introduce la altura de un triángulo, hay que producir percepciones de triángulos en todas las posiciones posibles y trazar alturas desde todos los vértices, porque sino ocurre que el alumno sabe trazar alturas cuando el triángulo está en esta posición



y no cuando está en esta otra



lo cual manifiesta que realmente el alumno no ha llegado a captar la idea de altura de un triángulo.

Según el principio de variabilidad matemática, si un concepto implica cierto número de variables, es preciso hacer variar todas para que se logre la completa generalización.

La aplicación del principio de variabilidad perceptiva asegura una abstracción eficiente, la aplicación del principio de variabilidad matemática consigue la generalización.

La diversidad de experiencias que garantiza la consecución de los dos principios se debe hacer teniendo en cuenta las motivaciones, intereses y desarrollo evolutivo del alumno, por ello en este ciclo esas experiencias deben ser fundamentalmente: recursos lúdicos, manipulación y construcción de material, presentación de sencillos problemas, de gráficos y experiencias vividas en el marco de la escuela, familia o entorno sobre las que el maestro pueda mantener un diálogo con el alumno.

El método de descubrimiento

El primer contacto del alumno con la matemática, ya en preescolar, se realiza a través de la observación de los objetos que le rodean, del conocimiento de las cosas, de sus formas, de sus cualidades, de sus invariantes, hasta llegar a descubrir lo esencial; porque desde el comienzo del aprendizaje la experiencia activa de los objetos pone en juego el ejercicio de las funciones mentales que harán surgir las propiedades de las cosas, sus relaciones, las clasificaciones y las estructuras. Y esto no se logrará sin la doble actividad concreta y lógica simultáneamente. Es en este tipo de acciones donde se descubre toda la fecundidad del papel de la matemática entendida como algo que trasciende al cálculo, aunque lo utilice como técnica instrumental.

El camino del descubrimiento va de los objetos a las relaciones ^{hasta el} descubrimiento de la ley interior. Parte siempre de una experiencia concreta. El contacto del niño con la experiencia implica una acción, y a partir de ella una observación (iniciación al análisis) una expresión verbal de la acción realizada y de las observaciones obtenidas traducción en lenguaje plástico, gráfico o simbólico de las relaciones descubiertas.

Un ejemplo aclarará las ideas que hemos desarrollado sobre las experiencias y método de descubrimiento.

Un segmento de extremos A y B es el conjunto de puntos de la recta AB comprendidos entre A y B y es también la intersección de las semirrectas AB y BA.

Para presentar a un alumno de 4º de EGB la idea de segmento se partirá de experiencias que a través de la manipulación y de la reflexión le permitan descubrir que:

- Un segmento es un conjunto de puntos
- Que está acotado y tiene dos extremos
- que está contenido en una recta

Este conjunto de puntos se puede obtener como intersección de dos semirrectas contenidas en la misma recta y no disjuntas y tales que ninguna contenga a la otra.

Lograda la generalización el niño adquirirá una idea intuitiva de segmento que se concretará:

Reconociendo segmentos en todos los casos particulares (de distinta medida, posición, sobre figuras o aislados e incluso reconociendo el segmento nulo - que es la intersección de dos semirrectas opuestas o el conjunto unitario de puntos sobre una recta, en cuyo caso los extremos coinciden)

Reconociendo sus bordes

Sabiendo dibujar segmentos

Distinguiéndolos de la recta o semirrecta

Sabiendo describirlos oralmente.

Un ejemplo de secuencia de actividades para llegar a la idea de segmento podría ser:

Sobre una recta a dibuja dos puntos C y D

Une con lapiz rojo el punto C y el D. Has trazado un segmento.

Se llama segmento CD. ¿Está formado por puntos?

Hay dos puntos que son los extremos de este segmento. Nombralos

Dibuja ahora en azul sobre la recta a la semirrecta CD y en rojo la semirrecta DC. La parte de la recta que aparece de dos colores es la intersección de las semirrectas CD y DC ¿ es un

segmento?. ¿por qué?.

El conjunto de los puntos de la recta c señalado en negro ¿es un segmento?¿por qué?

Señala en una cuartilla (representación de un plano) los puntos M y N. ¿CUántos segmentos puedes trazar que tengan por extremos los puntos M y N?.

Dibuja segmentos en distintas posiciones sobre un plano

Escribe de dos maneras distintas qué es un segmento.

Me Dolores de Prado
Catedrática de Matemáticas e
Inspectora Central de Bachillerato

APLICACIONES PRACTICAS DE LA ENSEÑANZA DE LAS

MATEMATICAS EN EL BACHILLERATO

María Alvaro Calvache

I.B. Santurce (Vizcaya)

La enseñanza de la Matemática en todos los niveles, y muy especialmente en el B.U.P., adolece a nuestro juicio de un gran defecto: no existe conexión entre la materia enseñada y la aplicación real que puede hacerse con estos conocimientos.

No es nuestro objetivo el analizar los motivos de esta situación, aunque creemos que los propios matemáticos hemos ayudado a que se produzca este distanciamiento a lo largo del presente siglo. Pensemos que con anterioridad no se producía tal separación, sino todo lo contrario, las propias aplicaciones reales de la matemática eran las que provocaban la enseñanza de esta.

Pretendemos con el presente trabajo romper una lanza en favor de estas aplicaciones reales, mostrando a través de ejemplos como podemos acercar a los alumnos a la realidad. Ciertamente esta conexión no tiene que ser una consecuencia trivial, a modo de ejercicio, de una lección, aunque si debe de estar alejada de todo desarrollo teórico complejo, pues podríamos caer de nuevo en falacia.

Las aplicaciones reales que proponemos son situaciones fácilmente comprensibles por el alumno, estando en este caso relacionadas con la teoría combinatoria y que lleva a resultados que le produce un cierto impacto, por su belleza o su lógica. Además estos resultados se logran sin gran complejidad de cálculo, por lo que su solución puede realizarse en pequeños calculadores programables, que están siendo introducidos (!por fin!) en este nivel de enseñanza.

Estos ejemplos deben ser un grano de arena en la playa de las aplicaciones que pueden ser introducidas de forma inmediata en este nivel docente.

UN PROBLEMA DE SECUENCIACION DE TRABAJOS

Consideremos un taller de reparaciones de automóviles, en el que existen n vehículos que deben ser reparados. Para cada coche c_j , $j = 1, \dots, n$, se conoce su avería y por tanto el tiempo t_j que se necesita para su reparación.

El problema que se le plantea al dueño del taller es el orden en que estos vehículos deben ser reparados, pues como veremos ello influye en el problema de almacenamiento de los coches que esperan reparación en su establecimiento.

En principio los coches pueden ser ordenados de $n!$ formas diferentes, y se suele representar dichas ordenaciones por vectores de la forma (j_1, j_2, \dots, j_n) o bien mediante $[i] = j_i$, que nos indican que reparamos en i -ésimo lugar el coche c_{j_i} . Ejemplo: Si tenemos cinco coches, un posible orden es $(2, 4, 3, 5, 1)$, o bien $[1] = 2$, $[2] = 4$, $[3] = 3$, $[4] = 5$, $[5] = 1$; es decir, primeramente se repara el coche c_2 , a continuación el c_4 , después el c_3 ,...

Para escoger entre las $n!$ posibles ordenaciones, el dueño del taller puede dar diversas reglas de comportamiento:

- Reparar en un orden cualquiera
- Reparar en orden de matrícula

Pero si desea obtener ciertos beneficios de su regla debe actuar de un modo más científico. Un procedimiento es basarse en

F_j cantidad de tiempo que pasa el coche c_j en el taller es decir, el tiempo transcurrido desde que llega al taller hasta que termina su reparación. Teniendo presente que "el tiempo es oro", el

dueño puede desear minimizar el tiempo medio de estancia de los coches en su taller

$$\bar{F} = (1/n) \sum_{j=1}^n F_j$$

puesto que de este modo los clientes estarán contentos con la rapidez del taller.

Como vamos a demostrar posteriormente esto se consigue con la regla:

"Reparar el coche con menor tiempo t_j asociado"

Es decir, $t_{[1]} \leq t_{[2]} \leq \dots \leq t_{[n]}$.

Pero esta regla tiene aún más importancia, como mostraremos más tarde, para el dueño del taller, puesto que este consigue que sea mínimo el número medio de coches en el taller. Hay menos coches en cada momento con esta regla, por lo que si tiene problemas de espacio, ha resuelto su problema de almacenamiento de la mejor manera.

Veamos el porqué de estas afirmaciones:

Sabemos que dados n objetos, podemos formar las $n!$ permutaciones de ellos mediante un sencillo procedimiento constructivo. Para saber cual es la mejor secuencia, o permutación, debemos de calcular en cada una de ellas el valor de F_j para cada coche y a continuación el valor de \bar{F} :

Si tenemos cinco coches con tiempos de reparación dados en la tabla adjunta

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	
10	7	12	5	1	t_j tiempo de reparación

veamos cual es el valor de \bar{F} de la secuencia anterior $(2, 4, 3, 5, 1)$

Comenzamos por el coche c_2 , por lo que

c_2 pasa en el taller 7 unidades de tiempo (7)

$$F_2 = 7$$

Seguimos con el coche c_4 una vez reparado el c_2

c_4	pasa en el taller	7+5	unidades de tiempo	(7+5)	$F_4=12$
c_3	" " " "	12+12	" " "	(7+5+12)	$F_3=24$
c_5	" " " "	24+1	" " "	(7+5+12+1)	$F_5=25$
c_1	" " " "	25+10	" " "	(7+5+12+1+10)	$F_1=35$

Con lo que para esta secuencia

$$\bar{F} = (1/5) (7+12+24+25+35) = 103/5$$

Pero realizar esto para todas las secuencias, aun cuando sea de facil programación en una calculadora (! hagase!), es prohibitivo aun para los grandes cerebros electrónicos para el caso de ser n grande, ($n > 20$).

Sin embargo del ejemplo deducimos que

$$\bar{F} = (1/n) \sum_{j=1}^n F_j = (1/n) \sum_{j=1}^n (n-j+1) t_{[j]}$$

pues notemos que

$$\bar{F} = (1/5) (5.7 + 4.5 + 3.12 + 2.1 + 1.10) = 103/5$$

Basandonos en esta nueva fórmula de \bar{F} , vemos que el primer factor de cada sumando $(n-j+1)$, va decreciendo desde n a 1, por lo que para hacer \bar{F} mínimo debe tomarse la sucesión en que sus $t_{[j]}$ esten en orden creciente; es decir la regla anteriormente enunciada:

$$t_{[1]} \leq t_{[2]} \leq \dots \leq t_{[n]}$$

Por lo que en nuestro ejemplo la secuencia óptima es (5,4,2,1,3).

Otro procedimiento para realizar la demostración de esta regla se basa en el intercambio de pares:

Sea P una cierta permutación y P' otra permutación idéntica a la anterior salvo que hemos cambiado entre si los trabajos iniciales

i y j , por lo que

$$\sum_k F_k(P) = t_i + (t_i + t_j) + \sum_{k=13j}^{n-1} F_k(P)$$

$$\sum_k F_k(P') = t_j + (t_j + t_i) + \sum_{k=13i}^{n-1} F_k(P')$$

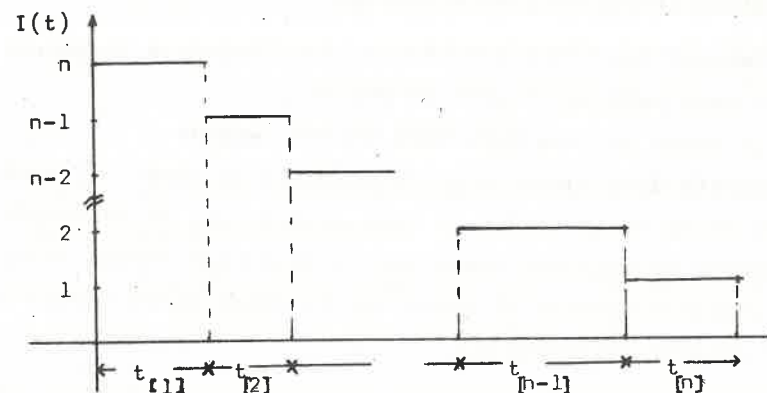
y restando tenemos

$$\sum_k F_k(P) - \sum_k F_k(P') = t_i - t_j$$

que nos dice que si $t_i > t_j$, esta diferencia es positiva, luego la permutación P que lleva a i en primer lugar es peor, y si $t_i < t_j$ será a la inversa. Lo que nos permite demostrar la certeza de nuestra afirmación.

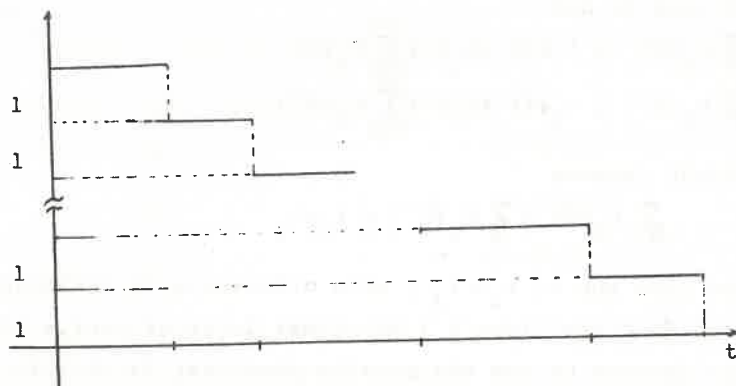
Veamos ahora como al minimizar el tiempo medio de estancia de los coches en el taller, se minimiza el número medio de coches almacenados:

Representemos la curva $I(t)$ que nos indica el número de coches en el taller en el tiempo t , conocida como curva de inventario



Luego el inventario medio, $\int_0^T I(t) dt / T$, es proporcional al area que encierra la gráfica (constante de proporcionalidad = $\sum_{j=1}^n t_j$)

Pero esta area puede interpretarse de otra manera:



Las franjas horizontales nos dan los valores de F_j , por lo que el area es proporcional a \bar{F} (constante de proporcionalidad $(1/n)$). Esto nos pone de manifiesto que al minimizar \bar{F} , como lo hacia la anterior regla ("Procesar el de menor tiempo de reparación"), se minimiza el area en cuestión y por ello el inventario medio.

OTRAS SITUACIONES RELACIONADAS

Notemos que todos los coches han llegado a la vez, si llegan poco a poco podiamos seguir la regla:

.Primero en llegar, primero en ser servido

sin embargo esta regla no es la mejor, si el deseo del dueño del taller es el mismo que en el caso anterior, el de minimizar el almacenamiento medio. Puede verse que la regla que debiera seguir es:

.Reparar siempre el coche que le queda menos tiempo para finalizar su servicio.

Ejemplo: Supongamos la situación anterior en que tenemos cinco coches con tiempos de reparación identicos al cuadro anteriormente considerado. Y que cuando pasan dos unidades de tiempo desde el comienzo del trabajo llega un sexto coche con dos unidades como valor de t_6 , y cuando pasan otras diez unidades de tiempo llega un séptimo coche

con $t_7=5$.

La secuenciación óptima es entonces (5,4,6,4,2,7,1,3), puesto que se arregla c_5 , y se comienza con c_4 , pero cuando le quedan cuatro unidades de tiempo, llega c_6 con $t_6=2$, por lo que se deja el cuarto coche y se coge este sexto, al finalizar de reparar este (han pasado cuatro unidades de tiempo), se sigue con c_4 , por ser el de menor tiempo restante de reparación, cuatro unidades. Se llega a ocho unidades de tiempo al finalizar de reparar el cuarto coche. Se empieza a reparar c_2 y cuando se lleva cuatro unidades empleadas (le restan tres) llega c_7 , pero como $t_7=5 > 4$, se sigue con el coche segundo hasta el final. El resto es la regla usual puesto que ya no llegan mas coches solo quedan c_7, c_1 y c_3 que se ordenan segun su tiempo de reparación.

Otra situación frecuente es aquella en la que cada coche c_j , tiene ademas una fecha de entrega d_j , es decir que el dueño del taller se ha comprometido en entregar dicho coche en dicha fecha.

Se desea ahora ordenar los coches de modo que se minimice el mayor de los retrasos de los diferentes coches. En este caso es facil demostrar que la regla a seguir debe ser:

.Reparar el coche que debe entregarse antes, independientemente de su tiempo de reparación.

Podrian buscarse otros objetivos, como el de minimizar el número de trabajos retrasados o bien el retraso medio.

Estos problemas pueden extenderse a situaciones mas complejas:

- Suponer que hay varios mecánicos iguales que trabajan en paralelo
- Suponer que los coches deben de pasar en cierto orden por varios puntos de revisión.

EXPLORACIÓN DEL ESPACIO

POR:

Isabel Berragán

R E S U M E N

Mediante una exploración activa se pretende que el niño adquiera conceptos y relaciones sobre entes geométricos.

Recubrimos el plano con triángulos equiláteros iguales y proponemos una serie de actividades que llevarán al descubrimiento de diversas figuras y propiedades geométricas.

Generalizamos las observaciones al caso de recubrimiento por triángulos iguales cualesquiera.

Planteamos posibles aplicaciones al cálculo en determinadas situaciones.

D E S A R R O L L O

Siguiendo las actuales tendencias psicopedagógicas se trata de dar un soporte experimental a la investigación matemática del niño, de modo que éste llegue al conocimiento mediante las operaciones con los objetos.

Según esto situamos al niño ante distintas experiencias que pudieran estar orientadas del modo siguiente:

a) Estudio a partir de triángulos equiláteros

- Damos al niño un conjunto de triángulos equiláteros iguales, contruidos en madera, cartón, plástico,....., y les sugerimos que recubran el plano (el suelo, la mesa,.....) con ellos, de forma que queden adosados unos a otros como baldosas.

-Ellos investigan ahora las distintas figuras que se forman con triángulos contiguos: dos, tres, cuatro,(rombos, trapecios, paralelogramos, triángulos, exágonos,...)

- Inmediatamente se observan haces de rectas paralelas en tres direcciones (las de los lados del triángulo, naturalmente), que los niños pueden comprobar con reglas, escuadras,....

-A continuación les planteamos cuestiones; así:

¿pueden observarse muchos rombos iguales? ¿cómo son sus lados? ¿y los ángulos: ¿los opuestos? ¿los contiguos?

En cuanto a los exágonos que se forman alrededor de cualquier vértice ¿qué podemos decir de la suma de los ángulos en el centro? ¿y de tres consecutivos? ¿el centro, dista lo mismo de todos los vértices del exágon? ¿podríamos trazar una circunferencia que pasara por ellos? ¿cómo son los ángulos del exágon y cuánto vale cada uno, (en función del completo)? ¿cuántos rombos forman ese exágon?; si tengo trazadas las diagonales de los rombos, ¿cuántos triángulos rectángulos se forman? Esta experiencia puede hacerse dibujando sobre las piezas colocadas o bien extrayendo la figura en papel y doblando, con lo que se realizan también ejercicios de simetría axial.

- La igualdad de figuras pueden comprobarla efectuando movimientos de giros, traslaciones, simetrías, enriqueciéndose de esta manera su acervo geométrico, de forma intuitiva, claro está.

- La homotecia y la semejanza son igualmente asequibles a su experimentación e inmediatamente comprobar cómo varían las áreas de las figuras semejantes con la razón de semejanza. Así, tomando un vértice como referencia, contamos los triángulos que caben en un triángulo de lado doble, y en uno de lado triple,.... Pasar a figuras semejantes por un movimiento, no presenta mayor dificultad para el niño.

b) Experiencias con triángulos iguales cualesquiera.

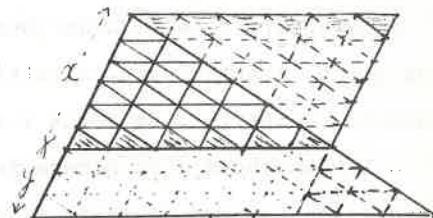
- Recubrimos ahora el plano con triángulos iguales no equiláteros, se contrastan las observaciones realizadas anteriormente y se comprueba que no se conservan algunas de las propiedades de las figuras. Se analizan las nuevas situaciones. Se pierde regularidad y aparece una mayor variedad. Así, los paralelogramos formados por dos triángulos ya no son rombos; pero se forman dos clases diferentes de paralelogramos equivalentes en cuanto al área ¿por qué? Igualmente se extienden las observaciones a los distintos trapecios que se forman. Se generaliza la experiencia de la suma de los ángulos de un triángulo al comprobar los tres contiguos que forman parte del exágon nuevo, que, a su vez, ya no es regular. Se reconocen, sin embargo, los haces de rectas paralelas y la conservación de la igualdad de ángulos.

c) Aplicaciones al cálculo.

- El estudio, siempre intuitivo, de la variación de las áreas de las figuras semejantes, tomando como unidad el triángulo primitivo, se extiende a toda clase de figuras, procediendo a contar triángulos.

- Muy interesante resulta construir un triángulo de lado x , observando cómo crece el número de triángulos pequeños al aumentar las filas de éstos. En una primera aproximación, se calcula el número total de triángulos que contiene para un lado x . Posteriormente, se llega al cálculo de $(x+y)^2$, por vía experimental únicamente. En efecto, se procede así:

fila 1	1 triángulo
fila 2	3 triángulos
fila 3	5 triángulos
fila 4	7 triángulos
.....
fila x	$2x-1$
fila $x+1$	$2x+1$



Se pregunta ¿cuántos hay en total? Es la suma de los términos de una progresión aritmética de razón 2. De manera intuitiva se observa que, colocando dos triángulos iguales de modos que formen un paralelogramo, la suma de la primera fila y la última es constante y se repite tantas veces como términos haya; luego, para x filas será $\frac{(1+2x-1)x}{2} = x^2$. Se añaden y filas más y se observa cómo el nuevo triángulo de lado $x+y$ tiene $(x+y)^2$ triángulos unidad, que son, en total, $x^2 + 2xy + y^2$, como se puede comprobar.

BIBLIOGRAFÍA

- La enseñanza de las matemáticas modernas.- J. Piaget, G. Choquet y otros. Ed. Alianza Universidad
- Didáctica de la matemática moderna.- T.J. Fletcher.- Ed. Teide.
- Los primeros pasos en matemática (3 tomos).- La geometría a través de las transformaciones.- Z.P. Dienes y E.W. Golding.- Ed. Teide.
- Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños.- K. Lovell.- Ed. Morata.

Sevilla, abril, 1982
Isabel Barragán Pérez

Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B.

LA RECURRENCIA TRANSFINITA EN EL PRIMER CICLO UNIVERSITARIO

Mario de J. Pérez-Jiménez

Departamento de Teoría de Funciones. Universidad de Barcelona

Catedrático de Matemáticas del I.N.B. "Torras y Bages". Hospitalet (Barcelona)

1.- Introducción. Planteamiento del problema.

La sucesión de Fibonacci $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ suele decirse que "está definida" por las relaciones

$$x_1 = x_2 = 1 \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad (\forall n \geq 3) \quad (1)$$

Ahora bien ¿queda completa y unívocamente determinada la sucesión por tales relaciones? Podría argumentarse, al respecto, que es calculable de manera efectiva un término arbitrario de la sucesión a través de pasos sucesivos consistentes en la obtención explícita de los términos anteriores a éste. Y ello es cierto, pero de ahí no resulta que pueda obtenerse efectivamente cada término de la sucesión, debido a la imposibilidad práctica de "calcular" procesos que llevan implícito un número no finito de pasos.

Teniendo, pues, presente que una sucesión de números reales es una aplicación de $\mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^*$ (o de \mathbb{N}) en \mathbb{R} ¿definen realmente las relaciones (1) una tal aplicación? En caso afirmativo ¿cual sería su gráfica? Estas preguntas acerca de las relaciones que definen la sucesión de Fibonacci hacen cuando menos titubear acerca de cómo puede establecerse la correspondiente aplicación que caracteriza tal sucesión; no obstante, un análisis profundo del concepto conjuntista de aplicación nos lleva a la conclusión de que la existencia de la sucesión de Fibonacci no resulta, al menos de forma inmediata (y en contra de lo que podría parecer "intuitivamente evidente"), de tales relaciones.

El proceso anteriormente reseñado (definir una sucesión recurrentemente)

suele presentarse con relativa frecuencia en distintos campos de la Matemática y planteados en una forma más general. Concretamente, suelen "construirse aplicaciones" de un conjunto bien ordenado no vacío (A, \leq) en un conjunto B mediante el siguiente esquema (que suele denominarse intuitivamente "proceso recurrente") :

1º.- Se define la imagen α del primer elemento a de (A, \leq) .

2º.- Si $x \in A - \{a\}$ entonces, supuestas conocidas las imágenes de los elementos estrictamente menores que x , se define ("mediante una ley recurrente") la imagen α_x de x , a partir de éstas.

Generalmente, tal proceso concluye con un "... y así sucesivamente" de contenido tan intuitivo como, a la vez, vago e impreciso ya que, salvo en el caso elemental en que A sea finito, los pasos 1º y 2º del proceso no establecen de manera directa la existencia de una aplicación del conjunto A en el conjunto B .

Surgen de inmediato varias preguntas: ¿existirá realmente una aplicación de A en B que satisfaga precisamente las condiciones expresadas intuitivamente en los pasos 1º y 2º del esquema? En caso afirmativo ¿será única tal aplicación? En tal situación, si el proceso recurrente no define directamente una aplicación de A en B ¿qué es lo que proporciona realmente? ¿en qué términos es expresable de forma más rigurosa dicho proceso recurrente?.

Es N. Bourbaki quien en [2] llama la atención sobre estos interrogantes. No obstante, considero desafortunado desde el punto de vista didáctico el enfoque realizado de dichas cuestiones por dos motivos fundamentales: primero porque reencuadra el problema en unos términos que sobrepasa el ámbito puramente conjuntista, y segundo porque ante tal planteamiento utiliza recursos bastante potentes para su resolución, y en consecuencia hace prácticamente imposible el tratamiento de los procesos recurrentes en un primer ciclo universitario, que es donde yo creo que tales procesos han de ser abordados globalmente y, por supuesto, resueltos en su totalidad dentro del marco de cualquier axiomática usual de la teoría de conjuntos (como

la de Zermelo-Fraenkel : Z-F) o de la teoría de clases (como la de Von Neumann-Bernays-Gödel : N-B-G).

Siguiendo las ideas originales de N. Bourbaki, el Dr. Manuel Tort y yo transportamos íntegramente la construcción de aplicaciones por recurrencia transfinita (resultado final de los procesos recurrentes) al ámbito específico de la teoría de conjuntos bien ordenados. No obstante, el teorema central que establecíamos [7] (aún perfilando y simplificando el enunciado inicialmente por Bourbaki) pasaba por un estudio exhaustivo de la clase de los segmentos de un conjunto bien ordenado y, más concretamente, por una especie de teorema de inducción en dicha clase de segmentos. Posteriormente, y basándome en técnicas recientes desarrolladas por Enderton, Jech y A. Levy en el análisis de estructuras bien fundamentadas, he conseguido una demostración del teorema central de definición de una aplicación por recurrencia transfinita que mejora ostensiblemente la anterior en simplicidad y en los recursos utilizados (la definición de aplicaciones por recurrencia transfinita pasa a ser una consecuencia del teorema de inducción transfinita en conjuntos bien ordenados, teorema que es indispensable tratarlo en el primer ciclo de la Licenciatura de Matemáticas).

La estructura mental del futuro matemático ha de ser encauzada en el sentido de disponer de la capacidad de análisis suficiente para distinguir con claridad lo "intuitivamente evidente" de lo "matemáticamente evidente", términos que suelen identificarse con frecuencia y que conllevan, en definitiva, una interpretación defectuosa de determinados conceptos. La importante labor a desarrollar al respecto debe comenzar, sin duda, en los primeros cursos con el fin de enfocar desde sus inicios los esquemas formales del pensamiento en una dirección carente de ambigüedades desde el punto de vista matemático. En este sentido, el análisis serio, riguroso y profundo de los procesos recurrentes aporta mucha luz acerca de la diferencia entre tales "evidencias" y por ello pienso que el problema de la recurrencia ha de exponerse en toda su magnitud ya en el primer ciclo, enfatizando la necesidad de discernimiento por parte del alumno sobre un es-

quema concreto que , siendo intuitiva y matemáticamente evidente en el caso finito , presenta lagunas notorias e importantes en el caso infinito . Llegado a este punto deseo hacer notar el paralelismo que encuentro (aún salvando lógicamente grandes diferencias) entre la necesidad de desarrollar y resolver los procesos recurrentes por una parte , y la aparición del axioma de la elección por otra .

Con anterioridad al año 1904 , prácticamente la totalidad de los matemáticos de la época utilizaban funciones de elección sobre conjuntos arbitrarios con toda tranquilidad . Es de suponer que la mayoría de ellos considerarían "intuitivamente evidente" el proceso de elegir elementos de cada subconjunto no vacío de un conjunto arbitrario . Así está la situación hasta que un buen día del citado año se le ocurre a Zermelo explicitar el axioma de la elección por necesitarlo en la demostración de su teorema de la buena ordenación y por no considerarlo "ni intuitiva ni matemáticamente evidente" . A partir de ahí son conocidas las terribles controversias surgidas a raíz del establecimiento de dicho axioma en la primera axiomática de la teoría de conjuntos (enunciada por el propio Zermelo en 1905) , y que fueron ocasionadas básicamente por las diferentes tomas de postura ante el significado matemático del término "existencia" (mientras para unos - logicistas y formalistas - era lícito la utilización de un axioma expresado en términos de existencia de conjuntos siempre y cuando no diera lugar a contradicción ; para otros - intuicionistas - la existencia de un conjunto únicamente podía asegurarse bien si cada uno de sus elementos podían ser "designados" explícitamente o si , en su defecto , se disponía de una "ley" que permitía "construir" todos sus elementos) . No . Afortunadamente en el caso de la recurrencia transfinita el problema carece de la trascendencia de aquél ; ni es tan profundo , ni hay que acudir a un nuevo axioma , ni ha de utilizarse recursos tan potentes . El paralelismo que considero entre ambas cuestiones es más bien de tipo formal . Se trata de dos procesos - elección y recurrencia - "intuitivamente evidentes" pero que para su resolución uno de ellos necesita de la imposición

del proceso como nuevo axioma de la teoría y , en cambio , el otro puede resolverse completamente sin más (aunque , como se vislumbraba al principio de la comunicación , la dificultad de la recurrencia transfinita es , también , básicamente de tipo existencial) . En suma , el punto fundamental de ruptura radica en la exigencia de dar una demostración consistente acerca de un proceso considerado como "intuitivamente evidente" .

2.- Funciones de recurrencia .

Vayamos por parte : ¿qué significa realmente dar un proceso recurrente? . Comencemos por el segundo paso . Si $x \in A - \{a\}$ entonces conocer las imágenes de los elementos estrictamente menores que x equivale a conocer una cierta aplicación g_x de $S(x)$ en B , siendo $S(x) = \{y \in A : y < x\}$. Por tanto , el término "supuestas conocidas las imágenes de los elementos estrictamente menores que x , se define la imagen α_x de x a partir de éstas" equivale a "asociar a la aplicación $g_x \in \mathcal{F}(S(x); B)$ un único elemento (α_x) de B " (lo cual equivale a asociar el elemento α_x de B a cada aplicación $h \in \mathcal{F}(S(x); B)$).

Resulta entonces que el primer paso puede considerarse de forma similar al segundo , observando que al ser $S(a) = \emptyset$ existirá una única aplicación \emptyset_B (la aplicación vacía) de $S(a)$ en B y , en consecuencia , "definir la imagen α del primer elemento a " equivale a "asociar a la aplicación $\emptyset_B \in \mathcal{F}(S(a); B)$ un único elemento (α) de B " .

Resumiendo : ¿qué significa dar un proceso recurrente? . Pues , simplemente, dar una cierta aplicación del conjunto $\bigcup_{x \in A} \mathcal{F}(S(x); B)$ en B (una tal aplicación recibe el nombre de función de recurrencia del tipo (A, \leq) en B) . Esto ratifica las dudas iniciales acerca de que los pasos 1º y 2º del esquema no parecían establecer , de manera directa , una aplicación del conjunto A en el conjunto B ; ya que en realidad define una aplicación de $\bigcup_{x \in A} \mathcal{F}(S(x); B)$ en B ; es decir una función de recurrencia . Todo proceso recurrente tiene , pues , implícito una función de recurrencia; y desde el punto de vista práctico el problema fundamental que aparece es el de explicitar las funciones de recurrencia inherentes a los procesos recurrentes .

Un ejemplo : las relaciones (1) relativas a la sucesión de Fibonacci expresan intuitivamente un proceso recurrente que , en realidad , nos proporciona una función de recurrencia H del tipo (\mathbb{N}^*, \leq) en \mathbb{R} , que explicitamos a continuación :

$$\begin{cases} g \in \mathcal{F}(S(1); \mathbb{R}) \implies H(g) = 1 . \\ g \in \mathcal{F}(S(2); \mathbb{R}) \implies H(g) = 1 . \\ g \in \mathcal{F}(S(n); \mathbb{R}) \text{ (con } n \geq 3) \implies H(g) = g(n-1) + g(n-2) . \end{cases}$$

Obviamente la tal H es una aplicación de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}(S(n); \mathbb{R})$ en \mathbb{R} .

3.- Teorema de definición de una aplicación por recurrencia transfinita .

La siguiente cuestión que abordamos es ésta : si un proceso recurrente lo que realmente define es una función de recurrencia del tipo (A, \leq) en B ¿existirá asociada a dicha función de recurrencia una única aplicación de A en B verificando las condiciones expresadas intuitivamente en los pasos 1º y 2º del esquema? .

El teorema de recurrencia transfinita (o de definición de una aplicación por recurrencia transfinita) responde afirmativamente a dicha cuestión .

Teorema de recurrencia transfinita

Si (A, \leq) es un conjunto bien ordenado no vacío , B es un conjunto y H es una función de recurrencia del tipo (A, \leq) en B , entonces existe una única aplicación f de A en B verificando

$$(\forall x)(x \in A \implies f(x) = H(f|_{S(x)})) \quad (2)$$

Demostración :

La unicidad resulta de la aplicación del teorema de inducción transfinita en (A, \leq) al conjunto $C = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ siendo f y g dos aplicaciones de A en B verificando (2) .

Para establecer la existencia de la tal aplicación f se considera el conjunto

$$\mathcal{J} = \{x \in A : (\exists g_x)(g_x \in \mathcal{F}(S^*(x); B) \wedge (\forall y)(y \in S^*(x) \implies g_x(y) = H(g_x|_{S(y)})))\}$$

donde $S^*(x) = S(x) \cup \{x\} = \{y \in A : y \leq x\}$; y teniendo presente que :

- a) si $x \in \mathcal{J}$ entonces la correspondiente g_x es única
- b) si $x \in \mathcal{J} \wedge y \in \mathcal{J} \wedge x < y$ entonces $g_y|_{S^*(x)} = g_x$
- c) si $x \in A \wedge S(x) \subset \mathcal{J}$ entonces $x \in \mathcal{J}$

se concluye de c) , por el teorema de inducción transfinita en A , que $A = \mathcal{J}$. En tal situación , la existencia de la tal f resulta de definirla así :

$$\text{"Para cada } x \in A , \text{ por definición , } f(x) = g_x(x) \text{"}$$

Es interesante tener presente que , en la práctica , el teorema de recurrencia transfinita es utilizado con frecuencia en esta otra forma :

Corolario

Sea (A, \leq) un conjunto bien ordenado con más de un elemento y $a = \min A$. Sea B un conjunto no vacío y $\alpha \in B$. Sea H una función de recurrencia del tipo $(A - \{a\}, \leq)$ en B . En tal situación , existe una única aplicación f de A en B verificando :

- i) $f(a) = \alpha$.
- ii) $(\forall x)(x \in A - \{a\} \implies f(x) = H(f|_{S(x)})$.

Obsérvese que dicho corolario es consecuencia inmediata de la aplicación del teorema de recurrencia transfinita a la función de recurrencia G del tipo (A, \leq) en B definida así :

$$G(\emptyset) = \alpha \wedge G|_{\bigcup_{x \in A - \{a\}} S(x)} = H .$$

Veamos a continuación que la única aplicación f de A en B asociada a la función de recurrencia H determinada por el proceso recurrente de partida , satisface las condiciones expresadas intuitivamente en los pasos 1º y 2º del esquema . En efecto :

Primer Paso : Si $a = \min A$ entonces $S(a) = \emptyset$, luego

$$f(a) = H(f|_{S(a)}) = H(f|_{\emptyset}) = H(\emptyset) = \alpha \in B .$$

Por tanto , la aplicación f "define la imagen α de a " y que es precisamente el elemento $f(a)$ de B asociado a la aplicación \emptyset_B por la función de recurrencia H .

Segundo Paso : Si $x \in A - \{a\}$ entonces $f(x) = H(f|_{S(x)}) = \alpha_x \in B$; luego efectivamente "supuestas conocidas las imágenes de los elementos estrictamente menores que x " (dicho con otras palabras "su-

puesta conocida la aplicación $f|_{S(x)}$ de $S(x)$ en B'') entonces queda definida por f la imagen $\alpha_x = f(x)$ de x , a partir de éstas; es decir, α_x es deducida de la aplicación $f|_{S(x)}$ a través de la función de recurrencia H (o sea, mediante lo que intuitivamente se denominaba "una ley de recurrencia").

Estamos ya en condiciones de demostrar la existencia y unicidad de la sucesión de Fibonacci; es decir, de una única sucesión de números reales $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verificando simultáneamente las relaciones (1). En efecto, recordemos que la función de recurrencia H del tipo (\mathbb{N}^*, \leq) en \mathbb{R} inherente al proceso de recurrencia expresado intuitivamente en dichas relaciones estaba definida explícitamente así:

$$H(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in \mathcal{H}(S(1); \mathbb{R}) \\ 1 & \text{si } g \in \mathcal{H}(S(2); \mathbb{R}) \\ g(n-1) + g(n-2) & \text{si } g \in \mathcal{H}(S(n); \mathbb{R}) \text{ y } n \geq 3 \end{cases}$$

Por tanto, del teorema de recurrencia transfinita deducimos la existencia de una única aplicación f de \mathbb{N}^* en \mathbb{R} verificando

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n) = H(f|_{S(n)}))$$

Luego, si notamos $f(n) = x_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) resulta:

$$x_1 = f(1) = H(f|_{S(1)}) = 1$$

$$x_2 = f(2) = H(f|_{S(2)}) = 1$$

$$x_n = f(n) = H(f|_{S(n)}) = f(n-1) + f(n-2) = x_{n-1} + x_{n-2} \quad (\text{si } n \geq 3)$$

4.- Algunas aplicaciones del teorema de recurrencia transfinita.

Decíamos en el párrafo 1 que los procesos recurrentes aparecen con bastante frecuencia en el estudio de muy diversas cuestiones matemáticas. Como muestra de ello indicaremos a continuación algunos ejemplos concretos cuyo estudio considero indispensable en un primer ciclo universitario:

I) Sobre el conjunto \mathbb{N} de los números naturales.

a) Teorema de recurrencia transfinita en \mathbb{N} .

b) Existencia y unicidad de la suma y producto en \mathbb{N} .

c) Todo conjunto de Peano-Hilbert es isomorfo a \mathbb{N} con la ordenación usual.

d) Construcción de sucesiones en un conjunto por recurrencia.

II) Sobre conjuntos finitos e infinitos.

a) Todo conjunto no finito contiene un subconjunto equipotente a \mathbb{N} .

b) Todo conjunto infinito según Dedekind es no finito.

c) Caracterizaciones de conjuntos finitos e infinitos mediante ordenaciones.

III) Sobre cuerpos ordenados.

a) Caracterizaciones de los valores de adherencia de una sucesión en un cuerpo ordenado arquimediano.

b) Todo cuerpo ordenado arquimediano y completo es de Dedekind (es decir, satisface la propiedad del supremo).

c) Teorema de completitud de un cuerpo ordenado arbitrario.

d) Todo cuerpo ordenado arquimediano que verifica el teorema de los intervalos encajados es completo.

IV) Sobre el cuerpo de los números reales.

a) Teorema de existencia de la raíz k -ésima de un número real positivo.

b) Toda sucesión acotada de números reales posee, al menos, un valor de adherencia.

V) Sobre series de números reales.

a) Teorema de reordenación de Riemann para series condicionalmente convergentes.

VI) Sobre espacios métricos.

a) Caracterización de los puntos de acumulación de un conjunto por medio de sucesiones.

b) Caracterización de los valores de adherencia de una sucesión en un espacio métrico.

Pues bien, como aplicación práctica del teorema de recurrencia transfinita vamos a explicitar las correspondientes funciones de recurrencia inherentes a los procesos recurrentes que aparecen en el establecimiento de algunos de los resultados anteriormente reseñados (por cierto, creo que actualmente no existe ningún texto, aparte de [7], en donde tales funciones sean efectivamente explicitadas)

I) Sobre el conjunto \mathbb{N} de los números naturales.

a) Teorema de recurrencia transfinita en \mathbb{N} .

Sea $m \in \mathbb{N}$, B un conjunto no vacío, $\alpha \in B$ y $g \in \mathcal{F}(B; B)$. En tal situación, existe una única aplicación Φ de $[m, \rightarrow[$ verificando:

$$i) \Phi(m) = \alpha.$$

$$ii) (\forall x)(x \in [m, \rightarrow[\Rightarrow \Phi(x^+) = g(\Phi(x))).$$

(donde $x^+ = x \cup \{x\}$ es el conjunto siguiente de x)

La demostración (que simplifica notoriamente la dada por T.S.Blyth en [1]) se reduce a aplicar el corolario del teorema de recurrencia transfinita a la función de recurrencia H del tipo $([m, \rightarrow[- \{m\}, \leq)$ en B definida así: si $k \in \mathcal{F}(S(\bar{x}); B)$ con $x \in]m, \rightarrow[$ entonces $H(k) = g(k(\bar{x}))$ (siendo \bar{x} el elemento anterior de x respecto de la ordenación usual de \mathbb{N}).

b) Corolario 1

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única aplicación φ_n de \mathbb{N} en \mathbb{N} verificando:

$$i) \varphi_n(0) = n.$$

$$ii) (\forall p)(p \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi_n(p^+) = (\varphi_n(p))^+)$$

Basta aplicar el teorema anterior al esquema

$$B = \mathbb{N}; \quad m = 0; \quad \alpha = n; \quad g(x) = x^+ \quad (\forall x \in \mathbb{N}).$$

Corolario 2

Existe una única aplicación φ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en \mathbb{N} verificando

$$i) (\forall p)(p \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(p, 0) = p)$$

$$ii) (\forall p)(\forall q)(p \in \mathbb{N} \wedge q \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(p, q^+) = (\varphi(p, q))^+).$$

En efecto: la existencia de φ resulta de considerar $\varphi(p, q) = \varphi_p(q)$.

La unicidad resulta del teorema de inducción completa.

Por definición, la aplicación φ recibe el nombre de operación suma en \mathbb{N} , y se notará $\varphi(p, q) = p + q \quad (\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Para el establecimiento de la existencia y unicidad del producto en \mathbb{N} se razona de manera similar.

Corolario 3

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única aplicación ψ_n de \mathbb{N} en \mathbb{N} verificando:

$$i) \psi_n(0) = 0.$$

$$ii) (\forall p)(p \in \mathbb{N} \Rightarrow \psi_n(p^+) = n + \psi_n(p)).$$

Basta aplicar el teorema al esquema: $B = \mathbb{N}; \alpha = 0; m = 0; g = \varphi_n$.

Corolario 4

Existe una única aplicación ψ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en \mathbb{N} verificando:

$$i) (\forall p)(p \in \mathbb{N} \Rightarrow \psi(p, 0) = 0).$$

$$ii) (\forall p)(\forall q)(p \in \mathbb{N} \wedge q \in \mathbb{N} \Rightarrow \psi(p, q^+) = p + \psi(p, q)).$$

En efecto: la existencia de ψ resulta de considerar $\psi(p, q) = \psi_p(q)$.

La unicidad resulta del teorema de inducción completa.

Por definición, la aplicación ψ recibe el nombre de operación producto en \mathbb{N} .

En [6] se obtiene una generalización del teorema de recurrencia transfinita a clases propias que permite establecer un teorema análogo al de recurrencia transfinita en \mathbb{N} para la clase ordinal universal, del cual resulta de manera similar a la desarrollada en los corolarios anteriores, la existencia y unicidad de la suma y producto de números ordinales.

II) Sobre conjuntos finitos e infinitos .

- a) Si A es un conjunto no finito entonces existe un subconjunto B de A que es equipotente a \mathbb{N} .

En efecto : dada una función de elección g del conjunto A se considera la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N} - \{0\}, \leq)$ en A definida así : si $k \in \mathcal{F}(S(n); A)$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ entonces

$$H(k) = g(A - K(S(n)))$$

En tal situación , dado $\alpha = g(A) \in A$ deducimos del corolario del teorema de recurrencia transfinita la existencia de una única aplicación f de \mathbb{N} en A verificando

$$i) f(0) = g(A) = \alpha .$$

$$ii) (\forall n)(n \in \mathbb{N} - \{0\} \Rightarrow f(n) = H(f|_{S(n)}) = g(A - f(S(n))) .$$

La demostración concluye estableciendo la inyectividad de f .

- b) Si A es un conjunto infinito según Dedekind entonces A es no finito.

En efecto : si $B \subsetneq A$ es equipotente a A y g es una aplicación biyectiva de A en B entonces se considera la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N} - \{0\}, \leq)$ en A definida así: si $k \in \mathcal{F}(S(n); A)$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ entonces $H(k) = g(k(\bar{n}))$.

Dado $\alpha \in A - B$ deducimos la existencia de una única aplicación f de \mathbb{N} en A verificando :

$$i) f(0) = \alpha .$$

$$ii) (\forall n)(n \in \mathbb{N} - \{0\} \Rightarrow f(n) = H(f|_{S(n)}) = g(f(\bar{n})) .$$

Como antes , la demostración concluye estableciendo la inyectividad de la aplicación f

III) Sobre cuerpos ordenados .

- a) Sea $(K, +, \cdot, \leq)$ un cuerpo ordenado arquimediano ; $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ una sucesión de elementos de K y $x \in K$. En tal situación , x es un valor de adherencia de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ si y sólo si para cada $\epsilon \in K^+ - \{0\}$ el conjunto $A_\epsilon = \{n \in \mathbb{N}^* : |x_n - x| < \epsilon\}$ es infinito .

La implicación directa es elemental .

Si suponemos que para cada $\epsilon \in K^+ - \{0\}$ el conjunto A_ϵ es infinito

entonces "construiremos por recurrencia" una sucesión parcial $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ que es convergente hacia x de acuerdo con el siguiente proceso

recurrente : Elegimos $n_1 \in A_1$

Elegimos $n_2 \in A_{1/2}$ tal que $n_2 > n_1$.

Elegimos $n_3 \in A_{1/3}$ tal que $n_3 > n_2$.

Elegimos $n_{k+1} \in A_{1/(k+1)}$ tal que $n_{k+1} > n_k$.

" ... y así sucesivamente "

Vamos a rigorizar dicho proceso . Para cada $\epsilon \in K^+ - \{0\}$ notemos $B_\epsilon =]x - \epsilon, x + \epsilon[$ y para cada $k \in \mathbb{N} - \{0\}$: $B(\epsilon; k) = \{n \in \mathbb{N}^* : n > k \wedge x_n \in B_\epsilon\}$. Sea $p(\epsilon; k) = \min B(\epsilon; k)$. Consideremos la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N}^* - \{1\}, \leq)$ en \mathbb{N}^* definida así : si $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ y $g \in \mathcal{F}(S(k); \mathbb{N}^*)$ entonces $H(g) = p(1/k, g(\bar{k}))$. En tal situación , dado $n_1 \in B(1, 1) \neq \emptyset$ entonces del corolario del teorema de recurrencia transfinita deducimos la existencia de una única aplicación f de \mathbb{N}^* en \mathbb{N}^* verificando :

$$i) f(1) = n_1 .$$

$$ii) (\forall k)(k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(k+1) = H(f|_{S(k+1)}) = p(1/(k+1), f(\bar{k})) .$$

Si notamos $f(k) = n_k$ ($\forall k \in \mathbb{N}^*$) resulta que $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ que es convergente hacia x , ya que $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(\forall k \in \mathbb{N}^*)$.

- b) Si $(K, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado arquimediano y completo entonces es un cuerpo ordenado de Dedekind .

En efecto : si A es un subconjunto no vacío de K y acotado superiormente notamos $C = \{x \in K : x \text{ es cota superior de } A\}$ y $D = K - C$. Resulta obviamente $C \neq \emptyset \wedge D \neq \emptyset \wedge C \cap D = \emptyset \wedge C \cup D = K \wedge (\forall x)(\forall y)(x \in D \wedge y \in C \Rightarrow \Rightarrow x < y)$. Consideremos la aplicación g de $D \times C$ en $D \times C$ definida así

$$g(x, y) = \begin{cases} (x, \frac{x+y}{2}) & \text{si } \frac{x+y}{2} \in C \\ (\frac{x+y}{2}, y) & \text{si } \frac{x+y}{2} \notin C \end{cases}$$

Aplicando el teorema de recurrencia transfinita en \mathbb{N} al esquema : " $m = 1$; $B = D \times C$; $\alpha = (a_1, b_1) \in D \times C$; $g \in \mathcal{F}(D \times C; D \times C)$; deducimos la existencia de una única aplicación Φ de \mathbb{N}^* en $D \times C$ verificando

$$i) \Phi(1) = (a_1, b_1) .$$

$$ii) (\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \Phi(n+1) = g(\Phi(n))) .$$

Si notamos $\Phi(n) = (a_n, b_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) resulta que $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n < b_n \wedge b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^n})$. La demostración concluye probando que las sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ son de Cauchy y convergentes hacia el mismo elemento de K , que es precisamente el supremo del conjunto A .

IV) Sobre el cuerpo de los números reales .

a) Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ y $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ entonces existe un único número real $b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tal que $b^k = a$.

En efecto : (Obsérvese la similitud con la demostración de III. b)). Consideremos los conjuntos $D = \{x \in \mathbb{R}^+ - \{0\} : x^k \leq a\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R}^+ - \{0\} : x^k > a\}$. Obviamente $D \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset \wedge D \cap C = \emptyset \wedge D \cup C = \mathbb{R}^+ - \{0\} \wedge (\forall x)(\forall y)(x \in D \wedge y \in C \Rightarrow x < y)$. Sea g la aplicación de $D \times C$ en $D \times C$ definida así :

$$g(x,y) = \begin{cases} (x, \frac{x+y}{2}) & \text{si } \frac{x+y}{2} \in C \\ (\frac{x+y}{2}, y) & \text{si } \frac{x+y}{2} \notin C \end{cases}$$

Aplicando el teorema de recurrencia transfinita en \mathbb{N} al esquema: " $m = 1$; $B = D \times C$; $\alpha = (a_1, b_1) \in D \times C$; $g \in \mathcal{F}(D \times C; D \times C)$ "; deducimos la existencia de una única aplicación Φ de \mathbb{N}^* en $D \times C$ verificando :

$$i) \Phi(1) = (a_1, b_1) .$$

$$ii) (\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \Phi(n+1) = g(\Phi(n))) .$$

Si notamos $\Phi(n) = (a_n, b_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) e $I_n = [a_n, b_n]$ resulta que $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión de intervalos cerrados encajados tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, de donde resulta que existe $b \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ verificando $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \{b\}$. Obviamente $b^k = a$. La unicidad del tal b es trivial.

V) Sobre series de números reales .

a) Teorema de reordenación de Riemann .

Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie condicionalmente convergente de números reales, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \leq \mu$ entonces existe una serie $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ reordenada de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = \lambda$ y $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} Y_k = \mu$, siendo $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ la sucesión de sumas parciales de $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$.

En la demostración (que es bastante laboriosa y complicada) aparecen dos procesos recurrentes, en uno de los cuales la correspondiente función de recurrencia inherente al proceso es muy compleja y no considero adecuado explicitarla en la presente comunicación. En [7] se puede encontrar, con todo detalle, la extensa demostración del teorema.

VI) Sobre espacios métricos .

a) Si (E, d) es un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $x \in E$ entonces x es un punto de acumulación de A si y sólo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de elementos de $A - \{x\}$ convergente a x y con todos sus términos distintos entre sí. El recíproco es trivial. Para establecer el directo, si $x \in A'$ y notamos $C_n = B(x; 1/n) \cap (A - \{x\})$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) entonces "construiremos por recurrencia" una tal sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de acuerdo con el siguiente proceso recurrente:

Elegimos $a_1 \in C_1$

Elegimos $a_2 \in C_2$ tal que $a_2 \neq a_1$.

Elegimos $a_3 \in C_3$ tal que $a_3 \neq a_2 \wedge a_3 \neq a_1$.

.....
Elegimos a_n, C_n tal que $a_n \neq a_k$ ($1 \leq k < n$)

"... y así sucesivamente"

Para rigorigar dicho proceso, sea φ una función de elección de A y consideremos la función de recurrencia H del tipo $(\mathbb{N}^* - \{1\}, \leq)$ en $A - \{x\}$ definida así: si $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ y $g \in \mathcal{F}(S(n); A - \{x\})$ entonces $H(g) = \varphi(C_n - g(S(n)))$. En tal situación, dado $a_1 \in C_1$ entonces del corolario del teorema de recurrencia transfinita deducimos la existencia de una única aplicación f de \mathbb{N}^* en $A - \{x\}$ verificando :

$$i) f(1) = a_1 .$$

$$ii) (\forall n)(n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n+1) = H(f, S(n+1)) = \varphi(C_{n+1} - f(S(n+1))) .$$

Si notamos $f(n) = a_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) entonces resulta

$$a_{n+1} = f(n+1) = \varphi(C_{n+1} - \{f(1), \dots, f(n)\}) = \varphi(C_{n+1} - \{a_1, \dots, a_n\})$$

y, por tanto, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ es una sucesión de elementos de $A - \{x\}$ convergente a x con todos sus términos distintos entre sí.

5.- Consideraciones finales .

Los esquemas de razonamiento de una persona en formación tienen una estructura bastante primaria , lo cual implica una elemental capacidad de discernimiento acerca de las eventuales dificultades de una determinada cuestión . Tales esquemas son , por tanto , fácilmente moldeables , influenciados y pueden ser encauzados , dirigidos , enriquecidos desde el exterior ; en consecuencia deben ser , en cierto sentido , educados desde fuera . La labor a desarrollar por el profesor en los primeros cursos universitarios respecto a este punto es fundamental . A este nivel , todas las cuestiones han de presentarse en términos que excluyan cualquier tipo de ambigüedad , poniendo especial énfasis en aquellos puntos en que la intuición pueda engañosamente obviarlos , pues en tal situación se induce a cometer el doble error de identificar lo "intuitivamente evidente" con lo "matemáticamente trivial" por una parte , y por otra a no percibir la naturaleza de una cuestión secundaria - cuya resolución no tiene porqué ser elemental - inmersa en la inicialmente planteada .

Parece incuestionable que todas las proposiciones y teoremas reseñados en el párrafo anterior (representan solamente algunos de los innumerables ejemplos en donde aparecen los procesos recurrentes) deben formar parte de cualquier Programa de Primer Ciclo de la Licenciatura de Matemáticas , con independencia de los criterios considerados para su confección . La posible controversia puede , no obstante , surgir acerca de la conveniencia o no de conservar las demostraciones "tradicionales" en las cuales con el "...y así sucesivamente" del correspondiente proceso recurrente se comete un importante error desde el punto de vista riguroso y formal . Indudablemente , tales cuestiones han de ser planteadas en toda su crudeza y por tanto hay , al menos , que advertir de las graves imprecisiones cometidas en la construcción de ciertas aplicaciones o de ciertas sucesiones a partir de los procesos recurrentes .

Tales advertencias incitan al alumno a refinar , a agudizar sus razonamientos , al observar cómo algunos procesos teóricamente evidentes (es decir ,

sin necesidad aparente de ulterior especificación) presentan de hecho notables defectos de fondo y forma cuando se analizan con más precisión y detenimiento ; y , en consecuencia , les induce a desconfiar sistemáticamente de las evidencias intuitivas (lo cual es muy sano y no implica , ni mucho menos , que haya de desterrarse tales evidencias) .

El siguiente paso que parece , entonces , obligado es la explicitación de los errores formales del proceso ; ello permitirá disponer de ejemplos concretos en los cuales aparece diseccionada la "trivialidad evidente" para así poder ser analizada y estudiada en la medida que corresponda .

Finalmente , de la explicitación de los errores implícitos en los procesos recurrentes a un replanteamiento de la cuestión en términos más precisos , y a la resolución total del problema , media un paso que , desde luego , considero necesario darlo a este nivel de un primer ciclo universitario . En primer lugar porque se dispone de los recursos necesarios para abordar de manera global la recurrencia transfinita y resolverla completamente en el contexto de una teoría casi elemental de conjuntos bien ordenados . En segundo lugar porque se consigue una mayor familiarización con el teorema de inducción transfinita que , en contraste con el de inducción completa , enriquece sus esquemas de razonamiento matemático , en donde tales principios juegan un importante papel . Y en tercer lugar , porque proporciona un ejemplo interesante - a la vez que asequible - de una de las cuestiones matemáticas más complejas : las de tipo existencial .

Por todo ello pienso que es el Primer Ciclo de la Licenciatura de Matemáticas el lugar idóneo para el tratamiento y resolución de todos los problemas relativos a la recurrencia transfinita , lo que sin duda alguna aportará elementos muy positivos a la formación integral del futuro matemático .

BIBLIOGRAFIA

- 1.- BLYTH T.S. "Set theory and abstract algebra" . Longman Math. Texts . New York (1975) .

- 2.- BOURBAKI N. "Elements de Mathematique" - "Theorie des ensembles" .
Hermann . Paris (1970) .
- 3.- ENDERTON H.B. "Elements of set theory" . Academic Press. New York(1977) .
- 4.- JECH T. "Set Theory" . Academic Press . New York (1978) .
- 5.- LEVY A. "Basic set theory" . Springer-Verlag . Londres (1979) .
- 6.- PEREZ-JIMENEZ M.J. "Generalizaciones del teorema de recurrencia transfinita" . Actas VI Jorn.Mat.Hisp-Lusas . Rev.Univ.Santander . Nº 2 . Parte II (1979) 891 - 903 .
- 7.- PEREZ-JIMENEZ M.J. "Teoría de clases y conjuntos" Ed. Eunibar (Barcelona)
(De próxima publicación) .
- 8.- RUBIN H. y RUBIN J. "Equivalentes of the axiome choice" . North-Holland
Amsterdam (1963) .
-

METODOLOGIA DEL GRUP ZERO DE BARCELONA

Tras más de siete años de trabajo, los profesores del Grup Zero de Barcelona nos hemos propuesto una reflexión sobre el mismo que nos parece de interés discutir en el marco de estas jornadas. Más que una ponencia en sentido estricto, esta sesión se plantea como una charla-debate, en la que el interés viene marcado por el intercambio de opiniones sobre dichas reflexiones. Por esta razón, en este resumen incluimos las cuestiones que se abordaron en el debate.

Nuestro trabajo partió de la constatación del fracaso de nuestras clases y de nuestra labor como profesores de matemáticas. En un principio fijamos los puntos básicos siguientes:

- partir de unas matemáticas constructivas (en el sentido de no-deductivas) que provean antecedentes a cualquier proceso de abstracción.
- unas matemáticas ligadas a la realidad: se trata o bien de problemas del entorno o centros de interés del alumno, o al menos, de problemas de interés objetivo, cuyo rico contexto permita poner en marcha la intuición. Al mismo tiempo los conceptos tendrán una motivación extra-matemática.
- el principio genético, según el cual el proceso individual de adquisición de conceptos sigue el proceso histórico de generación de los mismos. Sin pretender aplicarlo taxativamente, es obvio que en muchos casos puede orientar la presentación "natural" de ciertos temas, difiriendo de las tradicionales exposiciones axiomático-deductivas.

- finalmente, basar el trabajo en clase en la actividad del alumno, pues sólo haciendo matemáticas pueden aprenderse.

Una primera constatación optimista es que, con distintas dificultades, todos los temas que hemos abordado podían elaborarse en el marco de los principios enunciados. En este sentido nos parece de interés destacar que, aunque la primera actitud de muchos grupos de trabajo parece orientarse a qué se enseña y a proponer programas alternativos, creemos de mayor interés el cómo presentar los distintos temas y hacer depender la programación entre otras cosas de las respuestas a esta pregunta.

El inicial entusiasmo y adhesión a nuestra propia línea de trabajo nos ha hecho caer en posiciones un tanto ingenuas, como la de creer que la propia estructura de los temas era suficiente para el éxito. En el momento actual estamos más convencidos de la inexistencia de una metodología óptima, máxime teniendo en cuenta la interdependencia de los ámbitos escolar y social.

La exposición del grupo finaliza con la recensión del artículo publicado en Cuadernos de Pedagogía nº 88, abril 82, "Metodología: la resolución de problemas", que recoge varios puntos para iniciar la discusión.

Entre las cuestiones que se debatieron nos parece de interés destacar las siguientes:

- ¿No debería partirse, en el empeño de hacer unas matemáticas ligadas a la realidad del alumno, de un profundo estudio de dicha realidad? ¿Hasta qué punto se ha llevado a cabo este estudio?

- El hecho de basar la metodología en la resolución de problemas, ¿no crea una monotonía o aburrimiento en los alumnos? ¿No deben trabajarse también otros enfoques?

- ¿Hasta qué punto es lícito huir de unas matemáticas axiomáticas, y partir de situaciones que, por su complejidad y por ser de campos desconocidos para el alumno pueden tomar el papel de axiomas extra-matemáticos?

- ¿Aplicar excesivamente el principio genético, no puede suponer llevar al alumno a reproducir errores que se han dado en el pasado?

- ¿No es un poco falso presentar situaciones de otros ámbitos en lugar de plantear un trabajo interdisciplinar más profundo?

- En la práctica las condiciones de trabajo dificultan una línea como la propuesta. ¿Vale la pena intentarlo?

- No es válido para justificar una presentación no-axiomática aducir el hecho de que no todos los alumnos vayan a ser matemáticos. Aunque los hubiera, razón de más en favor de una práctica como la que se propone, pues ya es hora de modificar la tendencia a formar a los futuros matemáticos en una óptica formal y axiomática.

No podemos, ni debemos, en este resumen dar respuesta a cada una de estas cuestiones que fueron planteadas por los asistentes, y a las que se dedicaron distintos tiempos. Las incluimos a título informativo y las asumimos como puntos de reflexión propios.

Agradecemos a todos los asistentes el interés que supieron imprimir a la discusión.

Grup Zero

DETECCIÓN DE ERRORES EN EL CÁLCULO ARITMÉTICO:

UN ENSAYO METODOLÓGICO

José M^a LAMARCA ("GRUP ARESTA")

ABRIL, 1982

No cabe duda de que las dificultades para recordar la pregunta de un problema, para descifrar las relaciones lógico-gramaticales contenidas en el enunciado, para vencer la tendencia a emitir respuestas incontroladas o para utilizar de manera inadecuada en la resolución de un problema unos estereotipos adquiridos anteriormente, (...) están precisamente entre las más importantes que debe afrontar todo pedagogo y cuya eliminación constituye la tarea principal de toda enseñanza".

A.R.LURIA

Introducción.-

Es ya habitual, entre los profesores de matemáticas de bachillerato, el lamentarse de la poca precisión de los alumnos en el cálculo aritmético; no es éste, además, un problema que afecte a los alumnos de los dos primeros cursos exclusivamente sino que se extiende incluso a alumnos de COU. Lo que parece sorprender de una manera especial es el hecho de que alumnos que están adscritos al grupo de los tradicionalmente llamados "buenos en matemáticas" cometen (en ocasiones) unos errores básicos de cálculo que el profesorado no duda en calificar de imperdonables.

Resultado de ello es, por ejemplo, una baja calificación de los alumnos propensos a cometer este tipo de "deslices fatales", independientemente del nivel alcanzado en los conocimientos matemáticos a los que pueden estar sometidos en un momento concreto. Esta preocupación es compartida también, además, (y de una manera especial), por los profesores de Física y Química.

A pesar de ello el profesorado tiende, en general, a tener en cuenta este problema sólo ante casos individuales y de una manera puntual, sin darle un tratamiento en profundidad.

Este trabajo pretende iniciar un estudio, lo más sistemático posible, del problema concreto de la detección de errores básicos de cálculo aritmético; a tal fin, se expondrán las bases de una metodología que se estima satisfactoria, en una primera aproximación, en el tratamiento de dicho problema. Esperamos que, en un futuro próximo, podamos completarla, perfeccionarla y, si es necesario, reelaborarla.

1.- Importancia del problema.-

Para tener una idea de la magnitud del problema, debemos abandonar el nivel intuitivo en el que nos hemos movido hasta ahora e intentar concretar con mayor exactitud cómo se reflejan las dificultades del cálculo aritmético en las pruebas concretas a las que se somete el alumnado.

En este sentido voy a pasar a describir una serie de pruebas y tanteos iniciales que me abrieron camino en la tarea de profundizar con mayor rigor en el problema planteado y que, a su vez, dan una medida de su dificultad.

Sometí a un grupo de alumnos de 1º de BUP a un examen de técnicas de cálculo a las que habíamos dedicado una especial atención, y en él incluí un problema en el que había que corregir, si se daba el caso, el error o errores existentes en una serie de igualdades (tipo este de problema al que me había referido superfluo); se trata del nº6 del Apéndice I. Lógicamente, debía esperarse un resultado positivo en este problema si, al apartarse de técnicas de cálculo, los conocimientos eran satisfactorios. No fue así: ninguno de los que no superaron la prueba de técnicas consiguió el 50% de aciertos en el nº6 y, de entre los 15 que consiguieron una nota aceptable de aquéllas hubo sólo 7 que alcan-

zaron el 50%. Por lo tanto, globalmente esto significaba que sólo un 22% de los alumnos había conseguido detectar el 50% de los errores del problema nº6.

Ello me indujo a plantear seriamente la necesidad de efectuar una prueba de detección de errores exclusivamente, previa preparación intensiva de los alumnos en este aspecto. El primer

problema con el que tenía que enfrentarme era obvio: seleccionar errores representativos y ensayar, por lo menos, un esbozo de clasificación.

Lecturas varias, en especial el artículo que, referente a este tema apareció en el nº1 de la revista "Números" de la SCPM (ver bibliografía), así como conversaciones sostenidas con otros miembros del grupo (en particular A. Sadurní), me ayudaron a confeccionar una prueba específica de detección de errores, que figura en el Apéndice II (*), clasificados según criterios temáticos, poniendo especial atención en no incluir más que una dificultad concreta en cada ejercicio (lo que, si se observa con detalle, no está completamente conseguido), detalle que me fue sugerido por un trabajo muy sistemático y estructurado de Gonis y Strnad (ver bibl.).

Por lo que se refiere a la "clase de adiestramiento" me guié por un interesante trabajo de Mialaret (ver bibl.) y por una serie de reflexiones poco sistemáticas, pero basadas en la observación de los errores cometidos por los alumnos intentando, en todo momento, dar importancia a las "operaciones permisibles" y a las "falsas propiedades" del cálculo aritmético más comunes.

Pasada la prueba y, teniendo en cuenta la poca estructuración del "método de adiestramiento" utilizado, los resultados fueron, hasta cierto punto, aceptables: el 53.83% de los alumnos aprobó el

(*) En esta prueba el alumno debe contestar "Bien", si considera correcto el resultado y "Mal", con la corrección necesaria o con una explicación convincente (incluyendo un contraejemplo, tal vez) en caso contrario; (si no es posible efectuar operación alguna, p.ej. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, el alumno debe copiar el enunciado de nuevo como respuesta).

ejercicio y, lo que es más importante, todos aquellos que habían superado la parte correspondiente a las técnicas de cálculo (en la prueba del Ap.I) estaban incluidos entre aquéllos.

Ello me daba esperanzas para desarrollar una idea que había utilizado en la "clase preparatoria" de una forma muy poco sistematizada y sobre la que volveré más adelante (véase 4.- C/ e), ya que, comparativamente hablando, el éxito de la "metodología" (la palabra es excesivamente ambiciosa y la utilicé con toda reserva y con el exclusivo propósito de no cargar la lectura con excesivas precisiones semánticas), es incuestionable. Considerando el resultado por sí mismo, en cambio, la calificación más positiva es la de pobre: que tras una clase especialmente dedicada a la detección de errores no lleguen al 55% los alumnos que superen una prueba sobre el mismo tema, pasada ¡al día siguiente!, no parece excesivamente alentador.

Sin embargo, no me podía regir exclusivamente por un grupo reducido de alumnos de 1º (nocturno, además) por lo que creí conveniente comprobar hasta qué punto el problema podía ser más general. Con este propósito se pasó la misma prueba (v. Ap. II), sin previo aviso, a dos grupos de 1º diurno, a dos de 3º y a uno de COU; los resultados son suficientemente elocuentes como para añadir comentarios:

	<u>COU</u>	<u>3ºA</u>	<u>3ºB</u>	<u>1ºA</u>	<u>1ºB</u>
Aprobados:	40'7%	50%	26%	22'2%	29%

Paralelamente, se pasó la misma prueba a otro curso de 1º de otro Instituto y al cual, el día anterior, se le había dado una clase de repaso intensivo de detección de errores utilizando métodos tradicionales (insistencia especial en los errores típicos, ejemplos concretos, etc.): el resultado fue de un 51'5% de aprobados.

En definitiva pues, parecía existir una "barrera" en el 55% que ni una preparación específica permitía superar. Todo ello me parece un conjunto de datos suficientemente significativo como para poder afirmar que el problema de la detección de errores en el cálculo aritmético es realmente grave. Puede aducirse, lo admito, que la prueba debería pasarse a un número suficiente de grupos de todos los niveles para poder ser plenamente representativos sus resultados; no obstante, no cabe duda de que las cifras apuntadas miden el alcance del problema con una mayor aproximación (por lo menos) que las vaguedades intuitivas a las que me refería en el inicio de este apartado.

Más aún, con objeto de averiguar la persistencia de los conocimientos adquiridos pasé, a los mismos alumnos que habían superado la prueba del Apéndice II, un ejercicio muy semejante en el que se habían incluido dos problemas de detección de errores para ampliar el campo de los mismos de los números reales a los polinomios (pero que no se tuvieron en cuenta en la calificación) y que puede verse en el Apéndice III. En ella, el nivel general bajó y hubo una disminución del 8'38% de los aprobados en la prueba del Ap. II.

En definitiva, me convencí de que el problema de la detección de errores había que tratarlo más a fondo, ya que no bastaban las clases (más o menos estructuradas o tradicionales) de preparación intensiva.

2.- Clasificación de errores.

En el análisis de las respuestas dadas por los grupos de 1º de 3º y a los que se les pasó la prueba del Apéndice II, se observó

que errores cuya detección era aparentemente inmediata eran difícilmente reconocidos por la gran mayoría de alumnos (p.ej., el 2/D/ del Ap. II); ello me llevó a desechar la primera clasificación de base temática y a fundamentar la clasificación en una gradación de dificultades que el alumno encontraba en la práctica ante la detección de un error concreto, sin tener en cuenta los escollos teóricos de base lógica o intuitiva.

A tal fin, y estudiando 104 pruebas (del Ap. II) distribuí los errores en tres grupos:

- A) Errores cuya puntuación estaba comprendida entre un 6 y un 10: les adscribí el "peso" 1 de dificultad.
- B) Errores cuya puntuación estaba comprendida entre un 3 y un 6: les adscribí el "peso" 1'5 de dificultad.
- C) Errores cuya puntuación estaba comprendida entre un 0 y un 3: les adscribí el "peso" 2 de dificultad.

Así, los errores del Apéndice II quedaban clasificados según se observa en el siguiente cuadro:

	Nº de los ejercicios (del Ap. II)
Peso 1	1/; 2/C/; 3/D/ (6 ejercicios)
Peso 1'5	2/A/ y B/; 3/A/; 4/ (6 ejercicios)
Peso 2	2/D/; 3/B/, C/, E/, F/, G/, H/, I/ (8 ejercicios)

Según ello, los ejercicios 3/J/ y K/ del Apéndice III quedaban, por analogía, incluidos entre los de peso 2 (la corrección posterior de los mismos justificó esta decisión); además, cualquier "nuevo error" debería incluirse en uno u otro grupo según los resultados que se observasen en una prueba realizada por un grupo de alumnos suficientemente representativo.

Es evidente, sin embargo, que ante un error no incluido en las pruebas de los Apéndices II y III la única forma de clasificarlo pasa, necesariamente, por una aproximación intuitiva de su dificultad y, claro está, dicha intuición puede no ser fiable (véase el punto 3.-3/).

3.- Descripción del experimento-base.-

Después de un período de reflexión basada en los resultados obtenidos y de un análisis crítico de los esbozos de metodología utilizados en las clases de preparación intensiva en la detección de errores, llegué a estructurar con mayor rigor las bases de una metodología que permitiera tratar el problema de la detección de errores con eficacia. A fin de comprobar cómo mi "metodología" incidía en el aprendizaje de la detección de errores llevé a cabo el experimento que seguidamente voy a describir, y, que me fue sugerido por otro miembro del grupo de trabajo, José Cascón.

Dicho experimento constó de los siguientes pasos:

- 1/ Se elaboró un pretest o test de nivel de detección de errores (que figura en el Apéndice IV) con una doble finalidad:
 - a) averiguar el nivel del curso sujeto al experimento
 - b) distribuir el curso en dos grupos equipotentes (respecto al problema de la detección de errores).
- 2/ Una vez diferenciados y determinados ambos grupos se sometió a uno de ellos (que llamaremos grupo experimental o, simplemente, grupo E) a una preparación específica siguiendo la metodología objeto de estudio, mientras que el otro grupo (que denominaremos grupo control o grupo C) se mantenía al margen de dicha preparación, y al que no se le daba ningún tipo de tratamiento en tal sentido.

3/ Finalmente, se sometió a todo el curso de nuevo a otro test que llamaremos test de comprobación (y que se reproduce en el Apéndice V), que permitiera comparar los resultados de ambos grupos.

La fase 2/ tuvo una duración de dos horas (repartidas en dos sesiones de una hora cada una), mientras que el test de comprobación se pasó tres días más tarde (se había advertido a todo el curso que "al cabo de cierto tiempo indeterminado" se pasaría un test para comprobar la eficacia del "adiestramiento", pero se insistió fuertemente en el factor sorpresa que acompañaría al mismo).

Se observará la inclusión de algunos nuevos errores en el pretest, cuya dificultad se decidió por medio de la "intuición lógica"; como ya indicaba en el último párrafo del punto 2.-, hubo un error de apreciación, ya que adscribí el peso 1 a los ejercicios 10/ y 11/ y la corrección posterior me obligó a rectificar y a incluirlos entre los de peso 1'5 (en el test del Apéndice V, sin embargo, se mantuvo el peso 1 para permitir una correcta comparación). Concretamente, en el pretest los pesos se distribuyeron como sigue: nº 1/- nº 13/, peso 1; nº 14/- nº 23/, peso 1'5; nº 24/- nº 34/, peso 2 (en total pues, 50 puntos).

El test de comprobación se confeccionó con base al pretest, aunque se suprimieron algunos errores por considerarlos irrelevantes (p.ej., el nº 1 del pretest fue detectado por todos los alumnos). La distribución es la siguiente: nº 1/- nº 7/, peso 1; nº 8/- nº 11/, peso 1'5; nº 12/- nº 20/, peso 2 (en total, pues, 31 puntos).

El tiempo concedido fue, respectivamente, de 50-55 minutos y de 35-40 minutos. Los resultados pueden observarse en el Apéndice VI.

Antes de emitir juicios de valor sobre estos resultados creo preferible exponer las bases metodológicas en las que se fundamentó el experimento descrito y, en el último apartado, comentaré conjuntamente ambos puntos. Por el momento, sin embargo, me parece interesante observar que el nivel inicial del curso (51'7% de aprobados en el pretest) es relativamente elevado si se lo compara con el de los cursos a los que se les pasó la prueba del Apéndice II (véase el punto 1.-), y aún más si tuviéramos en cuenta los pesos establecidos en el pretest para aquélla, pero que no alcanza la "frontera" del 55%.

4.- Exposición de las bases metodológicas.-

He dividido en cinco fases la "metodología" utilizada en el experimento-base:

Fase 0 (o fase preliminar): En ella los alumnos recibieron, junto con la lista de los que habían superado el pretest, las directrices del experimento de tipo técnico; se hizo la advertencia indicada en la página anterior (nº 3/), relativa a la existencia de una futura prueba de "comprobación", se distribuyeron los grupos E y C (con la consiguiente explicación de su carácter equipotente, para disipar malos entendidos entre el alumnado) y el último grupo se retiró del aula.

Una vez concentrados los alumnos del grupo E exclusivamente en la clase (su expectación era notable, y este es un punto importante que justifica el detenimiento con que expongo la Fase 0), les devolví los ejercicios del pretest con la nota correspondiente y les expliqué en qué consistía el experimento, así como la duración del mismo.

El tiempo empleado en esta fase no superó los 15 minutos.

Fase 1 : Esta es la fase principal; en ella hago notar como los propios alumnos, ante algún ejercicio concreto mal resuelto, se autocritican severamente mediante comentarios del estilo "¡pero cómo no he podido darme cuenta de este error!" (o frases parecidas); con ello intento que tomen conciencia de que existen factores ajenos a sus propios conocimientos que influyen decisivamente en los problemas de detección de errores y que pretendo, precisamente, localizarlos y combatirlos. Seguidamente considero los siguientes puntos:

- A/ La responsabilidad de resolver problemas de detección de errores concierne (por lo menos) tanto a los alumnos como al profesor; no puedo utilizar el conocido comentario de que "esto tendrían que saberlo ya a estas alturas, etc." sino que, basándome en que la detección de errores es una "técnica en sí" voy a dedicar cierto tiempo a explicarla (de la misma forma que se dedicó cierto número de clases a explicar las técnicas de racionalizar, p.ej.).
- B/ La situación subjetiva del alumno ante un problema de detección de errores es peculiar: el alumno tiende a utilizar la respuesta escrita como una "pista" con lo que, si ésta es falsa, el error se comete con mayor facilidad. Sin embargo, el alumno debe ser consciente de que la respuesta apuntada está pensada con el exclusivo propósito de confundirlo, por lo que debe hacer caso omiso de ella; es útil, para hacer comprender este punto esencial, efectuar alguna pregunta "capciosa" en la que la atención del

oyente se dirige conscientemente hacia un punto determinado intrascendente, para que deje de considerar el punto clave (el conocido ejemplo de la "yema del huevo" o del "conductor de autobús" sirve perfectamente para el caso).

- C/ Ante un problema de detección de errores pues, el alumno debe proceder de la siguiente forma:
 - a/ En primer lugar, debe ignorar absolutamente la respuesta indicada, sin tenerla en cuenta para nada (si conviene, tapándola incluso).
 - b/ Seguidamente, debe de convencerse de la inexistencia de una respuesta directa inmediata, esto es, del hecho de que no hay fórmulas más o menos "mágicas" de simplificación realizables mentalmente (creencia que, a menudo, los propios profesores potenciamos cuando resolvemos mentalmente ciertos cálculos en la pizarra (*)). Este aspecto es fundamental; en efecto, la presentación formal del ejercicio induce al alumno a visualizar reglas inmediatas que permiten pasar de un miembro de la igualdad al otro; (conversaciones mantenidas con ellos y un intento por su parte de reflejar sus procesos mentales lo demuestra: hablan de "tachar", o de "fórmulas" totalmente extrañas que ellos mismos serían, en otro contexto - por ejemplo ante preguntas formuladas directamente - incapaces de defender).
 - c/ Consiguientemente, el alumno debe calcular por los métodos habituales las operaciones indicadas en el primer miembro de las igualdades consideradas en la prueba independientemente, insisto, del resultado que figura en el papel.

(*) No pretendo ser original en la constatación de este hecho (cf el ya citado artículo de la SCPM).

d/ Paralelamente en según qué problemas, y de forma complementaria en otros, el alumno tiene que esforzarse en realizar una autocrítica o una autocomprobación mediante la búsqueda de contraejemplos o de casos particulares sencillos.

e/ Finalmente, y una vez convencido de su propia respuesta, debe limitarse a comparar la misma con el resultado indicado y responder "Bien" o "Mal" según corresponda y sin una reflexión posterior.

Esta fase 1, como se observa, consiste en tratar, esencialmente, un problema en el que intervienen factores de tipo psicológico con procedimientos que pretenden actuar directamente sobre ellos para intentar controlarlos. Como hipótesis de partida se ha supuesto que, entre dichos factores, merecen tenerse en cuenta de manera preponderante: a) La tendencia a emitir respuestas incontroladas

b) La propia percepción del enunciado, cuya presentación influye decisivamente en aquélla.

Ambos factores reciben una atención específica e intensiva en los apartados a/ y b/ del punto C/ de la presente Fase 1.

En todo caso, es fundamental la insistencia en el aspecto no estrictamente matemático del problema (y que ya se había remarcado de forma intuitiva y poco sistemática en la "clase de preparación intensiva" que di a los alumnos de 1º a los que pasé por primera vez la prueba del Ap. II a la que aludí en el apartado 1.-).

El tiempo empleado en esta fase fue de unos 15 minutos.

Fase 2: En ella se repasaron uno por uno los ejercicios del pretest, comparando las respuestas correctas con las que cada alumno en particular había indicado, y recalcando de nuevo

las propiedades auténticas y las fórmulas falsas; esta fase es la que podríamos llamar tradicional aunque, al estar precedida de la Fase 1, los alumnos atienden desde otra perspectiva.

El tiempo empleado fue de unos 35 minutos.

En total pues, las primeras fases (incluida la preliminar) me ocuparon una hora entera. A primera vista puede parecer que ya no es necesario insistir más en el problema que nos ocupa, puesto que la asimilación de los aspectos matemáticos considerados no es objetivamente difícil. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el alumno es, en general, reacio a dejarse impresionar excesivamente por argumentos de tipo psicológico (que fácilmente califica de superficiales e incluso de infantiles). En consecuencia, dediqué el día siguiente a unas "fases de refuerzo" (fases que algunos alumnos, no obstante, en realidad no necesitan).

Fase 3: Esta fase me fue sugerida por el ya citado miembro del grupo, J. Gascón; consistía en la formación de dos subgrupos equipotentes (según las notas del pretest), cada uno de los cuales debía proponer, previa resolución, una prueba semejante al pretest, de 10 ejercicios al otro equipo; así, cada subgrupo debía resolver los ejercicios propuestos por el otro (aunque ahora, de forma individual).

El tiempo previsto de preparación de la prueba era de 15 o 20 minutos, el de resolución de 20 o 25 minutos y el de corrección de 5 minutos (cada alumno corregiría un solo ejercicio). En la práctica, sin embargo, el tiempo de preparación se alargó a 25 min. y el de resolución a 30 min., lo que dejó muy poco margen para la corrección y para el desarrollo

de la cuarta fase. La razón de ello fue que los alumnos intentaron proponer pruebas de detección a cual más complicada; esto implicó a su vez, una disparidad esencial entre ambas pruebas con lo que se impidió una comparación adecuada de los resultados de ambos equipos(*).

La finalidad primordial perseguida, sin embargo, se logró: los alumnos, en efecto, hacían caso omiso de las respuestas apuntadas ya que presumían (con razón, ya que ellos habían actuado de igual forma) que lo único que pretendían era confundirlos.

Fase 4: Se trataba de efectuar un balance de la experiencia, supervisando y corrigiendo los errores que pudieran aún haberse cometido, y de hacer reflexionar sobre la finalidad de la misma, así como sobre la propia actitud de los alumnos al proponer la prueba.

El tiempo previsto era de unos 15 min., pero no sobrepasó los 5 min. por la razón que antes he indicado.

En suma, estas dos últimas fases (íntimamente relacionadas) deberían ocupar, a su vez, una hora entera, con lo que la "preparación intensiva" (con esta "metodología") se reduciría a dos horas completas.

5.- Conclusiones.-

Por lo que se refiere a los resultados del experimento-base, una simple comparación entre los porcentajes alcanzados por ambos grupos (véase el Ap. VI) no permite abrigar demasiadas dudas

(*) Para experiencias futuras creo necesario delimitar con mayor exactitud el tipo de errores proponibles por los alumnos a fin de evitar este desequilibrio.

respecto al éxito del mismo, especialmente si se observa el 70'5% de notables/sobresalientes del grupo E y el mantenimiento del 25% en el grupo C del mismo nivel.

Ahora bien, quedan una serie de cuestiones abiertas que merecen una consideración especial y que voy a intentar concretar seguidamente:

1) El aumento del porcentaje de los "Muy deficientes" en el grupo E.

Parece poco razonable, en efecto, que haya por un lado una mejora global del grupo E y, por otro en cambio, un empeoramiento de una fracción del grupo. Reflexiones posteriores, basadas en conversaciones con los alumnos afectados, me han llevado a conjeturar que existe un hecho importante que tendría que ser tenido en cuenta con mayor profundidad: se trata de aquellos alumnos que están convencidos de la certeza de algunas "fórmulas falsas", que son aplicadas sistemáticamente. Se trata, en suma, de alumnos que no han asimilado convenientemente contenidos básicos. En este sentido el "GRUP ARESTA", preocupado específicamente por este problema, está llevando a cabo una serie de intentos de aproximación al diagnóstico y recuperación de los alumnos especialmente afectados en este nivel.

Junto con esta posible explicación (que obligaría a un tratamiento personalizado en otra línea que la apuntada en la "metodología" expuesta en el punto anterior), hay que considerar, creo, las deficiencias (ya mencionadas) en el desarrollo de la Fase 4.

2) Relevancia de los "grupos de coherencia".

Por "grupos de coherencia" entiendo conjuntos de errores estrechamente cohesionados entre sí y que, lógicamente hablando, tendrían que responderse bien en bloque (me refiero, p.ej., al grupo nº14/ y nº17/, al nº16/ y nº18/, o al nº1/, 2/ y 8/ del test de comprobación-podría investigarse más a fondo la existencia de estos grupos-). Se observó que todo alumno que había contestado bien en bloque estos "grupos de coherencia" tenía una nota satisfactoria del test; ¿no sería fructífero incluir un estudio de los "grupos de coherencia" en la Fase 2?

En efecto, la conjetura de que un reconocimiento de "grupos de coherencia" implica una calificación suficiente no parece descabellada. En todo caso es un punto que puede estudiarse con mayor detalle.

3) ¿Eficacia de la "metodología" o de una preparación intensiva por sí misma?

Es obvio que esta pregunta es obligada; no sirve totalmente como respuesta el resultado de la experiencia realizada con el grupo de 1º de BUP al que, previa preparación, se le pasó la prueba del Ap. II, ya que se trata de dos pruebas distintas (aunque semejantes) y de nivel de BUP diferente (véase el apartado 1.-). Para poder responder con cierta fiabilidad a esta pregunta tendría que haber realizado una partición en tres subgrupos (en lugar de dos) y tratar cada uno de ellos convenientemente; dado el poco número de alumnos por clase para realizar este experimento con un mínimo valor estadístico, tuve que renunciar a este plan y es éste pues, un punto que será objeto de investigación posterior.

4) Esta "metodología", ¿garantiza que el alumno no cometerá los errores que es capaz de detectar?

Es este un punto realmente esencial. En efecto, es perfectamente posible que en un contexto en el que un error aparezca más o menos disimulado el alumno que, en una prueba de detección es capaz de señalarlo correctamente, no sepa reconocerlo; o que, en el desarrollo de ciertas operaciones llegue a cometerlo.

En mi opinión, sin embargo, es evidente que un alumno que no sepa detectar un error en una "prueba específica de detección" cometerá fácilmente errores del mismo tipo en las operaciones que tenga que realizar o, por lo menos, más fácilmente que aquel que es capaz de detectarlo correctamente. Por esta razón considero una fase previa el estudio de la forma de aumentar la capacidad de detectar errores por parte de los alumnos, aunque espero tratar dicho problema en una fase posterior.

Finalmente, si tengo que hacer un balance somero de los puntos esenciales de la "metodología" anteriormente expuesta, remarcaría dos aspectos complementarios entre sí y que constituyen una unidad en conjunto:

- A) El importante papel que juegan algunos factores psicológicos en la detección de errores básicos de cálculo, y la necesidad de tratarlos específicamente.
- B) El hecho de que el profesor debe asumir, en cada caso particular, la responsabilidad de enseñar al alumno la "técnica" de detección de errores de cálculo aritmético, de una forma explícita, si quiere seguir justificando la importancia que le concede en el momento de calificar.

Bibliografía.-

- 1.- GONIS y STANAD: "Mastering mathematical skills". Reading (Mass.) Addison Wesley, 1981. 417pp.
- 2.- LURIA, A.R. y TSVETKOVA, L.S.: "La resolución de problemas y sus trastornos". Barcelona, Fontanella, 1981. 270pp.
- 3.- MIALARET, G.: "Las matemáticas. Cómo se aprenden, cómo se enseñan". Madrid, Pablo del Río, 1977. 174pp.
- 4.- OLANO LORENZO-CÁCERES, C. y RUPÉREZ PADRÓN, J.A.: "Errores operativos más frecuentes". En "Revista de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas" (SCPM), (Santa Cruz de Tenerife), nº 1, (1981), pp. 35-38.

APÉNDICE I

- 1/ A) Simplificar:
$$\frac{-(-(1-1/2 - 1/2))}{-(-(1-(1-1/2)))}$$

B) Cambiar un número cualquiera para que la igualdad siguiente sea cierta: $\frac{21}{15} = \frac{7}{8}$

C) Calcular: $\frac{2}{15} - \frac{3}{14} + \frac{5}{42}$
- 2/ Calcular:

A)
$$\frac{1 - 1/2 \cdot (1/3 + 2/11)}{5/6 - 3/7 : (1/7 - 5/2)}$$

B)
$$2 - \frac{2}{2 - 2/3} - \frac{2}{2 - \frac{1}{2 - 1/2}}$$
- 3/ Simplificar: A) $\frac{\sqrt{17} \cdot \sqrt[3]{17}}{\sqrt[5]{17-2} \cdot 17}$ B) $\frac{\sqrt{48} + \sqrt{27} + \sqrt{147}}{4\sqrt[3]{40} + 2\sqrt[3]{135}}$
- 4/ Reducir a una sola raíz: A) $\frac{3\sqrt[5]{2}}{7^2}$ B) $\sqrt[18]{11^{71}} \cdot \sqrt[60]{13-121}$
- 5/ Racionalizar:
$$\frac{405}{\sqrt{5} \sqrt[3]{13} \sqrt[5]{3^{17}} (\sqrt{2} - \sqrt{3})}$$
- 6/ Indicar y corregir (en su caso) el error en las siguientes operaciones:

A) $\frac{\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \begin{matrix} 3\sqrt[3]{2} \\ 1 + 3\sqrt[6]{2} \end{matrix}$

B) $\frac{1}{\sqrt{2-1}} = -\sqrt{2}$

C) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{2}}{7}$

D) $\frac{2/5}{2/3} = \begin{matrix} 5/3 \\ 3/5 \end{matrix}$

APÉNDICE II

Corregir el error(o errores), si ha lugar, en las siguientes igualdades:

$$1/ A/ \frac{2}{7/2} = 7 \quad B/ \frac{5/7}{5} = 7 \quad C/ \frac{3}{3/7} = 7 \quad D/ \frac{7/3}{3} = 7$$

$$2/ A/ 2 + 1/3 \cdot (1 - 1/2) = 7/6 \quad B/ \frac{2 \cdot 3^2 + 5}{2} = 32 + 5$$

$$C/ \frac{2(2a+2b)}{2} = a+b \quad D/ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$$

$$3/ A/ \frac{\sqrt{13} \cdot 13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13^7} \quad B/ \frac{\sqrt{13} - \sqrt{11}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$C/ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 5} = \frac{1}{5} \quad D/ \frac{\sqrt{6} + \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

$$E/ \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b} \quad F/ \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + b}$$

$$G/ \frac{1}{\sqrt{a}-1} = -\sqrt{a} \quad H/ \sqrt{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} \quad I/ \sqrt{2+\sqrt{3}} = \begin{cases} \sqrt{6} \\ \sqrt{5} \end{cases}$$

$$4/ A/ \frac{a\sqrt{b}}{c} = \sqrt{\frac{a}{c} \cdot b} \quad B/ \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c} = \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c^3}}$$

$$C/ \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \begin{cases} \sqrt[5]{a^6} \\ \sqrt[6]{a^5} \end{cases}$$

APÉNDICE III

Corregir, si ha lugar, el error o errores siguientes:

$$1/ A/ \frac{3}{3/5} = 5 \quad B/ \frac{2/5}{2} = 5 \quad C/ \frac{3/7}{4/5} = \frac{5}{2} \quad D/ \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$$

$$2/ A/ (a \cdot b) \cdot (a \cdot c) = a \cdot (b + c) \quad B/ \frac{3 \cdot 5^2 - 2}{3} = 5^2 - 2$$

$$C/ \frac{3(3x + 3y)}{3} = 3(x+y) \quad D/ 2 + \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{10}$$

$$3/ A/ \frac{\sqrt{14} \cdot 14}{\sqrt[3]{14}} = \sqrt[6]{14^7} \quad B/ \frac{\sqrt{15} - \sqrt{13}}{\sqrt{2}} = 1 \quad C/ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 4} = \frac{1}{4}$$

$$D/ \frac{\sqrt{12} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{2} \quad E/ \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$F/ \frac{1}{\sqrt{x+y}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad G/ \frac{1}{\sqrt[5]{a^{-1}}} = -\sqrt[5]{a} \quad H/ \sqrt{10} + \sqrt{21} = \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{21}$$

$$I/ \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} = \sqrt{5 \cdot 6 \cdot 7} \quad J/ \sqrt{x^2+4} = \begin{cases} x+2 \\ \sqrt{(x+2)^2} \end{cases}$$

$$K/ \sqrt{a^2+6a+9} = a+3 \quad L/ \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c} = \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c^3}}$$

APÉNDICE IV

Corregir, si ha lugar, el error o errores siguientes:

$$1/ (+12) \cdot (-10) = +2 \quad 2/ (-7) \cdot (-10) = +70 \quad 3/ -(7 \cdot 5) = (-7) \cdot (+5)$$

$$4/ -(a-b) = -a-b \quad 5/ 3 - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \quad 6/ \frac{3}{\frac{4}{3}} = 7$$

$$7/ \frac{2/7}{2} = 7 \quad 8/ 2^3 + 2^5 + 2 = 2 \cdot (2^2 + 2^4) \quad 9/ \frac{3(3a-3b)}{3} = a-b$$

$$10/ 5^a + 5^b = 5^{a+b} \quad 11/ 7^a - 7^b = 7^{a-b} \quad 12/ (a-b)^2 = \begin{cases} a^2 - b^2 \\ a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$13/ (a+b) \cdot (a-b) = \begin{cases} b^2 - a^2 \\ a^2 - b^2 \\ (b+a) \cdot (b-a) \end{cases} \quad 14/ a^3 + b^3 = (a+b)^3$$

$$15/ (2+3+5)^3 = 2^3 + 3^3 + 5^3 \quad 16/ \sqrt[3]{a} = \sqrt{a} \quad 17/ \frac{2 \cdot 5^2 - 7}{2} = 5^2 + 7$$

$$18/ 2 + \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{10} \quad 19/ \frac{\sqrt{12} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{2} \quad 20/ \sqrt{5+6+7} = \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$$

$$21/ a\sqrt{b} = \sqrt[3]{a^2b} \quad 22/ \frac{a^2\sqrt[3]{b}}{c} = \sqrt[3]{\frac{a^2b}{c^3}} \quad 23/ \sqrt{(a+b+c)^2} = \begin{cases} a+b+c \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

$$24/ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c) \quad 25/ \frac{\sqrt{15} - \sqrt{13}}{\sqrt{2}} = 1 \quad 26/ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 7} = \frac{1}{7}$$

$$27/ \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} = 1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \quad 28/ \frac{1}{\sqrt{a+b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad 29/ \sqrt{10+21} = \sqrt[3]{\frac{31}{210}}$$

$$30/ \frac{1}{\sqrt[5]{a^{-1}}} = -\sqrt{a} \quad 31/ \sqrt[3]{a^3+b^3} = a+b \quad 32/ \sqrt{a^2+4} = a+2$$

$$33/ a+b = \sqrt{a^2+b^2} \quad 34/ \sqrt{a^2+6a+9} = a+3$$

APÉNDICE V

Corregir, si ha lugar, el error o errores siguientes:

$$1/ -(x \cdot y) = (-x) \cdot (-y) \quad 2/ -(-x+y) = -x-y \quad 3/ \frac{3/5}{3} = 5$$

$$4/ 3 - \frac{x-y}{2} = \frac{6-x-y}{2} \quad 5/ (-x+y)^2 = -x^2+y^2-2xy$$

$$6/ \frac{(2x+2y) \cdot 2}{2} = 2 \cdot (x+y) \quad 7/ 3^{x+y} = 3^x + 3^y$$

$$8/ -(x-yz) = -x+y \cdot (-z) \quad 9/ \frac{3x^2-7}{3} = x^2-7$$

$$10/ 2 - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6} \quad 11/ \frac{x\sqrt[3]{y}}{z^2} \quad \sqrt[3]{\frac{x^3y}{z^2}}$$

$$12/ (x \cdot y) \cdot (x \cdot z) = x \cdot (y+z) \quad 13/ \frac{1}{\sqrt[4]{x^{-3}}} = -\sqrt[3]{x^4} \quad 14/ \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{8}} = 1$$

$$15/ \frac{\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1}{3} \quad 16/ \sqrt[3]{x^3-y^3} = x-y \quad 17/ \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} = \sqrt[3]{\frac{15}{3 \cdot 5 \cdot 7}}$$

$$18/ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{x+y} \quad 19/ \sqrt{5^2 \cdot 3 + 7^2} = 5\sqrt{3} + 7$$

$$20/ x-2 = \begin{cases} \sqrt{x^2+4x-4} \\ \sqrt{x^2-4x+4} \end{cases}$$

APÉNDICE VI

	PRETEST		TEST DE COMPROBACIÓN	
	Grupo E	Grupo C	Grupo E	Grupo C
Nº de alumnos (*)	17	12	17	12
Nota media	4'86	5'03	6'90	4'96
% Aprobados	47'05%	58'3%	82'35%	50%
Nota media aprobados	6'36	6'42	7'84	6'66
Nota media no aprobados	3'52	3'08	2'52	3'25
% Notables/Sobresalientes	17'6%	25%	70'5%	25%
% Suficiente/Bien	29'4%	33'3%	11'7%	25%
% Insuficientes	47%	25%	5'8%	41'6%
% Muy Deficientes	5'88%	16'6%	11'7%	8'3%
	Curso global		Curso global	
Nº de alumnos	29		29	
Nota media	4'9		5'9	
% Aprobados	51'7%		68'9%	

(*) Soy consciente de que las limitaciones del curso académico no han permitido replicar el experimento con un número de grupos suficiente como para poder afirmar que los resultados son concluyentes.

Por otra parte, la realización de un retest adecuado para verificar la persistencia de los resultados alcanzados por el grupo E, no podrá ser llevada a cabo hasta que haya transcurrido un lapso de tiempo suficientemente amplio desde que tuvo lugar el experimento-base.

DIAGNOSTICO Y RECUPERACION
DE LA ADQUISICION DE CONTENIDOS
Josep Gascón (GRUP ARESTA)
Abril de 1982

1.- Introducción

La observación del aprendizaje de nuestros alumnos, algunas experiencias realizadas con su colaboración y la reflexión sobre diferentes trabajos tanto teóricos como experimentales nos han llevado a la convicción de que el fracaso escolar en matemáticas o más concretamente las dificultades de una gran parte de los alumnos tienen su origen en un nivel muy básico.

Esta comunicación pretende delimitar dichas dificultades y describir una metodología que el GRUP ARESTA está desarrollando con el objetivo inmediato de contribuir a disminuirlas.

2.- Punto de partida

Partimos de la problemática real de nuestras clases y de la constatación de unos hechos que se van imponiendo día a día.

Es notorio que un porcentaje creciente de alumnas de B.U.P. y C.O.U. tienen dificultades:

- (a) en el cálculo aritmético y algebraico
- (b) en abstraer una propiedad general a partir de un conjunto de casos particulares
- (c) en discriminar pares de contenidos tales como ecuación y función o variable y parámetro.
- (d) en adquirir conceptos tan elementales como "alturas de un triángulo" o "rectas que se cruzan en el espacio"
- (e) en el uso del lenguaje para expresar una idea
- (f) en la interpretación de las relaciones lógico-gramaticales de un enunciado
- (g) en retener en la memoria contenidos aparentemente adquiridos

Ante esta situación nos ha parecido que la única explicación fructífera será aquella que nos permita extraer los factores que intervienen en dichas dificultades y nos posibilite un control y una acción sobre ellos.

Una tal explicación deberá fundamentarse en los datos que el alumno nos proporcione.

Los primeros datos nos los suministró un estudio exploratorio de los errores en el cálculo aritmético realizado por Josep Maria Lamarca del GRUP ARESTA.

Dicho estudio se inició pasando una prueba de detección de errores elementales a alumnos de B.U.P. y C.O.U. con resultados realmente sorprendentes.

En segundo lugar se realizó un experimento tendente a contrastar la hipótesis de que la confusión perceptual entre suma y producto es un factor que influye en los errores cometidos en la resolución de problemas elementales que involucran dichas operaciones.

La prueba fue pasada a 60 alumnos de primero de B.U.P. y destacan, por su significación, los siguientes resultados:

- (a) el 18% de los alumnos confunden suma por producto o viceversa al menos una vez en un conjunto de 4 operaciones (2 sumas y 2 productos) con números enteros
- (b) el 20% contesta que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
- (c) el 28% escribe $5 + (7 \cdot a) = (5 + 7) \cdot (5 + a)$ ó bien $5 + (7 \cdot a) = 35 \cdot 5a$ ó bien $5 + (7 \cdot a) = 12 + 5a$
- (d) el 45% afirma que $-(a \cdot b) = (-a) \cdot (-b)$
- (e) sólo el 13% contesta correctamente la pregunta: "¿Qué fracción hay que sumar a $7/8$ para obtener una fracción equivalente a $7/8$?"
el 18% da como respuesta $1/1$ ó bien $2/2$
el 33% contesta $7/8$

Todos estos datos aunque parecen dar alguna evidencia para apoyar la hipótesis, insinúan la presencia de otros factores que no han sido controlados.

En particular habría que estudiar de que manera influyen la confusión perceptual y la tendencia incontrolada a transformar una expresión algebraica, sobre la dificultad del problema, al variar la presentación de éste.

En definitiva, surge la necesidad de hacer más sistemática nuestra observación y experimentación.

3.- Metodología

El aspecto más sobresaliente de las dificultades citadas consiste en su persistencia que parece sugerir la presencia de factores internos del alumno que no han sido suficientemente analizados.

Así pues, si pretendemos paliar la grave situación antes descrita, debemos utilizar una metodología que permita detectar de manera sistemática las dificultades específicas de cada alumno y posibilite un control y una acción efectivos sobre los factores que las determinan.

Más concretamente, una tal metodología debería:

- (a) partir de un diagnóstico lo más preciso y completo posible de la situación real del alumno
- (b) individualizar el tratamiento para adecuarlo al diagnóstico

El GRUP ARESTA concreta su actual objetivo general en el desarrollo y puesta a punto de una tal metodología; con ello, presumiblemente, se podrá también profundizar en las causas que generan el fracaso escolar y se hallarán sugerencias útiles para la acción sobre las variables generales que influyen en el nivel de rendimiento de la clase normal.

4.- Marco del diagnóstico

En lo que concierne al diagnóstico aceptamos, en una primera aproximación, que el pensamiento constituye una unidad de dos géneros de conocimientos:

- (1) conocimientos sobre contenidos que, a su vez, pueden ser:
 - figurativos (perceptivos)
 - simbólicos (formales)
 - semánticos (conceptuales)

- (2) conocimientos sobre operaciones que deben realizarse con los conocimientos del primer género, con la finalidad de alcanzar una cierta meta.

De entre los contenidos matemáticos específicos de B.U.P. y C.O.U. destacamos los contenidos conceptuales. En cierto sentido podríamos considerar que las figuras y los símbolos constituyen diferentes maneras (junto con el lenguaje) de mentar un concepto, sin que ello signifique identificar los contenidos figurativos y simbólicos con los semánticos.

Una cosa está clara: mientras que todo símbolo y toda figura (en la matemática de B.U.P. y C.O.U.) hacen referencia a un concepto, no es cierto que todo concepto tenga necesariamente un aspecto figurativo o simbólico.

Por último y aunque desde un análisis lógico podemos distinguir al menos dos tipos de conceptos: conceptos-clase y conceptos-relación, está claro que cuando una persona aprende un nuevo concepto-clase aprende también una forma nueva de combinar los atributos. El proceso se funda en discriminaciones existentes; como por ejemplo entre triángulo y figura no triangular o entre rojo y otro color.

En lo que concierne a los conocimientos de segundo género hay que decir:

- (a) que presuponen los conocimientos sobre contenidos
- (b) que habría que distinguir entre el dominio de dichas operaciones (=saber ejecutarlas efectivamente para resolver un cierto tipo de problemas) y el mero conocimiento teórico de ellas.
- (c) que dicho conocimiento teórico no es suficiente ni, en rigor, necesario para dominar las correspondientes operaciones.

Queremos volver a insistir en la unidad funcional existente entre estos dos géneros de conocimientos, puesto que no sólo las operaciones deben realizarse con los conocimientos del primer género (como base) sino que éstos, a su vez, sólo pueden ser asimilados completamente al realizar con ellos ciertas operaciones básicas.

5.- El análisis neuropsicológico de A.R. Luria

Un interesante apoyo experimental a la distinción entre los dos géneros de conocimientos citados así como un primer intento para discernir los diferentes sistemas de operaciones mentales ha sido realizado en la importante obra de A. R. Luria.

Su análisis neuropsicológico ha puesto de manifiesto que todos los tipos de actividad del hombre, inclusive su actividad consciente, están fundamentados en sistemas funcionales complejos, cada uno de los cuales está constituido por un conjunto de zonas del cerebro altamente diferenciadas y que trabajan conjuntamente.

Dicho análisis ha evidenciado que existen por lo menos dos modalidades de alteraciones de los procesos intelectuales.

1. En las afectaciones de las regiones posteriores de la corteza se perturban esencialmente los siguientes procesos:

- (a) síntesis de informaciones sucesivas en esquemas simultáneos
- (b) retención de estas informaciones en la memoria
- (c) utilización de los códigos léxicos, semánticos y gramaticales del lenguaje
- (d) operaciones de abstracción y generalización
- (e) operaciones técnicas con los datos conservados en la memoria

2. En las afectaciones de los lóbulos frontales se originan trastornos de la iniciativa, de la conducta dirigida hacia un objetivo y de la crítica que, en conjunto, provocan gravísimas dificultades para resolver problemas.

Más concretamente, y además de trastornos de los estados afectivos y una posible desautomatización del lenguaje, el "síndrome frontal" origina las siguientes deformaciones de los procesos intelectuales:

- (a) no se establece un esquema o programa general de resolución
- (b) se dan respuestas impulsivas a ciertos elementos aislados de los datos

- (c) se encuentran grandes dificultades en pasar de una operación a otra
- (d) no se comparan los resultados obtenidos con los datos iniciales del problema, por lo que no se es consciente de los errores; es la llamada "alteración de la crítica".

Los sistemas de operaciones involucrados en los procesos intelectuales citados en primer lugar están relacionados esencialmente con la adquisición de contenidos, mientras que los citados en segundo lugar constituyen el núcleo del pensamiento dirigido y orientado hacia metas, propio de la actividad de resolución de problemas.

Además de su interés clínico, estos hechos tienen trascendentes consecuencias para el estudio de la actividad intelectual de las personas sanas:

- (1) las más básicas de entre las dificultades en la actividad intelectual pueden ser, en cierta medida, diferenciadas y tratadas separadamente (éste es, por el momento, el objetivo de nuestra metodología)
- (2) la alteración de un mismo proceso puede presentar diferentes peculiaridades que dependen de cuales sean los factores psicológicos que no contribuyen a su efectiva realización.

6.- Fase de diagnóstico

En esta primera fase estamos interesados en diagnosticar los conocimientos sobre contenidos que posee un alumno en las diferentes áreas, así como el dominio de las operaciones involucradas en su adquisición.

6.1.- Encuestas

La primera etapa de esta fase consiste en determinar el grado de discriminación de contenidos existente en los alumnos de B.U.P. y C.O.U.

A tal fin estamos elaborando encuestas que cubren las áreas de:

- (1) Aritmética
- (2) Álgebra

- (3) Combinatoria y Probabilidad
- (4) Análisis real
- (5) Geometría
- (6) Lógica

y recogen los contenidos de B.U.P., partiendo de la segunda etapa de E.G.B.

Con esta técnica, empleada en múltiples investigaciones psicológicas, pretendemos conocer directamente cual es la apreciación subjetiva de los alumnos respecto de su propia adquisición de contenidos.

Las encuestas admiten tres niveles de respuesta: A="contenido asimilado", B="vacío" y C="nudo", que han sido sugeridos en conversaciones con algunos alumnos acerca de sus principales dificultades.

Indirectamente, a través de la interpretación de las respuestas, podremos obtener posiblemente otros datos de interés.

6.2.- Análisis de la encuesta de geometría básica

Consta de 484 contenidos de los cuales sólo 15 son figuras y el resto son conceptos (como "triángulo") o relaciones fundamentales entre conceptos (como "teorema de Pitágoras").

Dichos contenidos se han clasificado en 13 secciones que son: Generalidades, Triángulo, Polígonos, Área polígonos, Movimientos, Semejanzas, Triángulo rectángulo, Circunferencia, Prisma y pirámide, Rectas y planos en el espacio, Poliedros regulares, Cilindro, cono y esfera y Figuras.

La encuesta se pretende pasar a una muestra de 200 alumnos, 50 de cada nivel (1º, 2º, 3º y C.O.U.) aunque de momento disponemos solamente de las respuestas de los dos primeros.

Los alumnos de 1º dan globalmente un 54% de respuestas del nivel A, un 26% del B y un 20% del C.

Destacan especialmente tres secciones en las que el porcentaje de respuestas B y C sobrepasan ampliamente estas medias:

- (1) Movimientos, con 51 y 23 respectivamente
- (2) Rectas y planos en el espacio, con 46 y 25
- (3) Semejanzas, con 45 y 23

Siendo sin embargo la sección de Poliedros regulares la que arroja mayor cantidad de "vacíos" (28%) con sólo un 14% de "vacíos" (porcentaje que está entre los tres más altos).

También destaca el 33% de "vacíos" de la sección de Triángulo rectángulo, ostensiblemente superior a la media.

Los alumnos de 2º dan globalmente unos resultados muy similares con un 55% de respuestas del nivel A, un 20% del B y un 25% del C.

Se repiten las tres secciones en las que se sobrepasan de manera más acusada los porcentajes medios de respuestas B y C.

- (1) Rectas y planos en el espacio, con 39 y 31 resp.
- (2) Semejanzas, con 44 y 23
- (3) Movimientos, con 40 y 25

siendo en este caso la sección de Prisma y pirámide la que arroja mayor cantidad de "nudos" (34%).

Hay que destacar que aparte de la sección de Movimientos (que mejora un 11%) las únicas secciones respecto a las cuales los alumnos de 2º creen tener menos "vacíos" que los de 1º (de manera significativa) son Triángulo rectángulo (que mejora un 16%) y Circunferencia (que mejora un 15%).

Y lo que todavía es más interesante es que los alumnos de 2º creen tener más "nudos" prácticamente en todas las secciones, lo cual y aunque debiera valorarse la diferente autopercepción de unos y otros, no deja de ser alarmante (teniendo en cuenta, además, los valores absolutos de dichos porcentajes -ver Apéndice I).

Por último, al analizar más detalladamente las secciones, se ponen de manifiesto (tanto para los alumnos de 1º como para los de 2º)

- (a) que los conceptos geométricos que creen haber adquirido son básicamente de "tipo particular" en lugar de ser de "tipo general", lo que indica que en todo caso poseen dichos conceptos de forma muy poco estructurada.
- (b) que tienen más dificultades para adquirir los conceptos puramente afines que para adquirir los conceptos métricos.
- (c) que poseen una deficiente autopercepción de sus propios conocimientos, puesta de manifiesto en ciertas incoherencias en las respuestas.

6.3.- Tests diagnosticadores

La segunda etapa, en esta primera fase, consiste en la confección de tests diagnosticadores cuyos contenidos serán orientados por el análisis de las encuestas.

En particular, el test diagnosticador en un área dada debe tener en cuenta los principales grupos de "nudos" y "vacíos" que la correspondiente encuesta haya permitido detectar, así como las "zonas A" que debieran ser contrastadas en cada alumno dado que una deficiente autopercepción puede ser un factor de bloqueo del proceso de aprendizaje.

Como que el test pretende discernir si realmente ha sido asimilado un contenido o cuales son los aspectos de un cierto "nudo", no puede restringirse a los contenidos aislados, sino que debe dar los elementos adecuados para diagnosticar el dominio que posee un alumno de las operaciones básicas necesarias para la adquisición de un contenido.

Hemos diseñado el test como una prueba objetiva de selección múltiple que aplicada a un alumno concreto persigue, en principio, desvelar cuales son para dicho alumno los "nudos" y "vacíos" que bloquean su progreso; pero eligiendo adecuadamente las cuestiones y las respuestas posibles, este esquema formal nos

permitirá, probablemente, descubrir relaciones significativas entre series de respuestas y, en consecuencia, el origen de algunos grupos de "nudos".

Nos interesa remarcar que concebimos el test dentro de un concepto más amplio de diagnóstico, en el cual deberían incluirse otras pruebas tales como tests de motivación, de actitud y, especialmente, la entrevista personal entendida como instrumento del diagnóstico.

En conjunto se trata de un diagnóstico personalizado que, en principio, podría ser voluntario y que no tiene por qué ser conocido más que por el interesado y el equipo pedagógico. Lo anterior no impide que pretendamos automatizar en cierta medida la aplicación de los tests con objeto de que puedan ser útiles en nuestras condiciones de enseñanza masiva.

6.4.- Ejemplo de test diagnosticador

Hemos elegido la sección Rectas y planos en el espacio para ejemplificar lo que entendemos por "test diagnosticador".

Esta elección ha sido guiada en parte por los resultados de la encuesta y en parte por la importancia intrínseca que concedemos, dentro de la geometría básica, a la adquisición de intuiciones espaciales.

Pretendemos diagnosticar cual es la visión que posee el alumno del espacio a partir de las relaciones entre los elementos espaciales simples.

Como indica Puig Adam, la operación básica para adquirir estas intuiciones es la abstracción de imágenes idealizadas a partir de ejemplos concretos, usando para ello las operaciones típicas de la geometría: prolongaciones, proyecciones, secciones y movimientos.

A la hora de elaborar este test concreto hemos utilizado el análisis de las encuestas para:

- (a) intentar discernir entre intuiciones espaciales de "tipo particular" y aquellas otras de "tipo más general".

- (b) no dar prioridad a los conceptos afines sobre los maticos
- (c) diseñarlo de tal forma que permita distinguir entre aquellos alumnos que poseen una visión muy poco organizada del espacio y aquellos otros que tienen unos prejuicios más firmes que se ponen de manifiesto en ciertas coherencias entre sus respuestas.

No hace falta resaltar que este test (ver Apéndice II) no es más que un primer modelo experimental que deberá modificarse a medida que vaya siendo puesto en práctica.

7.- Fase de tratamiento

Como ya hemos indicado anteriormente, consideramos esencial la individualización del tratamiento para adecuarlo al diagnóstico, lo cual no significa que pretendamos dar un tratamiento diferente a cada alumno, sino a cada grupo de alumnos bloqueados por un mismo tipo de dificultades.

Con este fin hemos pensado, en principio, dos tipos de actividades:

- (1) realización periódica de cursillos con contenido y metodología muy específicos, orientados hacia los principales tipos de dificultades diagnosticados.
- (2) elaboración de módulos específicos de trabajo (programado o no).

Ante un alumno concreto que requiera los servicios de recuperación se seguirán los siguientes pasos:

- (a) Diagnóstico, que incluye el test diagnosticador en ciertas áreas, otras pruebas (si fuesen necesarias) y la entrevista personal.
- (b) Tratamiento, compuesto por aquellos medios de recuperación más adecuados a su tipo de dificultades.
- (c) Comprobación de la eficacia del tratamiento, mediante la realización de pruebas adecuadas.

Durante todo este proceso de recuperación el alumno será atendido en caso de necesitar ayuda, pero en último extremo la responsabilidad de progresar y superar las dificultades sería suya, puesto que la realización de este proceso no irá asociada a ningún tipo de calificación.

8.- Líneas de trabajo para el futuro y conclusión

Las tareas que nos proponemos desarrollar a medio y largo plazo pueden sintetizarse en:

- (1) Describir los procesos de adquisición de los contenidos de cada una de las áreas, así como los sistemas de operaciones involucrados.
- (2) Desarrollar, poner en práctica y clasificar los diagnósticos en las diferentes áreas.
- (3) Concretar el tipo de acción y control que debe realizarse en concordancia con cada diagnóstico, obteniendo así la explicitación de los diferentes tratamientos.
- (4) Dar una clasificación, con base científica, de los tipos de problemas según su grado de complejidad psicológica (A.R. Luria)
- (5) Simultáneamente a (4) dar una descripción de los procesos de resolución de cada tipo de problemas.
- (6) Desarrollar, poner en práctica y clasificar los diferentes diagnósticos operativos de los procesos de resolución de problemas.
- (7) Poner en práctica una metodología útil para formar en los alumnos los sistemas de operaciones (incluidas las mentales) que son imprescindibles para resolver un cierto tipo de problemas.

Ante este programa, tal vez excesivamente ambicioso, se hace patente que nuestro interés no se reduce a los alumnos con dificultades especiales, sino que, por el contrario, si nos hemos visto obligados a empezar por el origen de las dificultades, ha sido con la finalidad de que nuestra metodología resultase

útil para una mayoría de alumnos y elevase las posibilidades de todos de acceder a niveles más altos del aprendizaje.

Esperamos que todo este trabajo tenga repercusiones positivas en la confección de programas, redacción de textos, investigación de métodos pedagógicos y estructura general de la clase, proporcionándonos, además, medios que nos permitan realizar una evaluación más formativa y fiable.

9.- Bibliografía

Se citan a continuación únicamente aquellos textos que han tenido una influencia directa en la realización de este trabajo.

1. BOURNE, EKSTRAND y DOMINOWSKI : Psicología del pensamiento. Trillas, México, 1976.
2. CASTELNOUVO, E.: La Geometría. Ketres, Barcelona, 1981.
3. LANDA, L.N.: Cibernética y pedagogía. Labor, Barcelona, 1972.
4. LANDA, L.N.: Cibernética y aprendizaje. Paidós, Buenos Aires, 1977.
5. LURIA, A.R.: La resolución de problemas y sus trastornos. Fontanella, Barcelona, 1981.
6. LURIA, A.R.: El cerebro humano y los procesos psíquicos. Fontanella, Barcelona, 1979.
7. POLYA, G.: Como plantear y resolver problemas. Trillas, México, 1981.
8. POLYA, G.: La découverte des mathématiques. Dunod, Paris, 1967.
9. RUSELL, B.: Los principios de la matemática. Espasa-Calpe, Madrid, 1948.
10. PUIG ADAM, P.: Didáctica matemática eurística. Instituto de formación del profesorado de enseñanza laboral, Madrid, 1956.
11. SANTALO, L.A.: La matemática en la escuela secundaria. Eudeba, Buenos Aires, 1966.
12. SAWIN, E.I.: Técnicas básicas de evaluación. Magisterio Español, Madrid, 1970.

APENDICE I

Porcentajes de respuestas por secciones.

Dentro de cada nivel A, B o C, la columna de la izquierda corresponde a las respuestas de los alumnos de 1º de B.U.P. y la de la derecha a los de 2º.

	A		B		C	
Generalidades	67	76	16	9	17	15
Triángulo	65	71	16	11	19	18
Polígonos	69	67	13	8	18	25
Área polígonos	75	77	6	3	19	20
Movimientos	26	35	51	40	23	25
Similitudes	32	33	45	44	23	21
Triángulo Rectángulo	51	62	33	17	16	21
Circunferencia	57	65	26	11	17	24
Prisma y pirámide	57	46	22	20	21	34
Rectas y planos en el espacio	29	30	46	39	25	31
Poliedros regulares	58	64	14	13	28	23
Cilindro, cono y esfera	52	47	26	22	22	31
Figuras	57	57	23	21	20	22
GLOBALES	54	55	26	20	20	25

APENDICE II

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

Ejemplo de test diagnóstico.

1. Dado un plano en el espacio

- A. Existe otro plano que tiene con él un único punto en común.
- B. Divide al espacio en dos semiespacios.
- C. Se puede encontrar un camino en el espacio que pase de un lado al otro del plano sin atravesarlo.
- D. Podemos conseguir que no corte a cualquier otro plano trasladando uno de ellos

2. Dados dos planos en el espacio

- A. Si se cortan, cualquier plano que corte a uno cortará al otro.
- B. Si son perpendiculares, ningún plano que sea perpendicular a uno lo será al otro.
- C. Si son paralelos, no es posible encontrar un plano que corte a uno pero no al otro.
- D. Si son perpendiculares, cualquier plano que sea perpendicular a uno de ellos será paralelo al otro.

3.- Dados dos planos en el espacio

- A. Siempre existe un plano que corta a ambos.
- B. Si un tercer plano corta a ambos, entonces los tres tienen, por lo menos, un punto en común.
- C. Siempre existe un plano que es perpendicular a ambos.
- D. Pueden no tener ningún punto en común aunque no sean paralelos.

4. Dados tres planos en el espacio

- A. Si tienen una recta en común, dividen el espacio en seis regiones cada una de las cuales está delimitada por dos planos.
- B. Si tienen un único punto en común, dividen el espacio en ocho regiones.
- C. Si dos son paralelos y el tercero no lo es, dividen el espacio en seis regiones
- D. Si los tres son paralelos, el espacio queda dividido en cuatro regiones ninguna de las cuales es un semiespacio.

5. Dados tres puntos en el espacio

- A. Si están alineados, no hay ningún plano que los contenga.
- B. Si no están alineados, hay un único plano que los contiene.
- C. Siempre hay al menos un plano que los contiene.
- D. Si añadimos un cuarto punto, siempre existe un plano que contiene a los cuatro.

6. Dados una recta y un plano en el espacio

- A. Si son paralelos, la recta es también paralela a todas las rectas contenidas en el plano.
- B. Si son perpendiculares, la recta es también perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano.
- C. Siempre existe un plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano.
- D. Si tienen dos puntos en común, la recta está contenida en el plano.

7. Dadas dos rectas en el espacio

- A. Si no se cortan, son paralelas.
- B. Pueden ser perpendiculares sin tener ningún punto en común.
- C. Si se cortan, están en un mismo plano.
- D. Pueden ser paralelas sin estar en un mismo plano.

8. Dadas dos rectas en el espacio

- A. Existe siempre un plano que es perpendicular a ambas.
- B. Están situadas siempre en planos paralelos distintos.
- C. Están contenidas siempre en un mismo plano.
- D. Existe siempre una recta que las corta y es perpendicular a ambas.

9. Dados un plano y un punto exterior en el espacio

- A. Existen únicamente dos planos que contienen al punto y son perpendiculares al plano dado.
- B. Sólo existe una recta que pasa por el punto y no corta al plano.
- C. Existe una única recta que contiene al punto y es perpendicular al plano.
- D. Existe un único plano que contiene al punto y es paralelo al plano dado.

10. Dados una recta y un punto exterior en el espacio

- A. Existe una única recta que contiene al punto y es perpendicular a la recta dada.
- B. Hay infinitos planos que contienen al punto y son paralelos a la recta dada.
- C. Hay un único plano que contiene al punto y es perpendicular a la recta dada.
- D. Los planos que pasando por el punto dado son paralelos a la recta dada, tienen entre sí un único punto común.

Actividades y ejercicios
para el desarrollo
del tema de Estadística
en 1º de Bachillerato

G.A.M.M.A.

INTRODUCCION

Descuidado con excesiva frecuencia, el tema de Estadística en el Bachillerato nos ha parecido suficientemente importante como para dedicarle nuestros esfuerzos, fruto de los cuales es el trabajo que ahora presentamos.

En efecto, unas veces por falta de tiempo, otras por no concederle excesiva importancia frente a otros temas de mayor tradición, la Estadística suele ser postergada en las programaciones y en consecuencia se expone - si llega a exponerse - tarde, mal y deprisa.

Es, sin embargo, evidente la gran importancia que está cobrando la Estadística en nuestra masificada sociedad así como su creciente incidencia en la vida cotidiana.

Por todo ello consideramos del mayor interés una profunda revisión de los contenidos de Estadística en el Bachillerato y de su adecuada distribución a la vez que concederle, en la práctica, la importancia, y, por tanto, el tiempo, que creemos se merece.

Objetivos Generales

Hemos pretendido elaborar un material de trabajo en gran parte basado en actividades a desarrollar por el alumno, individualmente o en grupo, de forma que la enseñanza

de estos temas resulte atractiva para los alumnos y que le permitan participar en la clase, evitando que los menos dotados se automarginen al encontrarse frente a un muro absolutamente infranqueable de áridos conocimientos y procurando que la inquietud propia de su edad encuentre en las actividades propuestas un cauce aprovechable.

El material está proyectado de forma que la enseñanza no sea lineal, sino que admita diversas lecturas, según la facilidad y el interés de cada alumno y en función del enfoque personal que cada profesor quiera dar.

Además hemos intentado que el alumno adquiera los conocimientos por sí sólo, a base de pequeños pasos orientados que le lleven al descubrimiento personal de los conceptos y de sus aplicaciones.

Al mismo tiempo se ha procurado hacer ver la profunda imbricación de estos conceptos con cuestiones de la vida real, sin limitarnos a un nivel meramente matemático, sino intentando siempre incidir en la educación integral del alumno, de forma que la materia no se les aparezca como algo totalmente ajeno a la realidad, como, por desgracia, ocurre con demasiada frecuencia en nuestra asignatura.

Se ha pretendido iniciar a los alumnos en el método científico, en una forma de trabajar inductiva, aprovechando algunas actividades que se desarrollan a modo de investigación.

Finalmente, hemos querido hacer hincapié en algunos temas concretos, francamente descuidados, de considerable interés: muestras, encuestas y falacias.

Material elaborado

Para conseguir, en la medida de lo posible, esos objetivos hemos elaborado dos tipos de material: uno para el alumno y otro para el profesor.

El material de trabajo para el alumno consiste en una serie de ejercicios, problemas, actividades y trabajos que el alumno debe realizar respondiendo a un cuestionario adjunto a cada enunciado.

Este material no creemos que pueda ser autosuficiente sino que debe ser apoyado con las orientaciones del profesor, para el que se ha elaborado una Guía.

La Guía del profesor contiene las indicaciones precisas, a veces exhaustivas, para que éste pueda realizar todo lo sugerido evitando que rechace alguna actividad propuesta que encuentre interesante pero difícil o costosa de realizar.

Permite flexibilidad de opciones al indicar distintas maneras de abordar un tema y señalar aquellos ejercicios o actividades que pueden ser soslayados por la mayoría de la clase al estar dirigidos especialmente para alumnos aventajados o aquellos otros ejercicios de repaso y consolidación oportunos para los alumnos que precisen de ellos para confirmarse en la adquisición de conceptos fundamentales.

Esta Guía resulta indispensable en el momento de realizar actividades conjuntas de toda la clase que no están enunciadas en el material del alumno con el fin de conseguir un efecto de sorpresa. El profesor buscará el momento oportuno para estas actividades simultáneas.

Esquema

- Mensaje
- Encuesta
- Gráficas
- Medidas de posición central
- Medidas de dispersión
- Evaluación

Se han elaborado unos objetivos específicos correspondientes a cada una de las partes en que se ha dividido el tema donde se concretan las expectativas de adquisición de conocimientos, técnicas y actitudes por parte del alumnado.

1ª PARTE

MENSAJE

Como iniciación al tema se suministró a los alumnos un ejemplar del relato de Edgar Allan Poe titulado "El escarabajo de oro", para que fuera leído durante las vacaciones de Navidad.

En este breve relato aparece un mensaje cifrado que suministra la clave para encontrar un tesoro. Buena parte del texto está destinada a explicar cómo el protagonista del cuento consigue descifrar dicho mensaje, encontrando finalmente el tesoro.

Una vez que los alumnos conocen este relato y la técnica utilizada en él para descifrar el mensaje, se les propone un nuevo mensaje cifrado y se les pide, mediante un debate en clase, que diseñen algún método para conseguir descifrarlo. Muy pronto los mismos alumnos, recordando "El escarabajo de oro", proponen como método el recuento de letras en algún texto y la asociación entre las letras más frecuentes del castellano y los símbolos más utilizados en el mensaje.

En este punto se les pide que comenten sobre los distintos tipos de texto que se podrían elegir y su convenien-

cia, pudiendo así introducir, de manera natural, una primera idea de los conceptos de población y muestra y del sentido que se le da a la palabra "representativa".

Cada alumno escoge a continuación un texto cualquiera y efectúa el recuento de las letras, anotando el número de veces que aparece cada una. Posteriormente, con los datos de toda la clase, se confecciona una única tabla y se aprovecha este momento para introducir las ideas de efectivo (frecuencia absoluta) y frecuencia (relativa) a partir de la discusión que surge cuando se desea comparar los resultados de dos muestras de distinto tamaño.

En ese momento los alumnos están en condiciones de descifrar el mensaje, lo que consiguen con sorprendente rapidez, que les lleva a otro mensaje y, por fin, al tesoro, consistente, en general, en una consumición gratuita en el bar del Instituto.

Unos pocos ejercicios y actividades propuestos a continuación llevan a los alumnos a apreciar el interés de los estudios frecuenciales, a la formulación de las propiedades y relaciones entre efectivo, frecuencia y porcentaje y a la completa comprensión del concepto de muestra representativa.

2ª PARTE

ENCUESTA

Para evitar el cansancio que provoca en los alumnos la insistencia en un mismo método de aprendizaje se les hace entrega de un texto en el que aparece una presunta conversación entre cuatro alumnos dispuestos a realizar una encuesta entre sus compañeros y su profesora de Matemáticas, a lo largo de la cual se van poniendo en evidencia las principales características y dificultades de la planificación y realización de una encuesta.

Un cuestionario, al final de la conversación, y la consiguiente puesta en común en clase, permite a los alumnos estructurar y resumir dichas características.

A continuación los alumnos cumplimentan el formulario de una encuesta previamente confeccionada, con el fin de que observen las posibles dificultades que surgen en el momento de cumplimentarla, pues, posteriormente los alumnos la llevarán al resto de compañeros del Instituto y tendrán entonces que explicarla para evitar confusiones y malentendidos.

La realización de la encuesta por parte de todos los alumnos del Instituto es preciso planificarla hasta sus me-

nores detalles si se quiere tener cierta garantía de éxito y evitar el caos que produciría una deficiente preparación. Es imprescindible distribuir con sentido a nuestros alumnos encomendándole a cada uno una tarea precisa.

Una vez realizada la encuesta por todos los alumnos del Instituto, actuando los de nuestra clase como encuestadores, es imprescindible, de nuevo, una perfecta organización para proceder a la tabulación de los resultados de la encuesta de una manera efectiva, sin perder excesivo tiempo como ocurriría si se hace desordenadamente.

Se confecciona una tabla resumen que recoja fielmente la información obtenida y se comentan, mediante coloquio en clase, los resultados obtenidos, haciendo especial énfasis en las diferencias que pudieran apreciarse entre los distintos colectivos - muestras - de alumnos, como, por ejemplo, entre mujeres y varones, alumnos de 1ª y de COU, etc.

3ª PARTE

GRAFICAS

Como información inicial se exponen algunos ejemplos de diagrama de barras, diagrama de sectores y de polígono de frecuencias, aprovechándolos para suscitar interpretaciones y comentarios sin más datos que la gráfica. También con estos ejercicios iniciales se pretende que los alumnos comprendan las relaciones existentes entre una gráfica y su tabla de valores correspondiente y viceversa, adquiriendo la técnica de paso de una a otra.

Una vez que los alumnos cuentan con este mínimo imprescindible de conocimientos están en condiciones de aplicarlos a los resultados de la encuesta tabulados, confeccionando la representación gráfica que consideren más adecuada.

Se amplía la información sobre tipos de gráficas a otros un poco más complicados: histograma y pirámides de población, mediante la presentación y comentarios de unos pocos ejemplos.

A lo largo de todo este trabajo, los alumnos habrán ido recortando de periódicos o revistas cualquier representación gráfica que pueda considerarse estadística, y, por

grupos, irán confeccionando un mural con los recortes que hayan coleccionado, mural que una vez concluido quedará expuesto en las paredes del aula.

Se hace especial énfasis en los posibles errores y equívocos que aparecen en las gráficas, intencionadamente o no. Son analizados los equívocos y confusiones que provoca una escala no proporcional, con intervalos desiguales; los provocados por una gráfica truncada cuya escala no comienza en cero; las ilusiones ópticas producidas por ciertas representaciones bi o tridimensionales; se estudian, en fin, aquellos errores que pueden llevar a una interpretación engañosa de las gráficas estadísticas.

Continuando con esta idea se estudian igualmente las posibles falacias en las informaciones estadísticas, haciendo ver si los datos ofrecidos adolecen de exceso de precisión - con el fin de aparentar fiabilidad -, de falta de precisión - encubriendo datos poco claros -, o de una mezcla de precisión y de imprecisión, posiblemente con ánimo engañoso. Tratamos, más que nada, de prevenir al alumnado ante la continua dosis publicitaria a la que nos vemos sometidos constantemente.

MEDIDAS DE POSICION CENTRAL

Algunos ejercicios obligan a los alumnos a hacer uso intuitivo de la media aritmética, concepto que probablemente ya conocen pero que no se menciona explícitamente en estos ejercicios, utilizando ya sus propiedades más inmediatas, para, a continuación alcanzar la formulación completa y abstracta de la media que consiguen los alumnos sin dificultades.

El cálculo de la media cuando en la tabla de datos aparecen efectivos o cuando es conveniente agrupar los datos y utilizar las marcas de clase se va desarrollando paulatinamente, mediante actividades que conducen de una forma natural a la realización de las operaciones necesarias: la medición "a ojo" de la anchura y altura de la pizarra del aula proporciona un buen campo para experimentar el cálculo de la media con efectivos y la medición de las palmas de las manos de los alumnos se convierte, con un poco de ingenio, en una inmejorable ocasión para proceder, con bastante espontaneidad, al cálculo de la media por marcas de clase.

Algunas nuevas situaciones conducen a los alumnos a reconocer que, en algunas ocasiones, la media no es la medida más adecuada, como, por ejemplo, en las distribuciones con una clara asimetría. Se introduce así la mediana y se discute el sentido dado a la expresión "medida de posición central" al comparar ambas posibles medidas.

En otras ocasiones, que se presentan a continuación, la media ni siquiera es calculable - distribuciones de datos cualitativos o de intervalos abiertos - con lo que la mediana aparece en su justa dimensión.

Para introducir la moda basta con considerar una situación en la que media y mediana no sean calculables, como ocurre en cualquier distribución de datos cualitativos no ordenables - por ejemplo, una elección; con ello queda comprobada la necesidad de esta nueva medida ante la insuficiencia de las anteriores en determinadas ocasiones.

Finalmente, diversos ejercicios y actividades obligan al alumno a escoger entre las tres medidas conocidas la más adecuada para representar convenientemente a unos ciertos datos. En estos últimos trabajos se resume y consolida todas las ideas elaboradas a lo largo de la 4ª parte.

MEDIDAS DE DISPERSION

La insuficiencia de las medidas de posición central para resumir o representar completamente una tabla de datos queda en evidencia cuando se pretende comparar dos tablas, o cuando se intenta decidir entre dos objetos definidos por una serie de datos estadísticos. Es frecuente que las medidas de posición central sean coincidentes, mientras que, a simple vista, las dos distribuciones que se comparan presentan claras diferencias. Se introducen estas ideas mediante dos problemas núcleo: la comparación, y posterior decisión, entre las marcas de dos atletas y la diferenciación entre cuatro barrios de una misma ciudad atendiendo a la altura de sus casas.

Con estos problemas se pone de manifiesto el concepto de "dispersión" que los alumnos alcanzan fácilmente.

Resulta, pues, lógico buscar algunos números que den una idea, una medida, de la dispersión de una distribución, igual que se hizo para la centralización. Las definiciones corren a cargo del profesor ya que introducciones de otro tipo, más naturales quizá, acarrearían una excesiva pérdida de tiempo.

Tras la definición del rango o recorrido, se analizan sus deficiencias, siempre en base a los problemas núcleo, encontrando que éstas son suficientes como para exigir la búsqueda y definición de una nueva medida de dispersión, la desviación media, que no presente tantos inconvenientes.

Se describe el proceso para el cálculo de la desviación media mediante la composición de cuadros con sucesivas columnas que permiten seguir el proceso de cálculo ordenadamente.

La crítica de la desviación media como medida de dispersión se hace desde tres puntos de vista: la inconveniencia del valor absoluto para el cálculo algorítmico, el poco peso que la desviación media otorga a los datos más alejados del centro de la distribución y, por último, el desajuste entre el intervalo "normal", calculado con la desviación media, y el criterio habitual de "normal". Todo ello nos lleva inmediatamente a considerar una nueva medida que mitigue estos defectos: la desviación típica.

Algunas actividades finales dan ocasión a utilizar estas herramientas matemáticas en sencillos problemas de decisiones.

6ª PARTE

EVALUACION

La evaluación de los conocimientos adquiridos por los alumnos se realiza por medio de dos pruebas.

En la primera, una prueba objetiva, se introducen preguntas abiertas, para valorar la capacidad expositiva del alumno, su capacidad de síntesis, y cincuenta preguntas de respuesta múltiple, en general cuatro posibilidades, a veces sólo dos, mediante las que se valora la adquisición de conceptos, de técnicas y de actitudes.

La corrección de esta prueba de respuesta múltiple se efectúa muy sencillamente si se elabora previamente un modelo único de hoja de respuestas y se prepara una plantilla para superponer a la hoja de respuestas

La segunda prueba es un trabajo de campo a realizar por el alumno individualmente. El profesor puede dar sugerencias sobre el tema a escoger y, desde luego, fijará un esquema para su realización: recogida de datos (directa o indirecta), tabulación, gráfica, cálculo de medidas y conclusiones y comentarios.

España, después de la gran revolución que en todos los órdenes supusieron los Cuestionarios de 1.965, las dos revisiones posteriores se han realizado en función de criterios más que discutibles. Aquéllos surgen, entre otras razones de "la necesidad cada vez más apremiante de adaptar la enseñanza primaria a las exigencias de las nuevas estructuras socioculturales" (2). Los cuestionarios de Matemáticas eran introducidos con una serie de reflexiones donde las de índole psicopedagógicas estaban por encima de cualquier otra de carácter científico o académico, Vgr: aprendizaje activo, funcional, vinculado a situaciones de la vida diaria, interesante, paralelismo ejercicio-adquisición, etc. Entre los objetivos estrictamente matemáticos se resaltaba: el valor significativo, operativo e interrelacional, hábitos y destrezas, "al nivel necesario para la vida actual". En el cuestionario matemático, como en los demás, estaba ya presente una filosofía que la política educativa había de transformar pocos años más tarde en el ciclo de Educación General Básica.

En 2 de Diciembre de 1.970, a los cuatro meses de publicarse la L.G.E., aparece la reforma para la que serían proféticas las palabras de Dumont: Las Nuevas orientaciones Pedagógicas para la E.G.B., en su presentación del Área de Matemáticas se hacen afirmaciones como éstas: "una de las funciones fundamentales de las Matemáticas es la de ordenar conocimientos y crear estructuras formales que las resuman y expresen". "La enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles y preferentemente en la E.G.B., debe centrarse en el proceso de matematización de problemas, creación de estructuras formales...". "La Segunda Etapa de E.G.B. pretende ir hacia una mayor profundidad en el formalismo matemático" (3). Es evidente que el criterio de utilidad social de los Cuestionarios Nacionales había sido substituido por el científico, sin duda influido por la absorción en la E.G.B. de lo que anteriormente sellaba Bachillerato Elemental.

Diez años más tarde aparecen los Programss Renovados. La primera y principal razón esgrimida para el cambio es insólita; "No se han alcanzado las

INTRODUCCION:

Las Jornadas que estamos llevando a cabo son una prueba palpable de la preocupación creciente que existe en torno al aprendizaje y enseñanza de la Matemática. Hace solo 10 años hubiera sido impensable una reunión monográfica sobre este tema y ya fue suficiente que en las III jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas, celebradas también en Sevilla en 1.974, se incluyera un seminario de Metodología.

Hasta hace bien poco el problema fundamental de la enseñanza de la Matemática era ayudar a dirigir nuestra disciplina; se aceptaba como un axioma que nuestra ciencia era la que mayor rechazo provocaba en el alumnado, que era la que peor se asimilaba; que existía una incompatibilidad natural entre la gran mayoría del alumnado y la Matemática. La Metodología tenía por misión dulcificar este mal trago y de ahí que consistiese fundamentalmente en una serie de reglas que aconsejaban al Profesor paciencia y comprensión y en una colección de ejemplos ingenuos que facilitaban la introducción de una materia ardua.

Hoy día esto no es así.

Nuestra información sobre teoría del conocimiento ha aumentado considerablemente; después de Piaget sabemos que cualquier concepto no es posible de cualquier forma y en cualquier edad, y también sabemos que, aún cuando la génesis y el desarrollo de las nociones básicas más importantes es ya conocido, es aún mucho lo que queda por investigar en nociones fundamentales, algunas de las cuales están todavía sin desbrozar.

Nuestra cultura matemática, el nivel medio de conocimientos matemáticos que una persona culta utiliza, ha aumentado considerablemente y ha aumentado principalmente en el Profesorado. Hoy día raro es el Departamento Universitario de matemáticas en el que no se leen tesis o tesinas, o simplemente se investiga, cosa impensable hace solo diez años. El profesor de los niveles medio y básico va abandonando ese pragmatismo cientifista que consistía en repetir al pie de la letra, con carácter casi sacramental, las exposiciones del

manual de turno. Y parece que nos vamos enterando de que la ciencia, Matemática incluida, es un conjunto de hipótesis y axiomas mediante los cuales intentamos interpretar el universo físico y mental en el que estamos inmersos.

Todas estas consideraciones, y seguramente otras más, han de tenerse en cuenta a la hora de hablar sobre el aprendizaje y enseñanza de la Matemática. Pero esta enseñanza y ese aprendizaje no se realizan de un modo anárquico, sino en el marco de las disposiciones que la Administración Central, en particular, y los poderes públicos en general, establecen según señala el artículo 27-8 de la Constitución.

Y es precisamente porque nuestra competencia científica se está elevando por lo que surgen problemas a la hora de delimitar campos y de señalar objetivos, en definitiva a la hora de elaborar programas que marquen de forma correcta la dirección y el espíritu que debe llevar nuestra educación.

Los Programas son el instrumento fundamental que emplea el poder político para delimitar contenidos e indicar objetivos en cada uno de los niveles y ciclos de nuestro sistema educativo.

Misión del especialista, del estudioso en la materia, es sin embargo, realizar la crítica de los programas propuestos, de señalar vías alternativas, de dotar de profundidad y precisión a lo que está simplemente esbozado, de indicar contradicciones y rellenar lagunas.

Vamos a concretar nuestras consideraciones en uno de los bloques temáticos propuestos para el Ciclo Medio, pero antes creemos que es importante destacar algunas ideas que se vienen considerando en la elaboración de nuestros Programas.

LOS PROGRAMAS EN LA E.G.B.

En 1.974, M. Dumont, miembro de la Asociación Francesa de Profesores de Matemáticas, escribía: "Sufrimos desde hace años proyectos superficiales y estériles. Cada uno de ellos no sirve más que para reparar los fallos del precedente", (1). Estas palabras habrían de ser proféticas para nosotros. En

"PROGRAMACION DEL BLOQUE DE LAS FRACCIONES EN EL CICLO
MEDIO DE LA E.G.B."

II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE
Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS.

Ponencia presentada por el
equipo Granada-Mats:

D. Luis Rico Romero.
D^a. Encarnación Castro Martínez.
D. Antonio Corpas Herenas.
D. Antonio Fernández Cano.
D. José González Alonso.
D. Felipe López Fernández.
D. Tomás Mesas García.
D. Oscar Sáenz Barrio.
D. Julián Valenzuela Herreras.

SEVILLA, Abril 1.982

Texto preparado por:

D. Luis Rico Romero
D. Oscar Sáenz Barrio

PONENTE:

D. Luis Rico Romero

cotas de rendimiento que serían deseables... Un 30 % de los alumnos no alcanzan el Título de Graduado Escolar al término de la E.G.B." (4). Se trata, pues, de una razón puramente académica. En la presentación del documento de apoyo para las Matemáticas se enfatiza, como una de las exigencias del cambio, "las dificultades del paso de la E.G.B. a la Enseñanza Media"; se citan además las encuestas de la Dirección General de la Enseñanza Media a los Institutos de Bachillerato sobre la conexión entre niveles de E.G.B.-B.U.P., y la de la Inspección de Bachillerato de 1.976 sobre el rendimiento de primero de BUP en relación con los alumnos que acceden a él: "En relación con las Matemáticas el 55 % de los profesores consideran insuficiente el nivel de conocimientos de los alumnos que llegan a los I.B. y el 64 % considera insuficiente el nivel inicial de los alumnos en cuanto a aptitudes y dominio de las técnicas de trabajo" (5).

Merece la pena recoger el listado de dificultades que este documento aduce en apoyo de "un cambio metodológico que permita corregir las diferencias antes apuntadas" (6).

- Conocimiento incorrecto del concepto de función, dominio e imagen.
- Ausencia o conocimiento incorrecto de los contenidos relativos a la geometría del triángulo, ángulos, segmento, paralelismo y perpendicularidad, con todo lo que supone respecto al proceso de resolución de problemas.
- Incorrecta formalización de los conjuntos, relaciones y estructuras.
- Fallos en los automatismos del cálculo con números racionales y radicales.
- Fallos en los mecanismos de simplificación y resolución de ecuaciones.
- Fallos en el manejo operatorio de la geometría del plano.
- Dificultad para hacer una lectura comprensiva y seguir un razonamiento.
- Falta de hábito para mantener la atención.
- Dificultad para la representación gráfica.

Lo lamentable es que no hay ni una sola referencia a la incapacidad para aplicar la Matemática a la vida real, encontrar situaciones matemáticas en la vida común del niño, falta de interés por la Matemática, con rechazo frontal a veces, falta de inventiva para crear problemas, etc. Al Profesorado de I.B. solo preocupan las dificultades de formalización de procesos y mecánica calculista.

Desde esta perspectiva no podemos hacernos ilusiones de que los Programas Renovados supongan en Matemáticas ninguna mejora. Están pensados fundamentalmente como un soporte para la Matemática del Bachillerato cuando en este país solamente un 66% accede a él y esta tasa tendrá que ir decreciendo en beneficio de la Formación Profesional. Sin embargo un equipo en el que han participado casi el 50% Profesores de Bachillerato (y ni uno solo de E.U. de Magisterio) para redactar Programas destinados a la E.G.B. no deja mucho margen a la esperanza.

Dentro de todo el marco anteriormente expuesto vamos a presentar el desarrollo de un bloque temático de los Programas Renovados: el Bloque de las FRACCIONES en el Ciclo Medio de la E.G.B.

EL CONCEPTO DE FRACCION.

El tema de las fracciones es uno de los más controvertidos de la aritmética y que más motivos ha dado a la investigación. Es controvertido en el terreno social, pues si la familia y la sociedad consideran su dominio como expresión de una cultura matemática más que aceptable, sin embargo, las investigaciones descriptivas han evidenciado una modesta utilización en la vida cotidiana y dentro de este reducido uso una más reducida variedad de fracciones.

Wilson y Wise, por ejemplo, encontraron que apenas en un 10'6% de todos los problemas que se pueden presentar en la vida común de la familia, el trabajo, la empresa y el comercio, las diversiones, etc., intervenían las fracciones, pero más del 95% de ellas se resumen en ocho: $1/2$, $1/3$, $2/3$, $1/4$,

$1/5$, $1/8$ y $1/10$, y como puede concluirse el uso de las fracciones es bastante restringido y además muy elemental en su forma.

Por otra parte hay también una gran controversia en relación con la madurez necesaria para atacar este dominio significativo y su operatoria. A este respecto contrasta la opinión de Brueckner para quien la edad mental idónea para la división de la unidad en partes es de 8 a 9 años, con la del Comité de los 7, con Washburne a la cabeza, para quienes la edad de iniciación varía entre los 9 años (edad mental mínima) y los 9 años y 10 meses (edad mental máxima). El mismo Washburne, a la vista de los resultados, tuvo que reafirmar retrasando los límites mínimo y máximo para la iniciación entre los 9 años 10 meses para el primero y los 10 años 9 meses para el segundo, si bien para numeradores igual a uno, es decir, repartir la unidad, la comprensión es anterior a esa edad. Entre nosotros, Fernández Huerta, ha señalado que, "la emergencia comprensiva para las fracciones es un proceso que no se alcanza con rapidez ni con datos numéricos ni con datos prácticos". Exige un nivel mental próximo a los 9-10 años (7).

En una reciente experiencia realizada por nosotros hemos intentado comprobar cuándo el niño:

- 1º- Diferencia el segregar en tres partes y dividir en tercios.
- 2º- Diferencia entre unidad fraccionaria y número fraccionario.
- 3º- Establece relaciones diferenciales entre medio y tercio respecto de un todo correspondiente.

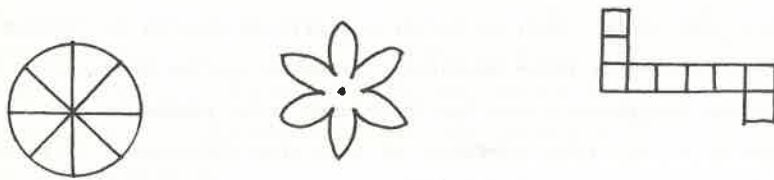
Los datos vinieron a confirmar que si bien la operación es anterior, los aspectos significativos de los problemas no se logran por encima de los dos tercios de la clase hasta después de los 11 años y aún a esa edad comparar un medio con un tercio de una misma magnitud presentaba serios problemas al confundir el tamaño de la parte con el número de partes hechas.

Nosotros lo hemos estudiado mediante la representación de estas figuras:



Otra cuestión importante a investigar es cómo actúa el niño cuando se trata no ya de dividir un todo en tres partes, sino cuando este todo está formado por elementos fácilmente segregables.

Nosotros lo hemos hecho con estas figuras:

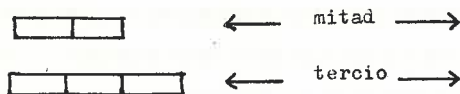


Un nuevo problema importante es la relación entre mitad y tercio. Si nos limitásemos a la mera repartición estaríamos impulsando un aprendizaje memorístico y nada significativo; un aprendizaje significativo es un aprendizaje relaciona.

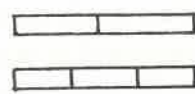
Entonces, ¿Qué sentido tiene mitad y tercio? ¿Son iguales? ¿Cuál es mayor?.

Nosotros hemos propuesto a los alumnos estas figuras:

EJEMPLO I



EJEMPLO II



Hemos aplicado a una muestra de 266 alumnos de 3ª a 6ª de algunos colegios Públicos y Privados de Granada una prueba conteniendo estos tres tipos de

problemas, cuyos resultados se insertan, en términos de porcentaje de éxito, en la siguiente tabla:

CURSOS DE E.G.B.

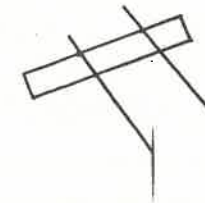
PROBLEMA	3ª	4ª	5ª	6ª
I.- 3 partes y tercio.....	40'7	33	62	84
II.- Tercio de partes contables..	48	30'5	45'6	92
III.- Mitad y tercio.....	14'8	11'6	25'8	44
N =	54	69	66	77
TOTAL:	226			

Los datos son tan elocuentes como desesperanzadores.

PROBLEMA I.- No está claro que hallar un tercio sea dividir en tres partes iguales:

Los errores más frecuentes se dan en:

- Dividir las barras en un número variable de partes.
- Dividir las barras en cuatro partes mediante tres trazos, lo que evidencia que el niño empieza a saber que tercio tiene que ver con tres, aunque no se fije en el resultado.
- Dividir en tres partes claramente distintas: dividir en tercios se identifica con separar en tres partes cualesquiera.
- Separar en tercios "aparentes", es decir, tomar las terceras partes sobre un lado pero los trazos de separación solo son perpendiculares en las barras horizontal y vertical pero no en las inclinadas, así:



Conclusiones:

- Mientras que hacer tres partes y dividir en tercios se resuelve a nivel numérico con la misma operación, a nivel práctico no se supera el 50 % hasta el 5º curso y aún en 6º curso hay un 10 % de errores.
- Cuando ya se tiene conciencia de la igualdad de las partes la posición relativa del objeto a dividir condiciona el éxito de la operación. Interviene un componente de tipo espacial que aprisiona aún el pensamiento.

PROBLEMA II.- Hallar el tercio de unidades formadas por elementos segregables.

Tipos de errores más frecuentes:

- Pintar un sexto de rojo, un sexto de azul y otro de verde, en vez de $2/6$ de cada uno. Lo mismo con la figura lobulada.
- En la figura de nueve cuadrados el más frecuente es considerar tres partes, los tres bloques verticales de la izquierda, los cuatro bloques siguientes horizontales y los otros dos verticales de la derecha; se hacen por tanto tres partes, pero no tres tercios.
- Pintar dos bloques de un color, bloque en blanco, otros dos bloques, un blanco, otros dos, bloque en blanco. Diferencian tres partes de dos bloques cada una y desprecian los tres restantes. Parece que se constituye un cliché operativo a partir de las figuras anteriores (cada tercio en ellas son dos partes), que aplican a la tercera figura.

Conclusiones:

- Lo más probable es que la habilidad para realizar repartos de este tipo se deba a la capacidad de percibir formas espaciales, a la experiencia para integrar estímulos visuales, a la capacidad de disgregar y reagrupar las partes en un espacio mental; esta capacidad parece lograrse en un altísimo porcentaje en 6º curso (11-12 años, período de

las operaciones formales).

PROBLEMA III.- Es el aspecto más difícil, como se demuestra si tenemos en cuenta la enorme dificultad que se presenta incluso en 5º y 6º cursos, donde las operaciones formales permiten un avance notable respecto de cursos anteriores, pero que no llegan ni al 50 %.

- Los dos ejemplos demuestran que los conceptos no se han interiorizado; se ha memorizado el mecanismo de obtención de mitad y tercio (división por dos y por tres), pero aún son incapaces de establecer relación entre ellos y cuando lo hacen se ven imposibilitados de desprenderse de los datos que les ofrece la percepción; son prisioneros de los esquemas perceptivos. En el ejemplo 1 afirman que el tercio es mayor porque la barra es más larga; sin embargo lo que se ha preguntado es ¿Qué es mayor, la mitad o el tercio?.

Se han centrado en la comparación del todo y no en la de las partes. En el ejemplo 2 los errores se dividen entre estas respuestas: son iguales (vuelven a depender de la comparación del todo), o es mayor el tercio (haciendo, sin duda, referencia a que la segunda barra está dividida en tres trozos).

LA CONCLUSION FINAL es que, si bien el niño de tercer curso, y por supuesto de los siguientes, conoce qué es la mitad y el tercio (cuarto y quinto no parecen que sean una excepción a la significación), tal conocimiento es puramente mecánico en un altísimo porcentaje, y que solamente en 6º curso, ya en la fase de las operaciones formales, se tiene dominio conceptual de esas nociones y de sus relaciones recíprocas.

Y es que la dificultad de la fracción depende de su misma complejidad.

Mientras el número natural representa a un conjunto cuyos elementos se pueden coordinar término a término con las unidades que se encajan en el número, en cambio, el número fraccionario no es un número absoluto (solo hasta los 6-6 1/2 años) sino que expresa una relación de partes a todo.

Este carácter relativo o inacabado es lo que le confiere su carácter movido y versátil. Cuando el niño, al contar los elementos de un conjunto, dice: "cardinal 5", ese cinco es estable, rotundo, sea cual sea la disposición o el tamaño de los elementos cuyo cardinal es. Sin embargo cuando cuenta unidades fraccionarias "5" no dice nada del objeto cuya fracción es, a no ser que ese cinco se ponga en relación con las partes en que se ha fragmentado el objeto: 6, 8, 10 ó tal vez 5. El tamaño de ese 5 es cambiante.

Las dificultades, repetimos, nacen del mismo carácter complejo que el número fraccionario tiene, ya que supone tres aspectos diferenciados:

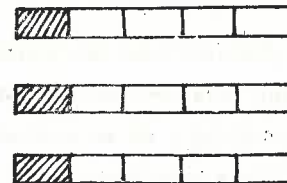
- Una partición de la unidad (partición en sentido estricto, no segregación).
- Un reagrupamiento de las unidades fraccionarias para formar la cantidad fraccionaria.
- Establecimiento de la relación entre el resultado de la partición y las unidades que se toman. Esto es la verdadera fracción (8).

A esto aún habría que añadir la contradicción aparente entre la notación de la fracción y el proceso. La fracción $\frac{3}{5}$ la leemos "tres quintos" o "tres quintas partes de un objeto", que es precisamente el orden inverso a como la hemos establecido: primero hemos "partido" el objeto y luego agrupamos tres partes. Sin embargo en la lectura parece que lo primero es agrupar y luego dividir.

- Tomamos un objeto, lo dividimos en cinco partes y agrupamos tres = $\frac{3}{5}$.



- Agrupamos tres objetos, los dividimos en cinco partes. Cada parte = $\frac{3}{5}$.



Sea cual sea el proceso, matemáticamente el resultado es el mismo, pero la lectura "tres quintos" está más cerca del II que del I, aunque éste sea psicológicamente más significativo que aquél.

Para llegar a comprender este proceso hay que pasar por tres estadios claramente diferenciados:

- Conocimiento de la unidad fraccionaria como tal unidad (fracción unidad). Es relativamente fácil, pues ya a los seis años el niño puede comprender como una unidad el concepto de "mitad", bien de un objeto fácilmente divisible en dos, bien de un grupo pequeño de objetos, bien de pares de objetos. La unidad fraccionaria tiene aquí un carácter concreto: maneja la mitad como si fuera el objeto entero. No es que los confunda, lo que ocurre es que desconoce la relación parte-todo.
- Comprensión de la fracción como parte de un objeto. Para Fernández Huerta no es probable que este período pueda lograrse antes de los 9 años de edad mental. En él se lograría comprender el significado de la relación parte-todo y alrededor de los 10 años se introduciría la suma y resta de fracciones de igual denominador (9).
- La tercera fase vendría dominada por operaciones y ejercicios con fracciones más complicadas, suma y resta de igual denominador pero de valores numéricos mayores. Suma y resta de fracciones con distinto denominador, multiplicación y división.

FRACCION DECIMAL.

A la complejidad intrínseca de la fracción como una síntesis de dos operaciones (partición y agrupamiento) y una relación (de las partes con el todo), se debe añadir ahora una nueva dificultad y es el diverso uso que se puede hacer con ella. Por ejemplo: $\frac{3}{4}$ se puede usar como:

- Medio de comparación: Los años de M^a Pilar son los $\frac{3}{4}$ de los de Juana M^a.
- Resultado de una partición y agregación de partes: se han comido los $\frac{3}{4}$ de la empanada.
- Submúltiplo de una unidad de medida: para hacer el flan se necesitan $\frac{3}{4}$ de litro de leche.
- Un número: $\frac{3}{4}$ está situado entre 0 y 1.

Es claro que la fracción suele presentarse bajo el segundo aspecto, pero cuando esa fracción se expresa como un número decimal, entonces adquirirá inmediatamente el valor de un número.

Debemos afirmar que el acercamiento de los decimales al niño se debe, al menos entre nosotros (y por supuesto entre todos los sistemas tipo francés) más a criterios sociales que de maduración.

Ya se ha indicado cómo en cuanto a la fracción hay al menos un año de adelanto respecto de las recomendaciones de los expertos más moderados (porque otros las introducirían dos y aún tres años después),

Los estudios descriptivos vienen a confirmar las posturas más radicales. Con los decimales pasa absolutamente igual, sin embargo es la estructura decimal de nuestro sistema de medidas el que obliga a anticipar su enseñanza antes de alcanzar un grado adecuado de madurez para su comprensión. En algunos países, como hasta hace pocos años en Inglaterra, los decimales no se introducían hasta la enseñanza media; es natural que ahora, con su incorporación al sistema decimal se hayan replanteado la edad de iniciación.

Existe otro problema y es el contraste entre el puro rigor "decimal" y el uso que el hombre de la calle hace de la decimalización: nadie pide 4 dé-

cimales de metro de tubería, ni dos décimas de kilo de bicarbonato, sino que todo el mundo se va arreglando con el decimal-unidad, precisamente, porque siendo el concepto más fácil es el que queda mejor fijado a nivel de significación y de operatividad. Esto nos conduce a seriar las tres fases en que suele presentarse el estudio de los decimales:

1ª.- Decimal-unidad. Tiene las mismas características que la unidad fraccionaria; tiene entidad real en sí misma; el niño maneja la unidad decimal con la misma soltura que la unidad entera: suma, resta y opera con centímetros (y hasta hace unos años con los céntimos) lo mismo que con los cuartos y medios kilos y los metros o litros. Estas unidades fraccionarias son tan concretas como sus unidades enteras. Incluso el adulto piensa pocas veces que el décimo de lotería tiene algo que ver con una unidad mayor de la que es una fracción decimal. El dominio de la unidad decimal no tiene significación fraccionaria. De ahí que ésta fuera la intención al presentar en tercer curso el centímetro y el decímetro como unidades de medida en sí mismas, con muy escasa referencia a la unidad de donde proceden.

2ª.- El número decimal. Puede presentarse a continuación de la fase anterior. No se interpreta en relación con la fracción, sino como continuación de los números enteros naturales encontrándose entre el cero y la unidad.

Este sentido del decimal es más comprensible aún que la fracción, ordinaria y de hecho podría enseñarse antes que ella. Sin embargo parece que el significado de décimas, centésimas, etc., es más confuso para el niño que la decena, centena, millar.

3ª.- Según Fernández Huerta, la fracción decimal representa en el orden de la maduración el momento de mayor retraso (9). El Comité de los siete cifró la fracción decimal en más de 10 años mentales y las operaciones con fracciones decimales todavía deberían ser posterior-

res. Sin embargo hay que considerar que buena parte de la métrica americana no era decimal por lo que la fracción decimal la contemplaban como un caso particular de la ordinaria. Con independencia de estos hechos, que en buena medida dependen de contextos culturales, la verdad es que, como también afirma Fernández Huerta, "una vez aceptada la expresión decimal, número decimal, y fracción decimal, se fusionan en el proceso simplificador de la mente humana" (10).

OPERACIONES CON FRACCIONES Y DECIMALES.

Las operaciones con decimales y fracciones se han mostrado como uno de los escollos más duros del cálculo aritmético. M. Baró, en una investigación realizada en 1.956 (11) llegaba a estas conclusiones:

- a).- La emergencia a la comprensión de las fracciones (y solamente para la suma y resta con denominador común) ronda los 9-10 años.
- b).- Para el número decimal y sus operaciones, así como para las relaciones entre fracción ordinaria y decimal, se sitúa su significación entre los 11 años 6 meses y los 12 años.
- c).- Para la multiplicación y división de fracciones entre los 12 y los 13 años.
- d).- Y para la suma y la resta de fracciones con distinto denominador entre los 13 y los 14 años.

Resultados que no varían mucho de los que 20 años más tarde la Profesora Castro encontró en escolares de la provincia de Granada (12):

OPERACION	EJEMPLO	3º	4º	5º	6º	7º
Suma de fracciones.	$2/3 + 3/5$	8	18	64	37	66
Resta de fracciones.	$1/3 - 1/4$	6	13	47	33	66
Multip. de Fracc.	$3/4 \cdot 4/5$	11	15	53	51	76
Div. de frac.	$2/3 : 5/6$	6	7	37	47	77
Suma decimales.	$0'540'7540'25$	26	44	57	75	82
Resta decimales.	$10 - 7'35$	11	26	33	51	59
	$3'1 - 3'01$	15	27	28	47	58
Multip. decimales.	$0'1 \cdot 0'1$	12	17	21	53	61
Div. decimales.	$1 : 0'1$	4	8	12	31	49
	$6 : 0'5$	5	11	16	37	51
Exp. dec. frac.	$21/35 =$	0	0	5	16	39

(Datos en tantos por ciento)

(Muestra: 1.709 alumnos).

A pesar de que datos como estos se conocen desde hace años, nuestros escolares son iniciados prematuramente en fracciones y decimales, y la mayoría las realizan entre dos y tres años antes de que emerjan las aptitudes que permiten obtener de ellos su exacta significación, como cabe concluir de la tabla anterior:

- a).- La suma de fracciones de diferentes denominadores, obtiene en 5º curso un 64 % de éxitos, mientras que un curso después, baja al 37 % para alcanzar en 7º el 66 % lo que evidencia un aprendizaje puramente mecánico que basta dejar de practicar para que se olvide.
- b).- En la resta de fracciones de diferente denominador se observa parecida secuencia, aunque con rendimiento inferior 47, ee, 66 %.
- c).- Por lo que se refiere a las operaciones con decimales, salvo la suma, con un 57 % en 5º curso, el resto oscila entre el 12 % y el 33 % que en 7º alcanzan ya entre el 50 y el 60 %.

d).- El dato de un 39 % de aciertos en 7º, en la expresión decimal de una fracción, evita todo comentario.

Pero, ¿Cuáles son, entonces, los escollos más importantes? A falta de otros datos sirven de orientación los obtenidos por Brueckner entre niños americanos y que además introducen este aprendizaje un poco más tarde que en España, aproximadamente un año después.

Sin embargo, creemos que, aunque los datos no permiten ser optimistas, alertar al profesorado acerca de los errores más comunes, tanto en las operaciones con decimales como con fracciones, puede dar un vuelco a los niveles de rendimiento actualmente alcanzados puesto que ha de permitir a los profesores una mejor atención a los puntos específicos de error y no sólo a los procesos generales de las operaciones. Recogemos las tablas de Brueckner y Bond insertas en su obra: "Dificultad y tratamiento de las dificultades del aprendizaje" (13).

T A B L A I

ERRORES MAS FRECUENTES EN LAS OPERACIONES CON DECIMALES .

1.- Suma: % del total.

- a).- Colocación defectuosa de la coma en el resultado..... 47'4
- b).- Errores operativos..... 27'4
- c).- Errores al sumar quebrados y decimales..... 7'4

Número total de errores analizados: 580 = 8'75 %

2.- Resta:

- a).- Errores puramente operativos 73'8
- b).- Colocación defectuosa de la coma en el sustraendo..... 15'9
- c).- Colocación defectuosa de la coma en el resto..... 1'7

Número total de errores analizados: 465 = 7'8 %

3.- Multiplicación:

3.- Multiplicación:

- a).- Defectuosa colocación de la coma en el producto..... 34'8
- b).- Errores operativos..... 25'6
- c).- Dificultades en la adición de ceros..... 8'6
- d).- Omisión de la coma decimal en el producto..... 6'6

Número total de errores analizados: 1.814 = 27'5 %

4.- División:

- a).- Colocación defectuosa de la coma en el cociente..... 38'3
- b).- Errores operativos..... 16'4
- c).- Uso incorrecto de los ceros en el dividendo o en el cociente..... 14'7
- d).- Omisión de la coma en el cociente..... 9'5

Número total de errores analizados: 3.751 = 56'75 %

De los 6.610 errores computados más del 80 % los acaparan la multiplicación y la división, y ésta sola más del 50 %. Parece ser que las faltas más repetidas en todos los casos son de tipo operacional (combinaciones básicas, llevar, colocación de las cifras en su orden correspondiente, etc.), y específicamente en la división y en el producto es la colocación de la coma y el uso del cero.

Los errores más comunes del cero en la división de decimal por entero son:

a).- Omisión inmediatamente después de la coma: $0'063 \overline{) 9}$
0'7

b).- Adición indebida: $4'5 \overline{) 9}$
0'05

c).- Omisión en lugar intermedio: $15'25 \overline{) 5}$
3'5

"Muchos de estos errores -dicen Brueckner y Bond- obedecen a una falta de comprensión del significado de los decimales y de las relaciones implicadas en las operaciones" lo que viene a confirmar que la enseñanza o se anticipa al nivel de maduración mental del alumno o se hace de forma puramente memorística mediante el cálculo mecánico.

T A B L A I I

DIFICULTADES MAS FRECUENTES EN LAS OPERACIONES CON FRACCIONES.

1.- Suma:	<u>%</u>
a).- Incomprensión del proceso: ejemplo: sumar numeradores y denominadores.....	20'2
b).- Correcciones en la simplificación de los términos.....	17'5
c).- Dificultad en la suma	17'1
d).- Errores operativos.....	13'8
Número de errores analizados: 6.202	
2.- Resta:	
a).- Dificultades en la reestructuración del número: ejemplo: 10 1/4 - 4 3/4.....	24'3
b).- Dificultades en la significación.....	14'6
c).- Incomprensión del proceso 4 3/4 - 3/4 = 40.....	14'6
d).- Reducción a común denominador.....	8'3
Número de errores analizados: 7.511	

"En todas las operaciones -dicen los autores- la incomprensión del proceso es una de las principales causas de error; evidentemente las operaciones con quebrados no tenían ningún significado para muchos escolares". Atención a esta última frase, pues la investigación se centró en escolares de 5º y 6º grado. Es de destacar que la causa de los atranques, tanto en decimales como en fracciones, prácticamente es la misma: falta de significación, lo que conlleva incomprensión de los procesos operatorios.

N U E V A S - E S T R A T E G I A S :

LA PROPUESTA DE LA ADMINISTRACIÓN

Datos como los que acabamos de comentar no son para mostrarse muy optimistas, porque demuestran una dificultad real que va más allá de la metodología y de la estructura de los Programas. Ante esto la propuesta que hacen los Programas Renovados es querer atacar el problema mediante la operativización de objetivos y la elaboración de documentos de apoyo al profesor.

Nosotros hemos procedido a la categorización de los objetivos y actividades mediante la taxonomía de Wilson, (17) especialmente preparada para objetivos matemáticos, siguiendo muy de cerca las instrucciones al profesorado en el Documento de Apoyo. (Vease tabla pág siguiente).

Con los resultados reflejados en esta tabla se pueden extraer las siguientes conclusiones: de los quince objetivos referentes a fracciones solamente dos de ellos es posible situarlos en la categoría de APLICACION, tres en la de COMPRENSION y diez en la de CALCULO.

Recordemos que la categoría de COMPUTACION o CALCULO representa la conducta más elemental que se espera del estudiante como resultado de la instrucción; en general se refiere a la habilidad para manipular elementos de un estímulo en relación con una reglas aprendidas.

La categoría de COMPRENSION equivale a entender y reconocer conceptos matemáticos; conductas típicas de este nivel son: utilizar una regla o un principio para responder a una cuestión, seguir un razonamiento, habilidad para leer o comprender un argumento matemático, etc. Es evidente que los objetivos propuestos están descritos para lograr un conocimiento de los aspectos mecánicos y memorístico-abstractos de la Matemática (calcular, aprender reglas, conceptos, terminología, representaciones, etc), y a muy larga distancia conductas de Aplicación, y entre ellas, la más simple, -resolver problemas- con olvido de otras de mayor densidad intelectual como capacidad de comprensión, análisis de datos y reconocimiento de relaciones. Por supuesto la categoría de

Taxonomía					Modelo NLSMA										
A.0 - CALCULO (Computación)					A.1 - Conocimiento de hechos específicos										
B.0 - COMPRENSION					A.2 - Conocimiento terminológico										
C.0 - APLIC.					A.3 - Aptitud para operar										
D.0 - ANALISIS															
B.1- Conocimiento de conceptos.															
B.2- Conocimiento de principios y reglas y generalización															
B.3- Conocimiento de estructuras matemáticas															
B.4- Capacidad para traducir elementos de un modo a otro															
B.5- Capacidad para seguir una demostración															
B.6- Capacidad para leer e interpretar un problema															
C.1- Capacidad para resolver problemas comunes															
C.2- Capacidad para hacer comparaciones															
C.3- Capacidad analizar datos															
C.4- Aptitud reconocer relaciones.															
D.1- Aptitud para resolver probl. poco usuales															
D.2- Capacidad para descubrir relaciones															
D.3- Capacidad para construir demostraciones															
D.4- Capacidad para criticar demostraciones															
D.5- Capacidad para formular y validar generalizaciones.															

de ANALISIS no se contempla.

Si se releen las deficiencias que los profesores de E.M. achacaban a la E.G.B., recogidas al comienzo de esta comunicación, se observaba que la estructura de estos objetivos viene a ser la réplica a tales acusaciones. En otras palabras, que la Matemática en el segundo ciclo de la E.G.B., y en general, viene a servir, no a los intereses de un nivel con personalidad propia y acabada en sí misma, sino los de la Enseñanza Media, cuya Matemática, como es bien sabido, es acusada universalmente por su intelectualismo, abstraccionismo, formalismo, y antivitalismo de sus programas. Comentario aparte merecía la noción de "operador", confusa y ambigua, que precede al enunciado de los objetivos.

La severa censura que al Cuestionario Matemático se hizo en las Jornadas para el Estudio de los Programas Renovados de la E.G.B., organizadas por el I.C.E. de la U. Autónoma de Madrid en Mayo de 1.981 nos releva de más comentario. (15).

CAMPO ACOTADO DE ESTUDIO.

El punto de vista que nos proponemos desarrollar tiene como finalidad dotar de significación a los conceptos y a los procesos. La evidencia experimental, como ya hemos puesto de relieve, nos indica dos cosas:

- 1ª.- Que hay una enseñanza prematura, lo que conduce a una cuestión de madurez psicológica.
- 2ª.- Que hay una formalización, también prematura, antes de que se hayan consolidado procesos experienciales que permitan la inferencia y generalización matemática.

El alumno del Ciclo Medio se encuentra inmerso en la etapa de las operaciones concretas, es capaz de razonamiento pero en los límites de los concretos. Si no ha realizado manipulaciones con objetos reales no es posible pasar a la acción acompañada de la narración y posteriormente a la conducta del relato. Sin estos pasos, sin una experiencia con acciones reales que corres-

pondan a las nociones básicas de las fracciones no será posible que se interioricen, y que por tanto, los procesos formales que resumen, codifican y sistematizan, sean significativos; y es precisamente el trabajar con la fracción como conocimiento empírico lo único que justifica la inclusión de este contenido en el ciclo medio. Los aspectos puramente formales deben tratarse muy secundariamente, y en todo caso será en el ciclo superior en donde puedan y deban adquirir todo su significado. Este tratamiento empírico de la fracción no prescindirá de las notaciones y expresiones simbólicas, pero solo en tanto sean significativas, es decir correspondan a un momento madurativo adecuado. El profesor de este ciclo debe cuidar especialmente la moderación en la formalización.

En todo caso hay que dar respuesta a un inventario lo más exhaustivo posible de situaciones reales: compras, viajes, juegos, construcciones, etc. De esta forma la Escuela ayudará al alumno a organizar un bagaje experiencial del que dispone previamente, y al mismo tiempo ampliará y sistematizará el campo posible de experiencia procurando que las nuevas estructuras vayan siempre dotadas de sentido.

Es conveniente no olvidar que a esta edad una formalización no es independiente de su contenido concreto y que aún en el plano concreto los razonamientos no son transferibles de un terreno a otro.

Nuestra propuesta para este contenido en el Ciclo Medio queda centrada en dos ideas base:

- 1º.- Aportar al alumno toda la experiencia necesaria para el trabajo con las fracciones.
- 2º.- Organizar la experiencia adquirida en estructuras significativas: convertir el trabajo con fracciones en una operación concreta.

ORGANIZACION DEL CONTENIDO.

Pasemos a presentar la distribución del contenido de las fracciones en los distintos niveles de este ciclo haciendo hincapié en aquellos aspectos

que nos parecen más importantes.

TERCER NIVEL:

Trabajamos en el proceso de fraccionar: dividir la unidad en partes iguales.

Contenidos:

- Medio y Mitad. Mitad de un objeto y mitad de una cantidad.
- Tercio y tercera parte. Tercio de un objeto y de una cantidad.
- Cuarto y cuarta parte. Cuarto de un objeto y de una cantidad.

Aspectos a tratar:

- Reconocimiento de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de un objeto homogéneo (círculo, cuadrado, rectángulo, segmento, etc).
- Reconocimiento de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de un objeto articulado (margarita, rectángulo, cuadriculado, etc.).
- Reconocimiento de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de una cantidad formada por unidades discretas y no superior a doce.
- Reconocimiento de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de una cantidad.
- Obtención gráfica de $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de un mismo objeto o cantidad.
- Reconstrucción de la unidad a partir de mitades, tercios y cuartas partes de un objeto.
- Comparación entre $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de un mismo objeto o cantidad.

Consideraciones metodológicas:

La notación numérica no es fundamental, se insistirá más en los términos "medio", "tercio" y "cuarto", solo se irán reemplazando por la notación $1/2$, $1/3$ y $1/4$ cuando se compruebe que no hay confusión.

Se corregirán los errores ya indicados para la división en tercios, sobre la base de que las partes obtenidas deben ser siempre iguales; conviene singularizar claramente la acción de fraccionar, de cualesquiera procesos de dividir un objeto o cantidad.

Un aspecto de ampliación a considerar es el caso en que nos encontremos con $1/2$, $1/3$ y $1/4$ de igual dimensión.

Proceso a seguir en la formación de la unidad fraccionaria:

1.- "Las acciones sucesivas se coordinan en una sola" (16).

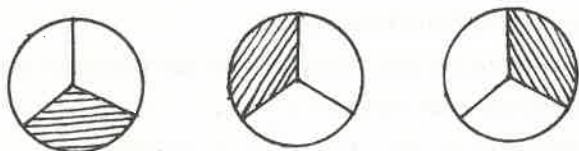
De partir distintos objetos en tres partes iguales para obtener un tercio de objeto (idem con un medio y un cuarto)

2.- "El esquema de la acción se hace reversible".

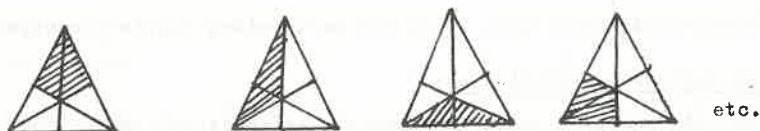
Cada tercio de un objeto resulta necesariamente de haber dividido dicho objeto en tres partes iguales.

3.- "Un mismo punto puede ser alcanzado, sin que se altere, por dos caminos diferentes".

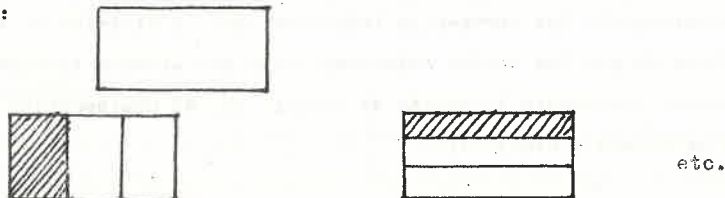
Así es posible señalar un tercio de objeto de varios modos distintos:



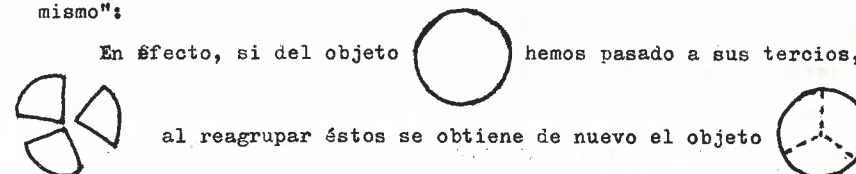
Y según la partición sea más sofisticada el número de posibilidades aumenta:



También hay varias posibilidades de obtener el tercio de un objeto:



4.- "La vuelta al punto de partida permite encontrar éste idéntico a sí mismo":



5.- "La nueva acción, al repetirse, o no añade nada a ella misma o es una nueva acción con efecto acumulativo".

Así cada vez que dividimos en tres partes iguales obtenemos **TERCIOS** del objeto dividido.

Queda así ejemplificado el agrupamiento mediante el cual de las acciones pasamos a la operación de fraccionar y obtención de unidades fraccionarias. De este modo el alumno llega a las nociones de permanencia e invariabilidad necesarias para interiorizar la fracción. Este, creemos, es el objetivo fundamental de este nivel.

CUARTO NIVEL.

Proceso en el que se trabaja:

- Partición de la unidad en partes iguales.
- Reagrupamiento de las unidades fraccionarias para formar la cantidad fraccionaria.
- Establecimiento de la relación entre el resultado de la partición y las unidades que se toman.

No deben utilizarse denominadores distintos de los "útiles": 2, 3, 4, 5, 8 y 10.

Contenidos:

La unidad y sus partes. Lectura y simbolización.

Fracción de un objeto, reconocimiento y obtención en una figura geométrica, en un segmento y en una cantidad.

Lectura escritura de fracciones. Simbolización: numerador y denominador.

Fracción decimal. La décima: presentación, escritura decimal.

Las distintas décimas. Las diez décimas.

Objetos enteros y décimas de objeto.

Centésima: presentación, escritura y lectura. Números con centésimas.

Suma y resta de números decimales con igual número de cifras.

Aproximación decimal en una división.

Consideraciones metodológicas:

Insistimos en la falta de interés que tienen para el niño los denominadores distintos a los indicados: 2, 3, 4, 5, 8 y 10. No obstante, como ampliación y si el profesor lo ve oportuno, pueden considerarse también los denominadores que completan la serie: 6, 7, y 9.

No debe incluirse en este nivel la Milésima, ni por supuesto números decimales que lleguen hasta este orden. La razón es muy simple: la falta de material concreto sobre el que presentar las milésimas y los razonamientos a realizar con ellas. Este es uno de los aspectos en los que la formalización suele "arrastrar" a la comprensión significativa.

En consecuencia no se formalizará el Sistema Métrico Lineal ~~has~~ nada más que hasta el orden de las centésimas.

El desarrollo de cada uno de los contenidos se hará teniendo en cuenta las fases ya indicadas en la formación del concepto de tercio en el tercer nivel, matizando según la mayor o menos complejidad del concepto considerado.

QUINTO NIVEL.

Procesos en los que se trabaja.

- Sistematización de la fracción de un objeto o cantidad en su redondeamiento y representación.
- Ampliación del algoritmo de los números decimales.

Contenidos:

Fracción de un objeto y una cantidad. Obtención, lectura y escritura.

Suma y resta de fracciones de objeto de igual denominador.

La milésima: presentación, lectura y escritura. Números con milésimas.

Extensión del algoritmo: la diezmilésima.

Suma y resta de números decimales. Casos en que la parte decimal consta de distinto número de cifras.

Producto de un natural por un decimal.

El cociente de dos números como fracción.

Consideraciones metodológicas.

En los ejercicios de cálculo con cantidades nos referiremos principalmente a $1/2$, $1/3$ y $1/5$ de la misma. Solo cuando este proceso esté maduro se puede pasar a los $3/4$ o a los $2/5$ de una cantidad.

Se pueden ampliar los casos estudiados a los denominadores 6, 7, 9 y 12. Ejercicio importante es comprobar que cuanto mayor es el número de las partes iguales en que dividimos un objeto, menor es cada una de ellas.

La extensión del algoritmo de los números decimales puede ampliarse a la diezmilésima e incluso hasta la millonésima si se comprueba que el alumno es capaz de interpretar la representación formal como símbolo de situaciones reales, cuyo mecanismo es similar al del sistema decimal que ya conoce.

Nos parece completamente estéril el verificar que hay equivalencia entre los resultados de una suma de decimales cuando los sumandos vienen dados como fracción o cuando vienen dados en notación decimal. Hay que delimitar muchas experiencias previas para que esto sea significativo.

Por supuesto no es conveniente trabajar con fracciones cuyo numerador sea mayor que el denominador, pero caso de que el alumno lo solicite, se debe comenzar con las situaciones reales a las que representa.

Y he aquí, en síntesis apretada, nuestro plan de trabajo. Ya solo queda lo más importante: contrastarlo con la experiencia para proceder a las rectificaciones oportunas y a su puesta a punto definitiva. (17).

Esperamos contribuir con nuestro trabajo a un mejor quehacer de todos

los enseñantes de esa forma tan especial de interpretar y pensar el universo a la que llamamos Matemática.

BIBLIOGRAFIA

- (1).- DUMONT, M.: A propos des méthodes. Bulletin de l'association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Publique, nº 194. París 1.974, pgs. 465-475.
- (2).- CUESTIONARIOS NACIONALES De Enseñanza Primaria. Prefáculo de la O.M. de 6 de Julio de 1.965.
- (3).- NUEVA ORIENTACION PEDAGOGICA para la E.G.B.: Area de Matemáticas. Vida escolar nº 124-126, pgs. 25-26.
- (4).- PROGRAMAS RENOVADOS PARA LA E.G.B. Documento Base. Vida Escolar, nº 206, pg. 3.
- (5).- MATEMATICAS, Estudios y Experiencias Educativas. Serie EGB, nº 8 MEC. Dir. Geral de Educ. Básica, Madrid, 1.981.
- (6).- MATEMATICAS, idem, pgs. 10 y 11.
- (7).- FERNANDEZ HUERTA, J.: "La Aritmética como saber de varios momentos madurativos fácilmente discriminables". R.R.P. nº 58, pgs 89-98.
- (8).- CASTELNUOVO, E.: "Didáctica de la Matemática Moderna" Trillas, México, reimpresión 1.973, pgs. 133 y ss.
- (9).- FERNANDEZ HUERTA, J.: "Quebrados o fracciones ordinarias en la escuela", Rev. Consigna, Junio 1.956 pgs 24-29.
- (10).- FERNANDEZ HUERTA, J.: "La enseñanza de los decimales y del sistema de medidas". Rev. Consigna. Octubre 1.956 pgs 13-17.
- (11).- BARO, E.: "Desenvolvimiento de la comprensión de fracciones". Tesina de Licenciatura, Facultad de Filosofía y Letras (Pedagogía) Universidad de Madrid, 1.956.
- (12).- CASTRO, E.: "El cálculo Aritmético en E.G.B.". Tesina de Licencia-

tura. Facultad de Ciencias (Matemáticas) universidad de Granada. 1.975.

(13).- BRUECKNER, L.J. y BOND, G.L.: "Diagnóstico y Tratamiento de las dificultades de aprendizaje", Rialp, Madrid, 1.961.

(14).- TOURNEUR, Y.: "Taxonomie des objectifs cognitifs en mathématique: étude du modèle de la National Longitudinal Study of Mathematical Abilities" (NLSMA); Mathématique and Pédagogie, n° 57, pgs 341-354.

(15).- LOS PROGRAMAS RENOVADOS DE LA E.G.B. Análisis, crítica y alternativas. ICE de la UAM, Madrid, 1.981.

(16).- PIAGET, J e HINNELDER, B.: "Psicología del niño", Ediciones Morata, 6ª edición, Madrid, 1975 (notas extraídas del capítulo sobre geometría de las operaciones concretas)

(17).- Buena parte de los resultados de la investigación del Equipo Granada-Mats, se encuentra recogida en las guías didácticas para el profesor como fundamento metodológico de la serie de Matemáticas de 1º a 8º curso de E.G.B. de Luis Rico Romero y otros, Editorial ANAYA.

El diseño de investigación es el tema de la tesis doctoral del miembro del equipo OSCAR SAENZ BARRIO: Modelo empírico para el análisis del programa escolar; servicio de publicaciones de la Universidad de Granada, 1978.

II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS.

P O N E N C I A

DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS EN LA 2ª ETAPA DE didactica de las matematicas en la EGB Y ENSEÑANZAS MEDIAS: SISTEMA DE EVALUACION

AUTOR: MANUEL RODRIGUEZ GARCIA.

Perito Industrial. Profesor de Matemáticas del Instituto Politécnico "Jesús Marín" y Escuela de Ingeniería Técnica Industrial de Málaga. Profesor Colaborador del ICE de la Universidad de Málaga.

Málaga, Abril de 1.982

II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
PONENCIA: DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA 2ª ETAPA DE EGB Y
ENSEÑANZAS MEDIAS: SISTEMAS DE EVALUACIÓN

AUTOR: MANUEL RODRIGUEZ GARCIA.

Perito Industrial. Profesor de Matemáticas del Instituto Politécnico Jesús Marín y Escuela de Ingeniería Técnica Industrial de Málaga. Profesor colaborador del Instituto de Ciencias de la Educación de Málaga.

1.- INTRODUCCION

El estudio de las Matemáticas, comporta una dificultad creciente a medida que se asciende en la escala de los cursos escolares.

A la dificultad intrínseca de la materia se añade otras de carácter extrínseco cual es su presentación tanto en forma como contenido, a unos niveles para los cuales la madurez evolutiva de los alumnos quizá no esté preparada.

El rechazo a las Matemáticas será la reacción lógica de un elevado número de alumnos, atormentados por conceptos, demostraciones, desarrollos, etc. que no entienden, obligándoles a soportar situaciones que los frustra y aliena.

El profesor se encuentra ante un terrible dilema.

De una parte, unos objetivos que alcanzar sintetizados en cuestionarios cuyos contenidos han de adquirir los alumnos; adquisición que hay que verificar mediante sistemas de evaluación generalmente no homologados y de resultados en múltiples casos preocupantes.

De otra parte, un conjunto de alumnos de los cuales, la mayoría encuentran serias dificultades para el estudio de las Matemáticas que les impide alcanzar resultados satisfactorios, con lo que la espiral de la frustración aumenta.

Con el propósito de ayudar a resolver estos problemas, el ponente inició hace cuatro cursos un plan de trabajo cuya síntesis y resultados se resumen en la presente ponencia que no tiene otra pretensión que brindar algunas ideas tendientes a facilitar el estudio y enseñanza de una disciplina aparentemente árida, pero tremendamente gratificante cuando se penetra en ella de forma comprensiva.

El convencimiento de que el desarrollo de la propia personalidad se asienta en el esfuerzo personal, tanto individual como colectivo es el punto de arranque del trabajo. La didáctica que se preconiza, parte de la idea que la labor personal del alumno es lo sustantivo quedando la labor del profesor como meramente adjetiva, colaboradora y orientadora.

El verdadero protagonista del estudio es el estudiante, que jamás deberá renunciar a ese protagonismo que le pertenece.

2.- OBJETIVOS

La presente comunicación se propone los siguientes objetivos:

2-1 Presentar a las II Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas un modelo didáctico válido para la 2ª etapa de EGB, BUP y FP.

2-2 Proponer un sistema de evaluación objetivo y fácilmente homologable con otras disciplinas.

3.- PLANTEAMIENTOS

La Didáctica que se propone parte de los siguientes planteamientos:

3-1 Dificultades más frecuentes para el estudio de las Matemáticas:

3-1-1 Dificultades de tipo verbal:

En estas dificultades se engloban las siguientes:

- Palabras del lenguaje ordinario contenidas en los textos o enunciadas cuyo significado es desconocido.
- Palabras del lenguaje matemático cuyo significado también es desconocido.
- Falta de fluidez en las expresiones y explicaciones.
- Traducción recíproca entre los lenguajes ordinario y matemático.

3-1-2 Dificultades de tipo numérico:

En estas dificultades se engloban las siguientes:

- Carencia de habilidades operativas.
- Manejo inadecuado de las propiedades

Todo ello debido a corresponder a cursos anteriores que no se estudiaron, no se maduraron, se han olvidado u otras razones, o corresponden a contenidos de los cursos actual no madurados.

3-1-3 Dificultades de tipo analítico:

En estas dificultades se engloban las siguientes:

- Falta de conocimiento de propiedades, planteamientos, transformaciones, operaciones etc. necesarias para el desarrollo de las demostraciones y/o justificaciones, bien por corresponder a cursos anteriores que no se estudiaron olvido u otras razones, o bien corresponden a contenidos del curso actual y no estudiados o madurados.
- No utilización de los principios, propiedades, teorías por carencia de hábitos o inadecuada formación.

3-1-4 Dificultades en la resolución de ejercicios y problemas.

En estas dificultades se engloban las siguientes:

- Falta de transferencia de los conocimientos teóricos a problemas concretos.
- Carencia de disciplina lógico-deductiva.
- Insuficiencia de conocimientos previos precisos, tanto de cursos anteriores como del actual.

No se analizan las posibles causas de estas dificultades, por no ser objeto de la ponencia y pueden ser múltiples y variadas, se señalan como una realidad con la que hay que contar.

3-2 Los objetivos que consciente e inconscientemente todo profesor se propone de modo genérico pueden expresarse así:

3-2-1 Mejorar la alfabetización matemática

3-2-2 Facilitar la adquisición de conceptos

3-2-3 Favorecer una actitud discriminativa entre lo sustantivo o fundamental y lo adjetivo o accesorio.

3-2-4 Incrementar las posibilidades de análisis y síntesis

3-2-5 Adiestrar en la transferencia de conocimientos teóricos a casos prácticos.

4.- DIDACTICA

La Didáctica a seguir debe permitir vencer las dificultades y alcanzar los objetivos señalados en el punto 3 de la presente ponencia.

Las fuentes del saber matemático se encuentran en los libros.

El alumno no accede a las fuentes quizá porque le son inaccesibles o porque la conducta profesoral no facilita el camino hacia ellas.

El alumno se contenta en la mayoría de los casos con lo que el profesor le ofrece satisfaciéndose con alcanzar procesos mecanizados que son necesarios pero no suficientes.

La didáctica que se propone se basa en los principios siguientes:

4-1 Elección del texto básico y su total utilización.

El texto que se elija debe contener la propiedad de su correcta lectura y cumplir las condiciones para obtener los objetivos. La mayoría de los textos en vigor son aceptables por lo que la elección es adjetiva. Lo que tiene que ser sustantivo es su total utilización.

4-2 Explicación semera de la metodología a los alumnos.

La primera vez que se pone en marcha causa sorpresa y estupefacción por presentarse no pocas resistencias. A lo largo del tiempo, hacia el segundo trimestre, la entrega es total.

4-3 Terminación de los programas íntegramente.

Se parte de la hipótesis de que el texto recoge, al estar autorizado por el Ministerio, los contenidos del curso.

4-4 Lectura íntegra en clase y voz alta por todos los alumnos del texto en cuestión.

De forma sistemática cada alumno procederá a la lectura de una parte del texto generalmente coincidente con un epígrafe.

Para garantizar que todos leen, se comienza por un extremo y se concluye en el opuesto. Todos los alumnos seguirán la lectura con su texto abierto.

4-5 Elaboración de un cuestionario.

Tres procedimientos puede haber para la elaboración del cuestionario:

4-5-1 Por los alumnos:

De cada tema cada alumno plantea tres cuestiones que le sugiere. La unión de todas ellas reserva extraordinarias sorpresas.

4-5-2 Por el profesor:

De cada tema el profesor plantea de diez a quince cuestiones.

4-5-3 Formar un cuestionario con los dos:

Los alumnos por la general señalarán cuestiones fácilmente identificables. El profesor en el suyo presentará matices más enmascarados y cuyas respuestas requiera un mayor nivel de observación.

Al cabo de varios cursos el profesor tendrá elementos suficientes para no requerir elaborarlo. Quedando solo el 4-5-1 con fines exclusivamente educativos y recoger aquellas cuestiones que no estén señaladas.

4-6 Elaboración de una prueba por tema.

4-7 Realización por cada alumno de la prueba como mejor le parezca.

4-8 Corrección en gran grupo de la prueba de cada tema.

En base a todo lo anterior se describe el proceso a seguir en las sesiones de trabajo, entendiéndose por éstas las que correspondan al desarrollo de un tema completo.

4-9 Desarrollo de las sesiones de trabajo:

4-9-1 Preparación: Cada alumno deberá disponer de su texto, y elementos para escribir.

4-9-2 Lectura: Se procede a la lectura de cada epígrafe, ejemplos, etc. por el alumno que le corresponda. El profesor ¡Seguirá atentamente la lectura con su texto!, corrigiendo los fallos que sobre todo al principio son abundantes y diversos.

4-9-3 Comentario: Al término de la lectura de cada epígrafe, el profesor hace algunas de las posibles preguntas genéricas siguientes: ¿Que conceptos se barajan en la definición? ¿Que leyes, propiedades, principios, etc. se utilizan? ¿Cual es la hipótesis de este teorema? ¿Cual es la tesis? ¿Cual es el proceso descrito? ¿Como procesar lo dicho por el autor? Etc. Etc.

¿Que han entendido de la lectura? ¿Que dificultades encuentran en la leído?..... El profesor también puede destacar matices que han pasado desapercibidos.

El profesor puede adaptar la fórmula; Reseñar los criterios que sigue el autor en el desarrollo, etc.

A las cuestiones expuestas exigir respuestas por escrito. Dar unos minutos para las respuestas.

4-9-4 Discusión: La lectura de las respuestas permite situaciones contradictorias que facilita la exposición de puntos de vista y discusión: Elección de respuesta correcta.

4-9-5 Tratamiento de las respuestas incorrectas: Recabar del autor o autores la explicación del proceso mental seguido en la elaboración de las respuestas, sobre todo las incorrectas. Someterle a discusión.

4-9-6 Exposición de los ejemplos: Los ejemplos se estudiarán de la forma siguiente:

- Lectura del mismo.
- Procesar las distintas secuencias y escribirlas en el lenguaje ordinario.
- Reconstruir el ejemplo a base de seguir el proceso.
- Comparar con el del autor o construirlo en la pizarra

4-9-7 Exposición de teoremas, justificaciones, etc.

Se precede como en 4-9-6

4-9-8 Resolución de ejercicios y problemas.

A cada grupo de 2/4 alumnos se le propiéndrá un ejercicio o problema sin resolver de final de capítulo, que luego expondrá. Caso de fallo lo suplirá algún compañero y en último extremo el profesor. Esto aumenta el número y variedad de ejemplos resueltos.

4-9-9 Elaboración y/o entrega del cuestionario: El cuestionario será una excelente grufá de estudio y base para la elaboración de las pruebas.

4-9-10 Entrega de las pruebas: Al término de la sesión se le repartirá a cada alumno el texto de la prueba. En el punto 5 se describe las características de ellas y las recomendaciones para su elaboración y ejecución.

4-9-11 Corrección de las pruebas: Las pruebas se corrigen al inicio de una sesión, debiendo haber transcurrido al menos dos días desde que se entregó el texto de la prueba. Para la lectura de las pruebas se sigue un criterio semejante al descrito en los puntos 4-9-1 a 4-9-5

4-9-12 Autoevaluación: Como cada prueba dispone de los criterios de evaluación cada alumno se autocalifica.

4-9-13 Recogida de datos y archivo: Cada alumno en su estadillo recoge la calificación obtenida. Al ser nombrados dice tan al profesor su calificación que la recoge en el estadillo personal y archiva cada alumno su copia en su expediente.

4-9-14 Observación: A lo largo del desarrollo de la sesión, el profesor exigirá la traducción escrita de los conceptos, fórmulas etc. tanto al lenguaje ordinario como al matemático.

Todo este procedimiento exige:

- Permanente atención por parte del profesor.
- Animar, dirigir y orientar las discusiones.
- Recabar la atención de los "ausentes" para su participación.
- Permitir el diálogo y el trabajo en pequeño grupo.
- Facilitar el intercambio de opiniones y trabajos.
- Cuantas disposiciones exijan la dinámica del proceso

5.- SISTEMA DE EVALUACION

El sistema de evaluación que se propone tiende a medir los rendimientos escolares, esto es: la variación de conocimientos que el desarrollo de las sesiones junto con el trabajo personal del alumno y del grupo han producido. Por tal motivo los controles de conocimientos deben contemplar estos cuatro aspectos:

5-1 Nivel de conceptualización: Las preguntas a una sola respuesta pueden ser útiles.

5-2 Capacidad discriminativa: Las pruebas objetivas son un instrumento valioso.

5-3 Percepción analítica: Puede medirse con pruebas que precisen desarrollos lógicos y/o analíticos.

5-4 Transferencia práctica para el que las pruebas prácticas son el instrumento necesario.

La ponderación de estos niveles depende de los objetivos, contenidos, actividades, etc.

5-5 Elaboración de las pruebas:

Las pruebas son el instrumento por el cual van a ser medidos los conocimientos de los alumnos y la calificación resultante es causa determinante de muchas satisfacciones y frustraciones, de ahí que las pruebas han de ser estudiadas con pulcritud.

Preparar una prueba exige una técnica que se depura con el tiempo, la observación, el estudio y el ensayo.

A continuación se da un proceso para elaborar pruebas que al penente le ha dado óptimos resultados.

5-5-1 Proceso:

- Elegir el ámbito de la prueba.
- Elaborar un cuestionario: El que se dispone como guía de estudio es un instrumento excelente.
- Descomponer el cuestionario en cuatro partes = al número de pruebas.

Asignar parte de cuestionario a tipo de prueba.

- Redactar la prueba o pruebas.

5-5-2 Prueba conceptual:

Surge automáticamente con la transcripción de las pruebas asignadas del cuestionario.

5-5-3 Prueba objetiva:

De la parte del cuestionario asignado para esta prueba se transcriben las preguntas y diversas respuestas posibles algunas de las cuales ha de ser verdadera.

5-5-4 Prueba analítica:

De las posibles variantes de pruebas analíticas, se señalan dos:

- 1) Presentar al alumno una cuestión, precedida de alguno de estos verbos: demuestra, ... razona.... justifica, verifica... etc.

Las cuestiones que se someten al alumno para su análisis, son las atribuidas en la distribución del cuestionario para esta prueba.

2 Presentar al alumno un proceso secuenciado numéricamente para que fundamente teóricamente los distintos pasos del proceso.

5-5-5 Prueba práctica:

La parte de cuestionario que le corresponde a esta prueba debe posibilitar los trabajos de transferencia teórica a la práctica, mediante ejercicios, problemas, aplicaciones, etc.

5-5-6 Criterios de evaluación:

De acuerdo con los objetivos propuestos y su ponderación, cada prueba debe contar con los criterios de evaluación correspondientes, de esta manera no solo se eliminan arbitrariedades, sino que se facilita la tarea de autoevaluación y coevaluación, así como las protestas al haber objetivado la medición.

5-5-7 Estructura de las pruebas:

La estructura de las pruebas que realice el alumno a lo largo del curso y de una misma disciplina debe ser obligatoriamente homogénea. Asimismo debe poseer las mismas características los distintos grupos de un mismo nivel.

Sería deseable que las distintas disciplinas de un mismo curso presentara características homologadas.

5-5-8 Recogida de datos:

Los datos que corresponden a las calificaciones, deben ser contabilizados de manera discriminada para cada tipo de prueba y el total. Debe haber dos copias del estadillo una para el alumno y otra para el profesor. El estadillo que se acompaña como anexo nº 4 va a posibilitar el estudio de la evolución del alumno en las distintas facetas pudiéndose someter los datos al análisis estadístico.

Ello hará posible la determinación de desviaciones y sus causas y sobre todo la redacción de proyectos de modestas experimentaciones educativas.

5-5-9 Pruebas:

Las pruebas a que va a ser sometido el alumno así como sus características se recoge en el anexo nº 1

Pese a que se señala en él dos pruebas parciales, quizá serían aconsejable tres.

Alguien pudiera señalar que las pruebas individuales al hacerlo cada alumno a su comodidad las podría copiar y ello es así sobre todo hasta la primera prueba parcial.

Al aplicarle el estudio estadístico y determinar a priori los valores esperados para la prueba de presencia, la desviación que hubiere por la izquierda o por la derecha indican "manipulación" y por tanto las diferencias no son debidas al azar.

Aún contando con esta circunstancia, el hecho de "copiar" la prueba supone un estudio complementado con la corrección pública en clase.

En el anexo número 2 se señala una calificación real correspondiente a tres alumnos distintos.

5-5-10 Ejemplos:

En el anexo nº 3 se incluyen los siguientes ejemplos:

- 1 Cuestionario de un Tema de Estadística
- 2 Prueba correspondiente a ese cuestionario
- 3 Prueba parcial
- 4 Cuestionario de un Tema de 1º FP2
- 5 Prueba correspondiente a este cuestionario
- 6 Prueba parcial.
- 7 Prueba de todo el temario

6.- PROPUESTAS

A la vista de todo lo que antecede el ponente propone a las II Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas para su estudio y elevación a conclusiones definitivas las siguientes propuestas:

- 6-1 Someter a estudio el contenido de la ponencia: Didáctica de las Matemáticas en la 2ª Etapa de EGB y Enseñanzas Medias: Sistema de evaluación.
- 6-2 Elaborar sendos proyectos de experimentación en base al contenido de la ponencia en la 2ª Etapa de EGB, BUP y FP.
- 6-3 Reclamar de los organismos competentes, las autorizaciones y fuentes de financiación para la puesta en marcha, control y seguimiento de la investigación experimental.
- 6-4 Estudiar la viabilidad de la didáctica propuesta a otras disciplinas, y supuesta utilizable redactar el correspondiente

proyecto de experimentación

- 6-5 Invitar , con independencia de lo señalado en los puntos precedentes, a los asistentes a la puesta en práctica del modelo, con fines experimentales.

7.- CONCLUSIONES

Después de la lectura sesgada de la presente ponencia, la reflexión serena, sugiere las siguientes conclusiones:

- 7-1 Es preciso experimentar modelos didácticos diversos para la transmisión de los conocimientos matemáticos.
- 7-2 Se impone la búsqueda de procesos que favorezcan el trabajo personal como fuente de recursos.
- 7-3 Es necesario diseñar un modelo de evaluación que cumpla los siguientes requisitos:
- 1 Ser objetiva.
 - 2 Reflejar aproximadamente la realidad.
 - 3 Perfeccionar el trabajo educativo.
 - 4 Facilitar trabajos de experimentación.
 - 5 Ofrecer datos para la política educativa de los Centros.
 - 6 Tener en cuenta que evaluar no es fácil pero con la sistematización se simplifica considerablemente.
- 7-4 El trabajo del matemático no es aislado ni yuxtapuesto con los profesores de otras disciplinas. Es necesario homogeneizar con estos criterios, didáctica y sistema de evaluación.

Málaga, Abril de 1.982

Fde: Manuel A. Rodríguez García

ANEXOS

- 1: Pruebas a realizar por los alumnos y características de las mismas.
- 2: Calificación real de tres alumnos distintos ~~de los tres alumnos distintos~~.
- 3: Ejemplos :
 - 3-1 Cuestionario de un tema de estadística
 - 3-2 Prueba correspondiente a ese cuestionario.
 - 3-3 Prueba parcial (se apartará posteriormente)
 - 3-4 Cuestionario de un tema de 1º de FP2
 - 3-5 Prueba correspondiente a ese cuestionario
 - 3-6 Prueba parcial
 - 3-7 Prueba de todo el temario.
- 4: Estadillo para la recogida de datos que acompañará el expediente del alumno

A lo largo del curso los alumnos deberán realizar las siguientes pruebas:

1.- Pruebas individuales por tema.

El estudio de cada tema se complementará con una prueba que cada alumno la hará a su comodidad, fuera del horario de clase. A tal fin deberá proveerse de ella y que le facilitará el profesor. La prueba la realizará por duplicado. El original formará parte del trabajo personal y la copia corregida por el grupo, calificada por él se archivará en el expediente personal de cada alumno.

2.- Pruebas de presencia.

Las pruebas de presencia serán las siguientes:

2-1 1ª prueba parcial:

Esta prueba comprende el control de conocimientos de los 11 primeros temas. Se realizará en el aula en presencia del profesor o de quien lo represente.

2-2 2ª Prueba parcial:

Esta prueba comprende el control de conocimientos de los temas restantes del programa.

2-3 Prueba global

Esta prueba comprende el control de conocimientos globales de toda la asignatura.

2-4 Prueba final de recuperación:

Esta prueba pretende facilitar la tarea de recuperación para aquellos alumnos que no hayan superado la prueba global o deseen mejorar su calificación.

Las pruebas de presencia deberán hacerse en el aula y en presencia del profesor o de quien lo represente.

Las pruebas a las que serán sometidos los alumnos a lo largo del curso, no tienen otra finalidad que cuantificar del modo más racional posible si los objetivos se han alcanzado o no y en que medida se han logrado.

La estructura de las pruebas permite conocer esto de modo fiable. El cuadro que se inserta a continuación así lo pone de manifiesto.

<u>Prueba</u>	<u>Objetivo/s que mide</u>
Conceptual	Alfabetización y conceptualización.
Objetiva	Discriminación entre lo sustantivo y lo adjetivo. Lo verdadero y lo falso.
Analítica	Aptitudes de análisis y síntesis.
Práctica	Transferencia de conocimientos teóricos a casos prácticos.
Global	Si el instrumento facilita el estudio de la Matemática.

La posibilidad de tabular, tanto las calificaciones parciales como las globales de cada uno de los temas, permitirá el estudio estadístico de la evolución de los alumnos y pronosticar la tendencia de esta evolución y establecer de común acuerdo con los alumnos las medidas correctoras precisas. Al mismo tiempo prestarles una inestimable ayuda al conocer sus aciertos y errores, determinando de esta manera los puntos fuertes donde apoyarse y los débiles que hay que potenciar.

Las pruebas de esta forma estructuradas, transforman el juicio del profesor en un mecanismo de autoevaluación del alumno, potenciando su capacidad crítica señalándole asimismo hacia donde tienen que ir dirigidos sus esfuerzos.

El realizar una prueba global de conocimientos anteriores y el conocer una prueba global tipo, semejante a la que ha de realizar al término del curso, facilitará la dosificación de su tiempo de estudio y de trabajo, eliminando así toda posibilidad de sorpresa.

Para poder concurrir a las pruebas de presencia, es preciso que en sus expedientes obren !TODAS! las pruebas correspondientes a los temas cuyos conocimientos se controlan, con independencia de las calificaciones que hubieren obtenido.

Quedará a discreción del profesor y en función de causas muy justificadas, el permitir que algún alumno participe en las pruebas de presencia, sin haberse satisfecho el requisito anterior.

En ningún caso el alumno podrá participar en las pruebas de presencia, si el número de pruebas individuales entregadas es inferior al 80%.

Aquellos alumnos no comprendidos en el caso anterior pero el número de pruebas entregadas supera el 50% del total de pruebas realizadas, podrán acudir a la prueba de presencia final, donde desarrollarán una específica elaborada para ellos.

Los alumnos que no hubieren entregado al menos el 50% de las pruebas no podrán participar en ninguna de las pruebas de presencia incluida la final.

En este caso sólo podrá concurrir a las pruebas de Septiembre.

Los requisitos para participar en esta prueba son los siguientes:

Proveerse del trabajo a realizar durante las vacaciones y que al término del curso señalará el profesor.

Realizarlo y presentarlo previamente a la prueba, siendo la fecha tope de recepción, 10 días antes de la fecha de convocatoria de la prueba.

Toda evaluación debe contemplar las actitudes y las aptitudes.

Ambos aspectos de la evaluación se contemplan en el presente sistema desde los siguientes planos:

1.- Plano personal:

Cada alumno y de acuerdo con los criterios evaluativos que se establezcan en cada prueba, calificará su trabajo, calificación que someterá a la supervisión del grupo quien confirmará o modificará la calificación. Las dudas que pudieran producirse, las dirimirá el coordinador y en última instancia el profesor.

2.- Plano del profesor:

El profesor de acuerdo con los criterios que establezca cada prueba de presencia, calificará estas pruebas.

La evaluación de las actitudes tanto en una como en otro planos, se hará de acuerdo con las valoraciones que de común acuerdo entre profesor y alumno se señalen al comienzo del curso.

Las calificaciones finales, serán el resultador de establecer la media ponderada entre las calificaciones de ambos planos de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\text{Calificación resultante} = \frac{A + 2P}{3}$$

Siendo A, la calificación media personal del alumno y el grupo en el período considerado y P la que le asigne el profesor.

Si hubiera que comunicar calificaciones sin haber realizado pruebas de presencia, se suministrará la A, como calificación indicativa provisional, hasta tanto se esté en condiciones de aportar la resultante que será la definitiva.

Lección 17

- 1a.- Que son medidas de dispersión.
- 2a.- Cuales son las principales medidas de dispersión.
- 3a.- ¿ Que es el recorrido?
- 4a.- ¿ Que otro nombre recibe el recorrido?
- 5a.- ¿ Como se representa el recorrido?
- 6a.- ¿ Cual es la fórmula del recorrido?
- 7a.- ¿ Que es la desviación?
- 8a.- ¿ Como se representa la desviación?
- 9a.- ¿ Cual es la fórmula de la desviación?
- 10.- ¿ ¿ Que es desviación media?
- 11.- ¿ Como se representa la desviación media?
- 12.- ¿ Cual es la fórmula de la desviación media?
- 13.- ¿ A Que es igual la desviación media según las frecuencias absolutas?
- 14.- ¿ Cual es la fórmula de la desviación media según las frecuencias absolutas?
- 15.- ¿ Que es una varianza?
- 16.- ¿ Cual es la fórmula de la varianza?
- 17.- ¿ Cual es la fórmula de la varianza según las frecuencias absolutas?
- 18.- ¿ Como se representa una varianza?
- 19.- ¿ Que es la desviación típica?
- 20.- ¿ Qué otro nombre recibe la desviación típica?
- 21.- ¿ Cómo se representa la desviación típica?
- 22.- ¿ Cual es la fórmula de la desviación típica?
- 23.- ¿ Que es el coeficiente de variación?
- 24.- ¿ Como se representa el coeficiente de variación?
- 25.- ¿ Cual es la fórmula del coeficiente de variación?
- 26.- ¿ Que es lo que diferencia el coeficiente de variación con las demás medidas de dispersión?
- 27.- Resolver los problemas del final de capítulo

Lección 18

- 1a.- Como se representa el momento de orden m de una serie estadística?
- 2a.- ¿ Que es un momento estadístico?
- 3a.- ¿ A que es igual μ_m ?
- 4a.- ¿ ¿ Cual es la fórmula del momento según las frecuencias absolutas?
- 5a.- ¿ Cual es la fórmula del momento según las frecuencias relativas?
- 6a.- ¿ Cuales son las consideraciones sobre los momentos?
- 7a.- ¿ Cual es la fórmula de los momentos respecto de la media?
- 8a.- ¿ Cual es la fórmula de los momentos respecto de la media según las frecuencias absolutas?

1.- PRUEBA CONCEPTUAL

- 1.- A la diferencia entre un valor de la variable estadística y la media de la serie, se le denomina
- 2.- Que expresa el recorrido.
- 3.- Definir de modo sencillo la desviación típica.
- 4.- Definir la varianza.
- 5.- La relación que existe entre desviación típica y media de una serie se denomina.

PRUEBA OBJETIVA

- 1.- Para calcular el recorrido de una serie hay que tener en cuenta alguno de los siguientes valores:
 - a) El valor máximo de la variable.
 - b) El valor mínimo de la variable
 - c) La media simple de la serie.
- 2.- La desviación es un estadística que expresa:
 - a) La posición que tiene un valor respecto de la media
 - b) La posición que tiene un valor respecto del recorrido.
 - c) La posición que tiene un valor respecto de la desviación típica
- 3.- La desviación típica siempre ha de ser un número:
 - a) Positivo b) Negativo c) Es indiferente.
- 4.- La varianza siempre guardará relación con:
 - a) El valor de la media.
 - b) El cuadrado de la variable.
 - c) El cubo de la variable.
- 5.- El coeficiente de variación es:
 - a) La relación entre dos medidas de posición.
 - b) La relación entre dos medidas de dispersión.
 - c) La relación entre valores de la variable.

PRUEBA ANALITICA

- 1.- Traducir al lenguaje ordinario los siguientes símbolos:
 - a) X_m b) X_m c) d d) D_m e) σ f) V
- 2.- Traducir al lenguaje ordinario las siguientes fórmulas
 - a) $R = X_m - X_m$ b) $D_m = \frac{\sum_{i=1}^m |x_i - \bar{x}|}{N}$ c) $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ d) $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ e) $V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$
- 3.- Deducir la fórmula de la desviación típica en función de las frecuencias relativas sabiendo que la fórmula de la que se parte es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

1º FP2 OTRAS RAMAS
2º FP2 ADMINISTRATIVO
ESTADISTICA MEDIDAS DE DISPERSION
PRUEBA 2ª Hoja

PRUEBA PRACTICA

Tres profesores de Estadística registraron una calificación media de 7,9 . 8,2 y 8,4 en sus exámenes. Sus clases estaban formadas por 32, 25, y 17 estudiantes respectivamente. Determinar:

a) El recorrido.- b) La desviación media.- c) la varianza.- d) La desviación típica.- e) el coeficiente de variación.

2.- De la serie de números 6,7,8,9 y 10 determinar :
las medidas de dispersión del ejercicio anterior.

Criterios calificatorios:

Prueba	Puntuación máxima	Mínima
Conceptual	5	2
Objetiva	5	2
Analítica	2 + 3 + 5	3
Práctica	6 + 4	3

Puntuación total 30 puntos.- Mínima 18

1º FP2 Administrativo Lc 7
Otras Ramas LC 7
CUESTIONARIO

- 1.- Definir las combinaciones ordinarias
- 2.- Que expresa el símbolo $C_{m,n}$
- 3.- Existe otra forma de simbolizar las combinaciones ordinarias
- 4.- Que expresa \underline{m} en el símbolo de la pregunta 2
- 5.- Que expresa \underline{n} en el símbolo de la pregunta 2
- 6.- Que relación debe existir entre m y n en las combinaciones ordinarias.
- 7.- Como se calcula el número de combinaciones ordinarias
- 8.- Que relación existe entre las combinaciones, permutaciones y variaciones ordinarias.
- 9.- Definir las combinaciones con repetición.
- 10.- Cual es la fórmula que nos permite calcular el número de combinaciones con repetición.
- 11.- Definir el número combinatorio
- 12.- Cual es el símbolo de los números combinatorios.
- 13.- Traducir al lenguaje ordinaria las siguientes propiedades:

$$1) \binom{m}{0} = 1 \quad 2) \binom{m}{m} = 1 \quad 3) \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \quad 4) \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$
- 14.- Definir los números de Euler generalizados.
- 15.- En los números de Euler generalizados n que es....
- 16.- En los números de Euler generalizados m que es
- 17.- Escribir algún ejemplo de combinaciones ordinarias
- 18.- Escribir algún ejemplo de combinaciones con repetición.
- 19.- En los números combinatorios que relación debe existir entre m y n .

Resolver los siguientes problemas:

Del 1 al 20, 23, 25, 27, 29, 32 entre otros.

1.- PRUEBA CONCEPTUAL

- 1.- Escribir las distintas formas de simbolizar las combinaciones ordinarias.
- 2.- Que relacion debe existir entre m y n en las combinaciones ordinarias.
- 3.- Definir los números de Euler generalizados
- 4.- Escribir alguna propiedad de los números combinatorios.
- 5.- Definir las Combinaciones ordinarias

PRUEBA OBJETIVA

- 1.- Las Combinaciones ordinarias consideran para su formación
 - a) Todos los elementos del conjunto
 - b) Algunos elementos del conjunto
 - c) Ninguna de las dos.
- 2.- Para que puedan considerarse combinaciones con repetición:
 - a) Han de repetirse todos los elementos del conjunto.
 - b) Basta con que se repita algún elemento del conjunto.
 - c) No es necesario que se repita ningún elemento del conjunto.
- 3.- En las combinaciones ordinarias:
 - a) No hay que tener en cuenta el orden de los elementos.
 - b) Hay que tener en cuenta el orden de los elementos
 - c) Unas veces si y otras veces no.
- 4.- En las combinaciones ordinaria de m elementos tomados n a n; hay que tener en cuenta algunas de estas propiedades:
 - a) $m = n$
 - b) $m > n$
 - c) $m < n$
- 5.- Para calcular el número de combinaciones con repetición se utiliza la siguiente propiedad:
 - a) Que los números combinatorios estén definidos.
 - b) Transformando las combinaciones con repetición en ordinarias
 - c) Es muy difícil calcular correctamente su número.

PRUEBA ANALITICA

- 1.- Escribir todas las combinaciones unitarias que se pueden hacer con las vocales: ¿ A quien será igual?
- 2.- A partir del ejemplo anterior escribir de modo ordenado todas las combinaciones binarias.
- 3.- A partir del ejemplo 1), escribir de modo ordenado todas las combinaciones binarias con repetición.
- 4.- Deducir la fórmula de las combinaciones ordinarias .

1.- PRUEBA PRACTICA

- 1.- Calcular las siguientes expresiones:

a) $C_{7,4}$ b) $CR_{6,3}$ c) 4/5 sobre 3

- 2.- Resolver las siguiente ecuación:

$$\frac{x}{3} = 10$$

- 3.- Simplificar la expresión $\binom{18}{7} + \binom{18}{10} =$

- 4.- Determinar el número de colores distintos que se pueden obtener con las siete colores del arco iris
- 5.- Formar las combinaciones binarias con repetición de un conjunto de 5 elementos distintos, calculando previamente su número.

Criterios calificatorios:

Prueba conceptual : 5 puntos

Prueba objetiva : 5 Puntos

Prueba analítica : 10 puntos

Prueba Práctica : 10 puntos.

Obtener como mínimo dos puntos en cada una de las pruebas conceptual y objetiva y 4 puntos en cada una de las pruebas analítica y práctica

Puntuación mínima 18 puntos

PRUEBA CONCEPTUAL

- 1.- Representar simbólicamente una expresión algebraica de una variable
- 2.- En que se diferencia una ecuación de una identidad.
- 3.- Que es un sistema compatible.
- 4.- Que relación debe existir entre los elementos que se repiten en las permutaciones con repetición.
- 5.- Escribir alguna propiedad de los números combinatorios.

PRUEBA OBJETIVA

- 1.- El resto que resulta de dividir un polinomio $P(x)$ por el binomio $(x-a)$ es igual al valor que toma:
 - a) El polinomio para $x = a$
 - b) El polinomio para $x = -a$
 - c) El divisor para $x = a$
- 2.- Cuando hablamos de ecuaciones e inecuaciones nos referimos a que:
 - a) Ambas se pueden resolver.
 - b) Las dos tienen soluciones
 - c) Dos dos conceptos distintos.
- 3.- Los sistemas indeterminados son aquellos que :
 - a) No pueden resolverse.
 - b) Admiten una solución al menos.
 - c) Admiten infinitas soluciones.
- 4.- En las variaciones ordinarias:
 - a) No hay que tener en cuenta el orden de los elementos.
 - b) Hay que tener en cuenta el orden de los elementos.
 - c) Ninguna de las dos.
- 5.- Para que dos elementos de una permutación estén en permanencia es necesario que:
 - a) Estén dispuestos en el orden natural.
 - b) Se dispongan como van apareciendo.
 - c) No hay que tener en cuenta el orden.

PRUEBA ANALITICA

- 1.- Deducir el criterio de divisibilidad de un polinomio $P(x)$ por el binomio $(x-a)$
- 2.- Sea la ecuación irracional $3x-4 = 5\sqrt{x} + 8$
 - 1) $3x - 4 - 8 = 5\sqrt{x}$
 - 2) $3x - 12 = 5\sqrt{x}$
 - 3) $(3x-12)^2 = (5\sqrt{x})^2$
 - 4) $9x^2 - 72x + 144 = 25x$
 - 5) $9x^2 - 97x + 144 = 0$
 - 6) $x = \frac{97 \pm \sqrt{9409-5184}}{18}$
 - 7) $x = \frac{97 \pm \sqrt{4225}}{18}$
 - 8) $x = \frac{97 \pm 65}{18}$
 - 9) $x_1 = 9$; $x_2 = \frac{32}{9}$

Se pide Enunciar los pasos dados, distinguiendo en cada uno de ellos la denominación en el proceso.- Decir que clase de ecuación es y si su solución es correcta.

PRUEBA ANALITICA (CONTINUACION)

- 3.- Sean las vocales a,e,i . Suponiendo que la e se repita dos veces, escribir todas las permutaciones con repetición posibles. Seguir el criterio de ordenación.
- 4.- Escribir el factorial de m en función del factorial de $(m-3)$
- 5.- Deducir la fórmula de las permutaciones ordinarias.

PRUEBA PRACTICA

- 1.- Sea el polinomio $P(x) = x^5 - 13x^3 + 36x$, hallar por Ruffini el cociente y resto al dividirlo por $(x+2)$
- 2.- Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{matrix} x+y \\ 2 \end{matrix} = \begin{matrix} x-y \\ 2 \end{matrix} = 2$$
- 3.- Calcular las siguientes expresiones : $V_{12,2}$; $P_7^{2,2,3}$; $CR_{6,3}$
- 4.- Dada la permutación 13742, determinar la paridad e imparidad de la misma.
- 5.- Simplificar la expresión $\binom{18}{7} + \binom{18}{10} =$

Criterios calificadorios:

Preguntas de las pruebas conceptual y objetiva: 1 punto cada una

Cuestiones de la analítica y práctica = 2 puntos cada una

Total de puntos 30.- Puntuación mínima = 18.- Hay que obtener un mínimo de dos puntos al menos en cada prueba . ! SUERTE !

PRUEBA CONCEPTUAL

- 1.- Representar simbólicamente una expresión algebraica de una variable.
- 2.- Para que valores tiene que ser nulo el valor numérico de un polinomio para que sea divisible por $(x-2)$ y $(x+\frac{1}{2})$
- 3.- Que relación existe entre las variaciones de orden n y las variaciones de orden $(n-1)$ en un conjunto de m elementos
- 4.- Escribir alguna propiedad de los números combinatorios.
- 5.- Si p es la probabilidad de un suceso cualquiera, cual es la probabilidad del suceso contrario y por qué.
- 6.- Como se conoce que una sucesión de términos forman una progresión geométrica.
- 7.- Que característica geométrica tienen las funciones pares.
- 8.- En que consiste la interpolación lineal.
- 9.- Cuando la función exponencial es creciente.
- 10.- A que se denomina término general de una sucesión.

PRUEBA OBJETIVA

- 1.- Cuando una ecuación admite infinitas soluciones se dice que es
 - a) Incompatible
 - b) Determinada
 - c) Indeterminada
- 2.- Para que dos elementos de una permutación estén en permanencia es necesario :
 - a) Que estén dispuestos en el orden natural.
 - b) Que se dispongan como van apareciendo.
 - c) No hay que tener en cuenta el orden.
- 3.- Dos sucesos son incompatibles cuando:
 - a) La intersección entre ambos es el suceso imposible.
 - b) La unión entre ambos es el suceso imposible.
 - c) La intersección entre ambos es el suceso seguro.
- 4.- Una sucesión de términos forman una progresión aritmética:
 - a) Si la razón de dos términos consecutivos es constante.
 - b) Si la diferencia de dos términos consecutivos es constante.
 - c) Si pueden interpolarse un conjunto de medios diferenciales.
- 5.- Por quien viene definido un intervalo.
 - a) Por los extremos.
 - b) Por los medios.
 - c) Por todos los puntos.
- 6.- Cual es la representación gráfica de la función lineal
 - a) Una parábola.
 - b) Un segmento
 - c) Una recta.

- 7.- La mayor o menor abertura de la parábola representativa del trinomio de segundo grado depende:
 - a) Del signo del coeficiente del término cuadrático.
 - b) Del valor del coeficiente del término cuadrático
 - c) Del valor del término independiente.
- 8.- Cuanto vale el logaritmo en cualquier base de la unidad:
 - a) 1
 - b) 10
 - c) 0
- 9.- Cual es el cociente incremental
 - a) Al cociente de los valores de dos funciones en dos puntos
 - b) Al cociente del valor de la función y de la variable independiente.
 - c) Al cociente de los valores de los incrementos entre de la variable dependiente e independiente.
- 10.- una función es creciente en un punto.
 - a) Cuando el cociente incremental es nulo.
 - b) Cuando el cociente incremental es positivo
 - c) Cuando el cociente incremental es negativo.

PRUEBA ANALITICA

- 1.- Expresar el factorial de m en función del factorial de $(m-2)$
- 2.- Deducir el intervalo de variación de los valores de la probabilidad.
- 3.- Deducir la propiedad logarítmica siguiente traduciendola al lenguaje ordinario $\log_a X^m = m \log_a X$
- 4.- Traducir al lenguaje ordinario la siguiente propiedad:

$$\forall x \in E(a) \wedge x \neq a \Rightarrow f(x) \in E(L)$$

y decir a que se refiere.

- 5.- Expresar simbólicamente la regla de los cuatro pasos para el cálculo de las derivadas.

PRUEBA PRACTICA

- 1.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 2 \quad 3x - 10y = 16$$

- 2.- Determinar cuantas banderas pueden construirse con paños de los colores ,rojo, azul y verde (un trozo de cada color)
 - 3.- Calcular la suma de los primeros veinte términos de una progresión aritmética , sabiendo que sus términos tercero y octavo son 2 y 17 respectivamente.
 - 4.- Determinar el verdadero valor de la expresión $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ para $x = 1$
 - 5.- Determinar la ecuación de la tangente a la función $y = x^2 - x$
- Criterios de calificación $\frac{1}{2}$ punto por pregunta en P.C. y P.O. 2 puntos por cuestión o problema en P.A. y P.P. Mínimo 2 puntos por prueba.
Se aprueba con 18 puntos.

Nombre

Curso

Grupo

Udad de trabajo

CALIFICACIONES DE LAS PRUEBAS

Nº	DENOMINACION	FECHA	CONCEP.	OBJETIVA	ANALIT.	PRACTICA	TOTAL
1	Expresiones algeb.		3,5	5	6	-	14,5
2	Regla de Ruffini		3,5	4	5	6,2	19
3	Ecuaciones e inec.		4,5	4	9	1,5	19
4	Sistemas de ecuac.		3,5	4	4	10	21,5
5	Variaciones		4	2	5	10	21
6	Permutaciones		4	2	9	6	21
7	Combinaciones		4	4	7	5	20
Media X			3,85	3,57	6,44	6,45	19,4
Desviación típica S			0,35	1,05	1,84	2,95	2,4
Valores X - S			3,5	2,52	4,6	3,5	17
esperados X + S			4,2	4,62	8,28	9,3	21,8
1ª Prueba de presencia			<u>3</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	9
8	CALIFICACION RESULTANTE						12,46
9							
10							
11							
12			4	3	7	-	14
13			5	3	5	2,5	15,5
14			4,75	4	6	1	15,75
15			5	5	8	10	28
16			4	4	8	11	27
17			5	5	9	6	25
18			5	3	10	6,5	24,5
Media X			4,67	3,85	7,17	6,16	21,4
Desviación típica S			0,44	0,83	1,59	3,53	5,6
Valores X - S			4,23	3,02	5,98	2,63	15,8
Esperados X + S			5,11	4,68	9,16	9,69	27
2ª Prueba de presencia			5	5	8	6,3	24,3
CALIFICACION RESULTANTE							23,3
668							
			5	5	8,5		18,5

ESTADILLO PARA LA RECOGIDA DE DATOS

2ª Hoja

Nombre

Curso

Grupo

Udad de Trabajo

CALIFICACIONES DE LAS PRUEBAS

Nº	DENOMINACION	FECHA	CONCEP	OBJETIVA	ANALIT.	PRACTICA	TOTAL
19			4,5	4	9	8	25,5
20			5	5	8	5	23
21			5	5	6	12	28
22			4	4	6	9	23
23			5	5	8	6	24
24			5	4	9	5,75	23,75
Media X			4,78	4,57	7,78	7,62	23,7
Desviación típica S			0,36	0,49	1,19	2,39	2,7
Valores X - S			4,42	4,08	6,59	5,23	21
Esperados X + S			5,14	5,06	8,97	10,01	25,4
3ª Prueba de presencia			5	4	9	10	28
Calificación media global							26,6
Desviación típica Total cal.							
Valores X - S							
esperados X + S							
Prueba general							

OBSERVACIONES:

PRUEBA CONCEPTUAL

- 1.- Que es una población estadística
- 2.- Cuando será valida la ley de estabilidad de las frecuencias.
- 3.- Clasificar las series de frecuencias de una variable estadística.
- 4.- Que es la mediana.
- 5.- Que expresa el recorrido.

PRUEBA OBJETIVA

- 1.- A cada una de las partes en que se divide el recorrido se denomina
a) Intervalo b) Clase c) Marca de clase.
- 2.- Cual es el valor máximo que puede adoptar la frecuencia acumulada relativa
a) 1 b) 0 c) Menor que 1.
- 3.- Al comportamiento general de una serie cronológica se le denomina
a) Tendencia b) Aleatoriedad c) Estadístico
- 4.- La media aritmética es una medida de :
a) Dispersión b) Correlación c) Promedio
- 5.- La desviación típica siempre ha de ser un número
a) Positivo b) Negativo c) Es indiferente

PRUEBA ANALITICA

- 1.- Escribir un ejemplo de frecuencia absoluta.
- 2.- Expresar el tipo de variación a que pertenece el ejemplo:
Ocupación hotelera durante un año en España.
- 3.- A partir de las fórmulas de la media aritmética simple y la varianza, obtener las fórmulas de la media y varianza en función de las frecuencias absolutas
- 4.- Expresar las fórmulas matemáticas de las siguientes definiciones:
a) La frecuencia relativa es igual al cociente que resulta de dividir su frecuencia absoluta por el número total de experiencias.
b) La media aritmética es igual a la suma de los productos de los valores de la variable por el número de veces que cada uno se repite dividido por el número total de observaciones.
c) La media geométrica de una serie estadística es igual a la raíz cuyo índice es el número de datos y cuyo radicando es el producto de todos ellos.
d) La desviación media es la media aritmética de las desviaciones.
e) La desviación típica es igual a la raíz cuadrada de la media aritmética del cuadrado de las desviaciones.
- 5.- Traducir al lenguaje ordinario las siguientes fórmulas:

a) $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$ b) $\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum u_i x_i^2}{N}}$ c) $\alpha = |x_i - \bar{x}|$
d) $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$ e) $V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

PRUEBA PRACTICA

- 1.- Sea la serie estadística siguiente:
5,4,3,6,5,5,2,8,6,5,4,8,3,4,5,4,8,2,5,4 efectuar lo siguiente:
a) El recuento. b) Calcular la media. c) Determinar la moda.-
d) Determinar la mediana.- e) Expresar la media geométrica.
f) Determinar el recorrido. g) Determinar la desviación típica
h) Determinar el coeficiente de variación.-
i) Construir un histograma.- j) Construir un gráfico de sectores.

Criterios calificadorios:

Prueba	Calificación máxima	Calificación mínima para promediar
Conceptual	5	2
Objetiva	5	2
Analítica	1 + 1 + 2 + 3 + 3	3
Práctica	1 punto por apartado	3
Total puntos	30	
Puntuación mínima	18	
! SUERTE !		

PROGRAMACION DE 2º DE B.U.P.

Por M^a Fernanda Moreno Díaz de la Espina

Debido a que las Matemáticas son obligatorias en 2º de B.U.P., mientras que en cursos posteriores son optativas, tratamos de ver de la manera mas intuitiva y sencilla posible, todos los temas incluidos en el programa oficial de este curso, evitando definiciones rigurosas en aquellos conceptos que no entienden los alumnos a esta edad (15 años), y llegando a resultados palpables para ellos, como las reglas de L' Hopital y Cramer, medida de triángulos e calculo de áreas por medio de la integral definida. Al mismo tiempo, se descarga algo el programa de 3º de B.U.P., viendo en 2º toda la trigonometría plana, que es fácilmente asimilable para los alumnos en este momento. El esquema de la asignatura es el siguiente:

1º.- ESPACIOS

Empezamos repasando la estructura de cuerpo en \mathbb{C} , que con mayor detenimiento se ve en 1º de B.U.P. Después se ven conjuntos conocidos que tienen estructura de espacio vectorial real, tales como \mathbb{C} , progresiones aritméticas, polinomios y otros nuevos como el espacio de las matrices equidimensionales, V^2 , V^3 , el 1º de estos últimos de naturaleza algebraica y los últimos de naturaleza geométrica.

Las propiedades de las operaciones que dotan a los conjuntos que estudiamos, de la estructura de espacio vectorial, solo las comprobamos en la mayoría de los casos.

Progresivamente vamos introduciendo propiedades y problemas típicos de esta estructura y al final damos un resumen teórico de lo que pensamos es mas importante y que los alumnos deben memorizar.

En el momento oportuno, cuando hay que resolver sistemas de ecuaciones lineales, se da la famosa regla de Cramer, que tras varios cursos de comprobación hemos observado que a los alumnos de esta edad aprenden su aplicación perfectamente. Nos limitamos a sistemas 2×2 o a lo mas 3×3 . Así cuando nuestros alumnos lleguen a COU podrán comprender mejor la teoría correspondiente a este respecto y aquellos que no sigan estudiando matemáticas habrán visto algo nuevo interesante. Al estudiar C , así como V^2 y V^3 contamos con que los alumnos ya saben representar puntos en el plano y en el espacio, cosa que ya habrán visto en E.G.B. y en 1º de B.U.P. en las asignaturas de matemáticas y dibujo.

En los dos capítulos siguientes se estudian el plano y el espacio afín. Las rectas en el 1º y las rectas y los planos en el 2º; se ven los problemas de incidencia, intersección y paralelismo. Los sistemas de referencia los suponemos ortonormales y así podemos seguir aplicando el teorema de Pitágoras para calcular distancias.

2º.- TRIGONOMETRIA

Creemos adecuado hacer en este momento el estudio completo de la trigonometría plana, si bien pensamos que se podría adelantar aún mas la medida de triángulos.

Una parte de las matemáticas tan práctica como es ésta y tan antigua, no debe quedar ignorada por ningún alumno de B.U.P., cosa que ocurriría si dejamos esta materia para 3º y nuestros alumnos no eligen en 3º matemáticas.

Algunas relaciones se ven como problemas y los teoremas básicos para la resolución de triángulos se demuestran.

Esta parte la consideramos básica para abordar con éxito el estudio de las funciones circulares.

Para la resolución práctica de problemas, preferimos el uso de cualquier calculadora manual en lugar de las tradicionales tablas.

Por otra parte ponemos a nuestros alumnos en condiciones de poder hallar la re-

sultante de un par de fuerzas cosa que usan en la asignatura de física.

Por último descargamos un poco el programa de 3º, que se encuentra a nuestro parecer muy abultado, y así conseguir ver en su totalidad la materia contenida en el cuestionario oficial.

3º.- CALCULO

Empezamos haciendo un estudio breve e intuitivo de la recta real, para pasar a un capítulo mas amplio sobre funciones reales, de las que estudiamos en primer lugar unas generalidades sobre sus gráficas, ya continuas como las polinómicas ya con puntos de discontinuidad como las escalonadas o las definidas a trozos. Vemos las operaciones en el conjunto de las funciones reales con dominio R y el cálculo y las propiedades de las nuevas funciones.

En otro apartado vemos la función exponencial como isomorfismo entre $(R, +)$ y (R^+, \cdot) y su inversa la función logarítmica, usando la calculadora para el cálculo logarítmico.

Termina el capítulo sobre funciones reales estudiando las funciones circulares, viendo algunas de sus propiedades a partir de sus gráficas.

El siguiente capítulo lo dedicamos al cálculo de límites y la continuidad. A partir de ejemplos concretos llegamos a la definición formal del concepto de límite, tratando o límites especiales los de expresiones irracionales, los de la forma $\frac{\sin x}{x}$ en $x \rightarrow 0$, los de expresiones indeterminadas de la forma 1^∞ y los que dan lugar a la derivada de $f(x)$ en $x = a$. También se ve el artificio de sustitución de infinitésimos equivalentes. Los límites que calculamos volvemos a verlos cuando nuestros alumnos saben derivar aplicando la regla de L'Hopital. Las sucesiones y sus límites los estudiamos como caso particular de límites en el infinito de funciones de variable natural.

Se estudia la continuidad de las funciones elementales, las operaciones con funciones continuas y algunos teoremas de la continuidad relativos a un intervalo cerrado de forma intuitiva, y después se pasa al estudio de las discontinuidades

mas corrientes.

Una vez que nuestros alumnos han llegado a manejar el mecanismo del cálculo de límites, pasamos en el siguiente capítulo, a dar la derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ y calculamos así la derivada de algunas funciones en distintos puntos, viendo después su interpretación geométrica, la ecuación de la recta tangente y la función derivada. Una vez conocida por los alumnos la derivación logarítmica y la regla de la cadena, se repasan con ellas el resto de las derivadas.

Es aquí donde introducimos la regla de L'Hopital para el caso de límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$.

Las primitivas, se ven simultáneamente a las derivadas como sus inversas.

Vemos por último la relación que existe entre el área encerrada por una curva y su integral definida, comprobándolo inicialmente con trapecios mixtilíneos.

CONSIDERACIONES CRÍTICAS SOBRE LOS PROGRAMAS RENOVADOS DE MATEMÁTICAS. - Echenique, I.; Ferrero, L.; Hernández, J.; Martino, M.; Martín, E. y Moreno, A. (Grupo de Trabajo ICE).

Introducción

En primer lugar, valoramos positivamente el esfuerzo que supone el abordar una tarea tan compleja como la elaboración de unos nuevos programas. Este trabajo nos parece absolutamente necesario. Somos conscientes de que no entraña la misma dificultad el hecho de realizar una nueva programación que el evaluar lo ya elaborado. Así nuestro propósito no será tanto derribar lo construido como aportar nuestras sugerencias en lo que creamos mejorable. Aunque llegamos tarde en el caso del Ciclo Inicial, esto será posible en los Ciclos Medio y Superior.

Sentimos la falta de disponibilidad de material y la escasa difusión que creemos han tenido estos programas entre el profesorado. En el área de Matemáticas, el problema se agrava por estar todavía en fase de preparación los Documentos de Apoyo, que nos parecen esenciales para poder evaluar objetivamente estos programas. Por otra parte, la existencia de algunos conductos paralelos en la difusión de la documentación ha podido dar lugar a ciertas desigualdades en cuanto a la posibilidad de disponer del material adecuado para juzgar los programas. Así, por ejemplo, el que exista una programación del Ciclo Medio separado por cursos que no ha sido difundida oficialmente y sobre la que hemos trabajado.

Crítica global de los programas

1. Es ineludible comenzar nuestra evaluación de los programas renovados de E.G.B. comparándolos con las N.O.P. de 1970. Creemos que se ha avanzado en la formulación de los objetivos que al ser más exhaustivos, sin llegar a ser precisos, evitan parte de la desorientación del profesorado.

Sin embargo, hay que señalar que en muchos momentos los nuevos programas tienen poco de renovados. Nos parece asimismo que lo más interesante no hubiera sido tanto detallar unos nuevos contenidos como analizar las causas del fracaso escolar en Matemáticas y ofrecer alternativas sobre la didáctica y la metodología, campos en los que los profesores se mueven con mayor inseguridad por la preparación más incompleta que han recibido en ellos. En este sentido, queremos señalar el escaso esfuerzo realizado para mejorar la preparación del profesorado tanto en el aspecto puramente matemático como pedagógico. Por tanto, hubiera sido más interesante hacer hincapié en el por qué y el cómo se enseña que en el qué enseñar en concreto.

2. En el Documento Base se habla de teoría psicológica para justificar la estructuración por Ciclos. Nosotros no entraremos en esto ya que será comentado en la ponencia del grupo que estudia dicho Documento. Pero si nos interesa ver la aplicación de estos fundamentos psicológicos en el área de la enseñanza de las Matemáticas. La exposición que se realiza en el Documento Base sobre las etapas del desarrollo intelectual nos parece en líneas generales adecuada. Sin embargo, nos resulta difícil ver cómo se ha concretado en lo que respecta a los programas renovados de Matemáticas. Por ejemplo, se habla de que el niño en el Ciclo Medio se halla en el período de las operaciones concretas y necesita que se le planteen los problemas en base a datos concretos. No entendemos cómo se relaciona esta base teórica con, por ejemplo, la explicación que se da en los programas de temas como la teoría de conjuntos o las fracciones.

Para que los estudios psicológicos puedan aportar algo provechoso a la realización de los programas de enseñanza es necesario todavía un gran esfuerzo de investigación y un trabajo conjunto de psicólogos y profesores. Si no sucede esto, se puede caer en el error de trasponer mecánicamente la psicología a la enseñanza o que aquella se quede en el terreno de los postulados teóricos. Deficiencia que no se salva con un leve toque piagetiano no situado aquí y allá.

3. En principio, la estructuración de los programas en torno a unos "bloques temáticos" da unidad a los diferentes "temas de trabajo". Lo que echamos en falta, sin embargo, es una mínima interconexión de los diferentes bloques. Hay contenidos de un determinado bloque temático que son necesarios para entender otros de un bloque temático diferente. Por esta razón, no tiene mucho sentido trabajar de forma aislada en cada bloque sino que debería existir una relación, de forma que se pasara de un bloque a otro según lo exigiera el concepto en que se trabajara en cada momento.

Por lo que respecta a los objetivos, hay casos en que estos se confunden con los contenidos. Por otra parte, hay que señalar que los objetivos son muy desiguales entre sí. Algunos se refieren a conocimientos muy concretos, mientras que otros señalan metas muy abstractas y amplias. Hubiera sido necesaria una formulación jerárquica de estos objetivos, comenzando por objetivos generales para llegar a objetivos operativos.

En cuanto a las actividades propuestas no nos parecen en muchos casos las más adecuadas. En el Documento Base se define las actividades como "el conjunto de acciones y experiencias que se programan como idóneas para conseguir cada uno de los objetivos propuestos". Sin embargo, pensamos que estas actividades no facilitan la formación o comprensión del concepto sino que implican que el concepto ya esté formado. Las actividades son, a veces, prueba de que se ha memorizado el concepto y no un apoyo para llegar a él (Ejemplo: Ciclo Inicial. Tema 2.2.5.b) En la sustracción, el minuendo se coloca siempre _____ y el sustraendo _____)

4. Es importante el constatar que existe una gran desconexión entre los contenidos escolares y la realidad en la que el niño se mueve. Esta disociación ha sido característica hasta ahora de todos los programas y los renovados no han conseguido superarla. Como dice Collis (1), la mayoría de los currícula se ba--

(1) K.F. Collis (1975) A study of concret and formal operations in school mathematics: A piagetian viewpoint. Australian Council for Educational Research.

san en la afirmación de que las Matemáticas existen y deben enseñarse al niño; pero para el niño, las Matemáticas no existen, existe la experiencia y el sistema matemático debe basarse en ella. El resultado de esta falta de relación entre lo que se enseña en la escuela y el mundo del niño lleva a que éste no generalice los conocimientos fuera del contexto escolar. Y la transferencia o generalización del aprendizaje a otros contenidos es probablemente el criterio más válido de que se ha dado dicho aprendizaje. Es frecuente que los niños opinen que las matemáticas valen para "estudiar" y para "aprender" y absolutamente para nada más.

5. La desconexión no es tan sólo con respecto a la vida del niño sino que también se manifiesta entre las matemáticas y las demás áreas de aprendizaje. La deseada interdisciplinariedad no se observa en ningún momento en los programas renovados de Matemáticas. Es verdad que en algunos preámbulos a los bloques temáticos se dice que sería conveniente poner en relación las matemáticas con las otras enseñanzas pero ni los objetivos ni las actividades reflejan, en nuestra opinión, esta relación.

CICLO INICIAL

En este ciclo, nuestro trabajo se ha centrado en realizar un análisis general de sus objetivos y de las ideas que subyacen y en ofrecer una posible alternativa de estructuración de los contenidos.

Lo primero que llama la atención al leer el programa de este ciclo, es la separación que se observa en distintos bloques temáticos entre lo que se ha llamado matemática "moderna" y matemática "tradicional". Tal como se han dividido los objetivos, es difícil establecer la relación entre ellas y, si la hay, hubiera sido conveniente ponerla de manifiesto más claramente. Por ejemplo, la unión de conjuntos disjuntos (3.1.1.) se utiliza para introducir el concepto de suma, pero no se hace ninguna aplicación de ella para explicar la mecánica de las distintas operaciones. Frente a algunos conceptos de la teoría de conjuntos que parecen útiles didácticamente, se introducen otros cuyo fin es el estudio de la teoría de conjuntos en sí misma o su aplicación es posterior a este ciclo.

Con la teoría de conjuntos habría que tener un especial cuidado pues se corre el riesgo de caer en una excesiva formalización para estas edades. Cuando esto ocurre, los niños simplifican los conceptos de tal forma que se quedan en los aspectos más perceptivos, perdiendo la noción de que se trate su sentido original. Así hemos encontrado niños hasta 6º de E.G.B. que al preguntarles qué es un conjunto lo identifican con el "redondel" y niegan, por ejemplo, que los árboles que hay en Madrid formen un conjunto si no están rodeados por algo. En general, los niños confunden los conceptos con su representación y piensan que nociones como "conjunto", "unión de conjuntos", etc. no tienen nada que ver con otros contenidos de las matemáticas.

En general, creemos debería seguirse un principio de economía en la utilización de vocabulario específico y de símbolos. En este sentido, nos llama la atención una vez más la desconexión

ción existente entre los documentos introductorios de los programas y los objetivos y actividades específicas. En el Documento de la Resolución de la Dirección General de Educación Básica, que completa la orden del 17 de enero de 1981, se repite de nuevo que "... tampoco ha de hacerse demasiado hincapié en un extenso y novedoso vocabulario". No nos parece oportuno, por lo menos como nivel mínimo obligatorio, usar en este período más vocabulario que "conjunto", "elemento", "pertenece" o "no pertenece". El hablar de "cardinal" o "conjuntos coordinables" no lo creemos útil ni necesario. En este nivel, lo más relevante sería hacer hincapié en los procesos de razonamiento que ha de realizar el niño, en el concepto que debe adquirir y no en el nombre matemático de ese concepto.

Tampoco está muy clara la conveniencia de utilizar símbolos como $<y>$ que pueden inducir a confusiones. Sería suficiente que los niños pudieran distinguir entre conjuntos mayores y menores y realizaran seriaciones de conjuntos con distinto número de objetos y más tarde directamente con números.

Por lo que respecta a los contenidos nos parecen globalmente adecuados si se dan interrelacionados (la alternativa a que nos hemos referido al principio es un ejemplo de cómo podrían conectarse los diferentes bloques temáticos) y se indica la manera de introducirlos. El ejemplo al que nos referimos anteriormente sobre la mecánica de las distintas operaciones pone también de manifiesto esta deficiencia. Hay sin embargo algunos objetivos que consideramos especialmente inapropiados. No entendemos qué fin se pretende al introducir el estudio de las bases en el Ciclo Inicial. Si es por el concepto en sí, creemos innecesaria la referencia a los sistemas de base distinta de 10; si se trata de comprender mejor el sistema numérico decimal, sería más conveniente trabajar manipulativamente distintos agrupamientos para posteriormente pasar a la base 10. En todo caso, la base 5 puede servir de apoyo didáctico. La base 2, por su nivel de abstracción y por las complicaciones de escritura que se alcanzan rápidamente incluso con números pequeños, nos parece no sólo inútil sino incluso contraproducente. Lo mismo ocurre con la intersección de conjuntos.

Hallar a nivel manipulativo la intersección de dos conjuntos puede suponer un trabajo interesante, y asequible para esta edad, de observación y relación, pero no vemos su aplicación ni relación con otros objetivos. Podría introducirse posteriormente y no sería imprescindible como nivel mínimo exigible en este Ciclo.

El nivel de automatización que se requiere en operaciones como la multiplicación y la división es excesivo. No se hace constar un desarrollo razonado de las operaciones. Lo importante sería que el niño comprendiera el significado de estas operaciones, dejando para el Ciclo Medio su automatización.

Por el contrario, habría una serie de nociones que tendrían que introducirse en este Ciclo aunque de forma elemental. Se echa en falta objetivos que se dirijan al trabajo con medidas de superficie. Nos referimos a tareas tales como recubrir superficies que puedan servir de iniciación para conceptos de medida que empiezan a manejarse en 3º de E.G.B.

También nos parece oportuno la introducción de algunas nociones elementales de "estadística", a un nivel asequible a estas edades, sin tener que esperar al Ciclo Superior. Creemos que los niños están capacitados para realizar actividades como registrar observaciones mediante dibujos sobre condiciones climáticas, interpretar registros relativos a juegos, etc. Una actividad consistente en que los niños apunten cada día si ha hecho sol o no y lo dibujen en un calendario puede servir de motivación y al mismo tiempo dar una idea intuitiva de la noción de probabilidad.

Se echa en falta una referencia a la introducción manipulativa a las fracciones: un medio y un cuarto. También sería conveniente empezar a trabajar el tema de la simetría de forma elemental y operativa.

Analizados los objetivos, pasamos a ofrecer lo que a nuestro entender sería una adecuada interrelación de los objetivos de cada bloque temático. Queremos señalar que en esta programación nos hemos basado en los objetivos indicados por el Ministerio. No hemos pretendido ofrecer una alternativa elaborada sistemáticamente sino algunas direcciones en las que podría ir una adecuada conexión de los distintos bloques temáticos.

Estructuración de los programas de 2º de E.G.B.				
Matematización de situaciones	Representaciones gráficas	Comparación de superficies	Operaciones	Topología y Geometría
1.4.1	1.1.1	1.1.1.1	1.1.1.2	1.1.1.3
2.2.1	2.1.1	2.1.1.1	2.1.1.2	2.1.1.3
3.3.1	3.1.1	3.1.1.1	3.1.1.2	3.1.1.3
4.4.1	4.1.1	4.1.1.1	4.1.1.2	4.1.1.3
5.5.1	5.1.1	5.1.1.1	5.1.1.2	5.1.1.3
6.6.1	6.1.1	6.1.1.1	6.1.1.2	6.1.1.3
7.7.1	7.1.1	7.1.1.1	7.1.1.2	7.1.1.3
8.8.1	8.1.1	8.1.1.1	8.1.1.2	8.1.1.3
9.9.1	9.1.1	9.1.1.1	9.1.1.2	9.1.1.3
10.10.1	10.1.1	10.1.1.1	10.1.1.2	10.1.1.3
11.11.1	11.1.1	11.1.1.1	11.1.1.2	11.1.1.3
12.12.1	12.1.1	12.1.1.1	12.1.1.2	12.1.1.3
13.13.1	13.1.1	13.1.1.1	13.1.1.2	13.1.1.3
14.14.1	14.1.1	14.1.1.1	14.1.1.2	14.1.1.3
15.15.1	15.1.1	15.1.1.1	15.1.1.2	15.1.1.3
16.16.1	16.1.1	16.1.1.1	16.1.1.2	16.1.1.3
17.17.1	17.1.1	17.1.1.1	17.1.1.2	17.1.1.3
18.18.1	18.1.1	18.1.1.1	18.1.1.2	18.1.1.3
19.19.1	19.1.1	19.1.1.1	19.1.1.2	19.1.1.3
20.20.1	20.1.1	20.1.1.1	20.1.1.2	20.1.1.3
21.21.1	21.1.1	21.1.1.1	21.1.1.2	21.1.1.3
22.22.1	22.1.1	22.1.1.1	22.1.1.2	22.1.1.3
23.23.1	23.1.1	23.1.1.1	23.1.1.2	23.1.1.3
24.24.1	24.1.1	24.1.1.1	24.1.1.2	24.1.1.3
25.25.1	25.1.1	25.1.1.1	25.1.1.2	25.1.1.3
26.26.1	26.1.1	26.1.1.1	26.1.1.2	26.1.1.3
27.27.1	27.1.1	27.1.1.1	27.1.1.2	27.1.1.3
28.28.1	28.1.1	28.1.1.1	28.1.1.2	28.1.1.3
29.29.1	29.1.1	29.1.1.1	29.1.1.2	29.1.1.3
30.30.1	30.1.1	30.1.1.1	30.1.1.2	30.1.1.3
31.31.1	31.1.1	31.1.1.1	31.1.1.2	31.1.1.3
32.32.1	32.1.1	32.1.1.1	32.1.1.2	32.1.1.3
33.33.1	33.1.1	33.1.1.1	33.1.1.2	33.1.1.3
34.34.1	34.1.1	34.1.1.1	34.1.1.2	34.1.1.3
35.35.1	35.1.1	35.1.1.1	35.1.1.2	35.1.1.3
36.36.1	36.1.1	36.1.1.1	36.1.1.2	36.1.1.3
37.37.1	37.1.1	37.1.1.1	37.1.1.2	37.1.1.3
38.38.1	38.1.1	38.1.1.1	38.1.1.2	38.1.1.3
39.39.1	39.1.1	39.1.1.1	39.1.1.2	39.1.1.3
40.40.1	40.1.1	40.1.1.1	40.1.1.2	40.1.1.3
41.41.1	41.1.1	41.1.1.1	41.1.1.2	41.1.1.3
42.42.1	42.1.1	42.1.1.1	42.1.1.2	42.1.1.3
43.43.1	43.1.1	43.1.1.1	43.1.1.2	43.1.1.3
44.44.1	44.1.1	44.1.1.1	44.1.1.2	44.1.1.3
45.45.1	45.1.1	45.1.1.1	45.1.1.2	45.1.1.3
46.46.1	46.1.1	46.1.1.1	46.1.1.2	46.1.1.3
47.47.1	47.1.1	47.1.1.1	47.1.1.2	47.1.1.3
48.48.1	48.1.1	48.1.1.1	48.1.1.2	48.1.1.3
49.49.1	49.1.1	49.1.1.1	49.1.1.2	49.1.1.3
50.50.1	50.1.1	50.1.1.1	50.1.1.2	50.1.1.3
51.51.1	51.1.1	51.1.1.1	51.1.1.2	51.1.1.3
52.52.1	52.1.1	52.1.1.1	52.1.1.2	52.1.1.3
53.53.1	53.1.1	53.1.1.1	53.1.1.2	53.1.1.3
54.54.1	54.1.1	54.1.1.1	54.1.1.2	54.1.1.3
55.55.1	55.1.1	55.1.1.1	55.1.1.2	55.1.1.3
56.56.1	56.1.1	56.1.1.1	56.1.1.2	56.1.1.3
57.57.1	57.1.1	57.1.1.1	57.1.1.2	57.1.1.3
58.58.1	58.1.1	58.1.1.1	58.1.1.2	58.1.1.3
59.59.1	59.1.1	59.1.1.1	59.1.1.2	59.1.1.3
60.60.1	60.1.1	60.1.1.1	60.1.1.2	60.1.1.3
61.61.1	61.1.1	61.1.1.1	61.1.1.2	61.1.1.3
62.62.1	62.1.1	62.1.1.1	62.1.1.2	62.1.1.3
63.63.1	63.1.1	63.1.1.1	63.1.1.2	63.1.1.3
64.64.1	64.1.1	64.1.1.1	64.1.1.2	64.1.1.3
65.65.1	65.1.1	65.1.1.1	65.1.1.2	65.1.1.3
66.66.1	66.1.1	66.1.1.1	66.1.1.2	66.1.1.3
67.67.1	67.1.1	67.1.1.1	67.1.1.2	67.1.1.3
68.68.1	68.1.1	68.1.1.1	68.1.1.2	68.1.1.3
69.69.1	69.1.1	69.1.1.1	69.1.1.2	69.1.1.3
70.70.1	70.1.1	70.1.1.1	70.1.1.2	70.1.1.3
71.71.1	71.1.1	71.1.1.1	71.1.1.2	71.1.1.3
72.72.1	72.1.1	72.1.1.1	72.1.1.2	72.1.1.3
73.73.1	73.1.1	73.1.1.1	73.1.1.2	73.1.1.3
74.74.1	74.1.1	74.1.1.1	74.1.1.2	74.1.1.3
75.75.1	75.1.1	75.1.1.1	75.1.1.2	75.1.1.3
76.76.1	76.1.1	76.1.1.1	76.1.1.2	76.1.1.3
77.77.1	77.1.1	77.1.1.1	77.1.1.2	77.1.1.3
78.78.1	78.1.1	78.1.1.1	78.1.1.2	78.1.1.3
79.79.1	79.1.1	79.1.1.1	79.1.1.2	79.1.1.3
80.80.1	80.1.1	80.1.1.1	80.1.1.2	80.1.1.3
81.81.1	81.1.1	81.1.1.1	81.1.1.2	81.1.1.3
82.82.1	82.1.1	82.1.1.1	82.1.1.2	82.1.1.3
83.83.1	83.1.1	83.1.1.1	83.1.1.2	83.1.1.3
84.84.1	84.1.1	84.1.1.1	84.1.1.2	84.1.1.3
85.85.1	85.1.1	85.1.1.1	85.1.1.2	85.1.1.3
86.86.1	86.1.1	86.1.1.1	86.1.1.2	86.1.1.3
87.87.1	87.1.1	87.1.1.1	87.1.1.2	87.1.1.3
88.88.1	88.1.1	88.1.1.1	88.1.1.2	88.1.1.3
89.89.1	89.1.1	89.1.1.1	89.1.1.2	89.1.1.3
90.90.1	90.1.1	90.1.1.1	90.1.1.2	90.1.1.3
91.91.1	91.1.1	91.1.1.1	91.1.1.2	91.1.1.3
92.92.1	92.1.1	92.1.1.1	92.1.1.2	92.1.1.3
93.93.1	93.1.1	93.1.1.1	93.1.1.2	93.1.1.3
94.94.1	94.1.1	94.1.1.1	94.1.1.2	94.1.1.3
95.95.1	95.1.1	95.1.1.1	95.1.1.2	95.1.1.3
96.96.1	96.1.1	96.1.1.1	96.1.1.2	96.1.1.3
97.97.1	97.1.1	97.1.1.1	97.1.1.2	97.1.1.3
98.98.1	98.1.1	98.1.1.1	98.1.1.2	98.1.1.3
99.99.1	99.1.1	99.1.1.1	99.1.1.2	99.1.1.3
100.100.1	100.1.1	100.1.1.1	100.1.1.2	100.1.1.3

CICLO MEDIO

Los programas renovados del Ciclo Medio serán aplicados en el curso escolar 1982/83, terminando su fase de consulta en breve plazo. Por esta razón, hemos creído que nuestras propuestas serían de mayor utilidad en este ciclo que en los otros dos, ya que el Ciclo Inicial entra en vigor el próximo año y para el Ciclo Superior queda más de un año de posible modificación. Así nuestro análisis de este Ciclo ha pretendido ser más exhaustivo y detallado.

Consideraciones generales

En la introducción que se realiza a los programas del Ciclo Medio, se expresan una serie de orientaciones con las que estamos de acuerdo pero que no parecen haberse tenido en cuenta a la hora de desarrollar concretamente los programas. En nuestra opinión, alguna de estas orientaciones no se reflejan en los objetivos y otras entran en contradicción con ellos.

Se señala que "no son los contenidos lo más importante en los primeros años de la E.G.B., lo verdaderamente importante es iniciar un nuevo proceso de pensamiento que desembocará en la creación de las ideas y en la expresión simbólica, gráfica y verbal de estas ideas". Sin embargo, el papel que tiene el razonamiento frente a su expresión es mínimo. Se observa una insistencia en el empleo por parte del niño de una terminología excesiva e innecesaria en este momento. No parece conveniente que los niños tengan que saber nombrar todos los tipos de ángulos o de aplicaciones, o los términos de las operaciones (multiplicador, multiplicando). El objetivo 1.1.3. en 4º curso (conjunto referencial, conjunto complementario) es un buen ejemplo de la inflación de vocabulario.

Por otra parte, se retoman términos "arcaicos" a la hora de expresar cantidades (forma compleja e incompleja), (múltiplos y divisores del metro).

Tampoco se encuentra en la línea de favorecer el desarrollo del razonamiento el excesivo formalismo y rigor utilizado en algunas ocasiones. Los niños pueden saber operar correctamente con conjuntos sin conocer las leyes de De Morgan (actividad e. objetivo 1.1.7. 5º E.G.B.).

Lo importante, desde nuestro punto de vista, es que los niños sepan manejar y aplicar los conceptos matemáticos sin que esto implique por su parte un conocimiento y una expresión explícita de las operaciones lógico-matemáticas que están realizando. El niño debe saber sumar, restar, ... de todas las formas posibles y no es necesario que sea consciente de que en ese momento está aplicando la propiedad asociativa o la conmutativa.

Uno de los mayores problemas que hemos encontrado se refiere a la estructuración y secuenciación de los objetivos. La adquisición de un concepto supone en un primer momento su manejo experimental e intuitivo para ir después avanzando progresivamente hacia grados de abstracción mayores. Habría, por tanto, que tratar los mismos conceptos en varios cursos pero de forma integradora y progresiva y con un nivel cada vez más alto de formalización. Sin embargo, en estos programas se repiten a lo largo de los tres cursos bastantes contenidos sin que se observe ningún avance de un año a otro. Los objetivos y actividades que se refieren a región angular, por ejemplo, aparecen en los tres cursos sin diferencias apreciables. Otros conceptos, por el contrario, no se recogen y amplían, como puede ser el sistema de numeración introducido en el Ciclo Inicial que no aparece en 3º y de nuevo se retoma en 4º.

Una adecuada secuenciación de los contenidos podría evitar las repeticiones y olvidos a que nos referimos. Además se salvaría el problema de la cantidad excesiva de materia por curso que aparece en la actual programación.

Otro punto criticable en la estructura de los programas es la falta de una adecuada jerarquización de los objetivos. Al lado de objetivos generales como "perfeccionar las nociones adquiridas sobre el número en cursos anteriores" encontramos otros tan específicos como "usar correctamente los signos...".

Sirva como ejemplo la descomposición que hemos realizado de un objetivo en sus diferentes pasos:

2.1.1. Perfeccionar las nociones adquiridas sobre el número en los cursos anteriores.

- 1) Identificar números
- 2) Componer y descomponer números
- 3) Leer y escribir números
- 4) Seriar números
- 5) Comparar números y representar números

En cuanto a las actividades, aunque sean sugeridas, indican la intención que se busca en cada objetivo. En principio, las actividades estarían encaminadas a lograr la adquisición del objetivo, sin embargo, la mayoría suponen la posesión del concepto. Se podría citar innumerables ejemplos en la programación de los tres cursos, actividades como "realizar las multiplicaciones siguientes" se sugieren para el objetivo "realizar multiplicaciones en los siguientes casos..." (objetivo 2.2.9. en 3°). Es difícil distinguir aquí el objetivo y la actividad. Muchas de las tareas parecen dirigidas más a evaluar lo que se sabe que a alcanzar el objetivo: "Cuál es la propiedad común de los conjuntos coordinables entre sí" (2.1.3. a) en 3°).

Gran parte de las actividades hacen hincapié en que el niño escriba, lea, reconozca, diga y muy pocas en conductas que favorezcan la construcción del concepto. En otros casos, los que se pide induce a la confusión más que aclarar la noción a que se refiere. Por ejemplo, (la actividad 1.1.1. a) 3°) ¿"Cómo se llama la línea que encierra los elementos de un conjunto cuando se representa en un diagrama de Venn? o ¿Qué forma tiene un plano?

¿Por qué? ¿Qué quiere decir ilimitado? (4.3. a) en 3° y 4°).

Aunque se reitera la conveniencia de plantear problemas de la vida real, los ejemplos ofrecidos parecen igualar lo que se da en la realidad y lo que para los niños puede ser una situación cercana y motivadora. ¿Quién ha observado a un niño preguntándose el día de su cumpleaños "qué fracción de tarta queda" como le sucede al sujeto de la actividad a) del objetivo 2.3.6.? Este ejemplo puede resultar anecdótico pero, en general, no se ve la relación entre los problemas cotidianos del niño y las situaciones que se presentan en los programas.

Por último, habría que cuidar la redacción tanto de los objetivos como de las actividades. A veces resulta difícil entender lo que se pretende decir, bien por el exceso de formalismo, bien por la incorrección del lenguaje empleado. No parece adecuado preguntar "cuál es el múltiplo del metro que vale 10 metros" y suponemos que tendrá que realizarse un considerable esfuerzo para entender lo que se quiere decir con "distinguir los términos de la sustracción y comprobar la relación entre ellos, deduciendo que es la forma de comprobar si la operación está bien realizada".

Consideraciones particulares

- 1°. En general, los conceptos de conjuntos y relaciones deben servir en este Ciclo como recurso didáctico para apoyar la comprensión de las nociones matemáticas, fundamentalmente, las numéricas y el cálculo. Entendemos que el bloque temático al que hacemos referencia es demasiado amplio para este Ciclo. Por una parte, se exige unos contenidos (distinción entre correspondencias unívocas y biunívocas, relaciones...), que no se integran didácticamente en el resto de los conceptos matemáticos, y, por otra, el desarrollo de estos conceptos puede alcanzar unos grados de abstracción difícilmente abarcables para los niños del Ciclo (Medio).

Nuestra propuesta es, insistimos, reducir al mínimo este bloque temático modificando o suprimiendo objetivos como: "Definir conjuntos por comprensión y por extensión" (1.1.1. 4°).

- 2°. Teniendo en cuenta que el trabajo con diferentes sistemas de numeración facilita la comprensión del sistema de numeración decimal y los mecanismos de las diferentes operaciones, y que el exceso de tratamiento de los diferentes sistemas o de trabajo específico con sistemas como el binario, en el que es muy difícil ver la ley de sucesión, puede surtir el efecto contrario al perseguido, tanto la introducción como el trabajo con los diferentes sistemas se debe desarrollar de forma manipulativa en este Ciclo, como agrupamientos, aprovechando las situaciones de la vida en los que éstos se den: duros y pesetas, pastillas y cajas..., etc.

En consecuencia, los objetivos que hagan referencia expresa al trabajo con el sistema binario se deben suprimir. Obj.: 2.1.6 4°., "operar con el sistema binario".

- 3°. En cada uno de los cursos del Ciclo Medio, preferentemente 3° y 4°, se deberá incluir un objetivo que haga referencia a la construcción y desarrollo del sistema de numeración decimal con una referencia expresa a las actividades que pueden realizarse con los números naturales no operativas, definido sin ambigüedades y secuenciado.

- 4°. En cuanto a los objetivos que hacen referencia a las operaciones es importante constatar la ausencia total de cualquier objetivo tendente a justificar de forma razonada los mecanismos que el niño ha de adquirir y utilizar al realizar las operaciones.

El desarrollo de una didáctica de cada operación no se ha tenido en cuenta en ningún caso. Pensamos que aparecerá en los Documentos de Apoyo (2).

El objetivo 2.2.8. 4° puede servir de muestra: se pide "realizar multiplicaciones en los siguientes casos..." casos indicados en un orden que no corresponde a un desarrollo racional de la operación.

Las propiedades de las diferentes operaciones se deben introducir, desarrollar y aplicar como un caso particular de la operación, es decir, por vía operativa. Las actividades que se sugieren para el objetivo 2.2.1. 4°, parecen indicar lo contrario a lo que aquí se expresa.

Como casos más específicos sugerimos:

- Que en el obj.: 2.2.10. 4°, la distinción de base y exponente como nombres de los términos de una potencia se debe llevar al 5° curso.
- El objetivo 2.2.13. 4° "comprobar las equivalencias de la división" se debe introducir una vez trabajada la propiedad fundamental de las fracciones.
- No vemos interesante la denominación de "multiplicando" y "multiplicador" que sustituimos por "factores".

- 5°. La introducción y desarrollo del tema de fracciones se debería iniciar en cursos anteriores a los que aparece en los programas renovados de una forma experimental y, en cuanto a su introducción como operadores, nos parece demasiado abstracto para los niños de este Ciclo.

- 6°. En cuanto al bloque temático de Magnitudes y Medidas hay que hacer las siguientes consideraciones:

- Es necesario introducir el tema recordando las medidas naturales, aunque esto se haya hecho ya en el Ciclo Inicial.
- En el 3° curso se debería añadir algunas unidades más como el decímetro y el centímetro.

- La distinción rigurosa de magnitud como conjunto y cantidad como elemento del conjunto que aparece en los objetivos 3.2. 3° y 4°, implica una formalización que no ayuda en nada a la comprensión de estos conceptos y que tampoco es interesante en sí misma.

- Se echa en falta un tratamiento de las unidades de superficie (no convencionales) en los cursos 3° y 4°, y una preiniciación a la medida de superficies.

7°. En cuanto al bloque temático de Topología y Geometría se advierte, en términos generales, y referido a los tres cursos, una falta de secuenciación y adecuación a la edad y madurez de los alumnos a los que va dirigido, como es el caso de los cuerpos geométricos introducidos en el Ciclo Inicial y que no vuelven a aparecer hasta 5°. Entendemos que no debieran exigirse definiciones rigurosas y abstractas, mereciendo especial mención el concepto de ángulo, obj.: 4.9. 3°, 4.6. 4° 4.3. 5°, al que se define como "el conjunto de todas las semirrectas que se pueden trazar en una región angular y cuyo origen está en el vértice", ejemplo claro de que a veces la formulación de un concepto oscurece la comprensión del mismo. Entendemos que los alumnos deben adquirir los conceptos de este bloque temático primero por vía experimental, y, después intuitiva, y su formalización se hará en cursos superiores.

Como casos más específicos sugerimos que se supriman los objetivos que hacen referencia al cálculo de la longitud de la circunferencia y de la superficie del círculo, ya que la introducción del número π nos parece prematura para este ciclo.

RESUMEN: En resumen, los aspectos que creemos más destacables son:

- La contradicción que existe entre las ideas expresadas en los documentos introductorios y su desarrollo en los programas.
- Falta de jerarquización de los objetivos.
- Se echa en falta una interrelación de los contenidos. Da la sensación de que la matemática se desarrolla por apartados.
- Existe un excesivo rigor y formalismo en el lenguaje. La terminología debiera reducirse al mínimo.
- Las actividades no ayudan a la formación del concepto, lo suponen adquirido.
- Existe, en términos generales, un abuso en la cantidad de contenidos y en el empleo del lenguaje de la teoría de conjuntos y de relaciones.
- Los diferentes pasos del proceso de las operaciones no están recogidos. De la lectura de los objetivos parece desprenderse que sólo importa la mecánica de la operación y no el desarrollo razonado de la misma.
- En los objetivos no se hace referencia a las actividades que hay que realizar con los números previas a las operaciones: componer, descomponer, comparar, seriar,...
- No se hace mención a las operaciones combinadas y al cálculo aproximado, ni a las simetrías.
- Un olvido poco menos que imperdonable es la no introducción de actividades de estadística y probabilidad.

Conclusiones

Tras este estudio se impone la reflexión sobre los efectos que estos programas pueden tener en la enseñanza de las matemáticas. Intentaremos sacar algunas conclusiones.

En primer lugar, suponemos que esta iniciativa ministerial pretende dar respuesta a los graves problemas que las matemáticas tienen planteados en la E.G.B. Hubiera sido interesante conocer la descripción que el M.E.C. hace de esta situación, y aún más el saber a que atribuye estas dificultades. Además de interesante, hubiera sido absolutamente necesario para iniciar, desde el M.E.C., una acción en un sentido o en otro. Este diagnóstico de la situación no aparece explícitamente en ninguna parte, y sólo en el Documento Base hay un capítulo en el que se aborda la necesidad de unos programas renovados. Sin embargo, las necesidades en una u otra disciplina pueden ser muy diferentes, por lo que, además de lo anterior, habría sido necesario un diagnóstico riguroso sobre los problemas que aquejan a la enseñanza de las matemáticas.

A pesar de todo lo anterior, después de haber estudiado detenidamente los programas, podemos deducir cual es el problema que inquieta al M.E.C. Los P.R. consisten en una larga lista de unos llamados "objetivos", pero que en realidad son contenidos. Estos contenidos llevan al lado unas actividades sugeridas, y también se anuncia la elaboración de unos Documentos de Apoyo para el profesorado. Es claro que lo único que aborda seriamente el M.E.C. es la redacción de una amplísima lista de objetivos mínimos que todos los españoles deben alcanzar a determinadas edades. "El problema de las matemáticas es que los "objetivos-contenidos" no estaban lo suficientemente detallados. Por lo tanto, mediante la publicación de una lista exhaustiva de ellos en el B.O.E. se solucionará el problema". Este es, en síntesis, el mensaje que el M.E.C. nos transmite en estos programas.

Ha habido muchos artículos y estudios parciales que en los últimos tiempos han abordado el problema del fracaso escolar en matemáticas. Un trabajo más amplio y riguroso sobre el tema podría haber sido impulsado por el M.E.C. Es evidente que nosotros no hemos podido abordar un problema de semejante envergadura, pero sin embargo, no nos parece demasiado aventurado afirmar que en las N.O.P. de 1970, el problema no era que se hayan impartido correctamente unos contenidos inadecuados, sino que, sean estos o no adecuados, el profesorado no estaba preparado para impartir estas enseñanzas. La introducción de la llamada "matemática moderna" no fue digerida por el profesorado y aún no lo ha sido. Es conocido por todos como muchos maestros dividen las horas de matemáticas: unos días se enseñan las cosas de conjuntos y otros días tocan cuentas. Cualquier relación entre unos temas y otros aparece como inexistente. Pensamos, por lo tanto, que lo importante hubiera sido la elaboración de un plan riguroso de formación del profesorado. No es serio objetar que se van a elaborar unos Documentos de Apoyo al profesorado; no conocemos aún dichos documentos, pero en el mejor de los casos, suponiendo que fueran excelentes podemos decir que hay muchos libros excelentes que el profesorado no tiene por qué comprar y aunque así fuera, no creemos que la lectura de un buen libro solucione todos los problemas.

Queda claro por lo tanto, que en nuestra opinión se están haciendo esfuerzos en una dirección equivocada. Pero entremos también en lo que son estos P.R.

Parece verosímil que con la línea marcada por el M.E.C. se termine por explicar "conjuntos" unos días y "cuentas" otros. Pese a las abundantísimas tomas de posición y declaraciones de principio lo cierto es que la teoría de conjuntos y la "matemática tradicional" ocupan sus puestos en los programas, y además lo hacen sin una clara relación entre una y otra. La escisión de que se habla en la introducción a los programas y su solución: "matematización de problemas de la vida real", se han quedado en mera literatura.

parece difícil que el niño "descubra" tantas cosas a la semana como prevé el M.E.C. El niño no va a descubrir, va a memorizar, en flagrante contradicción, una vez más, con la literatura de los programas.

2. Se consagra de hecho, la separación entre matemática "moderna" y "tradicional", al mismo tiempo que no se traza ningún camino para propiciar la interdisciplinariedad. Es este un principio que difícilmente somos capaces de llevar a cabo los maestros, sobre todo en el caso de las matemáticas.

3. Las formulaciones sobre las matemáticas como un nuevo modo de pensar, mucho nos tememos que no pasen de buenas intenciones. Las matemáticas van a seguir ocupando el mismo lugar en la escuela; no se introduce ningún elemento nuevo que vaya a relacionar en la práctica las matemáticas con la vida. La poca importancia que se presta a la Estadística y Probabilidad, ninguna en el C. Inicial y Medio, puede ser un buen síntoma de ello.

4. La unión entre la matemática y las Ciencias Naturales no aparece en los P.R. Creemos sin embargo que es un punto clave, que va a seguir sin abordarse. En vez de esto, y pretendiendo apoyarse en la teoría de Piaget, se introducen muchos elementos de pseudoformalización y de conocimiento explícito de las estructuras matemáticas, no teniendo en cuenta que el dominio real de una estructura es anterior a su conocimiento explícito, y que este no es en absoluto necesario en la E.G.B.

5. Todavía no sabemos si el fracaso escolar actual se debe a la inadecuación de los contenidos o a la mala preparación del profesorado. Transcurrido un período de tiempo de implantación de estos programas, quizá tengamos un dato más para volver a afirmar que no se trata de elaborar listas de contenidos, sino de promover un amplio plan de formación de profesorado. Además, esta necesidad no puede ser absorbida por los cursillos que ya se dan, aún en el caso de que se incremente su número. Se necesita algo más que eso y es al M.E.C. a quien corresponde lanzar iniciativas sobre el tema.

6. Estos programas sólo aportan algo nuevo: se restringe la libertad del profesor y se le obliga a tener como primordial objetivo la terminación de los programas.

La formulación teórica de la matemática como un instrumento de análisis de la realidad, nos parece muy interesante. Pero si realmente tomamos en serio este postulado no podemos dedicarnos a hacer, de forma exclusiva, listas de contenidos. Partiríamos de que los maestros no hemos aprendido las matemáticas de esta manera, y por lo tanto, salvo enormes dosis de creatividad, o grandes esfuerzos personales no se puede suponer que sepamos hacerlo. Habría que entender la teoría de conjuntos como un recurso didáctico para una introducción más racional de los conceptos, o bien como método de representación directa de la realidad.

Paralelamente, es curiosa la afirmación de que las operaciones no son prioritarias, sino un simple instrumento; es una afirmación reveladora de una cierta mala conciencia, y con la cual no estamos de acuerdo. Pensamos, por el contrario, que es imprescindible el dominio de las operaciones y de su significado, y que esta afirmación del M.E.C. muestra el deseo de "apuntarse a todas". Pero lo más curioso es que después de las frases literarias, los programas prestan una gran atención a la automatización de las operaciones, que no a su desarrollo razonado, llegando a introducir la automatización de la división en el Ciclo Inicial.

Otro aspecto a tener en cuenta es la gran cantidad de objetivos que se proponen en cada Ciclo. Si tenemos en cuenta que estos objetivos son mínimos y obligatorios, se deja poco terreno para adecuar los contenidos a las características de los niños. El maestro va a estar preocupado de acelerar constantemente para poder alcanzar los objetivos mínimos a final de cada Ciclo. Es inevitable que esta ansiedad se transmita a los alumnos primando los automatismos sobre la adquisición racional de los conceptos.

Las consecuencias de estos programas pueden ser entonces:

1. Se da pie, y en cierto modo se obliga, a que las editoriales hagan libros muy extensos, y todos sabemos la importancia real que el libro de texto tiene en la escuela. De esta manera,

CONCLUSIONES AREA DE MATEMATICAS.-

- 1.- La contradicción que existe entre las ideas expresadas en la introducción de los bloques temáticos y su desarrollo en los programas.
- 2.- Pensamos que no era tan necesario el definir unos contenidos mínimos obligatorios cuanto el abordar un amplio plan de renovación metodológica y estructural, y, en consecuencia de perfeccionamiento del profesorado.
- 3.- Los Programas Renovados no cambian sustancialmente las programaciones anteriores, detallan más los objetivos sin llegar a precisarlos.
- 4.- Consideramos que es negativo el exceso de contenidos que aparecen, teniendo en cuenta que se trata de contenidos mínimos.
- 5.- Consideramos criticable el exceso de formalismo en el lenguaje.
- 6.- Se echa en falta una jerarquización de los objetivos y una interrelación de los contenidos entre los diversos bloques temáticos.
- 7.- Un fallo importante es el de que las actividades suponen en muchas ocasiones el concepto.
- 8.- Parece que sólo importa la mecánica de las operaciones y no su desarrollo razonado.
- 9.- No se introducen actividades de estadística y probabilidad en los ciclos Inicial y Medio.
- 10.- Existe un exceso de contenidos en la teoría de conjuntos y de relaciones. Muchos de ellos no tienen aplicación didáctica, sino que suponen el estudio de la teoría de conjuntos por sí misma.
- 11.- La pretensión de que estos Programas Renovados reflejan la teoría de Piaget, pone de manifiesto una interpretación errónea de ésta. El hecho de que algunas operaciones que el niño realiza puedan describirse en términos de la teoría de conjuntos no quiere decir que haya que enseñar los conjuntos como contenidos. Lo mismo se puede decir con respecto al bloque de Topología y Geometría.
- 12.- Se postula que las matemáticas deben ser un instrumento de análisis de la realidad: No vemos reflejada esta idea en los programas.
- 13.- Los programas del ciclo Superior suponen un avance con respecto a las Nuevas Orientaciones Pedagógicas de 1970, y se ha rebajado el nivel de formalización aunque todavía quedan algunos aspectos que pueden ser mejorados, en concreto, sería deseable recortar aún más los contenidos.
- 14.- Es necesaria una interrelación entre todos los bloques de la matemática, incluida la Geometría. A ésta se le ha prestado más atención que en los programas anteriores, pero desde una concepción estática y no dinámica.
- 15.- Existe una falta total de interdisciplinariedad que en el ciclo Superior es especialmente chocante con respecto a la física.

M E M O R I A J U S T I F I C A T I V A

POR: Enrique Rubiales Camino - Javier Zabala Camarero-Núñez (del Grupo 2001)

El presente trabajo se presenta como respuesta a una fuerte corriente que plantea la conveniencia de introducir la Informática en el Bachillerato. Se puede citar que uno de los dos temas a tratar en las Jornadas de Perfeccionamiento del Profesorado en el mes de julio en Gijón, dentro de la asignatura de matemáticas, es "la Informática en la Enseñanza". O, por citar alguna experiencia extranjera, en julio de 1981 tuvo lugar en Lausanne una "Conferencia mundial sobre ordenadores en la educación", con asistencia de 1266 participantes de 68 países, incluidos, por ejemplo, China y Rusia.

"La rapidísima baja del precio de los microordenadores, su volumen cada vez más reducido, su empleo cada vez más fácil por el hombre no especializado, provocarán una expansión general. En los próximos años, la Informática se extenderá aún más rápidamente de lo que lo hizo la electricidad al principio de la industrialización. Lo hará incluso con más naturalidad, y proliferará en la actividad creadora, igual que en la vida cotidiana y el ocio". Hoy vemos cómo esta profecía de J.J. Servan Schreiber en "El desafío mundial" se está haciendo realidad, al poco tiempo de haber sido escrita.

En Madrid, Barcelona, Galicia, Vizcaya, La Mancha y otros lugares de nuestra geografía, hay Institutos y alguna entidad privada que incluye entre sus actividades la enseñanza de la Informática. La Fundación para el Desarrollo de la Función Social de las Comunicaciones (FUNDESCO) organizó a primeros de abril de 1981 unas jornadas sobre "La educación informática en la enseñanza general". El informe final hace patente la necesidad de formar y educar a los alumnos de hoy en este terreno que con la mayor probabilidad tendrán que cultivar mañana.

Como se habrá visto, el núcleo del programa que se propone es el lenguaje de programación B.A.S.I.C. Las razones de esta elección son claras. En primer lugar, el BASIC, siendo el lenguaje más sencillo de entender, es de una gran potencia:

"El uso del BASIC se ha hecho especialmente corriente en la Escuela Secundaria y en los primeros cursos de Escuela Superior. Además, lo accesible del lenguaje en la mayor parte de los sistemas comerciales de tiempo compartido, ha hecho que se utilice ampliamente para multitud de aplicaciones empresariales, técnicas y científicas" (Byron S. Gottfried en "Teoría y problemas de programación BASIC").

Se trata del lenguaje más extendido, más del 80 % de los ordenadores en funcionamiento admiten el BASIC. Todas las experiencias extranjeras van también en esta dirección, con algunas excepciones que confirman la regla. Por ejemplo, en Francia se diseñó el lenguaje L.S.E. específico para la enseñanza, que es en esencia una traducción y perfeccionamiento del BASIC.

Podría tratarse del lenguaje PASCAL al final del tercer curso, pero no vemos claro que a esa edad los chicos puedan trabajar con dos lenguajes. Además, la inversión adicional en equipos que requeriría este lenguaje es considerable: casi ningún microordenador lo admite.

En resumen: a andar se aprende andando y la Informática se aprende programando, en un lenguaje adecuado: el BASIC. Para aprender Informática, sobre todo a este nivel de Enseñanza Media, es necesario "teclear".

El programa que se propone para 2º de B.U.P. recoge un primer núcleo sencillo pero completo. Sería perjudicial explicar en un curso los bucles FOR NEXT, y esperar al siguiente para tratar de las funciones de librería o las variables de índice. Forma todo una unidad lógica (didáctica) que conviene desarrollar en un sólo curso. Es también motivador para los alumnos el poder terminar un curso sabiendo programar, aunque sea con recursos limitados. A esto se une nuestra experiencia en el Instituto Experimental "Cardenal Herrera Oria" de Madrid, en donde vemos que esto es posible e interesante.

En 3º de B.U.P. se propone dedicar el primer trimestre a ampliar los conocimientos del BASIC del curso anterior, descendiendo a detalles y posibilidades del lenguaje, que entonces no fue conveniente abordar. Se aprovecharía este trimestre para repasar, aunque sea sólo de una manera informal, los conocimientos del año anterior, quizá algo enmohecidos por las vacaciones.

Y llega la hora de las aplicaciones. Sobre algoritmos y Cálculo Numérico se ha pretendido hacer un esquema elemental, que cubra todos los flancos posibles al alcance de un alumno de 3º de B.U.P. Tratándose de una E.A.T.P., y a esa edad, no puede pretenderse dar un auténtico curso de Cálculo Numérico.

Sobre simulaciones y juegos, aspectos menos áridos que el anterior, se han citado unos pocos ejemplos, conscientes de la bibliografía que hay en el mercado. No podemos ser exhaustivos. Además las peculiaridades de cada microordenador son vitales a la hora de las representaciones gráficas, y en general de este apartado. Nos parece mejor dejar al criterio del profesor la elección de los programas más interesantes a realizar; se han apuntado algunos como botón de muestra.

Al final conviene hacer también algunos programas de gestión, pues una de las ramas de la Informática más extendidas. Son ejemplos menos vistosos, más largos de elaborar, y de ordinario requieren la posibilidad de manejo de un mínimo banco de datos. Sería muy conveniente disponer de unidades de disquetes para este último punto.

Hemos dado por sentado desde el principio de esta comunicación que nos movíamos en el campo de una E.A.T.P. Podría llevarse a cabo, en una primera etapa, como actividad extraescolar, con repercusiones muy positivas entre los alumnos, pero la E.A.T.P. tiene múltiples ventajas. Para el profesor significa que no ha de dedicar horas extraordinarias para esta materia. Para los alumnos la E.A.T.P. comporta mayor seriedad, control de la asistencia, unas notas, etc., que facilitan el trabajo.

Hay varios Institutos que tienen concedida la E.A.T.P. de Informática, y suelen hacer a principio de curso, antes de la matrícula, una selección debido al gran número de solⁱcitantes. La experiencia es muy positiva, pues la baja relación alumnos/profesor exigida por esta asignatura recorta aún más las posibilidades de impartirla a todos los alumnos que lo desean.

PROGRAMA PARA 2º DE B.U.P.

1. APLICACIONES ACTUALES DE LA INFORMÁTICA

- Científicas, técnicas, industriales (robótica)
- Administrativas, de gestión
- Otras (tratamiento de textos, dibujo).

2. EL ORDENADOR Y SU PROGRAMACION

- Qué es un ordenador
- Partes, periféricos
- Lenguajes de programación:
 - lenguaje de máquina y ensamblador
 - lenguajes de alto nivel: el B.A.S.I.C.

3. EL LENGUAJE BASIC: PRIMEROS PASOS

- Línea de programa: número de línea
- Instrucción. La tecla RETURN
- Instrucciones de asignación: LET
- Variables numéricas. Nombres de las variables
- La instrucción PRINT (sin detalle)
- Instrucciones de entrada de datos: INPUT
- Fin de un programa: END
- Comando RUN
- Comando LIST

4. LA ARITMÉTICA DEL BASIC

- La notación anglosajona: el punto
- Operadores aritméticos
- Jerarquía de las operaciones. Uso de paréntesis
- Notación exponencial
- Comando NEW

5. CLARIDAD DE EXPRESION

- La instrucción REM
- La instrucción PRINT (con detalle). Uso de la coma (,) y del punto y coma (;) en la instrucción PRINT. La instrucción PRINT como línea en blanco
- Etiquetas en la instrucción INPUT, uso del punto y coma (;). Varias entradas en una sola instrucción INPUT, uso de la coma (,)
- Modificación de una línea. Borrado de una línea
- Variables alfanuméricas. Nombre de las variables. Su utilización en INPUT y en PRINT
- Suma de variables alfanuméricas. Comparación de variables alfanuméricas (=, ≠)

6. TRANSFERENCIAS DE CONTROL: BIFURCACIONES

- La instrucción GOTO: bifurcación incondicional
- La instrucción IF THEN: bifurcación condicional
- Operadores lógicos: =, <>, <, <=, >, >=
- Organigramas
- Contador

7. BUCLES

- La instrucción FOR NEXT
- STEP
- STEP negativo
- Variables y expresiones en la instrucción FOR TO STEP
- Bucles sin salida. Interrupción de un programa por la tecla STOP
- La instrucción STOP
- El comando CONT
- Entradas (ilícitas) y salidas (lícitas) de un bucle
- Bucles anidados

8. FUNCIONES DE LIBRERIA

- Comparación con las teclas de las calculadoras
- INT: divisibilidad
número de decimales por truncamiento y por redondeo
- RND: entre 0 y 1
entre dos números cualesquiera
entre dos números pero tomando valores enteros
- TAB: posibilidades gráficas
- Funciones trigonométricas
- Otras funciones matemáticas (ABS, SQR, EXP, LOG, SGN)
- Definición de una función cualquiera
- Funciones para el tratamiento de variables alfanuméricas

9. VARIABLES CON INDICE

- Variables con índice: listas
- Instrucción DIM
- Variables con dos o más índices: tablas o matrices

10. SUBROUTINAS Y BIFURCACIONES MULTIPLES

- La instrucción GOSUB-RETURN: subrutinas
- La instrucción ON GOTO: bifurcaciones múltiples
- La instrucción ON GOSUB

11. MANEJO DE DATOS

- Manejo de datos dentro de un programa. Instrucciones DATA, READ y RESTORE
- Ficheros: instrucciones OPEN y CLOSE
instrucciones INPUT# y PRINT#

1. REPASO Y REFUERZO DEL BASIC

- Varias instrucciones en una línea de programa
- La instrucción GET
- Operadores OR, AND, XOR y NOT. La palabra ELSE
- La instrucción IF THEN en una línea de varias instrucciones
- Las instrucciones ASC() y CHR\$()
- Las instrucciones POKE y PEEK
- Otras instrucciones y posibilidades del ordenador de que se disponga: operaciones con matrices, funciones de varias variables, etc.

2. RUDIMENTOS DE ALGORITMICA Y CALCULO NUMERICO

- Descomposición de un número en factores primos
- Máximo común divisor de dos números
- Resolución de triángulos
- Operaciones con dos vectores: +, -, ·, *
- Sistemas de ecuaciones lineales (método de Gauss)
- Derivada de una función en un punto
- Resolución numérica de ecuaciones
 - por bipartición
 - por el método de la secante
 - por el método de Newton o de la tangente
 - por iteraciones
- Integración numérica por el método de los rectángulos
 - de los trapecios
 - de Simpson
- Estadística: media, desviación típica y media geométrica
- (sólo para cursos de buena capacidad y calendario holgado)
 - logaritmo decimal de un número mayor que 1
 - coeficiente de correlación
 - recta de regresión
 - interpolación

Por tanto, en

$$M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

el elemento (i,j) es el número de caminos de i a j, de dos pasos como máximo.

En general, el elemento (i, j) de M^n es el número de caminos de n pasos que hay entre i y j, y el de $M + M^2 + \dots + M^n$ es el número de caminos de n pasos como máximo.

Vectores.

El producto escalar de vectores, conocido por los alumnos de 3º y COU, coincide con el producto de los vectores interpretados como matrices.

Finalmente, diremos que nos interesa el producto de matrices como forma abreviada de expresar una serie de igualdades del tipo:

$$\begin{aligned} a_1 &= c_{11} \cdot b_1 + c_{12} \cdot b_2 + \dots + c_{1n} \cdot b_n \\ a_2 &= c_{21} \cdot b_1 + c_{22} \cdot b_2 + \dots + c_{2n} \cdot b_n \\ &\dots\dots\dots \\ a_m &= c_{m1} \cdot b_1 + c_{m2} \cdot b_2 + \dots + c_{mn} \cdot b_n \end{aligned}$$

pasando a:

3. SIMULACION

Fenómenos aleatorios

Completar una colección de N cromos

un sólo coleccionista

varios coleccionistas que cambien cromos repetidos

Extracción, con o sin reposición, de bolas de una urna

- Inteligencia artificial

Pequeño laberinto (sin representación gráfica, sólo numérica, de las posiciones), del que un animal ha de salir con un sólo criterio: no repetir un recorrido que

no le ha llevado a la salida

4. JUEGOS

- La ruleta

- Tragaperras

- Acertar un número entre 1 y 100, contestando en cada intento si nos hemos pasado o nos hemos quedado cortos.

- Master mind

- Juego del submarino: empezando con N cargas de profundidad en reserva, se trata de hundir un submarino que se mueve en un campo cuadrulado de 10 x 10 (sin representación gráfica). Cada vez que lanzamos una carga el ordenador contesta la distancia al submarino, cuya posición no conocemos. El submarino se mueve cada vez que lanzamos una carga, de forma aleatoria

- En función de las posibilidades gráficas del microordenador y de sus recursos particulares, como disponer de reloj, será fácil idear juegos variados

5. GESTION Y ADMINISTRACION

- Contabilidad de una pequeña empresa

- Programa de nóminas

- Despacho de billetes de tren

Javier Zabala Camarero-Núñez

Enrique Rubiales Camino

del Grupo 2001

APORTACIONES AL ALGEBRA MATRICIAL

POR:

M^a Jesús Luelmo Verdú

M^a Jesús Palacios de Burgos

1. INTRODUCCION A LAS MATRICES.

Las matrices pueden surgir como simbolización de realidades matemáticas ó no, diferentes. Debido a ello, consideramos interesante introducirlas a partir de estas situaciones, que enriquecen su significado y utilización desde un punto de vista multidisciplinar que resulta motivador para los alumnos. Este enfoque permite, además, abordar las matrices no sólo en COU, sino en cursos inferiores de Bachillerato ó F.P..

Ejemplo 1. Matrices de información.

Un empresario tiene dos almacenes, a y b, y comercia con tres productos, 1, 2, y 3. Las entradas de productos en los almacenes, un día determinado, se dan a continuación:

- . el almacén a recibe:
10 unidades del producto 1
24 " " " 2
8 " " " 3
- . en el b entran:
15 unidades del producto 1
27 " " " 2
10 " " " 3

La información anterior puede representarse con la tabla:

		producto		
		1	2	3
almacén	a	10	24	8
	b	15	27	10

ó mas sencillamente con la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 24 & 8 \\ 15 & 27 & 10 \end{pmatrix}$$

Otros ejemplos de este tipo son las matrices llamadas "de consumo" ó "input-ouput", introducidas por Leontiev y utilizadas en Economía.

Hay que hacer notar la existencia de muchos casos, que la Psicología y Sociología proveen en abundancia, donde la descripción numérica de fenómenos cualitativos (rasgos de carácter, opiniones, etc.), requiere un proceso de codificación más complejo que la mera transcripción de datos de los ejemplos anteriores, sobre todo si se quiere que no sólo la matriz "almacén", sino las posibles operaciones a efectuar con ella tengan sentido en el contexto.

Ejemplo 2. Matrices que describen una relación.

Cualquier relación binaria en un conjunto finito puede

ser descrita mediante una matriz.

El siguiente ejemplo



adquiere un especial significación si se interpreta como una "red de tráfico", donde 1,2,3,4 son puntos de una ciudad (ó estaciones de Metro, aeropuertos, etc) cada línea representa un camino directo ó "de un paso" entre dos puntos, que puede ser de sentido doble ó único según indique la flecha.

Podemos matematizar esta situación mediante la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a_{ij} = número de caminos de un paso de i a j

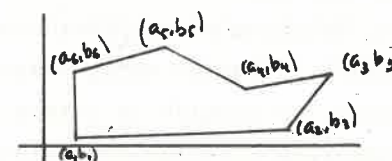
ó en términos de relación:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } iRj \\ 0 & \text{si } i \nR j \end{cases}$$

Relaciones sociales de amistad, de jerarquía, influencia, etc, pueden representarse de forma análoga. Las propiedades de la relación se reflejan en la forma de la matriz : aparecen, por ejemplo, las matrices simétricas. El estudio de la matriz correspondiente, sus sub-matrices y otras obtenidas a partir de ellas, permiten descubrir cosas como el "índice de influencia" de un individuo, los "subgrupos cerrados" dentro del grupo total, etc.

Ejemplo 3. Matrices que describen polígonos

El polígono



puede representarse con la matriz:

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

sin más que elegir un vértice (a_1 , b_1) y un sentido de giro.

Ejemplo 4. Los vectores como caso particular de matrices.

Los vectores del tipo fila (a , b , c) ó columna $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ manejados por los alumnos de BUP, se reinterpretan como matrices.

Estos ejemplos son suficientes para introducir el concepto y nomenclatura propia de las matrices, aunque convenimos que la presentación formal de ésta a nivel de COU no suele ofrecer dificultades.

2. OPERACIONES CON MATRICES.

Las operaciones con matrices pueden venir sugeridas, de forma natural, por los ejemplos anteriores. Sólomente en el caso del producto, debido a su artificiosidad, hemos preferido hacer la introducción formal para, después, justificar esta definición viendo que también la matriz producto puede interpretarse en términos del problema inicial.

a) Suma de matrices y producto por escalar.

Matrices de información

En el contexto del ejemplo 1 del apartado anterior, si A y A' son las matrices correspondientes a dos días, la matriz que representa el movimiento de entradas en esos dos días es la $A + A'$.

$$\begin{pmatrix} 10 & 24 & 8 \\ 15 & 27 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 & 45 & 15 \\ 15 & 25 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 69 & 23 \\ 30 & 52 & 30 \end{pmatrix}$$

movimiento de movimiento de movimiento con-
un día otro día junto dos días

Si el movimiento fuera idéntico todos los días, al cabo de la semana vendría representado por la matriz 5A:

$$5 \begin{pmatrix} 10 & 24 & 8 \\ 15 & 27 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 120 & 40 \\ 75 & 135 & 50 \end{pmatrix}$$

5 días movimiento movimiento se-
laborables diario manal

Por otra parte, si se conociera la matriz B de salida de los

productos de los almacenes, el remanente diario vendría descrito por $A-B$, etc.

Vectores

Igualmente la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar, ya conocidos, refuerza la idea de estas operaciones con matrices.

b) Producto de matrices

Según la observación hecha al principio de este apartado, pasamos a estudiar interpretaciones del producto en diversos contextos:

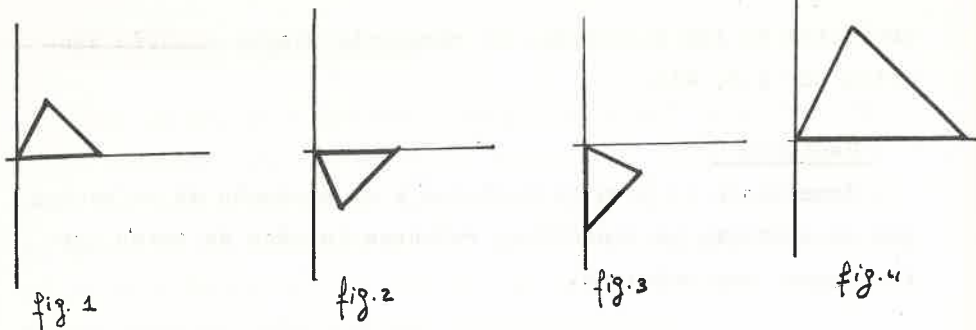
Matrices de polígonos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ representa el triángulo de la figura 1.}$$

$$\text{Si } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad SP = P' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ representa un triángulo simétrico del anterior respecto de OX (figura 2)}$$

$$\text{Si } G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad GP = P'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ representa el triángulo inicial girado } -90^\circ \text{ alrededor del origen (figura 3)}$$

$$\text{Si } H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad HP = P''' = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ representa un triángulo homotético del primero respecto del origen, de razón 2 (figura 4)}$$



Esta traducción del producto como transformación geométrica, puede abrir el estudio de los movimientos y afinidades en el plano.

Matrices de relacion

A partir del ejemplo 2 (redes de tráfico), se interpreta facilmente el significado de las matrices M^2 , M^3 , etc

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El elemento b_{ij} de M^2 mide el número de caminos "haciendo una esca, a" ó "caminos de dos pasos" que van de i a j . Analicemos, p. ej., b_{24}

$$b_{24} = \underbrace{a_{21} \cdot a_{14}}_{\substack{\text{caminos } 2 \rightarrow 4 \\ \text{pasando por } 1}} + \underbrace{a_{22} \cdot a_{24}}_{\substack{\text{caminos } 2 \rightarrow 4 \\ \text{girando sobre } 2}} + \underbrace{a_{23} \cdot a_{34}}_{\substack{\text{caminos } 2 \rightarrow 4 \\ \text{pasando por } 3}} + \underbrace{a_{24} \cdot a_{44}}_{\substack{\text{caminos } 2 \rightarrow 4 \\ \text{girando sobre } 4}} =$$

$$= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$$

\uparrow no se puede girar \uparrow no hay \uparrow no se puede girar

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

ó abreviadamente : $A = C.B$

lo que nos va a permitir ligar lo anterior, entre otras cosas, al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

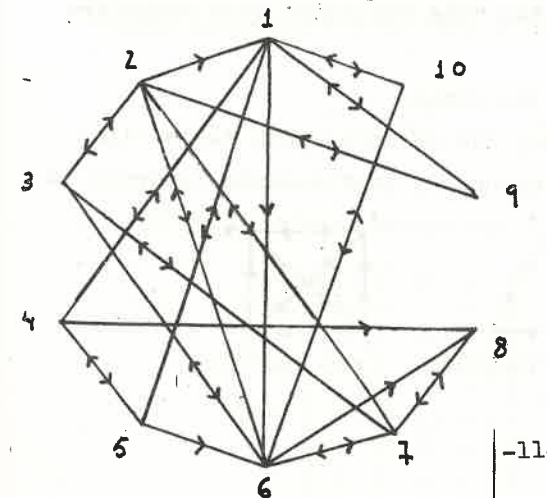
Como bibliografía básica para la elaboración de este trabajo, hemos consultado:

- DOREIAN "Las Matemáticas y el estudio de las relaciones sociales" Vicens-Vives. Barcelona 73
- KEIMANN "Matrices: aplicaciones a la economía y a la administración" Limusa. Mexico 1973
- VARIOS "School Mathematics Project" Varios volúmenes Cambridge University Press

MATRICES Y SOCIOLOGIA

Presentamos un sencillo ejemplo de cómo se puede aplicar el cálculo matricial al estudio de relaciones sociales, con la única restricción de que sean "irreflexivas" (es decir, $i \nrightarrow i$). Este enfoque está muy relacionado con la teoría de grafos, de la que tomaremos parte del lenguaje, aunque hay que hacer notar que este lenguaje está muy poco homogeneizado y cada autor ó traductor introduce sus propias peculiaridades.

Un grupo de 10 personas va a efectuar un trabajo, para lo cual ha de dividirse en equipos. El buen rendimiento de estos equipos dependerá, en parte, de que cada uno de sus miembros se encuentre integrado en él, y más concretamente, de que le guste trabajar con el resto de las personas que lo componen. Esta información se recoge pidiendo a cada individuo que cite los compañeros con los que prefiere trabajar. Los resultados de la encuesta pueden presentarse mediante el grafo:



donde $i \rightarrow j$ significa que i elige a j como compañero.

ó mediante la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Σ filas

5
3
3
3
5
4
4
2
2

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \\ & \text{elige a } j \\ 0 & \text{si } i \\ & \text{no elige} \\ & \text{a } j \end{cases}$$

Σ columnas 5 4 3 2 2 4 3 2 2

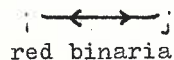
De la observación de las sumas de filas y columnas de A podemos concluir:

- 1, 2 y 6 son los que efectúan mayor número de elecciones. Pueden considerarse, a priori, como los más proclives al trabajo en equipo
- 8 es el que menos elecciones efectúa.

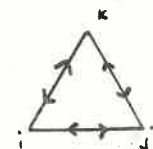
Igualmente, de las columnas:

- 6 es el individuo "más cotizado" como compañero de trabajo.
- 4, 5, 9, y 10 los menos.

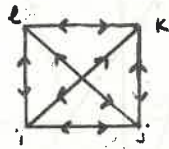
Los equipos que se buscan, que en Sociología suelen llamarse "grupos con intereses comunes", graficamente tendrían la forma



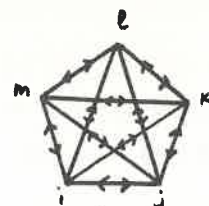
red binaria



red triangular

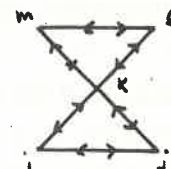


red cuadrada



red pentagonal

Cada individuo que forma parte de una red se llama "vértice" de la misma. Puede haber individuos que sean vértice de más de una red, como:



(aunque este grafo no contiene una red, ya que, por ejemplo $l \neq k$))

Así pues, una condición necesaria para que i sea vértice de una red junto con j es que $a_{ij} = a_{ji} = 1$. En la práctica esto significa desestimar las "relaciones" no simétricas, suprimiendo las flechas sin doble sentido ó, matricialmente, transformar la matriz A en otra B, simétrica, con el convenio:

$$B = (b_{ij})$$

$$b_{ij} = 1 \text{ si } a_{ij} = a_{ji} = 1$$

$$b_{ij} = 0 \text{ en el resto de los casos}$$

En nuestro caso quedaría:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos:

- Que hay catorce pares de redes binarias. Esto nos permite hacer 5 equipos de dos individuos, de dos maneras distintas:

ó bien

7-8	4-5	1-9	10-6	2-3
7-8	4-5	1-10	2-9	3-6

El equipo 7-8 es obligado, que que $a_{78} = 1$ $a_{i8} = 0 \forall i \neq 7$.

Igualmente el 4-5, pues si tomamos 4-1,5 se queda sin pareja.

- 8 no puede ser vértice de ninguna red triangular, por lo apuntado antes.

Podemos pues eliminar la fila y columna 8, y estudiar la submatriz:

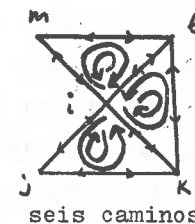
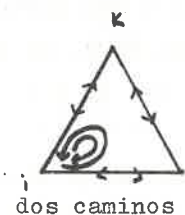
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

teniendo en cuenta, a partir de ahora, que se han producido los desplazamientos:

individuo 9 \longrightarrow fila (columna) 8
 individuo 10 \longrightarrow fila (columna) 9.

Para que i sea vértice de alguna red triangular, es condición necesaria y suficiente que haya al menos dos caminos

de tres pasos que comiencen y terminen en i (ó "ciclos" de longitud 3)



El número de caminos de tres pasos entre dos puntos cualesquiera viene indicado, como ya se apuntó anteriormente, por la matriz C^3 , en particular para los ciclos por los elementos de su diagonal principal.

En nuestro caso:

$$C^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 5 & 1 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 8 & 1 & 1 & 9 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 & 0 & 0 & 8 & 7 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 1 & 1 & 6 & 8 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 0 & 0 & 8 & 6 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Hay que hacer notar que el cálculo de C^3 no es complicado, ya que hay un sencillo algoritmo para multiplicar matrices cuando una de ellas es de ceros y unos)

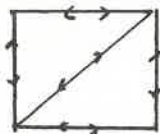
Concluimos:

- Como $c_{99} = c_{1010} = 0$, los individuos 9 y 10 (re-

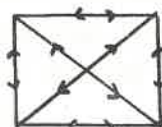
cuérdese el desplazamiento) no son vértices de ninguna red triangular.

• Como $c_{11} = c_{44} = c_{55} = 2$, los individuos 1, 4 y 5 son vértices de una sola red triangular. La inspección de C, en particular de las filas 4 ó 5, permite decidir que 1, 4 y 5 son vértices de una misma red.

¿Cómo interpretamos el resto de los valores de la diagonal principal $c_{22} = c_{33} = c_{66} = 6$? Cada uno de estos cuatro puntos es vértice de alguna red triangular, luego su estructura será



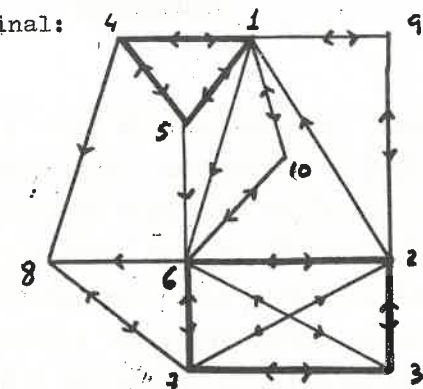
•



El primer caso queda descartado, ya que tiene vértices que lo son de una sola red, a los que correspondería un $c_{ii} = 2$. La segunda configuración es la única que cumple los requisitos aparecidos, cosa que se puede comprobar fácilmente contando los ciclos de longitud tres de cada vértice. Luego 2, 3, 6 y 7 forman una red cuadrada.

Existe un procedimiento general para determinar el tipo de red al que pertenece un vértice, siempre que sea solamente vértice de esa red, y por supuesto de sus sub-redes correspondientes.

Con toda la información anterior, podemos reestructurar nuestro gráfico original:



donde aparecen claramente: dos redes de tres y cuatro elementos y tres individuos "aislados".

Con estos datos, la mejor división en dos grupos iguales sería:

$$A = \{1, 4, 5, 10, 9\} \quad B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$$

Quitando la restricción de igualdad podrían hacerse otras particiones, ó bien hacer tres grupos, ó excluir a algún individuo de los equipos, etc.

CONCLUSION

En resumen, se presentado de forma muy elemental una técnica de estudio de relaciones irreflexivas en cualquier conjunto, particularmente útil para conjuntos grandes, en los que la representación gráfica "bruta" resulta fastidiosa y prácticamente ilegible. Puede ampliarse a casos más complejos que el propuesto, estudiando, por ejemplo, la caracterización general de pertenencia de un vértice a varias redes. También pueden abordarse las relaciones "evaluadas", donde las "medidas" de relación no son 0 y 1 sino que pueden venir matizadas en diversos grados.

Pueden investigarse técnicas similares para el estudio de relaciones irreflexivas y antisimétricas, como son por ejemplo, la relación de jerarquía ó el orden de ejecución de las partes de una determinada tarea.

Hemos preferido presentar este trabajo en forma expositiva y no bajo la redacción con que se entrea al alumnado para su desarrollo, ya que aparecen una serie de vocablos "nuevos", a explicar sobre la marcha, y que harían excesivamente larga una redacción de otro tipo. En clase, normalmente introducimos el vocabulario desarrollando un ejemplo y proponemos, ya en forma de trabajo, algo similar a los alumnos.

MATRICES Y DEMOGRAFIA

El objeto de este trabajo es construir un modelo matemático que nos permita estudiar la evolución del número de mujeres de un colectivo cualquiera (región, país,...). Para ello distribuiremos las mujeres en grupos de edades y estudiaremos su evolución en un periodo de tiempo observando, para cada grupo:

- a) cuantas mujeres sobreviven
- b) cuantas hijas tienen estas mujeres.

La realización la llevaremos a cabo en dos partes:

- . en la primera, utilizando datos correspondientes a la población española
- . en la segunda, aplicando los razonamientos de la anterior a datos cualesquiera, representados por letras. Esto nos permitirá construir un "modelo matemático" aplicable a cualquier época y colectivo.

PARTE I POBLACION ESPAÑOLA

Obtención de los datos, que se presentarán de acuerdo con ciertos criterios. En nuestro caso, acudiendo a los censos de la población y movimientos naturales de ésta, publicados por el I.N.E (1960 a 1975), obtenemos:

Grupo	Edad	Número de mujeres	
		1960	1975
1.....	menos de 15 años.....	4.087.700.....	4.747.400
2.....	de 15 a 29 "3.536.100.....	4.018.700
3.....	de 30 a 44 "3.300.800.....	3.379.500
4.....	de 45 a 59 "2.534.700.....	3.143.100
5.....	de 60 a 74 "1.631.500.....	2.238.500

Las mujeres del grupo 1 de 1975, proceden de madres cuya edad en 1960 era la indicada en la siguiente tabla:

<u>Edad de la madre</u>	<u>Nº de hijas vivas</u>
menos de 15 años	840.000
de 15 a 29 "	3.140.000
de 30 a 44 "	764.000
de 45 a 59 "	3.400
de 60 a 74 "	-----
Total.....	4.747.400

¿Cuáles han sido nuestros criterios? ¿Podrían haberse tomado otros? ¿Qué ventajas e inconvenientes tiene cada elección?

Manipulación matemática de estos datos: obtención de las tasas de fertilidad y supervivencia de cada grupo (consulta en un diccionario o libro de Geografía Humana el significado de estos conceptos).

Para calcular las tasas de supervivencia de cada grupo, piensa que el grupo 1 de 1960 pasa a ser el grupo 2 de 1975,

etc,... Llama a estas tasas s_1 , s_2 , s_3 , s_4 y s_5 respectivamente. Redondea a cuatro cifras decimales. ¿Concuerda con la realidad?, ¿se podría considerar una buena aproximación? ¿En que casos?

Calcula las tasas de fertilidad de cada grupo y llámalas f_1 , f_2 , f_3 , f_4 y f_5 respectivamente. Redondea a cuatro cifras decimales. Comenta la diferencia que hay entre ellas.

Hipótesis. Además de las suposiciones que hemos ido haciendo sobre la marcha, admitiremos la hipótesis de que las tasas calculadas se mantendrán en el futuro. La observación de numerosos casos así lo confirma, aunque hay también muchos contraejemplos.

¿Puedes dar tu opinión la respecto? ¿Qué fenómenos pueden influir en la variación de dichas tasas a lo largo del tiempo? ¿variarán de unas zonas a otras? Pon los ejemplos que consideres oportunos para ilustrar las respuestas.

Predicciones. Estás en condiciones de calcular la población de los diferentes grupos en el año 1990 (!Ojo, cómo expresas los resultados!).

Teniendo en cuenta los datos de 1975 y:

- las tasas de supervivencia, calcula en nº de mujeres que habrá en 1990 en los grupos 2, 3, 4 y 5 respectivamente
- las tasas de fertilidad, calcula el nº de mujeres que habrá en 1990 en el grupo 1.
- Lo anterior, calcula el nº total de mujeres de 1990.

Basandote en los resultados que acabas de obtener, estudia los grupos del año 2005.

PARTE 2 GENERALIZACION

Recuerda que llamamos s_i y f_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, a las tasas de supervivencia y fertilidad.

Vamos a llamar:

¿Qué significa $m_3^{(4)}$?, ¿y $m_k^{(n)}$? (!Ojo!, no son exponen-
tes.

tes.

Escribe las relaciones que hay entre los $m_j^{(1)}$ y los $m_i^{(0)}$, poniendo los primeros en función de los segundos y de las co-

Escribe las relaciones anteriores en forma matricial, puedes llamar:

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} m_1(1) \\ m_1(1) \\ m_2(1) \\ m_3(1) \\ m_4(1) \\ m_5 \end{pmatrix} \quad M^{(0)} = \begin{pmatrix} m_1(0) \\ m_1(0) \\ m_2(0) \\ m_3(0) \\ m_4(0) \\ m_5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{A e la ma-} \\ \text{triz de ta-} \\ \text{sas} \end{matrix}$$

¿Qué significará M^2 ? . Intenta encontrar la relación entre $M^{(2)}$ y $M^{(1)}$ repitiendo los pasos anteriores y llegando a la expresión matricial abreviada.

En general, ¿cómo obtendrás $M^{(n)}$ a partir de $M^{(n+1)}$?

La ley que has obtenido se llama recurrente. ¿Por qué?
(Recuerda que en 2º de BUP utilizábamos esta palabra).

Nos interesa más encontrar las expresiones de $M^{(n)}$ en función de $M^{(0)}$ y de A . ¿Por qué es preferible a lo anterior?. Intenta hacerlo por pasos, $M^{(2)}$ en función de $M^{(0)}$ y A , después $M^{(3)}$, hasta que veas cuál es la ley general (utiliza siempre la notación matricial abreviada.).

PARTE 3 COMENTARIOS

Como ves, hemos construido un modelo de evolución de la población femenina. ¿Lo consideras adecuado?. ¿A partir de éste, podrías calcular la población total?. ¿Qué inconvenientes conllevaría el construir un modelo, similar a éste, pero

aplicado a la población total?.

- - - - - 0 - - - - -

OBSERVACIONES

El trabajo presente permite estudiar la evolución de una población femenina mediante el modelo:

$$\begin{aligned} m_1^{(n)} &= f_1 m_1^{(n-1)} + f_2 m_2^{(n-1)} + f_3 m_3^{(n-1)} + f_4 m_4^{(n-1)} \\ m_2^{(n)} &= s_1 m_1^{(n-1)} \\ m_3^{(n)} &= s_2 m_2^{(n-1)} \\ m_4^{(n)} &= s_3 m_3^{(n-1)} \\ m_5^{(n)} &= s_4 m_4^{(n-1)} \end{aligned}$$

que puede escribirse matricialmente como:

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 \end{pmatrix} M^{(n-1)} = A M^{(n-1)}$$

donde f_i y s_i son las tasas de fertilidad y supervivencia..

Esto supone que el único concepto previo necesario para realizar el ejercicio sea el producto de matrices.

El modelo expuesto es una simplificación del utilizado actualmente en la mayoría de los países como instrumento de predicción demográfica tanto global como por edades.

La mayor dificultad la presenta la obtención de datos, debido a la desigualdad de criterios en los censos del INE. Por ello los exponemos elaborados. Dicha elaboración la hemos realizado a partir de los censos de 1960 y 1975 y de las tablas de movimientos anuales de población en el periodo 1960 a 1975 recurriendo a interpolaciones cuando ha sido necesario. Creemos que la aproximación puede considerarse suficientemente correcta. Sin embargo, hay que hacer notar que desde 1975 los censos citados han sido reestructurados y ampliados por lo que en un futuro podría realizarse el trabajo incluyendo la obtención y elaboración de datos sin más que elegir el año inicial como 1975 y recurrir a las tablas de "nacimientos según la edad de la madre, el sexo y la legitimidad" del correspondiente periodo.

La bibliografía utilizada ha sido:

"Matemáticas en las C. Sociales" R. Stone 1964, artículo recibido por M. Kline en "Matemáticas en el mundo moderno" ED. Blume, 1974.

"Panorámica demográfica" I. N. E., 1976.

Censos de la población española de los años 1960 y 1975. I.N.E.
Censos de nacimientos por edades de los padres desde 1960 a 1975. I.N.E.

MATRICES Y ELECCIONES

En Standar, país americano con una joven democracia, hay tres grandes partidos políticos: P. Modificador (M), P. Reformador (R) y P. Trasformador (T) que compiten en las elecciones al congreso.

En las elecciones de 1980 el partido M ha obtenido el 60% de los votos, el R el 20% y el T, también, el 20%.

Los sondeos de opinión preveen para las próximas elecciones un transvase de votos entre los partidos de acuerdo a los siguientes criterios:

- a) el 50% de las personas que votaron a M pasarán a votar a R
- b) de los votantes de R un 25% votará a M y otro 25% a T
- c) el 50% de los votantes de T, votarán a R

OBJETIVOS

El objeto de este trabajo es estudiar la evolución política del país a partir de los resultados electorales del año 1980 y bajo la hipótesis de que los criterios de transvase de voto se mantendrán en el futuro. Este objetivo lo podemos concretar en:

- 1º. Predecir el resultado de las próximas elecciones.
- 2º. Ampliar esta predicción a consecutivas elecciones.
- 3º. Estudiar si, a largo plazo, se alcanzará una cierta estabilidad, en el sentido de que dos votaciones consecutivas den resultados iguales en la práctica.
- 4º. Estudiar si los resultados del punto 3º variarían al

partir de una situación inicial (votos de 1980) distinta.

PRIMER OBJETIVO

Llamaremos a 1980 etapa 0 (e_0), al año de las siguientes elecciones etapa 1 (e_1), etc....

a) escribe la probabilidad:

m_0 de que un elector haya votado a M en e_0 (utiliza la forma fraccionaria)

r_0 de que haya votado a R en e_0

t_0 " " " " T " " "

Al vector que recoge esta información le llamaremos $p^{(0)}$.

¿Cuanto suman sus elementos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un elector que en e_0 ha votado a M vote en e_1 a M?, a R?, y a T?. Contesta a la pregunta anterior para los otros dos casos.

c) Resume la información del apartado b) en una tabla de doble entrada y en una matriz A_m escribiendo las probabilidades en forma fraccionaria

d) ¿De dónde pueden provenir los votos que el partido M saque en e_1 ?, y los de R?, y los de T?

Teniendo en cuenta esto y los tres apartados anteriores, calcula las probabilidades:

m_1 de que un elector vote a M en e_1

r_1 " " " " R " "

t_1 " " " " T " "

El vector (m_1, r_1, t_1) será llamado $p^{(1)}$.

e) Expresa los porcentajes de votos que sacará cada partido en e_1

f) Expresa matricialmente la relación existente entre $p^{(0)}$, $p^{(1)}$ y A .

SEGUNDO OBJETIVO

Conceptos previos. Consulta en la bibliografía final el significado de Cadena de Markov y matriz de transición asociada a una cadena

Método de trabajo:

a) El proceso anterior se puede considerar una Cadena de Markov. ¿Por que?

b) ¿Cuál es la matriz de transición asociada?

c) La relación existente entre $p^{(0)}$ y $p^{(1)}$, ¿se conserva entre $p^{(1)}$ y $p^{(2)}$? Escríbela, calcula $p^{(2)}$ y expresa los resultados en porcentajes.

d) Calcula $p^{(3)}$ y expresa los resultados en porcentajes

e) ¿La anterior relación, se cumple para dos elecciones consecutivas cualesquiera $p^{(n-1)}$ y $p^{(n)}$? Escríbela matricialmente.

TERCER OBJETIVO

Observa que la relación contenida en el último apartado es recurrente, ya que para predecir los resultados de una e-

tapa necesitamos conocer los de la anterior. Para hacer predicciones a largo plazo este procedimiento es incómodo de manejar pues requiere recorrer todas las etapas intermedias, por ello interesa encontrar una relación directa entre $p^{(n)}$ y $p^{(0)}$:

- a) escribe $p^{(2)}$ en función de $p^{(0)}$ y A
- b) " $p^{(3)}$ " " " " "
- c) " $p^{(n)}$ " " " " "

El problema ahora es encontrar la expresión general de A^n :

- d) calcula A^2 , A^3 y A^4 y observa sus elementos con idea de encontrar una ley de formación para cada uno de ellos.
- e) de acuerdo con estas observaciones, escribe A^n .
- f) Expresa $p^{(n)}$ en función de A^n y $p^{(0)}$ y realiza este producto.
- g) Si n es muy grande, ¿ m_n , r_n , y t_n tienden, respectivamente a algún valor constante? (Recuerda que $m_0 + r_0 + t_0 = 1$). ¿Qué significa esto?
- h) Para ver como se va "alcanzando" la estabilidad teórica, calcula los elementos de $p^{(n)}$ para $n=5$ y 7 y concluye
- i) ¿Consideras cumplido el objetivo 3º? Haz un breve resumen de los resultados.

CUARTO OBJETIVO

Para desarrollar este objetivo, en vez de suponer otros datos concretos iniciales, vamos a tomar unos genéricos:

$$p^{(0)} = (m_0, r_0, t_0)$$

- a) Expresa $p^{(1)}$ y $p^{(n)}$ en función de $p^{(0)}$ y A
- b) Calcula los elementos de $p^{(n)}$ y su límite cuando n tiende a infinito

- c) Compara los resultados obtenidos, con los del objetivo 3º

Como ves el resultado a largo plazo es independiente de los datos de partida, sin embargo los resultados intermedios y el tiempo que se tarda en "alcanzar" la estabilidad, ¿serán los mismos?. Repite el apartado h) del objetivo 3º con los datos $p^{(0)} = (0, 8, 0, 1)$. ¿Qué hubiera ocurrido si los datos iniciales hubieran sido $(1/4, 1/2, 1/4)$?

COMENTARIOS FINALES

Como ves el trabajo se basa en suponer constante en el tiempo el transvase de votos entre los partidos, En la realidad, esta hipótesis: ¿se cumple exactamente?, aproximadamente? ¿Qué tipo de factores pueden hacerla variar considerablemente?

BIBLIOGRAFIA

- "Probabilidad" Serie Schaum
- "Aplicaciones de algebra lineal" Ch. Rorres, H, Anton. Ed. Limusa 1979

OBSERVACIONES

El modelo matemático que se construye en este trabajo es, formalmente, igual al del anterior: $p^{(n)} = p^{(n-1)} A$, aunque la interpretación es ligeramente distinta al representarse aquí una situación probabilista. Puede considerarse como un ejemplo del tipo más regular de Cadena de Markov: $p^{(n)}$ tiene límite siendo éste independiente de $p^{(0)}$. Ello supone ampliar los conocimientos previos requeridos para el trabajo anterior con el conocimiento de la probabilidad condicionada, aunque el contexto permite establecer los resultados necesarios incluso sin este conocimiento.

Las relaciones que se establecen son:

$$m_1 = 1/2 m_0 + 1/4 r_0$$

$$r_1 = 1/2 m_0 + 1/2 r_0 = 1/2 t_0 = 1/2$$

$$t_1 = 1/4 r_0 + 1/2 t_0$$

Lo que da lugar a:

$$p^{(1)} = p^{(0)} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = p A, \text{ análogamente:}$$

$$p^{(1)} = p^{(0)} A = p^{(0)} A^2 = p^{(0)} \begin{pmatrix} 3/8 & 1/2 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/2 & 3/8 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} A = p^{(0)} A^2 = p^{(0)} \begin{pmatrix} \frac{2^{n-1} + 1}{2^{n+1}} & 1/2 & \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n+1}} \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n+1}} & 1/2 & \frac{2^{n-1} + 1}{2^{n+1}} \end{pmatrix}$$

con lo que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ independientemente de los valores de } p^{(0)}$$

Múltiples situaciones reales extraídas del campo de la genética de las decisiones aleatorias, etc. dan lugar a enunciados diversos con desarrollo idéntico. Concretamente la matriz A del problema puede interpretarse como la de transición entre dos generaciones consecutivas, resultado del cruce de individuos de genotipo AA, Aa y aa, respectivamente, con otros de genotipo Aa.

Encontrar la expresión general de A^n nos ha obligado a una definición de la matriz A quizá no muy real, pero en cambio accesible para los alumnos. Este objetivo no quisimos alcanzarlo en el estudio demográfico por fidelidad a los datos reales, pero nos parece importante hacerlo surgir para poder pasar al estudio a largo plazo a través del límite. La búsqueda de la citada expresión se lleva a cabo siguiendo un proceso inductivo que consideramos el más adecuado para la totalidad del alumnado. El problema de encontrar la expresión general de la potencia de una matriz, proporciona una serie de salidas encadenadas, como son el estudio de autovalores y autovectores, la diagonalización de una matriz y la obtención sistemática de A^n , lo que a su vez abre las puertas al Cálculo Numérico al plantear ecuaciones (características) de grado superior a dos y con raíces no enteras, que en algún momento puede ser interesante tener en cuenta. alguna de ellas, en su nivel más sencillo, ha sido abordada en nuestras aulas.

TECNICAS DE TRABAJO INTELECTUAL APLICADAS A LAS MATEMATICAS

POR:

Gabino Medina Martín

S.C.P.M.

La Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, creada hace cinco años se plantea desde un primer momento el problema del fracaso escolar en nuestra asignatura. Decide, pues buscar y analizar las posibles causas de dicho fracaso.

El problema se presentó muy complejo por el impresionante número de variables que aparecían; los alumnos, los profesores, los padres, los libros de texto, los propios centros, etc.

Se decide entonces que lo más viable era partir de un planteamiento realista que pudiera dar soluciones a corto y largo plazo. A largo plazo se pensó en una programación adecuada acorde con los problemas y aspiraciones de los alumnos, planteándose proyectos actualmente en ejecución, que no podemos valorar por no tener perspectivas suficientes.

Por otro lado se vio un problema que si podía tener solución a corto plazo y era la de que al alumno no se le da la suficiente información sobre cómo se deben estudiar las Matemáticas.

En las III Jornadas que la Sociedad Canaria celebró en Tenerife en marzo del 81, se planteó ya el problema en uno de los equipos de trabajo que allí se formaron. Como consecuencia se creó un grupo de profesores de EGB y BUP que se compromete, mediante reuniones semanales, a seguir profundizando y organizar en una labor de equipo el tema de la Técnicas de Trabajo intelectual aplicadas a las Matemáticas.

Se comprobó que existía una amplia bibliografía sobre Técnicas de Trabajo intelectual pero solamente trataban líneas generales aplicables a todo tipo de estudio. No se encontró nada que respondiera a los objetivos específicos que el equipo se había propuesto. Entonces se decidió completar la información de la experiencia de clase, ya que las Matemáticas para ser estudiadas requerían unas técnicas específicas. Creemos que no se pueden estudiar del mismo modo unas Matemáticas que una Historia o una Filosofía.

En un principio fue muy difícil encontrar un camino; parecía que el problema era imposible de abordar por su complejidad. Entonces se llegó al acuerdo de parcelarlo e ir profundizando en distintos aspectos aun a riesgo de las posibles deficiencias que esto pudiera tener.

La decisión consistió en elaborar unos cuadernillos que fueran breves y claros, dirigidos fundamentalmente a los alumnos, pero de modo inevitable, surgió la necesidad de dar orientaciones a los profesores y los padres, pues estos ^{padres} ~~padres~~, en general, tienen una idea poco clara de cuáles son las mejores condiciones para que sus hijos estudien con eficacia la asigna-

tura en cuestión.

Entendemos que la falta de unas Técnicas de Trabajo intelectual para estudiar Matemáticas es una fuente del fracaso escolar de algún porcentaje de nuestros alumnos. Todos conocemos casos de alumnos que nos dicen que dedican muchas horas al estudio de las Matemáticas, pero que no se refleja en ningún sitio el rendimiento. Otros nos dicen que en clase lo entienden todo pero que cuando se ponen a estudiar solos en casa, ya no se enteran de nada. Incluso conocemos alumnos cuyo éxito se debió más a un titánico esfuerzo y mucha constancia, que a seguir un estudio metódico e inteligente.

En ningún momento pretendemos ser dogmáticos, pues evidentemente el problema es muy discutible; tampoco exhaustivos pues como se ha dicho este tema es sumamente complejo. Ni tampoco pretendemos crear una nueva asignatura. El alumno adaptará las ideas que exponemos en los cuadernillos como mejor le venga a su realidad. Nos conformamos con que esto pueda ser útil a alguien.

Teniendo en cuenta todas estas premisas el equipo empezó a estudiar en primer lugar el tema de "Los apuntes de Matemáticas", de cómo deberían organizarse aquellas notas que los alumnos toman en la clase. Fruto de ello es el cuadernillo nº 1 (editado ya). Trata de una serie de normas, consejos y orientaciones para tomar y ordenar los apuntes con el fin de que puedan ser utilizados del modo más eficaz.

Este cuadernillo número uno de la serie en proyecto, se compone de treinta y cuatro páginas distribuidas en tres capítulos. El primero trata de los requisitos mínimos que deben tener los muchachos para tomar apuntes. Los objetivos de los apuntes. La necesidad de tomar apuntes. El capítulo segundo trata de cómo se deben captar y apuntar las ideas centrales y complementarias de una explicación, una taquigrafía personal que le permita ahorrar tiempo en la toma de apuntes; la importancia que tiene completar los apuntes, etc. El capítulo tres expone la necesidad de tener ordenados y archivados los apuntes para el curso o cursos siguientes. Acaba con unas orientaciones a los profesores y padres.

El cuadernillo número dos titulado "Cómo estudiar las Matemáticas", comienza tratando los aspectos físicos-ambientales del estudio de dicha asignatura, el lugar de trabajo, la biblioteca personal, el libro o libros, hojas de dudas, etc.; pasa luego a tratar las posibles motivaciones para empezar a estudiar dándose un posible esquema a seguir; la siguiente parte analiza el cómo seguir estudiando. Los alumnos muchas veces no explotan su

fuerte potencial memorístico de un modo racional. Se incluyen también orientaciones a profesores y padres.

Resumiendo, el equipo piensa seguir trabajando sobre este tema global, buscando nuevas parcelas pues creemos que los alumnos no reciben una información suficiente de cómo se realiza el estudio de las Matemáticas y estamos intentando hacersela llegar, a través de estos cuadernillos realistas y prácticos. Con ello esperamos colaborar a que se cubran partes de las razones del fracaso escolar a que se alude. Estas conclusiones y orientaciones que en los cuadernillos se exponen fueron extraídas la mayor parte de la experiencia, practicadas con los alumnos, obteniéndose resultados positivos en la mayoría de los casos.

Gabino Medina Martín, Sociedad Canaria
de Profesores de Matemáticas.

Los Sesángulos

JOSE ANTONIO RUPEREZ PADRON

Profesor Agregado de Matemáticas del
I.B. " San Benito". La Laguna (Tenerife)
Miembro de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas.

... Lo que se enseña en las lecciones es a sumar y cosas por el estilo.

-¿Sabes sumar?- le preguntó la Reina blanca-....

- Tampoco sabe restar - concluyó la Reina blanca- . . .

- ¡ No tiene ni idea de matemáticas!- sentenciaron enfáticamente ambas reinas a la vez.

- ¿ Sabe usted sumar acaso? - dijo Alicia, volviéndose súbitamente hacia la Reina blanca, pues no le gustaba nada tanta crítica.

A la Reina se le cortó la respiración y cerró los ojos:

(Lewis Carroll, Alicia a través del espejo)

Comunicación presentada en las
II Jornadas sobre Aprendizaje y
Enseñanza de la Matemática.
Sevilla; 15, 16 y 17 de abril
de 1982.

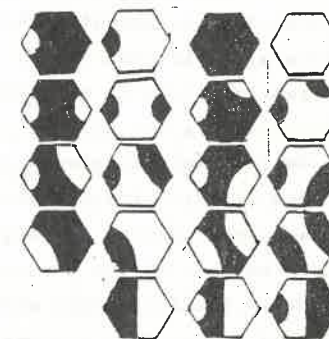
Con el agradecimiento a los
compañeros de la Sociedad Canaria
de Profesores de Matemáticas, y en
especial a aquellos, que como Mercedes
Palarea, apoyaron y colaboraron en
la realización de este trabajo.

INTRODUCCION

Es éste un trabajo en vias de elaboración en cuanto a su parte didáctica, aunque creemos que está elaborado en su parte de descripción del material.

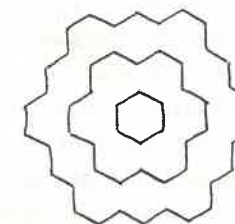
Surgió por esa atracción que ejercen en muchos de nosotros los juegos que proporcionan algo diferente, bien por ser desconocidos, bien porque son variaciones nuevas de juegos populares. Así, en el "Pais Semanal" apareció hace unos dos o tres meses, y en la sección "Juegos" que regularmente se publica, un artículo de Caps i Mans titulado " Los hexagramas del Doctor Salomon".

El juego consta de 19 piezas hexagonales que tienen los puntos medios de lados contiguos, o alternos, unidos mediante arcos de circunferencias, y los de lados opuestos unidos mediante un segmento. De esta forma se divide al hexágono en un máximo de tres regiones, de las cuales se somborean una o dos. Estos hexagramas sombreados dan lugar a piezas positivas y piezas negativas (anti-hexagramas), según el orden en que se somborean (fig. 1)



-Fig. 1-

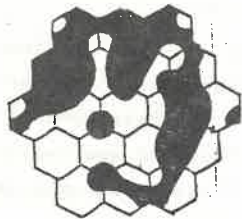
Con estos diecinueve hexagramas se componen figuras sobre un tablero "hexagonal" tal como el que se muestra en la figura 2. Componiendo los hexagramas de tal manera que se unan lados congruentes se logran conjuntos de tipo abstracto, o de tipo figurativo, como el titulado "Bambi" de la figura 3.



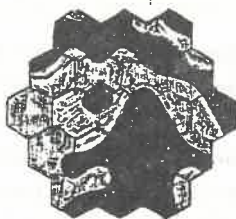
- Fig. 2 -

Para interpretar algunas de las figuras que se logran es necesario un poco de imaginación, aunque coloreando las piezas se obtienen diseños más fácilmente visibles.

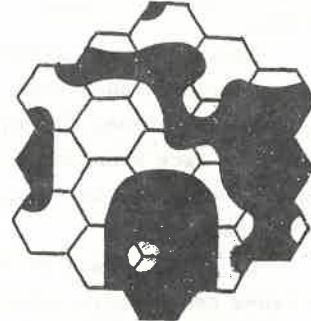
En la figura 4 (junto con la 3 y la 5, en la página siguiente), vemos el titulado "Napoleón en Waterloo"; en la figura 5 el que, según citaban Caps y Mans, ganó el 1^{er} Premio de un concurso de diseños celebrado en Londres el pasado año. Se titula "Noche Árabiga".



- Fig. 3 -



- Fig. 4 -



- Fig. 5 -

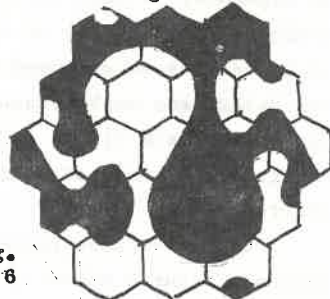


Fig. 6

Entre los diseños no figurativos hay una clase particularmente interesante que presenta simetría central; la simétrica de cada pieza positiva es su antihexagrama o negativo (fig. 6).

Me fabriqué las piezas en cartón para jugar con ellas. Evidentemente no están en esas diecinueve piezas representadas todas las maneras de unir los puntos medios de los lados de un hexágono, para sombrear luego dos o una, de las tres o menos regiones que se forman. Ni siquiera usando solamente los arcos ya vistos, (siempre que consideremos que un punto no es frontera, y se pueda, por tanto, sombrear dos regiones con un punto común en el punto medio de un lado). Surgieron entonces dos preguntas:

¿ Cuántas formas hay de unir los puntos medios de los lados de un hexágono? ¿ Por qué fueron escogidas estas diecinueve piezas?

Empezaré por dar una denominación a las piezas que voy a desarrollar a partir de estos hexagramas: las llamaré SESANGULOS.

CONJUNTO COMPLETO DE SESANGULOS. NOMENCLATURA.

Empecé por estudiar cuáles podrían ser los tipos de uniones posibles. Para lados contiguos o alternos es posible la unión mediante segmentos o mediante arcos. Para lados opuestos considero que el arco es de una circunferencia de radio infinito que ha degenerado en una recta, por lo que sólo habrá un tipo de unión: mediante un segmento. Los tipos de unión pueden verse en la siguiente figura.

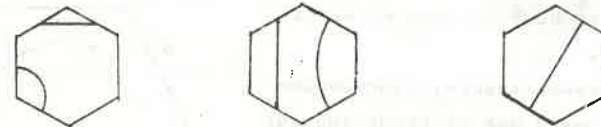


Fig. 7

Aparecen entonces seis sesángulos elementales, contando el sesángulo totalmente en blanco sin ningún tipo de unión. Estos sesángulos elementales, en los que sombreo la menor de las dos superficies logradas en la división del hexágono, los considero positivos. También considero positivo el sesángulo totalmente en blanco. Para simplificar mi exposición me referiré, salvo mención expresa, a piezas positivas.

A las superficies sombreadas en estos sesángulos elementales las bautizo con las consonantes p, k, s, t, y r; y establezco un orden en ellos, de menor a mayor superficie sombreada: $p < k < s < t < r$.

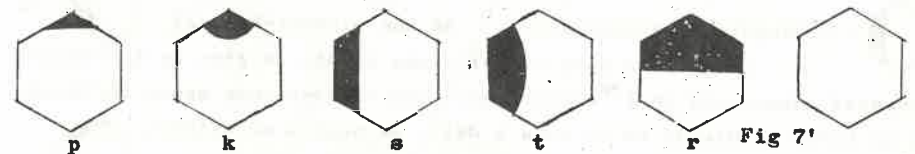


Fig 7'

Dibujando dos de ellas en un solo hexágono obtengo sesángulos compuestos. Tienen tres regiones, y diferirán entre sí por los elementales usados y por las posiciones relativas que ocupen esos elementales. Al estar permitido sombrear solamente una o dos de las regiones que se logran, el máximo de elementales a usar es dos. Así pues, sólo pueden intervenir en un sesángulo una o dos consonantes. El sesángulo en blanco es el único que no llevará en su nombre consonantes, como veremos enseguida.

Quedan entonces "picos" sin sombrear a los que llamo "huecos"; es posible que existan 1, 2, 3, 4, o 5 "picos" contiguos sin sombrear después de haber dibujado los elementales consonantes. A estos huecos los nombro mediante vocales: "e" si es un hueco de un vértice; "i" si es de dos vértices; "o" si es de tres picos; "u" si lo es de cuatro; y "a" para cinco. (fig. 8)

Se hace necesario establecer un sistema referencial, un origen a partir del cual se puedan enumerar las consonantes y vocales que intervienen en la formación de cada sesángulo, y también un orden en cuanto al sentido a seguir; de esta manera cada pieza va a tener un nombre propio.

Colocando el hexágono con un lado como base, numero las caras, empezando por la superior, desde 1 hasta 6. Y lo hago en sentido horario, (fig 9).

Para dar nombre-bautizar-, cada sesángulo, se gira éste hasta que el borde izquierdo del consonante de menor orden que los forme, quede en el centro de la cara 1; y a partir de este elemental, en sentido horario, se van identificando los otros consonantes y vocales que lo forman. En caso de tener dos consonantes del mismo orden, se coloca en la cara 1 aquel de los dos elementales que de lugar a que la primera vocal en sentido horario, corresponda al hueco de menor número de picos. Veámoslo con dos ejemplos concretos:

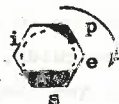


: Sesángulo a bautizar.

Lo giramos para que el mismo nivel, se gira de tal manera elemental consonante de 1^{er} orden quede que el hueco con menos vértices con su borde izquierdo en la cara 1 del sistema de referencia se nombre en primer lugar



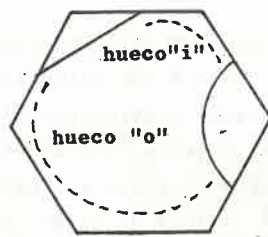
A partir de la cara 1 voy identificando consonantes y vocales en sentido horario



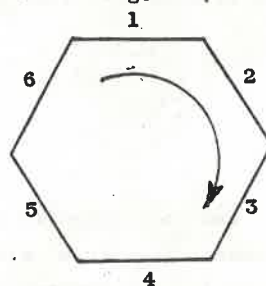
su nombre es "pesi"

Cuando consta de dos elementales del mismo nivel, se gira de tal manera que el hueco con menos vértices se nombre en primer lugar
Se colocaría así
y no así
con lo que se bautizaría como "keko".

Fig 10



- fig. 8 -



- fig. 9 -

Cada sesángulo tendría así su nombre propio. En la figura 11 muestro algunos.

Los negativos, antisesángulos, los indico con el nombre de su correspondiente positivo y una ' al final. Considerando el sesángulo en blanco como compuesto de los huecos elementales "e" y "a", su nombre será "ea", una expresión muy propia de esta tierra andaluza donde se celebran las presentes II Jornadas.



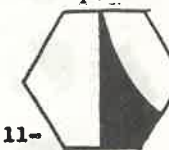
"ppo"



"pso"



"kri"



"ter"

-Fig 11-

Para construir exhaustivamente el conjunto de todos los sesángulos posibles hay que tener en cuenta que se van a combinar, a lo más, cuatro elementales, a los que voy a considerar en los siguientes niveles:

- Nivel 1: p; k; e.
- Nivel 2: s; t; i.
- Nivel 3: r; o.
- Nivel 4: u.
- Nivel 5: a.

donde el número de cada nivel representa la cantidad de vértices implicados. La suma de los niveles de las letras que representan los elementales que forman cada uno de los sesángulos compuestos debe ser siempre seis. Esta condición hace posibles las siguientes variaciones:

Binarias: 33 n : elemento de nivel "n"

24 42
15 51

Terciarias:

114 141 411
123 132 213 : ...
... etc.

Cuaternarias:

1113 1131 1311 3111
1122 ...
... ... etc.

Y considerando que dos regiones con frontera común (Un punto no se considera como frontera común, requértese), no deben sombreadarse al mismo tiempo, son posibles los 50 sesángulos, que junto con sus correspondientes antisesángulos o negativos, aparecen en la siguiente hoja (Fig 12)

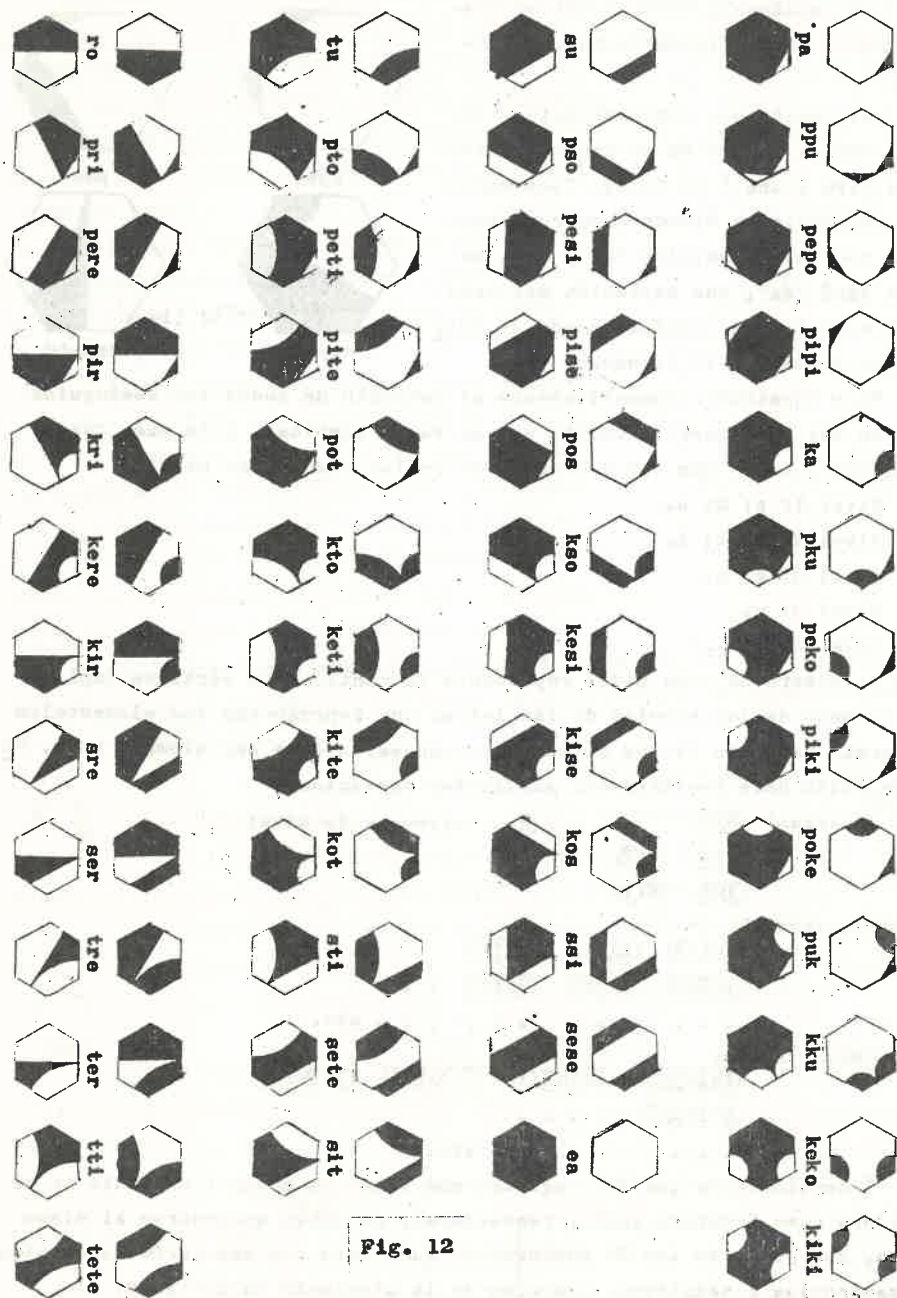


Fig. 12

Hay, por tanto, 100 sesángulos, ó 99 si consideramos no diferenciables los ro y ro'.

¿ Por qué escogió Salomon los 19 sesángulos mostrados al principio para sus hexagramas? Basicamente porque cumplía las restricciones que se había impuesto: unir mediante arcos; no más de tres regiones; no considerar aquellas figuras cuyas regiones tienen un punto común en un mismo lado; no considerar ro y ro' como diferentes. Pero además porque la superficie negra es igual a la blanca. También con el tipo de regiones que se sombrean se logra una mejor estética que con otros grupos de 19 piezas.

Fig 13

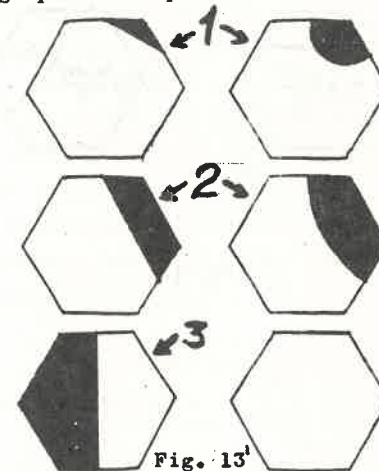
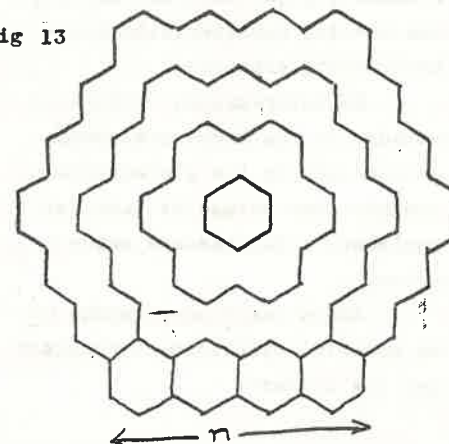


Fig. 13'

¿ cuántos sesángulos se necesitan para llenar un tablero?. Salomon escogió diecinueve piezas para sus hexagramas; podían haber sido 15 ó 23. Pero es que con 15 ó 23 sesángulos no es posible recubrir completamente un tablero "hexagonal" del tipo que se mostraba en la figura 2. Para un tablero de un sólo sesángulo de base es evidente que se necesita una sola pieza. Para dos sesángulos de base es necesario usar 7 elementos; para el tablero usado en el juego del Dr. Salomon, con tres sesángulos de base, son necesarios 19.

La función en $N(x)$ que nos proporciona el número de sesángulos necesarios para llenar un tablero que tenga n piezas de lado, viene expresada por: $N = 3n^2 - 3n + 1$ (fig 13)

$$N = 3n^2 - 3n + 1$$

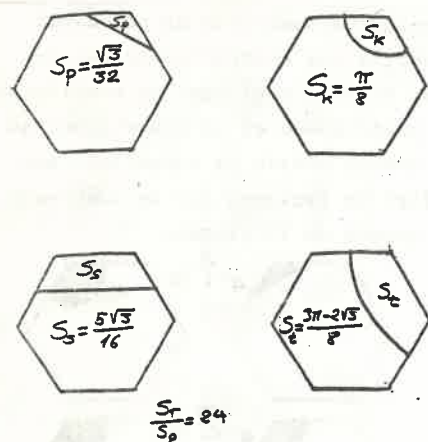


Fig 14

Otros valores de N en función de n son:

$n = 4$	$N = 37$
$n = 5$	$N = 61$
$n = 6$	$N = 91$

con lo cual se ve que con $N = 19$ se obtiene un número de piezas adecuado, ni muy amplio ni muy reducido, y que contiene las piezas con las características anteriormente expuestas.

Es interesante, también, el estudio de las áreas sombreadas en cada uno de los elementales, tomando como unidad el lado del hexágono, y las razones entre ellas.

Ambas cuestiones quedan como posibles ejercicios a realizar por los alumnos.

ESTRUCTURACION

Durante el desarrollo de lo expuesto anteriormente surgieron algunas ideas, y nuevas preguntas. Algunas de estas últimas con respuesta y otras abiertas. Bibliografía sobre los hexagramas del Dr. Salomon no me ha sido posible encontrar a pesar de algunas consultas realizadas a colegas de otros países, sobre todo pensando en una posible aplicación didáctica, y con los cuales la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas mantiene contactos periódicos. Porque ¿es posible utilizar los sesángulos, con su estética geométrica, para practicar e introducir conceptos matemáticos?; ¿cuáles?; ¿cómo?; ¿a qué niveles?; ¿existen otros materiales semejantes?

La consulta realizada a Caps i Mans sobre bibliografía al respecto no ha obtenido respuesta hasta el presente. ¿Existen otros materiales semejantes? Lo más cercano pienso que pueden ser el Trimat, el Cuadrimat, o el Trioker, existentes los tres en el mercado español.

Estamos entonces ante el inmenso campo abierto de qué actividades, juegos o ejercicios se pueden hacer, y que objetivos se lograrían con ellos. Pero antes voy a exponer cómo están estructurados los 99, -ó 100-, sesángulos; en forma esquemática, y sin ser exhaustivo:

Por contener los elementales consonantes	$\left\{ \begin{array}{c} p \\ k \\ s \\ t \\ r \end{array} \right.$	Por contener los huecos elementales	$\left\{ \begin{array}{c} e \\ i \\ o \\ u \\ a \end{array} \right.$
Porque las líneas que forman las regiones sean	$\left\{ \begin{array}{c} \text{arcos} \\ \text{segmentos} \end{array} \right.$	Por el sombreado	$\left\{ \begin{array}{c} \text{positivos} \\ \text{negativos} \end{array} \right.$
Por el número de ejes de simetría	$\left\{ \begin{array}{c} \text{no tiene} \\ \text{tiene uno} \\ \text{tiene dos} \\ \text{tiene seis} \end{array} \right.$	Por giro en el espacio alrededor de un diámetro	$\left\{ \begin{array}{c} \text{se transforma} \\ \text{en si mismo} \\ \text{se transforma} \\ \text{en otro sesán} \\ \text{gulo} \end{array} \right.$

Los sesángulos admiten, por supuesto, toda otra estructuración realizable con hexágonos. Y otras manipulaciones un tanto marginales, porque ¿qué aspecto tendría esta frase si π tuviera el valor 3? Pues si π fuese igual a

3, ESTA OPERACIÓN TENDRÍA ESTE ASPECTO »
(Douglas R Hofstadter, Investigación y Ciencia marzo, 82, 112), recordatorio de que la razón entre el perímetro del hexágono y su radio, es 3. Admiten descomposición en triángulos o cometas, encaje en círculos, etc.

El total de los sesángulos no parece aconsejable para alumnos de los primeros niveles, por ser demasiadas piezas y por tener algunas de ellas características muy parecidas. Es mejor escoger subconjuntos del total de sesángulos donde estén las características que se quieran manejar, e incluso, para preescolar y primero se facilita su manipulación si hay piezas repetidas. Es posible escoger, por ejemplo, el conjunto de piezas positivas y negativas que no presentan regiones con un punto común sobre un lado (52 en total), o bien las piezas que constituyan los 19 hexagramas del Dr. Salomon y sus equivalentes al sustituir p por k, y s por t, (37 piezas). También, para simplificar el número de características que intervienen, podemos escoger únicamente piezas con dos de los elementales consonantes, como p y k. Teniendo en cuenta sus características geométricas, se pueden eliminar las piezas con ejes de simetría y quedarnos con las quince parejas de positivos que se muestran a continuación (fig. 15), ordenados en una matriz cuya diagonal principal la ocupan los seis sesángulos elementales.

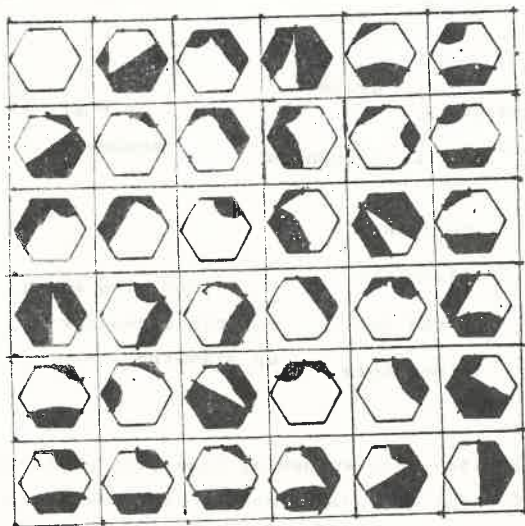


Fig. 15

JUEGOS

Hago ahora a relatar de una forma breve y esquemática, algunos juegos realizables con los sesángulos.

Puzzles

Al entregar a los chicos los sesángulos y un tablero (como el mostrado en la fig. 2), sin ninguna otra indicación, como para un juego libre, su reacción inmediata es la de ir uniendo piezas, unas con otras, alicatando la superficie de la mesa; a nivel de 8º de EGB unen las piezas teniendo en cuenta que los lados sean congruentes, en los primeros cursos simplemente adosan los sesángulos. Luego se dan cuenta de que el centro del tablero es un hexágono donde cabe justamente una de las piezas, y tratan, entonces, de formar "la figura". Para ellos los sesángulos son piezas de un puzzle, y sólo en los cursos últimos, 8º ó 1º de BUP, se percatan de que no existe una forma única de adosarlos desde un primer momento. A algunos alumnos que han pasado la experiencia, se les parecen a piezas de tests que les han puesto los psicólogos.

Con los subconjuntos de sesángulos adecuadamente escogidos para cada edad, se les puede pedir que formen determinadas figuras sobre el tablero, dándoles los modelos adecuados, o dejando que los unas libremente y luego interpreten las figuras obtenidas. Se dan cuenta de que no es posible encajarlos siempre.

Es posible realizar el puzzle, en forma competitiva, repartiendo un número fijado de antemano, de sesángulos, a cada alumno de un grupo de cuatro o cinco; luego los colocarán por turno en el tablero, partiendo de la posición central. Rodeando este primer sesángulo se deben colocar ahora, por turno las demás piezas; y a partir de la segunda, haciendo que coincidan dos lados en cada nueva colocación. Con estas u otras reglas igualmente simples, se puede realizar el juego. Con un número mayor de piezas y un tablero apropiado, el juego tiene un nivel adecuado para adultos.

Dominós

Juegos semejantes a los anteriores, pero con un ensamblaje lineal, resultan más apropiados para los alumnos de menor edad. Como variante, es posible realizar una complicación reglamentando que se puedan colocar ramificaciones al colocar ciertas piezas en la cadena principal.

Para el nivel preescolar se pueden agrupar sesángulos de dos en dos en rectángulos, de tal forma que en cada una de sus mitades esté dibujada

una pieza, y que éstas se encuentren repetidas en otros rectángulos, permitiendo así jugar al dominó con las reglas habituales. Planteado de esta última manera, su aspecto e intenciones se parecen al juego Stop (Interduc) pero más realizable y gratificante para los pequeños.

Con estos juegos se consigue un reconocimiento de formas y estructuras en un ejercicio de identificación, pues muchos sesángulos se parecen, pero sólo algunos estarían repetidos. La similitud se complica por los sesángulos simétricos mediante giro, y por el parecido entre los elementales p y k, y entre s y t. Se logra un fortalecimiento de la capacidad visual de diferenciación, de la orientación espacial,; la creación de criterios de comparación. En los puzzles con láminas se estimula el desarrollo de la visión lógica del plano, el paso del análisis a la síntesis; y en todos, la capacidad de concentración.

Juegos de conceptos

Clasificar mediante una sola característica, por dos características, o por negación de alguna, puede ser una de las orientaciones para estos juegos. Un ejemplo de estas actividades lúdicas, donde se manejen criterios de clasificación, pero con un sentido inductivo y competitivo, es el siguiente. Lo llamamos "del mensaje secreto". En el grupo de juego (4 ó 5 alumnos), uno de ellos escribe en un papel la característica secreta, - por ejemplo, que contenga p- y los otros alumnos van mostrando sesángulos; el "mensajero" dice sí o no según tengan, o no, la característica que el apuntó. El primero del grupo que descubra "el secreto" pasa a ser el nuevo mensajero. Es uno de los juegos con mayor aceptación a todos los niveles.

Además se pueden realizar todos los juegos que con conectores lógicos, y mediante la unión, intersección y complementaridad, se hacen con otros materiales. Y por ellos llegar a la estructura de grupo, como muestran Dienes y Golding en La Geometría a través de las transformaciones, 3. Grupos y Coordenadas, de Editorial Teide.

Otros juegos esbozados en forma esquemática, son:

Juego libre: Se les entregan los sesángulos a los alumnos, y se les pide que los clasifiquen, con sus propios criterios que han de descubrir.

Utilización de los Diagramas de Venn o de Carroll.

Clasificación múltiple en matrices: Como la mostrada en la figura 15.

Clasificación por el número de ejes de simetría.

Entre los juegos de correspondencias podemos citar los siguientes:

Hacer corresponder a cada sesángulo positivo su antisesángulo. Cuando

intervienen piezas carentes de ejes de simetría, el juego tiene la suficiente complejidad como para ser realizado por alumnos de los cursos superiores.

A cada pieza sin ejes de simetría hacerle corresponder la que se obtiene mediante un giro espacial de la misma. Es posible introducir aquí un objeto motivante: un espejo.

A sesángulos elementales asociar sus composiciones, o según las posiciones relativas que ocupen.

Sesángulos elementales y ejes de simetría.

Entre los juegos de identificación, y antes de haberles enseñado a los alumnos la nomenclatura, se puede practicar el siguiente juego: intervengan dos alumnos (o grupos de alumnos) ; uno de los alumnos (A), examina un grupo de sesángulos y los pasa luego al otro jugador (B). Entonces, el director del juego - el maestro u otro alumno -, elige una de las piezas y le dice al jugador A que le explique al B de cual se trata. Una vez comprobada la dificultad en explicar de forma clara la pieza, de haber experimentado que la eficacia del mensaje que han de transmitir, sobre todo si se limita el número de palabras que puede emplear, se pierde al utilizar información redundante, se les enseña la nomenclatura y se prosigue el juego. Comprueban así la importancia de un sistema de comunicación, un lenguaje, exacto y común.

Los objetivos a lograr con estos juegos se encuentran suficientemente estudiados en la abundante bibliografía que sobre ellos existe, por lo que renunciamos a relacionarlos aquí.

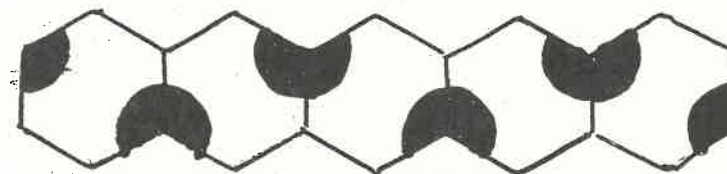


Fig 16

Ejemplo de greca con piezas repetidas

A MODO DE CONCLUSION

Extenderme más en la explicación de juegos y actividades, cuando éstas están en un periodo de trabajo, recopilación de datos e investigación, es contar demasiado con la paciencia de Vds. Pensamos que casi todos los juegos realizables con otros materiales (no numerados), son posibles con los senángulos. Está también la realización material de las piezas en un material adecuado, como plástico, cartón grueso plastificado o madera, y su industrialización.

Claro está que ésta es una exposición llevada por el entusiasmo de la propia obra. En exceso optimista y con opiniones subjetivas contrastables ahora, a partir de esta y sucesivas exposiciones, pero espero que sepan disculpar y comprender tal optimismo. La posibilidad de practicar otros múltiples juegos con este material está por ahora en el campo de lo posible; el interés demostrado por Vds. al tolerar esta comunicación nos anima a seguir trabajando sobre el tema. Al mismo tiempo, quienes se muestren interesados por lo dicho, por este material y sus aplicaciones, si desean llevar a cabo algunas de las experiencias relatadas u otras, pueden ponerse en contacto con la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, desde la que atenderemos, gustosamente, tales solicitudes.

BIBLIOGRAFIA

- DIENES, Z.P., Las seis etapas del aprendizaje en matemáticas. Editorial Teide, Barcelona 1977 (3ª edic.)
- DIENES, Z.P., GOLDING, E.W., La geometría a través de las transformaciones. 1. Lógica y juegos lógicos. Ed. Teide, Barcelona 1976 (8ª edic.)
- Idem. 2. Geometría euclidiana. Ed. Teide, Barcelona 1976. (3ª edic.)
- Idem. 3. Grupos y transformaciones. Ed. Teide, Barcelona 1978 (3ª edic.)
- FURTH, H.G., Las ideas de Piaget. Su aplicación en el aula. Ed. Kapelusz. Buenos Aires 1974.
- MARASTONI, G., Hagamos geometría. Ed Fontanella, Barcelona 1980.
- PAROT, J.J., Actualización Matemática I. Didáctica de la matemática en los primeros niveles. Ed. Teide, Barcelona 1974.
- Ziegles, Th., SCHUMACHER, B., ZEROLO, T., Juegos de discurrir. Interdu/Schroeder. Madrid 1977.

... Y cuando se acabe la fiesta
nos iremos todas a bailar:
La Reina blanca, y la Reina roja,
Alicia y todas las demás.
(Lewis Carroll, Alicia a través del espejo)

EL SEMINARIO DIDACTICO DE MATEMATICAS

(Luis Balbuena Castellano, de la Sociedad
Canaria de Profesores de Matemáticas)

Indice

Introducción	3
¿Qué es el Seminario didáctico	4
Normas legales	5
Objetivos del Seminario didáctico.	5
El seminario didáctico y la realidad educativa	7
Los objetivos	9
Objetivos locales	10
Los programas	11
La clase de matemáticas y el seminario	12
El seminario de matemáticas	13
Periodicidad de las reuniones del Seminario	14
Actividades complementarias:	
a) Nivel de entrada	15
b) otros aspectos a tener en cuenta	16
c) archivo de pruebas	17
d) la evaluación del alumno	18
e) la recuperación	19
f) acta de las reuniones	20
g) alumnos aventajados	21
h) evaluación del seminario	21
i) aspectos metodológicos	24
j) pruebas	25
k) técnicas de trabajo intelectual	26
l) el laboratorio de matemáticas	27
m) participación de los alumnos	28
n) la reunión final	29
Bibliografía	30

EL SEMINARIO DIDACTICO DE MATEMATICAS

1.- INTRODUCCION

Esta ponencia pretende ser una introducción orientadora sobre lo que debe ser un seminario didáctico, lo que debe ser el seminario de Matemáticas y algunas de las posibilidades de actuación que existen.

De un tiempo a esta parte viene tratándose de potenciar el seminario didáctico dentro de la labor educativa de los Centros. Esto se estima como un acierto al considerar que los seminarios juegan un papel fundamental en la marcha de las asignaturas. El seminario representa trabajo en equipo y esta es una técnica de trabajo universalmente aceptada desde hace bastante tiempo.

En épocas pasadas, el seminario fue, salvo excepciones, un ente ficticio y burocrático, con un jefe al frente, pero sin un papel que jugar a la hora de programar o de llevar adelante una asignatura durante todo un curso. En el mejor de los casos, los profesores se reunían para fijar el texto a seguir, (si no es que lo imponía el jefe del seminario), y tratar algún que otro tema. Pero a lo largo del curso, cada profesor iba por su lado sin existir ni una programación a la que ajustarse ni una coordinación que la vigilase. Había, es verdad, bastantes condiciones para que el seminario funcionase así. Hoy muchas de esas condiciones negativas van siendo superadas y son ya muchos los seminarios didácticos que han llegado al convencimiento de que una labor fructífera, innovadora, auténticamente profesional, coherente, etc., tiene que pasar por un funcionamiento adecuado del seminario.

Incluso la legislación poco a poco va dando instrucciones cada vez más concretas para orientar en ese sentido y la administración escolar exige año tras año, con más fundamento y seriedad, el que los seminarios vayan cumpliendo con su misión. De todos modos es de esperar que pronto la legislación existente sobre este tema, se amplie y recoja, al menos, los aspectos mínimos necesarios para que los seminarios cumplan con ese importante papel.

Este empeño decidido de potenciar la enseñanza a través del seminario didáctico dará pronto sus frutos. De hecho, en aquellos Centros donde esa labor se viene haciendo desde hace algunos años, existe ya una auténtica preocupación por seguir un mejor desarrollo de la asignatura, tanto entre el alumnado como entre el profesorado; la asignatura se explica con más coherencia y el número de actividades aumenta y se perfecciona curso tras curso. De esta forma, los seminarios se convierten, no sólo en el motor y el coordinador de la marcha de la asignatura, sino que da lugar a una

enseñanza más creativa, estimulante y satisfactoria para todos.

El proceso educativo, no obstante, es demasiado complejo y presenta múltiples variables como para pensar que el funcionamiento de los seminarios es la solución para superar el gran número de limitaciones existentes en cada profesor, en los alumnos, en cada centro y en la estructura administrativa y organizadora de la educación.

En lo que sigue, se van a exponer unas ideas más o menos generales sobre lo que deben ser los seminarios didácticos y su misión; lo que son en realidad y por qué.

Se dan luego unas nociones generales aceptadas sobre la elaboración de una programación, haciendo referencia a las Matemáticas.

Finalmente, se centra en el seminario de Matemáticas proponiendo posibles actividades a desarrollar.

No se pretende ser exhaustivo ni dogmático en temas que de por sí, son polémicos. El objetivo quedaría cubierto si algunas de esas ideas pudieran orientar y servir a algún seminario. Se parte de un axioma: los profesores han de procurar el funcionamiento real y vivo del seminario. Luego habrá que plantearse qué finalidades pueden ser satisfechas a corto, a medio y a largo plazo.

2.- ¿QUE ES EL SEMINARIO DIDACTICO?

Las palabras "Seminario" y "semillero" poseen una misma raíz etimológica. En consecuencia, el Seminario debe ser concebido como un semillero de ideas, de realizaciones y de estudios en común.

El reglamento orgánico de los INB, publicado en el BOE del 28/2/77, se concibe el Seminario didáctico como "la célula natural de integración del profesorado en la organización docente así como el medio permanente para asegurar el funcionamiento científico y pedagógico". Tal definición es completa y justa ya que recoge, en síntesis cuáles deben ser los objetivos primordiales de un Seminario didáctico.

El Seminario lo constituyen, por tanto, los profesores de una determinada disciplina, que se agrupan para formar esa célula natural que queda caracterizada por el trabajo en equipo coordinado. Este es el aspecto fundamental del Seminario al que están subordinados todos los demás.

Al frente del Seminario está un jefe que, según la reglamentación actual, es, ineludiblemente, el catedrático de la asignatura y, a su defecto, el agregado que proponga la dirección. No es el momento de discutir si el procedimiento es el más adecuado. Dentro de esa tendencia hacia la democratización de los Centros, quizá no lo sea. En cualquier caso, es nece-

sario que haya una persona que tenga una visión de conjunto de toda la labor del Seminario, que convoque las reuniones, que coordine el trabajo, aunque las decisiones se tomen colegiadamente y la participación de todos sea activa. Por otra parte, la administración solicita al Seminario un conjunto de informes que alguien debe elaborar y para esta responsabilidad se prevé un incentivo económico.

Lo triste de muchos casos (cada vez menos), es que el Seminario se convierta en un ente burocrático-educativo más, sin una funcionalidad real; tan sólo alguna reunión aislada que justifique su existencia y no esa labor constante, programada y participativa que debe tener.

3.- NORMAS LEGALES

A continuación se expone un esquema de las normas legales que rigen a los Seminarios didácticos hasta el momento:

- a) O.M. del 21 de agosto de 1972 -aparece en el B.O.E. del 26 de agosto de 1972.
- b) Resolución de la D. General de ordenación educativa del 18 de septiembre de 1972. (Col. Peg. MEC 232/72).
- c) Idem de 4 de julio de 1975 (B.O.E. del 12 de julio).
- d) Real decreto 264/77 de 21 de enero de 1977 - Reglamento orgánico de los INB publicado en el B.O.E. de 28 de febrero de 1977).

En a) es donde la legislación es más clara y explícita pues se trata de la orden ministerial que los crea y regula. En las demás se hacen aportaciones no significativas.

4.- OBJETIVOS DEL SEMINARIO DIDACTICO

A la vista de las normas mencionadas y de lo que es en sí el Seminario didáctico podemos atribuirle los siguientes objetivos:

- a) Coordinar el trabajo del equipo de profesores de una determinada disciplina.
 - b) Programar la asignatura.
 - c) Programar y organizar actividades complementarias.
 - d) Procurar el perfeccionamiento del profesorado.
 - a) Se entiende por "coordinar el trabajo del equipo de profesores":
 - 1) procurar que los distintos grupos de un mismo curso vayan a un ritmo de explicación paralelo. La reunión periódica permitirá conseguir ese objetivo haciendo que los profesores que, por la razón que sea, vayan más avanzados, procuren proponer más ejercicios o insistir en la explicación

para evitar que exista demasiada diferencia entre distintos grupos.

2) No se trata de fiscalizar directamente la labor del profesor ni de imponer criterios didácticos o metodológicos. Se respeta el principio de libertad en ese sentido: no excluye que en las reuniones puedan discutirse asuntos relacionados con esos aspectos, como luego se verá más específicamente.

3) Fomentar el trabajo en equipo. Hoy se presenta como la mejor forma de trabajar y máxime en este caso en que los diferentes miembros del Seminario tienen unos objetivos comunes.

b) Programar la asignatura. Esta es una importante labor del Seminario didáctico. Una disciplina no podrá ser bien desarrollada si no existe previamente una programación a la que seguirse. Esta debe ser lo más minuciosa posible ya que el funcionamiento del Seminario está bastante supeditado a la forma en que se haya hecho la programación a seguir. Si se ha elaborado dando sólo unas normas muy generales sobre los objetivos a lograr y los contenidos a desarrollar, entonces no se siente la necesidad de reunirse para analizar su verificación y criticar sus deficiencias. Por esto, es conveniente que la programación lleve definidos:

- los contenidos; los objetivos generales de la asignatura en el curso que se programe; los objetivos específicos de cada una de las unidades de que consta el curso; dar unas orientaciones metodológicas; temporalizar con claridad cada unidad temática, procurando que quede establecido de forma realista; dar orientaciones sobre el tipo de ejercicios u otras actividades necesarias para el desarrollo de los contenidos; establecer previamente cuáles van a ser los criterios que se utilizarán a la hora de evaluar los conocimientos adquiridos, qué tipo de pruebas se van a realizar, periodicidad, etc.; y finalmente, el Seminario debe prever qué tipo de recuperación es el más apropiado a su organización particular.

c) Programar y organizar actividades complementarias. Se entiende por esto, todo aquello que sin tener un objetivo específico dentro de la programación de la asignatura, puede aportar algún dato para que sea más realista y eficaz, o pueda reforzar alguno de los objetivos generales o específicos propuestos en la programación, o contribuir a la formación integral que tiene como objetivo la enseñanza en los Centros, etc.

Este apartado será el que pueda servir para medir el grado de creatividad de un Seminario, pues si bien la programación de la asignatura es algo más o menos establecido y que sigue unas pautas conocidas y estudiadas, la actividad complementaria deberá irse programando conforme surja la

necesidad de realizarla, es una actividad abierta. Esto puede tenerse previsto desde principios de curso o quizá se presente en cualquier momento.

d) Procurar el perfeccionamiento del profesorado. Este objetivo del Seminario puede parecer demasiado pretencioso toda vez que por perfeccionamiento de profesorado se suele entender la realización de cursillos o Seminarios impartidos por grandes especialistas que transmiten a los profesores bien unas ideas de tipo didáctico, de cómo llevar una clase, etc. o bien cuestiones más o menos actualizadas sobre contenidos. Aunque esto excluye la posibilidad de que esto se pueda hacer, aquí no se entiende así este tema. Cuando los profesores se reúnen en Seminario para discutir la marcha de una programación o la organización de una actividad complementaria, ya se está produciendo un perfeccionamiento del profesorado, porque, en general, en estas reuniones se vierten opiniones y experiencias que pueden enriquecer la labor profesional de cada profesor. Por todo lo cual, puede pensarse en este objetivo con independencia de los anteriores.

5.- EL SEMINARIO DIDACTICO Y LA REALIDAD EDUCATIVA

Aunque las normas legales que rigen actualmente la constitución y la vida de los Seminarios parecen bastante explícitas al enunciar sus objetivos, actividades y controles administrativos, lo cierto es que, en la práctica, muchos Seminarios aun no funcionan.

Las circunstancias por las que esto ocurre varían, naturalmente, de unos centros a otros. Las hay de difícil solución porque están dependientes de decisiones que están por encima del interés de los profesores; otras tienen su raíz en la Jefatura de Seminario, al no recaer sobre la persona que por su edad, cualidades, etc. podría ser la adecuada; otras, en fin, pueden achacarse al profesorado, en general, al no estar convencidos de la necesidad del Seminario o tomar una actitud pasiva sobre su funcionalidad.

En la normativa actual, el Jefe de Seminario debe dedicar tres horas semanales a llevar adelante esa función. Lo ideal es que una al menos de esas tres horas la comparta con sus colegas realizando lo que se llama "la reunión del Seminario". No es fácil, en general, lograr encontrar esa hora en los horarios de los profesores. La dificultad aumenta con el número de miembros de que consta el Seminario. No obstante, si este hecho se prevé desde principios de curso y se comunica al responsable de la elaboración de los horarios, habrá muchos casos en que será posible. Probablemente esta hora de reunión semanal sea la clave para el funcionamiento real y efectivo del Seminario. Más adelante se vuelve sobre este tema.

A veces, se piensa, (sobre todo en Centros con Seminarios de pocos profesores), que basta con un cambio de impresiones en los pasillos, sala de profesores, etc. para creer que con ello se suple la reunión del Seminario. Si esos contactos se hacen con cierto rigor, en el mejor de los casos, se conseguirá coordinar la marcha de la asignatura, pero no se cubrirán los demás objetivos propuestos para el Seminario.

Hay otros muchos problemas que ponen freno al funcionamiento de los Seminarios. Entre otros se pueden señalar:

- Carecer el Centro de instalaciones adecuadas para local del Seminario. Hay casos en que no existe ese local, en otros ha de compartirse con otras disciplinas o se dispone de uno de dimensiones pequeñas y sin unas condiciones mínimas para poder reunirse.

- La biblioteca específica del Seminario no está debidamente dotada de libros. Quizá existan obras dedicadas exclusivamente a contenidos matemáticos (textos, obras especializadas en temas como análisis, álgebra, etc.), pero pocas veces existen libros dedicados a los alumnos o de temas relacionados con la didáctica en general o con la didáctica de la Matemática en particular.

- La inestabilidad de las plantillas en los Centros puede ser una causa más del no funcionamiento de los Seminarios. La posible labor iniciada en un curso puede quedar interrumpida al curso siguiente.

- Si el Centro no está en una gran población, puede que los profesores residan a cierta distancia.

- El no haber iniciado nunca una labor de Seminario, puede constituir una falta de estimulación para empezar.

- La administración que, en general, no controla de modo directo la ejecución de una programación que, por ley, ha de enviarse a principios de curso a las inspecciones.

- El elevado número de alumnos por profesor, que hace que éste tenga que dedicar muchas horas a evaluaciones, preparación y corrección de pruebas, etc.

En definitiva, vemos que los problemas que pueden existir en la realidad cotidiana de los profesores o de sus centros, llegan a ser un importante freno a la hora de tratar de desarrollar una labor educativa a través del Seminario. Este necesita dedicación y no siempre es posible darle la que sería deseable. En cualquier caso, se insiste en una idea ya expresada: sean cuales sean las posibles limitaciones existentes, los profesores deben hacer lo posible para superarlas pues de un correcto funcionamiento de los Seminarios didácticos se siguen enormes ventajas no sólo para los

alumnos, sino para la profesión de los enseñantes, y para cada enseñante en particular, para el proceso educativo en general y, en definitiva, para la Sociedad.

6.- LOS OBJETIVOS

Son las metas a las que se quiere llegar con el proceso educativo. Por tanto, es necesario que los objetivos sean fijados en primer lugar para luego ir estudiando los medios más idóneos que ayudarán a conseguirlos.

De una parte están los objetivos que marcan las leyes que regulan la educación. Son emitidos con independencia de las disciplinas y son responsabilidad directa de los que conducen el proceso educativo del país.

La participación del profesor se materializa luego, cuando trate de poner los medios necesarios para llegar a conseguir esos objetivos.

En segundo lugar figuran los objetivos globales que también el legislador pretende conseguir con la explicación de cada disciplina en particular. Estos objetivos deben ser conocidos y discutidos en el seno de cada Seminario a la hora de elaborar la programación. De no existir un acuerdo previo pueden producirse situaciones irregulares de consecuencias imprevisibles (diferentes niveles de explicación, formación de "lagunas" en conocimientos o automatismos, contradicciones a la hora de enfocar la asignatura, etc.). Los objetivos emitidos por la administración pueden servir de guía para fijar aquellos que se consideren más adecuados y realistas teniendo en cuenta los factores que influyen en cada centro, curso o grupo.

La consecución o no de los objetivos propuestos será la que, en definitiva, decida si una programación ha sido desarrollada con éxito o no.

Existe un buen número de objetivos globales para la asignatura de Matemáticas, difícilmente discutibles ya que representan metas claras propias de estudio de esta disciplina. Como ya se ha dicho, corresponde al Seminario didáctico el seleccionarlos estableciendo, incluso, un orden de prioridades; el fijar aquellos objetivos que se consideran imprescindibles para un curso determinado, a revisar en todas las reuniones que se hagan porque constituyan la base de un posible escalonamiento de objetivos previstos a largo plazo. Es decir, es una responsabilidad ineludible del Seminario el fijar claramente qué es lo que se pretende conseguir a lo largo del curso en cada uno de los niveles, contando con el número de años que van a estar los alumnos en el Centro para poder planificar esos objetivos.

Entre otros objetivos se plantean los siguientes: adquirir un pensamiento crítico y preciso; capacitar para la deducción lógica; conseguir una expresión verbal precisa; conocer los modelos matemáticos; familiarizar

con el lenguaje y el simbolismo de la Matemática; capacitar para el auto-aprendizaje a través de los libros, saber matematizar situaciones reales; desarrollar la capacidad de abstracción; ejecutar con seguridad y fluidez los automatismos operatorios; fomentar la creatividad; conocer el método axiomático; desarrollar la intuición geométrica; etc.

El problema que se plantea ahora es: una vez elegidos los objetivos que se consideran apropiados para ese nivel ¿cómo lograrlos? Aquí se tropieza una vez más, con la realidad educativa. El proceso educativo se encuentra normalizado. El Seminario tiene la posibilidad de adaptar esa norma a los criterios de sus miembros, a la realidad de su centro y al nivel de sus alumnos. En este juego es donde pueden intentar lograrse cubrir total o parcialmente los objetivos propuestos.

En el Boletín Oficial del Estado del día 22 de marzo de 1975 se encuentra publicado el decreto que regula los actuales estudios de bachillerato y curso de orientación universitaria.

7.- OBJETIVOS LOCALES

Los objetivos esbozados en el punto anterior no dejan de ser un tanto abstractos, en el sentido de que son ideas que deben conseguirse con la Matemática a nivel globalizante; sirven para orientar la labor a desarrollar, pero no indican a través de qué caminos pueden conseguirse. Por ejemplo, se da como un objetivo el "conocer el método axiomático"; si el Seminario adopta esto como un objetivo global a conseguir a lo largo de esos años, deberá aprovechar cualquier ocasión para hacer ver a los alumnos en qué consiste ese método. Sin embargo, con ello no se concreta el cuándo ni el cómo. Este papel lo juegan lo que se llamarán "objetivos locales", porque son los que concretizan esos aspectos en cada unidad didáctica. Es decir, los objetivos globales marcan el rumbo a seguir mientras que los objetivos locales son los que dicen cómo hay que seguir ese rumbo para no perder la orientación.

Por otro lado, los objetivos globales son difícilmente "medibles"; son, en general, los objetivos a largo plazo y no es fácil establecer criterios que puedan ir indicando de manera fiable si se van cubriendo o no. En cambio, los objetivos locales sí pueden ser evaluados ya que su expresión es mucho más concreta, pues se refiere a un aspecto local de una unidad determinada.

No debe confundírseles con los contenidos. Estos dan una indicación de cuál es el punto temático concreto a tratar mientras que los objetivos locales, señalan con sus verbos en infinitivo qué es lo que se pretende conseguir en ese punto y cómo debe conseguirse. Los verbos utilizados se

refieren siempre a acciones observables y, en general, evaluables.

A la hora de elaborar una programación conviene tener una lista de "verbos observables" para poder establecer con más precisión los objetivos locales.

He aquí una:

CATEGORIAS	Ejemplos de verbos que pueden expresar una conducta concreta.
1. Conocimiento:	definir, seleccionar, completar, describir, subrayar, enumerar, nombrar, identificar, localizar, etc.
2. Comprensión:	explicar, predecir, demostrar, traducir, dar ejemplos, precisar, interpretar, formular una regla, distinguir, etc.
3. Aplicación	hacer un diagrama, construir, resolver, producir, relacionar, operar, calcular, etc.
4. Análisis:	clasificar, distinguir, separar, elegir, descomponer, diferenciar, señalar, etc.
5. Síntesis:	reunir, ordenar, componer, reconstruir, combinar, relacionar, ilustrar, etc.
6. Evaluación:	comparar, valorar, interpretar, estimar, criticar, justificar, etc.

Una vez finalizada una unidad didáctica y a la vista de los resultados obtenidos, puede valorarse si los objetivos locales se cumplieron en su totalidad, si es necesario introducir cambios con vistas a las unidades que siguen o al curso siguiente. Si la programación ha sido aceptada por todo el Seminario y su coordinación se realiza de forma regular, esta puede ser una tarea fácil de llevar a cabo y sumamente enriquecedora para la programación que se está experimentando.

9.- LOS PROGRAMAS

Ya se ha indicado que entre los objetivos fundamentales del Seminario se sitúa la programación de la asignatura con todas las variables que ella lleva consigo.

Es posible que se piense que la programación, en definitiva, viene

impuesta desde el momento en que existe un programa oficial al que hay que ajustarse, y sobre el que existen directrices más o menos explícitas en las normas que lo establecen. En otros casos también se piensa que al elegir un texto "ya se ha programado". El conocimiento exacto de lo que representa una programación podrá convencer de que se está en un error.

Para comenzar, los contenidos de cada curso, en efecto, vienen señalados y además lo hacen indicando qué es lo que contiene cada uno de los cursos. Esto en principio puede parecer no dar funciones de decisión sobre ellos a los Seminarios didácticos. La realidad puede ser otra. Por otra parte, el equipo de profesores que forman el Seminario puede no estar de acuerdo con el orden de desarrollo de los contenidos propuestos oficialmente. En este caso, tendrán que llegar a acuerdos razonados para su posible modificación en función de criterios lógicos o pedagógicos. No se trata de eliminar contenidos que pudieran llevar a una situación "ilegal", sino de ejercer una función clara de ordenación de un cuestionario que, por principio, debe ser "cuestionable".

Por otro lado, la realidad en los Centros y la experiencia demuestra que, en la mayor parte de los casos, no es posible el desarrollo íntegro de los programas propuestos. Hay muchas circunstancias a lo largo de un curso que obligan a tomar decisiones sobre posibles contenidos en cuanto a ser desarrollados o no o desarrollados de forma mínima. También aquí el Seminario didáctico juega un papel trascendental, no sólo ya en estudiar cuál o cuáles van a ser los contenidos que será necesario suprimir sino que una vez acordado no desarrollarlos en un curso, programarlo convenientemente para que puedan ser impartidos en el curso siguiente. Es decir, si por las circunstancias que sean, el contenido x ha tenido que ser recortado o sacrificado en el curso primero, debe procurarse organizar el curso segundo para que ese contenido pueda ser completado o desarrollado. Esta es una importante decisión sobre la asignatura. Cada profesor sabrá cuáles y hasta qué profundidad han sido explicados los contenidos del curso precedente, con lo que en cada momento tomará decisiones con mayor conocimiento de causa.

Por lo tanto, no es cierto que el hecho de que los contenidos estén impuestos, impidan al Seminario tomar decisiones sobre los mismos.

9.- LA CLASE DE MATEMÁTICAS Y EL SEMINARIO

Todo profesor intenta que sus clases sean lo mejor posibles. Que lo que se explica llegue de la mejor forma a un mayor número de alumnos. Se hace el esfuerzo que se estima necesario para conseguir el 100% de éxito.

Para los que se dedican a enseñar Matemáticas, la clase es la que, en la práctica, mide su capacidad profesional, es la que le produce entusiasmo o frustración. Por eso es una razón importante de su existencia que debe cuidar al máximo y poner todos los medios necesarios para no caer en la frustración, en el cansancio de "repetir siempre lo mismo", etc. Porque el repetir siempre lo mismo no tiene por qué cansar si se procura hacerlo cada vez de forma distinta, mejorando el método, etc. si el utilizado se comprueba que no funciona.

Se debe estar abierto a todas las posibles ideas que puedan mejorar los métodos, meditar la eficacia de las clases buscando los canales necesarios para poderla medir, "evaluar" los procesos evaluadores, conocer publicaciones que puedan aportar ideas renovadoras, etc.

Aunque toda esta labor pueda parecer individual, hay un canal natural para convertirla en una labor de equipo con todas las ventajas que ello lleva consigo, a pesar de los posibles inconvenientes que se le puedan encontrar. El Seminario didáctico brinda a los profesores una oportunidad para poder desarrollar una labor profesional, en medio de un equipo que trataría de conseguir el mejoramiento profesional individual a través de una colaboración colectiva.

10.- EL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS

Lo constituyen todos los profesores del Centro que imparten esta asignatura en cualquiera de los cursos.

Como es obvio, todas las cuestiones analizadas anteriormente son aplicables al Seminario de Matemáticas ya que se trata de los principios generales sobre los que ha de basarse su labor. Sin embargo, este Seminario (igual que cada uno de los demás), presenta sus peculiaridades y actividades específicas que vamos a tratar de estudiar en las páginas que siguen.

Se ha anunciado ya que se pretende fundamentalmente, dar un conjunto, más o menos amplio, de ideas útiles para el posible trabajo del equipo de profesores que forman el Seminario. No se quiere decir que cada Seminario tenga que pensar en desarrollar lo que se le indica. Incluso puede no se esté de acuerdo con muchas de las ideas expuestas. Solo se dan a título orientativo para que en el seno del Seminario se discutan y traten de experimentarse, perfeccionarse o suprimirse si de su experimentación o de su presumible orientación, no diera los resultados previstos.

Por otro lado, las Matemáticas es una disciplina presente en los programas de casi todos los cursos. Ello debe obligar al Seminario a llevar una labor coordinada para evitar, entre otras cosas, el ir creando

deficiencias de formación en los alumnos difíciles de superar después y de las que, a veces insensatamente, se culpa a los alumnos.

Hay un conjunto de tareas encomendadas al Seminario que deben ser cumplidas con la mayor prontitud. Entre ellas:

- asignar con suficiente antelación a cada profesor cuál o cuáles van a ser los cursos que ha de impartir.
- Elegir los textos.
- Informar y orientar a aquellos profesores que se incorporen al Seminario.
- Elaborar la programación.

11.- PERIODICIDAD DE LAS REUNIONES DEL SEMINARIO

Las normas existentes que regulan la acción de los Seminarios dicen que éstos han de reunirse al menos una vez al trimestre. Esta periodicidad es claramente insuficiente. Una labor de Seminario no puede ni debe someterse a examen en periodos tan largos de curso. Es de esperar que ese aspecto de la normativa varíe en breve.

Una periodicidad que quizá puede parecer exagerada es la de una vez por semana. Sin embargo, no lo es, pues la Coordinación entre los profesores y los demás objetivos a cubrir por el Seminario didáctico requieren una revisión prácticamente continua. En Centros en que se estima necesaria esa periodicidad, e incluso si se trata de un Seminario especialmente creativo, ese tiempo resulta insuficiente para analizar en profundidad la actividad del Seminario.

Hay varias situaciones de hecho que suponen un freno a esa periodicidad semanal. Algunas son: los horarios de los profesores que podrían estar recargados o con horas muy dispersas, el excesivo número de alumnos asignado a un profesor, la lejanía de residencia habitual al Centro, ser un Seminario con un gran número de profesores adscritos, etc.

En cualquier caso, dada la importancia que tiene la buena marcha de los Seminarios didácticos sería conveniente hacer todos los esfuerzos posibles para tratar de superar esos problemas. Por ejemplo, al inicio del curso el o los responsables de elaborar los horarios podrían intentar reservar una hora para esta reunión. En los Centros pequeños e intermedios quizá no resulte difícil lograrlo. La complicación aumenta conforme aumenta el número de profesores. En este caso, podría pensarse en hacerla quincenal utilizando los sábados o alguna hora a la que puedan asistir una mayoría del profesorado.

Hay que tener en cuenta que bajo esta intención subyace un problema

a considerar: la legislación no obliga a hacer las reuniones con la periodicidad que se sugiere. Por tanto, puede haber profesores que no acudan a las reuniones amparados en ese argumento, o que sea el propio Jefe del Seminario quien no se sienta en la obligación de convocarlas con más periodicidad que la legislada. Se trata, pues, de convencerse de la necesidad y para ello basta con iniciarlas y comprobar los grandes beneficios que trae el hacerlas a la asignatura, a los profesores y a los alumnos. En ese caso, los contenidos de las reuniones deben ser lo más operativo posibles evitando, en lo posible, caer en temas más o menos especulativos y generales en lugar de temas concretos de la asignatura, de su metodología, de los alumnos, del Centro en relación con la asignatura, de actividades promovidas por el Seminario o que se puedan promover, etc.

12.- ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

a) NIVEL DE ENTRADA

Cuando los alumnos pasan de un curso al siguiente, va a aplicarse sobre ellos una programación. Pero esta programación deberá siempre partir de unos supuestos reales pues se corre el grave riesgo de tener que tomar decisiones precipitadas cuando se observe que la programación no está cubriendo ni puede cubrir los objetivos propuestos, porque éstos partían de un planteamiento teórico y no del nivel medio de los alumnos.

Se hace necesario entonces el establecer lo que se llamará "el nivel de entrada". Si el Seminario didáctico viene cumpliendo con su función desde el curso anterior, al menos, entonces no resultará complicado establecer esos niveles para aquellos alumnos que continúan en el Centro.

Pero si se trata de alumnos nuevos en el Centro (cosa que ocurre principalmente cuando se pasa de un nivel a otro), entonces es preciso determinar el nivel de entrada de esos alumnos para tenerlo en cuenta a la hora de elaborar la programación. Esta tarea no es fácil si se quiere hacer con cierta exhaustividad ya que requerirá invertir mucho tiempo.

Lo ideal podría ser mantener una entrevista con los alumnos. El objetivo es el de sondear su preparación tanto de desarrollo intelectual, (capacidad de síntesis, de abstracción, de deducción, etc), como sus conocimientos. En Centros con pocos alumnos tal vez pueda realizarse esta labor o al menos alguna parecida, pero si el número de alumnos es grande, hay casi imposibilidad de realizarlo y es necesario acudir a otros mecanismos más operatorios.

En este sentido, puede pasarse a los alumnos uno o dos test a lo largo de las dos primeras horas de clase del curso. En uno de los test

puede recabarse información sobre el nivel de conocimientos y automatismos operatorios adquiridos y necesarios para el desarrollo de los contenidos del curso en cuestión. Con el otro se trataría de medir el nivel de desarrollo intelectual.

b) OTROS ASPECTOS A TENER EN CUENTA

El Seminario (y cada profesor en particular), debe partir de una importante hipótesis: sus alumnos son personas. Esto, que pudiera parecer obvio, a veces no es que se olvide, pero sí ocurre que no se le da la significación precisa que con ello se quiere decir: son personas en una edad determinada, con los problemas propios de esa edad, con defectos y virtudes que en unos alumnos se manifiestan con mayor fuerza que en otros; con un ambiente familiar y social alrededor suyo, que puede llegar a marcar su actuación en la clase y en el Centro.

A lo largo de las reuniones de Seminario, se tendrá necesidad, con casi toda seguridad, de discutir la actuación de determinados alumnos en sus clases, su rendimiento, sus problemas de aprendizaje, etc. Por todo ello, no cabe duda de que cuanta más información se posea, más realista podría ser la actuación del Seminario. Por esto, no sólo sería deseable poseer datos sobre cuáles son sus condiciones iniciales de conocimiento y desarrollo intelectual sino que también sería deseable contar con alguna orientación en aspectos tales como la procedencia social del alumno, el centro en que estudió el curso anterior, la zona geográfica en la que suele desenvolverse su vida, nivel cultural, etc.

Es una tarea que basta con hacer una vez pues en los cursos sucesivos es suficiente con actualizarla.

Estos datos pueden ser recabados en alguno de los test que se pasen al alumno para investigar su nivel de entrada. He aquí una relación, no exhaustiva, de posibles datos a averiguar:

- 1.- Nombre completo.
- 2.- Dirección.
- 3.- Profesión de sus padres.
- 4.- Número de hermanos que conviven en el hogar. Edades y estudios.
- 5.- Otras personas que convivan.
- 6.- Si dispone de habitación para estudiar solo.
- 7.- ¿Realiza trabajos (renumerados o no), aparte de estudiar? ¿Cuáles?
- 8.- Centro en el que estudió el curso anterior.
- 9.- Si repite curso. Si ha repetido alguno.
- 10.- Calificación obtenida en Matemáticas en los últimos cursos.

11.- Si dispone de libros que le ayuden en el estudio que no sean de texto. (enciclopedias, diccionarios, etc.) Indicar los que más usa.

12.- ¿Qué carrera piensa estudiar? Si no lo tiene decidido ¿qué es lo que más le gusta ahora?

Es evidente que todos estos datos deben ser utilizados con discreción por parte del Seminario evitando su publicidad, por si algún alumno pudiera sentirse afectado por ello. En cualquier caso, parece razonable indicar al alumno que cuál es la finalidad por la que se pide esa información.

Todos estos datos ayudan a configurar el entorno en que se mueve el alumno y acercar así al Seminario (y por tanto a su profesor), a su realidad. Pueden ser ampliados si así se estimara. Se trata, pues, de una aproximación a ello pues en ningún caso deben sacarse conclusiones definitivas tras el conocimiento de esta información, ni elaborar prejuicios a favor o en contra. A lo largo del curso, tal vez muchas actuaciones, rendimiento, etc. del alumno puedan ser justificadas, conociéndolo.

c) ARCHIVO DE PRUEBAS

Los Seminarios didácticos han de poner especial celo para conseguir que las pruebas que se pasen a los diferentes grupos tendientes a medir su aprendizaje, sean lo más homogéneas posibles. El alumno es bastante sensible en este punto cuando nota diferencias patentes de faltas de homogeneidad ya que, en general, esto influye en los resultados. En las reuniones deben establecerse los criterios generales que cada profesor ha de adecuar a su forma de desarrollar sus clases. En cada una de las preguntas de que conste la prueba se debe medir el grado de éxito o fracaso obtenido y anotarlo.

El texto de la prueba con ese estudio realizado, se archiva con el fin de ir construyendo un banco de pruebas que permita, posteriormente, hacer un análisis global para tomar decisiones sobre la forma más adecuada de elaborar las pruebas futuras.

En las reuniones del Seminario, podrían irse analizando las causas del posible éxito o fracaso de las pruebas que se vayan realizando. Tal vez fuera preciso modificar ciertas orientaciones metodológicas, insistir más en determinadas cuestiones, planificar posibles actividades de información, repaso o recuperación, etc.

d) LA EVALUACION DEL ALUMNO

Teóricamente el sistema de evaluación que debe aplicarse en los Centros es el de "evaluación continua". Esa es la teoría. La realidad es otra diferente. En la mayor parte de los casos se sigue valorando el aprendizaje de los alumnos acudiendo al tradicional "examen". A veces no se llama así, sino "controles", "pruebas", etc., pero en esencia se trata de lo mismo. El alumno se ve sometido de forma periódica a las tensiones que supone la preparación y realización de un examen con toda la carga negativa que esa situación lleva consigo.

El Seminario didáctico debe plantearse, dentro de la programación que realice al principio, cuáles van a ser los criterios de evaluación que se van a seguir a lo largo del curso, independientemente de que esos criterios puedan ir siendo actualizados, revisados y contrastados a lo largo del curso. Estos criterios deben tender a conseguir la evaluación continua de los alumnos intentando establecer normas que permitan cuantificar de la forma más objetiva posible no solamente los exámenes que realice, sino su participación en la clase, su trabajo diario, aquellos trabajos propuestos para el estudio o la investigación y que, tal vez, no sean estrictamente del contenido del programa, los cuadernos de apuntes o de ejercicios si el profesor estima que deben tenerse, etc.

Esto no es tarea fácil en tanto que supone valorar cuantitativamente aspectos subjetivos en la mayor parte de los casos. No obstante, el Seminario debe hacer el esfuerzo que sea necesario para que esto pueda tomar forma. Así la evaluación del alumno puede ser, además de continua, mucho más globalizadora al valorar aspectos que aunque no son de aprendizaje de contenidos, si son de formación integral, que es uno de los objetivos generales que se pretenden.

Pero aun más, en la asignatura de Matemáticas, el trabajo diario y continuado tiene una trascendental importancia. No es el sitio para profundizar en la idea, pero todo profesor de matemáticas sabe que el carácter deductivo de esta disciplina y el que cada cuestión que se introduce se basa en otras anteriores, hace que sea imprescindible un estudio constante, si se quiere llegar al final con éxito. Por esta razón, el Seminario de Matemáticas debe procurar poner los medios necesarios para que eso quede garantizado. Una forma de hacerlo es la de lograr establecer criterios para una valoración objetiva del esfuerzo del alumno por conseguirlo.

e) LA RECUPERACION

Es uno de los temas que, en general, preocupan al profesorado. El Seminario debe tratar de organizar actividades especiales para la recuperación de aquellos alumnos que no llegan a cubrir los objetivos mínimos propuestos para cada unidad didáctica.

En este punto también se tropieza con una limitación legal. En las normas existentes, incluso en leyes, se habla de la recuperación, de su necesidad, de su conveniencia, etc., pero no se indica nunca cómo debe organizarse esa labor de recuperación. Es más, a veces resulta poco menos que imposible dar viabilidad a ese "deseo" legal. Piénsese en un alumno del actual primer curso de bachillerato: tiene 33 horas lectivas semanales, ¿cómo entonces organizar la recuperación? ¿en qué momento? las dificultades son prácticamente insalvables en casos como este.

Por otro lado, las tareas de recuperación del alumno no se consideran como lectivas por lo que, oficialmente, no pueden figurar en los horarios de los profesores. En consecuencia, la recuperación no se realiza de modo sistemático en la mayor parte de los Centros sino que queda como un aspecto discrecional que solo se satisface valiéndose de la buena voluntad del profesorado o de alguna "treta" con visos de legal.

En muchos casos, la recuperación se reduce a una repetición de las pruebas sin ni siquiera un repaso o consulta previa.

Un Seminario organizado puede afrontar este problema poniendo en práctica algunas de las ideas que se explican a continuación.

Cabe la posibilidad de que no todos los profesores del Seminario tengan su horario completamente cubierto en la dedicación que eligieron. En ese caso y de acuerdo con la Jefatura de Estudios podría convenirse en no ocupar a ese profesor en horas complementarias, sino en establecerlas como "horas lectivas" dedicándolas exclusivamente a la recuperación de los alumnos.

Otra idea que puede ayudar a la labor de recuperación es la elaboración de hojas de problemas, explicados al más mínimo detalle todos los pasos que se den, haciendo repaso, incluso de aquellos conceptos y automatismos previos. Estas hojas, convenientemente preparadas y presentadas en carpetas plastificadas para evitar su deterioro o mediante algún sistema de reproducción (multicopia, fotocopia, etc.), serán entregadas a los alumnos decididos a afrontar su recuperación. Sus contenidos estarán graduados en dificultad creciente. Es imprescindible el trabajo personal del alumno, quien una vez estudiadas consultará con su profesor sus posibles dudas o dificultades de comprensión. Se trata, pues, de una tarea a reali-

zar por el Seminario a largo plazo, tras un periodo más o menos amplio de funcionamiento, pues es una labor lenta.

Otro modo de ayudar a la recuperación puede ser la preparación de cintas-casette grabadas con el mensaje que se quiere recuperar apoyadas con un esfuerzo visual que pueden ser diapositivas (si se piensa en hacerlo de forma colectiva) o mediante fichas (si se piensa en que cada alumno lo haga de forma individual o de pequeños grupos). Igual que lo antes dicho, esta es también una labor lenta, pero con ventaja de que una vez realizado quede disponible para múltiples utilizaciones.

f) ACTA DE LAS REUNIONES

Aparte de los documentos que se puedan ir elaborando a lo largo de las reuniones de Seminario tales como la programación, hojas de recuperación, de problemas, etc. es una gran ayuda el levantar un acta de los temas tratados en la reunión, los acuerdos a los que se llegue, así como la coordinación de la asignatura en los distintos cursos y grupos.

Hay que tener en cuenta que la normativa actual no pide explícitamente que tenga que levantarse esta acta, pero la práctica demuestra su conveniencia e interés.

Por otra parte queda constancia de las diferentes reuniones y de los temas tratados, aunque la nota sea breve. En reuniones y sobre todo en el curso siguiente, puede volverse sobre alguno de ellos, profundizando, rectificando posibles acuerdos, etc.

De otra parte y como muy importante, la coordinación de la asignatura debe constar por escrito para el control de la programación acordada. La forma de hacerlo constar es variable pues hay factores que influyen en su elaboración. Sin embargo, como mínimo deben anotarse los contenidos concretos que se van explicando. Así se consigue, al menos, un paralelismo en el desarrollo de los contenidos. Se supone que existe el compromiso de todos los profesores del Seminario a amoldarse a la programación acordada. Con ese desarrollo paralelo, el Seminario podrá conseguir un desarrollo coherente y uniforme del programa previsto, pudiendo revisarlo constantemente y tomar las medidas que considere más oportunas a fin de cubrir unos objetivos mínimos.

Aunque es una idea en la que se insiste en otros lugares, no debe desprenderse de lo dicho que el Seminario trata de fiscalizar a sus componentes. Se admite la libertad metodológica; cada cual debe desarrollar su clase según su personal criterio, pero es conveniente que haya una actitud de colaboración con el resto de los profesores del Seminario para que se

respeten unos acuerdos mínimos sobre el desarrollo de la programación y, en ese mínimo, debe encontrarse el conseguir una homogeneidad en cuanto a la información que se dé y al número de pruebas a realizar a lo largo del curso. Todo ello va en beneficio de la asignatura y sobre todo de los propios alumnos.

g) ALUMNOS AVANTAJADOS

Es normal y, en cierto modo, una obligación de los Seminarios, el programar tareas de recuperación para aquellos alumnos que no llegan a cubrir los objetivos mínimos que se propongan. Se habla de ello en otro apartado y se dan ideas sobre cómo tratar de conseguirlo.

Sin embargo, en general, no se piensa en aquellos alumnos que destacan sobre los demás por su especial capacidad para las matemáticas. Se suelen tener reparos de tipo ético para emprender acciones en ese sentido: podría parecer que el profesor se preocupa solo de los adelantados y no de los demás. Esta y otras situaciones deben tratar de superarse. Si el Seminario, (y por tanto cada profesor en su clase), programa actividades de recuperación y es notorio que así lo hace, nadie podría sentirse marginado porque al mismo tiempo se procure mejorar la preparación de los alumnos que cubren los objetivos propuestos. Además, no se trataría de imponer como obligatorias sino como actividades complementarias que desarrollen en los alumnos de forma voluntaria. Es de suponer que si éstas tienen el suficiente atractivo pueden lograr el interés de gran parte de los alumnos.

Para los alumnos avanzados o especialmente interesados y con cierta madurez matemática en su haber (quizá en 3º o 4º) puede plantearse el desarrollo de un Seminario sobre algún tema elegido por ellos entre varios que se les proponga.

Otra forma de lograr ese objetivo, puede ser la de elaborar hojas de ejercicios y problemas que vayan más allá de los propuestos en la clase para lograr cubrir los objetivos de aprendizaje previstos en la programación. Se pueden plantear problemas que tengan que ver con la aplicación de los conocimientos adquiridos en el curso, o problemas que tengan que ver con la aplicación de los conocimientos adquiridos en el curso a situaciones reales.

h) EVALUACIÓN DEL SEMINARIO

Por evaluación del Seminario se entiende el seguimiento de la actuación del Seminario a lo largo del curso. Es un proceso difícil y que debe hacerse de modo continuo. Las distintas sesiones

que se realizan tienen como finalidad hacer balances parciales de lo hecho hasta el momento. En esas reuniones se ha de estudiar si se va cumpliendo o no los objetivos previstos y propuestos desde principios de curso, dentro de la programación. Ya se ha dicho que ésta ha de ser susceptible de modificación si las circunstancias lo exigiesen y eso ha de decidirse a lo largo de las reuniones que se hagan.

Por otra parte, deben evaluarse también los otros objetivos del Seminario el trabajo de coordinación del equipo de profesores, las posibles actividades complementarias que se hayan realizado o estén realizándose y las acciones tendentes a conseguir el perfeccionamiento del profesorado. Cada uno de estos apartados debe evaluarse reflexionando sobre ellos y tomando aquellas decisiones que sean necesarias para conseguir esos objetivos.

Es de gran interés para el Seminario el conseguir la opinión de los alumnos. Se quiera o no, los alumnos evalúan la actuación de un profesor. Por esto es cuestión de ver cómo se puede recabar esa información para que pueda ser útil. Aparte de las posibles charlas que cada profesor mantenga por separado con sus alumnos, podrá elaborarse un test que permita obtener esa información pasándolo a todos los alumnos dependientes del Seminario. La estructura del test debe ser programada por el Seminario, pues habrá de adaptarse a sus circunstancias particulares. En cualquier caso, ha de intentar que los alumnos reflejen en él su opinión sincera sobre la metodología seguida, sobre el cumplimiento de los objetivos formativos, de organización, de instrucción, etc., de la asignatura bien globalmente, bien por cursos, por grupos, etc. Cada profesor deberá analizar minuciosamente las propuestas para su comentario en el seno del Seminario.

Se trata, pues, de una labor sencilla, de fácil ejecución y de gran valor de cara a un mejor funcionamiento del Seminario en su conjunto y una revisión de la actuación de cada profesor.

Como fechas más idóneas para recabar esa información podrían ser febrero y mayo de cada curso. La primera vez puede servir para establecer aquellas modificaciones que se desprendan del estudio del test y la segunda, como una especie de evaluación final de la labor del Seminario, vista por los alumnos. Podrían aportarse ideas interesantes para el siguiente curso.

Se inserta un modelo de encuesta a nivel orientador. Los ítems deben ser discutidos en el Seminario para adaptarlos a sus peculiaridades, como ya se ha dicho.

" El Seminario de Matemáticas pretende, a través de esta encuesta, acercarnos más a la realidad de la Asignatura para que, conocidos los posibles problemas, podamos proceder a su corrección si se estima que con ello se pueden obtener mejores resultados. Te rogamos, por tanto, que nos ayudes contestando con absoluta sinceridad a las cuestiones que se preguntan. Va en beneficio de todos.

La encuesta es anónima. Sólo te pedimos que subrayes el curso al que perteneces.

Primero Segundo Tercero COU

1.- ¿Qué te parece el sistema de trabajo que se sigue en la clase?

excelente bueno regular malo

2.- Propón ideas que lo mejoren.

.....

3.- Haz una distribución, (en minutos) de la hora de clase teniendo en cuenta los siguientes apartados y añadiendo los que te parezcan:

Preguntar teoría minutos Hacer problemas min.

Preguntar problemas ya marcados min. Repaso min.

Explicar teoría min. Otras ideas (especificalas)

.....

4.- ¿Se hacen suficientes problemas? SI.... NO....

¿Crees que aumenta tu capacidad de razonamiento? SI.... NO....

5.- ¿Es exigente el profesor? Demasiado normal poco.

6.- En cualquier caso ¿crees que su exigencia es la adecuada teniendo en cuenta el interés que se toma por las clases? SI.... NO....

7.- ¿Te estimula a trabajar? Mucho poco nada.

8.- ¿Consigue mantener tu atención?

Toda la clase.... Solo a ratos.... Me llego a aburrir....

9.- Participas en clase? SI.... NO.... Algunas veces....

10.- En caso negativo a la pregunta anterior ¿por qué?

- porque no me atrevo a preguntar por timidez

- " " " " " " " " temor a que "me plante la mosca".

- no estudio a día y no me entero de una clase para otra

- porque lo entiendo todo y no necesito preguntar

- otras razones.

11.- ¿Cuál te parece que es la mejor hora para dar la clase de Matemáticas?

1a 2a 3a 4a 5a 6a 7a

12.- ¿Sales de la clase habiendo entendido lo que se explicó? SI... NO...

13.- ¿Recibes orientaciones del profesor sobre cómo debes estudiar la asignatura? SI.... NO....

14.- ¿Estás de acuerdo con el sistema de evaluación que se sigue?
SI.... NO....

15.- En caso negativo en la pregunta anterior, emite tu opinión.

i) ASPECTOS METODOLÓGICOS

Es evidente que existe un techo perfectamente definido de conocimientos matemáticos a impartir en los Centros de enseñanza media. La información matemática que se ha de explicar a los alumnos está marcada por los cuestionarios oficiales. Como consecuencia de ello, ha de quedar claro que el papel de los Seminarios no puede estar orientado hacia la investigación matemática entendida en el sentido tradicional.

El profesorado de Matemáticas de estos Centros poseen la preparación académica suficiente para tener una visión más o menos amplia de la disciplina que explican y poder así desarrollar el cuestionario. De lo que sí adolece, en general (y no por culpa del profesorado), es de una adecuada preparación pedagógica. Se ha intentado buscar solución a este problema en los últimos años, pero por razones que no es el lugar analizar, el sistema seguido ha fallado en casi todos los casos.

Se establece como un objetivo de los Seminarios didácticos, el procurar el perfeccionamiento del profesorado y cuando se dice esto se piensa acto seguido en cursillos, asistencia a congresos, jornadas, etc. Y, en efecto, los Seminarios deben recibir de la administración información sobre este tipo de eventos ya que es indudable canal de perfeccionamiento profesional.

Sin embargo, existen canales para procurar cubrir ese objetivo que son poco explotados. El Seminario, en sus reuniones iniciales de curso y a lo largo de él, debe establecer un plan de perfeccionamiento profesional de sus componentes:

- a) dotando la biblioteca del Seminario de libros en los que se traten temas didácticos relacionados con la asignatura, que estén a disposición de los profesores y que puedan servir de base de estudio y discusión.
- b) Realizando investigaciones pedagógicas a través de experiencias que serán analizadas en profundidad por el Seminario en sus reuniones.
- c) Aprovechar las reuniones de Seminario para discutir los posibles

problemas de orden metodológico o didáctico que se puedan ir presentando en los diversos grupos. No se trata, (como ya se ha dicho), de imponer criterios o métodos.

Todo lo anterior no impide, modo alguno, que puedan existir sesiones e incluso cursillos destinados a la profundización en la Matemática en sí misma, en algún concepto o tema particular, de actualidad o que tienda a imponerse por su evidente trascendencia, (piénsese, por ejemplo, en todo lo relacionado con calculadoras y microordenadores; están ahí y el actual profesorado, en su mayoría, no ha recibido una adecuada formación en ese campo).

En resumen, El Seminario debe procurar el perfeccionamiento de sus componentes para el desarrollo de su profesión pero con planteamientos realistas y motivadores para todos. Y se entiende ese perfeccionamiento no sólo en su aspecto metodológico (que quizá sea el más importante, por ser del que más necesitado se está), sino también en un reciclaje y actualización de conocimientos.

j) PRUEBAS

En otro apartado ya se apuntaba que el Seminario debe plantearse seriamente el conseguir una evaluación continua de los alumnos, creando los medios necesarios para su consecución.

La realidad, en general, obliga en muchos casos a seguir caminos tradicionales. Uno de los problemas que aun quedan por resolver en el actual sistema educativo es el de la realización de exámenes. ¿Suprimirlos? ¿Sustituirlos por otra actividad? ¿Cuál o cuáles? Se hacen esfuerzos por dar respuesta a esas preguntas, pero lo cierto es que no parece existir una fórmula adecuada y del gusto de todos que los sustituya, todo lo más se complementa de manera que el rendimiento en el aprendizaje de un alumno no sea medido exclusivamente con ese mecanismo.

En consecuencia, el Seminario debe ser consecuente con la importancia que se le dé a los exámenes. Supuesta su aceptación deban ponerse los medios necesarios para evitar desajustes manifiestos en su preparación, realización y evaluación. Tampoco se trata de imponer al profesor la prueba concreta que debe hacer, sino de que todos se ajusten lo más posible a unas normas que hayan sido aprobadas.

Un sistema que permite uniformar el tipo de examen puede ser el de presentarlas en una reunión antes de realizarla o si ello no fuera posible, ir las archivando en el Seminario a fin de que todos puedan conocerla e irse ajustando a un tipo común.

Otra forma que es aplicada en muchos centros es la de realizar los llamados "exámenes de Seminario", consistentes en que todos los grupos de un curso son sometidos a un mismo examen a una misma hora, elaborado previamente por los componentes del Seminario. Este sistema tiene ventajas y a veces dificultades insalvables.

A veces da buen resultado el elaborar la prueba antes de empezar a impartir los contenidos. Ello hace que éstos se expliquen haciendo especial hincapié en lo que se consideran objetivos más importantes a conseguir. No es imprescindible tener elaborada la prueba concreta a realizar, sino que el Seminario puede acordar previamente el tipo de prueba y cuáles pueden ser sus posibles contenidos.

Ya se sabe la importancia del lenguaje en Matemáticas. El contenido de una pregunta de examen puede variar totalmente de idea propuesta, si una palabra o frase no se ajusta al sentido estricto que se le quería dar. De ahí la necesidad de que se cuide mucho este aspecto y si puede ser presentada la prueba en el Seminario, mejor.

Sobre los tipos concretos de pruebas a realizar, existe bibliografía al respecto y sería conveniente que el profesorado las conociera para poder aplicar a cada caso la que se considere más adecuada a los objetivos que se pretende medir.

El tratamiento de una prueba no debe acabar con su corrección. Una vez acabada esa parte, debe medirse el rendimiento obtenido en cada apartado. La experiencia, en la mayor parte de los casos, va enseñando a cada profesor cuáles son las mejores formas de preparar el texto de un examen, los problemas más significativos para saber si un objetivo ha sido cubierto, etc.

k) TECNICAS DE TRABAJO INTELECTUAL

Como es sabido, no existe ningún ente oficial que informe y oriente a los alumnos sobre las técnicas intelectuales más idóneas para realizar el trabajo de estudiar. A lo largo de sus años de estudio, cada alumno tendrá que ir aprendiéndolas por su propia cuenta, a base de ir acumulando experiencia, rectificando el método ante posibles fracasos, etc. y así y todo, no siempre se llegan a lograr técnicas adecuadas. Y esto a pesar de que este tema se apunta especialmente en las leyes vigentes.

Pero ocurre, además, que la asignatura de Matemáticas (como cualquier otra disciplina), posee unas peculiaridades por todos conocidas, que hacen que su estudio deba hacerse también de un modo especial. Cada profesor sabe que, en general, no estudió igual, es decir, con las mismas

técnicas, las Matemáticas que otras asignaturas. Su experiencia en ese terreno debería ser transmitida a sus alumnos.

Por ello, el Seminario didáctico podría programar alguna actividad complementaria que tratase de llevar a los alumnos esas orientaciones mínimas. En la forma de concretar esta actividad deben tenerse en cuenta ciertas condiciones a fin de que el fruto que se obtenga pueda ser mayor:

a) Debe discutirse previamente en reuniones de Seminario cuál o cuáles van a ser las orientaciones concretas que se vayan a dar. Es decir, unificar las ideas para evitar que se puedan proponer métodos dispares que, en lugar de orientar, desorienten.

b) Aunque no exista un método único de estudio de la Matemática en el sentido de que para un alumno puede ser una buena idea, para otro puede que resulte inútil por sus características personales.

c) Por experiencias realizadas, una precaución a tomar es la de no proceder a informar a los alumnos sobre este tema en una o varias sesiones a principios de curso. Los resultados obtenidos en experiencias realizadas no han sido satisfactorios, pues el alumno no llega a asimilar toda la información recibida. Parece más eficaz el método de ir espaciándola a lo largo de un trimestre más.

d) Existe abundante bibliografía sobre este tema tratando en general pero muy poca que se refiera exclusivamente a las Matemáticas. La labor del Seminario puede consistir en ir adecuando esas técnicas generales a esta disciplina.

1) EL LABORATORIO DE MATEMATICAS

No existe una definición clara sobre lo que es un laboratorio de Matemáticas porque suelen dársele distintas connotaciones. Para unos es una estrategia más para la enseñanza de las Matemáticas, mientras que para otros viene a ser aquel lugar en que los alumnos pueden extraer conclusiones matemáticas, tras una manipulación adecuada de material.

El Seminario de Matemáticas, podría plantearse la posibilidad de crear un laboratorio para tratar de conseguir reforzar algunos aspectos de la enseñanza. La realidad y su manipulación orientada hacia ciertos conceptos matemáticos puede lograr cubrir los objetivos de aprendizaje mejor que unos planteamientos abstractos.

Si bien en los comienzos de la enseñanza de la Matemática es imprescindible que el niño manipule mucho y que llegue a matematizar con ese método, a nivel de bachillerato, esta disciplina posee ya ciertos niveles de abstracción que dificultan aun más la posibilidad de pensar

en actividades de laboratorio para todos los contenidos que se tratan de explicar.

Cuando se habla de "Laboratorio de Matemáticas" no ha de pensarse, necesariamente, en un aula específica en la que exista un material al estilo de los laboratorios de las ciencias experimentales. El Seminario puede contar con ese material formado por equipos especiales útiles para determinados fines y utilizarlo en el lugar (clase o fuera de ella), que resulte más adecuado.

Una clara labor investigadora del Seminario puede ser la de tratar de estudiar en qué contenidos concretos sería útil contar con un refuerzo de ese tipo; ya se ha comentado que no siempre puede resultar beneficioso el montar una práctica; por esto el Seminario ha de discutir y experimentar si la encuentra adecuada.

Es una labor más a realizar a largo plazo y que puede ser constructiva y creativa tanto para los alumnos, como para los componentes del Seminario. Los alumnos pueden participar inclusive proponiendo materiales adecuados, construyendo apartados para medir ángulos aunque no sean de excesiva precisión, ideando formas de realizar las prácticas, haciendo al final un informe de las mismas que le obligaría a ordenar sus ideas, etc.

m) PARTICIPACION DE LOS ALUMNOS

Las actuales normas legales sobre el funcionamiento de los Seminarios no preveen la participación de los alumnos en los mismos. Quizá esto, como otras tantas cosas, se modifique en el futuro.

Sin embargo, sería conveniente que en las primeras reuniones del Seminario se plantease este tema y se estudiase cuáles pueden ser las formas de participación del alumnado en la labor del Seminario. En otros apartados se ha propuesto como necesaria y útil.

La integración de los alumnos puede traer consigo aspectos positivos como, por ejemplo, el aumentar su interés y motivación por la asignatura y su desarrollo, hacer más eficaces y compartidas las posibles actividades que se planifiquen, (como por ejemplo las clases de recuperación, posibles prácticas a realizar, evaluación de la programación prevista, seminarios especiales, etc.) Lo importante, pues, es delimitar claramente cuál es su rol, pues está claro que en cuestiones como la de preparación de pruebas, o elaboración de la programación no tiene cabida la participación activa de los alumnos, bien por la naturaleza de la actividad, bien por su desconocimiento de las técnicas precisas, etc.

n) LA REUNION FINAL

En todo lo escrito se ha partido de un hecho que no siempre será real: que el Seminario debe reunirse una hora una vez por semana o una hora cada dos semanas. Ya se alegaron razones por las que se considera esa necesidad.

Pero tanto si se ha seguido ese plan como si no, hay una reunión de Seminario que reviste especial trascendencia para su buen funcionamiento y es la realizada a final de curso. Es la reunión que va a analizar cuál ha sido el papel del Seminario a lo largo de los meses de actuación tras una programación que se hizo desde sus comienzos.

De esta reunión debe quedar una constancia escrita lo más explícita posible, porque será fundamental a la hora de programar el curso siguiente.

Puntos que imprescindiblemente han de ser tratados en esta reunión, son:

a) Anotar cuáles son los contenidos concretos de la programación prevista explicados y no explicados. Esto ha de hacerse curso por curso. Si, como se supone, ha existido una coordinación a través de reuniones periódicas, el programa habrá sido explicado de forma paralela y en ese caso, será fácil establecer cuáles han sido los contenidos explicados. Si ello no ha sido así, el Seminario debe ser conciente de ese hecho a la hora de planificar el curso siguiente, pues va a tener alumnos con preparación (de tipo informativo sobre todo), muy dispar con los inconvenientes que ello supone.

b) Las pruebas de los exámenes extraordinarios (libres, septiembre, etc), han de quedar preparados explícitamente.

c) Hacer un análisis de la programación inicial y ver cuáles fueron las modificaciones realizadas a lo largo del curso y por qué se realizaron. Las posibles razones pueden ser utilizadas a la hora de programar el curso siguiente, evitando así caer en los mismos fallos.

Otros posibles temas a tratar:

- papel jugado por el libro de texto utilizado o por los apuntes que se hayan podido elaborar.

- Recopilar todas las pruebas realizadas a lo largo del curso estudiando que tipo o tipos han resultado las más adecuadas en los diferentes contenidos. Estas pruebas quedarán archivadas.

- Recopilar todo tipo de material (hojas de problemas resueltos o no, material de prácticas, libros prestados, etc.) haciendo un balance sobre su efectividad con vistas a continuarlo el curso siguiente, modificarlo o suprimirlo.

- Estudiar los niveles de notas finales alcanzados por los alumnos.

- En definitiva, analizar lo más minuciosamente posible cualquier actividad escolar o complementaria que haya desarrollado el Seminario a lo largo del curso, si es que no se ha hecho antes, para proponersela o eliminarla durante el curso siguiente.

13.-BIBLIOGRAFIA

- POZO PARDO, A: "La didáctica hoy". Hijos de Santiago Rodríguez, Burgos, 1978.
- TITONE, R: "Metodología didáctica", Rialp, Madrid, 1.966
- STOKER: "Principios de didáctica moderna". Kapeluzs, Buenos Aires, 1964.
- NERICI: "Hacia una didáctica general dinámica". Kapeluzs, B. Aires, 1973.
- BEST: "Cómo investigar en educación". Morata, Madrid, 1978.
- FERNANDEZ? A. -SARRAMONA, J: "La educación. Constantes y problemática". CEAC, Barcelona, 1977.
- PIAGET, J.: "Psicología del niño". Morata, Madrid, 1975.
- TRAVERS: "Fundamentos del aprendizaje" Santillana, Madrid, 1977.
- BUGELSKY: "Psicología del aprendizaje aplicada a la enseñanza". Taller de ediciones, Madrid, 1974.
- BALBUENA, L y otros: "Técnicas de trabajo intelectual aplicadas a la Matemática". S.C.P.M. Apartado 329-La laguna-Tenerife, 1981.
- GAGNE, R: "Las condiciones del aprendizaje". Aguilar, Madrid, 1970.
- MORGAN-DEESE: "Cómo estudiar". Magisterio Español, Madrid, 1972.
- BLOOM, B.: "Taxonomía de objetivos para la educación". Marfil, Alcoy, 1971.
- POLYA, G: "Cómo plantear y resolver problemas". Ed. Trillas, Mexico, 1979.
- BIRZEA: "Hacia una didáctica por objetivos". Morata, Madrid, 1980.
- ESTARELIAS: "Introducción a las técnicas de enseñanza programada". Anaya, Salamanca, 1971.
- LEFRANC: "Las técnicas audiovisuales al servicio de la enseñanza". El Ateneo, Buenos Aires, 1969.
- NAVARRO HIGUERA-VI DORRETA: "Iniciación a las técnicas audiovisuales". Magisterio Español, Madrid, 1974.
- ROTGER AMENGUAL: "El proceso programador en la escuela". Escuela Española Madrid, 1978.
- LAFOURCADE: "Evaluación de los aprendizajes". Cincel, Madrid, 1977.
- SAWIN: "Técnicas básicas de evaluación". Magisterio Español, Madrid, 1970
- ADAMS: "Medición y Evaluación". Herder, Barcelona, 1975.
- BERNARDO CARRASCO, J. y otros: "La recuperación educativa. Problemas y soluciones". Bruño, Madrid, 1972.

- REYS, R. y POST, T.: "The Mathematics Laboratory". Prindle, Weber and Schmidt, incorporated, Boston.
- FERNANDEZ, J.M. y otros: "Seminarios didácticos en Bachillerato". Narcea, Madrid, 1981.
- VARIOS: "Seminarios didácticos en el BUP". Revista de Bachillerato, nº 6 - Madrid, 1978.
- BALBUENA, L.; GARCIA CRUZ, J.A.: "El Seminario de Matemáticas en BUP"; Boletín nº4 de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas. La laguna - Tenerife.
- TORRES TORIJA, M.: "Planteo y resolución de problemas". Ed. Trillas, Mexico, 1976.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATEMATICS: "Sugerencias para resolver problemas" Ed. Trillas, Mexico 1972.
- PIAGET Y OTROS: "La enseñanza de las Matemáticas". Ed. Aguilar, Madrid, 1971.
- CHAVEZ, F: "Matemática activa y recreativa", Ed. Trillas, Mexico, 1974
- ABLEWHITE, R.C.: "Las Matemáticas y los menos dotados". Ed. Morata, Madrid, 1971.
- THYNE, J.M.: "Principios y técnicas de examen", Ed. Anaya, Salamanca, 1978.
- CASTELNUOVO, E.: "Didáctica de la Matemática moderna". Ed. Trillas, Mexico, 1978.

REVISTAS

En español:

- "NUMEROS", Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas - Apartado 329 La Laguna - Tenerife.
- "CONCEPTOS DE MATEMATICAS", Paraguay 1949 - 62 A - Buenos Aires-Argentina.

En francés:

- BULLETIN DE A.P.M.E.P. , 37 Rue Jacob, 75000 - París - Francia.
- MATHEMATIQUES ET PEDAGOGIE, Chemin de Fontaines, 14; 7460 Casteau - Bélgica.

En italiano:

- L'EDUCAZIONE MATEMATICA, Centro Ricerca e Sperimantazione dell'Educazione matematica. Viale Merello 94 - 09100 Cagliari.
- L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA, Centro didattiche Ugo Morin, Via S. Giacomo 4, 31010 Padermo del Grappa, Italia.

En inglés:

- JOURNAL FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION; National Council of

En inglés

- JOURNAL FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION; National Council of Teachers of Mathematics 1906 Association Drive, Reston Virginia, 22091.
- MATHEMATICS TEACHING, Market Street Chambers, Nelson, Lancashire BB97LN - Inglaterra.
- TEACHING STATISTICS, University of Sheffield-Sheffield S10 2TN-Inglaterra.

Especiales para alumnos:

- LE PETIT ARCHIMEDE - Y. Roussel - 61 rue St Fuscien 80.000 Amiens - France
- MATHEMATICAL DIGEST - Department of Mathematics - University of Cape Town 7700 Rondebosch - Africa del Sur.
- MATHEMATICAL SPECTRUM, Oxford University, Oxford, Inglaterra.
- MATH JEUNES, Chemin des Fontaines, 14 bis, B. 7460 Castan - Bélgica.
- JOURNAL DE MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES, Liberia Vuibert; 63, Bd. Saint Germain; 75005 París - Francia.

NOTA: Esta lista puede ser ampliada con el Boletín nº 9 de la S.C.P.M.
- Apartado 329 - La Laguna - Tenerife.

**Acercamiento al problema
de la representación de la
tercera dimensión.**

Francisco Aznar Vallejo, Catedrático de
Dibujo del I.N.B. de Tejina, Tenerife.

Luis Balbuena Castellano, Catedrático de
Matemáticas del I.N.B. de Tejina, Tenerife.

INTRODUCCION

En el quehacer escolar se hace referencia, parece que cada vez con más frecuencia al "espacio"; así ocurre en la matemática, la física, el dibujo, la filosofía que tratan continuamente de: distancias y medidas, de lo finito y lo infinito, de cuerpos y sólidos, de masas y volúmenes.

Por ello parece sensato, pararse a pensar, desde un punto de vista didáctico, de qué manera se contempla el "espacio" en nuestro ordenamiento educativo, y si se adecua su comprensión, intuición, manipulación y representación, a las capacidades de los alumnos. Puesto que, como cualquier otro elemento conceptual, requiere un aprendizaje.

Y este parece ser el problema. Ciertamente es que un primer momento del proceso escolar, el espacio topológico, y los elementos métricos son contemplados, pero en adelante los elementos espaciales no lo son o al menos no son contemplados en forma adecuada, desde nuestro punto de vista. Queda sobreentendido; lo más que se recomienda es el desarrollo de la "Intuición Geométrica" de los alumnos. Pero tal recomendación, no contiene ninguna clarificación de en qué consiste o bien, qué se pretende llegar con ello.

Esta inadecuación de los programas, y la carencia de situaciones específicas de aprendizaje, respecto al concepto de espacio y su representación son los motores del presente trabajo, que quiere ser una modesta aproximación al problema.

Así es obvio que gran cantidad de conocimientos requieren una especial "intuición", para comprenderlos. Pero también parece obvio que habrá que tomarse el trabajo despertar, favorecer y propiciar, el desarrollo de tal intuición. Respecto a la cual, por otra parte, cuesta dar una definición, puesto que epistemólogos, matemáticos, artistas creadores, filósofos y psicólogos, le dan un significado distinto.

Unos hablan de intuición como un proceso mental que engendra una nueva idea, cuando este proceso no es accesible a la conciencia. Para otros la intuición se identifica con el dominio, la soltura y familiaridad con que se maneja un saber dado; los investigadores matemáticos suelen calificarse de más o menos intuitivos según su grado de ingenio, agilidad mental y "olfato matemático". También muchos profesores dan a la intuición el sentido de "ver sin ver", es decir, la capacidad de describir oral o gráficamente, algo que no se tiene en el campo visual, con transformaciones más o menos complicadas.

Diremos en definitiva desde nuestro punto de vista que intuición geométrica, es la capacidad de visualizar en abstrato nuevas soluciones, en el espacio, como consecuencia de datos ya conocidos.

Pensamos que esta capacidad como otras muchas es susceptible de mejorarse si se plantea una adecuada y progresiva ginnasia que comprenda la manipulación de los elementos geométricos y su representación. Esta representación entendemos también que comporta una dificultades dignas de ser analizadas.

No parece exagerado decir que sin un "convencionalismo" representativo como el que ha significado la "Perspectiva central", la tecnología y progreso científico no se hubiesen producido. La representación del espacio y los volúmenes que lo ocupan, así como las operaciones que sobre ellos pudiesemos hacer, en una superficie de dos dimensiones, nos resulta hoy un convencionalismo más de nuestra cultura, dado que sobre él se apoya todo nuestro discurrir intelectual y docente.

Sin embargo incurrimos siempre en un grave error inconsciente: dar por hecho que los niños también conocen y manipulan esta convención cultural. Nada más alejado de la realidad.

La Perspectiva central sobre la que como decimos se levanta todo nuestro actual entramado cultural, tan solo cuenta con cinco siglos de existencia, que comparados con los de nuestra Civilización Occidental no significan apenas nada.

La contribución decisiva a la creación de un código universal, nace en los albores del Renacimiento Italiano, con las investigaciones y estudios de Paolo Uccello y Piero de la Francesca, sobre las reglas de lo que se llamó "Perspectiva"; ésta vio más tarde enormemente enriquecidas sus posibilidades como lenguaje, merced a la aportación de Gaspar Monge y su teorización de la geometría descriptiva. Gracias a la imposición de las proyecciones ortogonales fue posible profundizar y divulgar de modo más claro y accesible todos los problemas de la ciencia y la tecnología llegando este lenguaje gráfico universal al desarrollo que hoy conocemos.

Sin embargo debemos tener en cuenta que este ni es ni fue siempre el modo representativo del espacio. Y sobre todo que no es un sistema de representación que surja de modo natural e innato.

Con anterioridad al Renacimiento el hombre se comunicaba y representaba sus ideas gráficamente pero sin perspectivas. Otras culturas como la China o la India también florecieron y se desarrollaron, (y aun lo hacen) sin usar exclusivamente nuestra perspectiva; así en la India se utilizan varios puntos de fuga y aun varias líneas de horizonte. Esto quiere decir que la perspectiva central no es el único modo de representar el espacio aun cuando en nuestra cultura se le haya sublimado tanto que parezca ser la única.

Esto nos permite plantear el segundo apartado de nuestra consideración. La incongruencia de una demanda representativa de modo perspectivo a los alumnos cuando ellos aun no manejan con soltura los convencionalismos que se necesitan para acceder a dicha representación, como intentaremos mostrar en el presente trabajo.

El alumno ha de ir paulatinamente, por exigencias culturales claro es, desprendiéndose de su manera de entender y representar un espacio, siempre vivencial, para ir dominando o haciendo suyo el que la cultura le pide e impone. Creemos entonces de justicia planificar, esa adquisición dominio del espacio tanto a nivel teórico como representativo.

MOTIVACION

Cuando tenemos que explicar a nuestros alumnos la geometría del espacio o cuando en alguna ocasión necesitamos hacer una representación en el espacio tridimensional en el plano, nos tropezamos con serios problemas de comprensión por parte de algún grupo de alumnos. Esto ocurre, incluso, con alumnos de COU (17-18 años). Este problema nos llevó a plantearnos qué es lo que ocurre con este tipo de representación, cuáles son los pasos que sigue, en qué momento y cómo se produce, etc.

Conocíamos las teorías piagetianas sobre este problema pero no daban una respuesta satisfactoria a nuestras preguntas. Intentamos localizar bibliografía que nos aportase datos y poco a poco pudimos ir comprobando que se trataba de un tema bastante actual, cuyo estudio se viene realizando desde hace poco tiempo.

Lo que intentamos hacer es presentar algún dato más sobre ese estudio, esperando seguir investigando, completando la bibliografía y poder llegar a establecer una teoría que se enmarcaría dentro del desarrollo epistemológico del adolescente que, como se sabe, es un amplio campo de investigación en el que existen importantes problemas por resolver.

LAS PRUEBAS

Hasta el momento hemos realizado dos pruebas y una tercera que está en periodo de ejecución por lo que no podemos presentar aun conclusiones sobre ella.

Para la primera prueba tratamos de encontrar algún sólido en forma de paralelepípedo, que fuera suficientemente conocido por los alumnos, de manera que la percepción de él estuviera aprehendida en ellos. Tras varias ideas surgió la "caja de fósforos".

La segunda prueba consiste en la descripción de algo que posteriormente los encuestados habrán de plasmar en el papel. Se procuró que fueran objetos de fácil identificación, (conviene tener presente que la prueba iba a ser pasada a chicos de 10-18 años), pero distribuimos de manera tal que no sólo tendría que tomar decisiones sobre la forma de realizar el dibujo, sino que el texto dado plantea problemas de ubicación cuya evolución también se trataría de estudiar.

Para ambas pruebas se daba un tiempo máximo de 20 minutos.

Nombre completo _ _ _ _ _
Edad: años: _ meses: _ Profesión del padre: _ _ _ _ _
Colegio: _ _ _ _ _ Curso: _ _ _ _ _
_ _ _ _ _ oo _ _ _ _ _

En un tiempo máximo de 20 minutos, realiza los siguientes ejercicios:

1.- Dibuja una caja de fósforos:

2.- Desde un camino estás viendo una casa. Detrás de ella hay un árbol; debajo del árbol está la casita del perro y delante de la casa hay un coche. Dibújalos.

MUESTRA

Conocidas la hipótesis de nuestro trabajo, pensamos que la muestra debía ser amplia tanto en el número de personas, como en sus procedencias. Como se trataba de investigar este fenómeno en edades comprendidas entre los 10 y los 18 años, elegimos una muestra en que se cubriesen esas edades en estos tres ambientes: rural, suburbano y urbano. Pero en este último, dadas las peculiaridades de nuestros centros, optamos por tomar un centro público y un centro privado con lo que son 4 tipos de centro elegidos.

De esta forma, la muestra se concretó en un total de 915 alumnos distribuidos de la siguiente manera:

Un grupo de 5º, 6º, 7º y 8º niveles de EGB de cada uno de los Colegios Nacionales de "San Bartolomé"-Tejina(rural), "San Luis Gonzaga"-Taco(suburbano), "San Fernando", Santa Cruz de Tenerife(urbano) y Colegio Hispano-inglés de S/C de Tenerife(privado). Un grupo del 1º curso de BUP cada uno de los centros:

IB de Tejina(rural), IB "Padre Anchieta"-Taco(suburbano), "Poeta Viana"-Santa Cruz de Tenerife (urbano) y Colegio Hispano-inglés(privado). Tres grupos de 2º de BUP; dos de 3º y otros dos de COU.

Es nuestra intención futura el plantear estas pruebas u otras similares entre personas adultas que no han recibido escolarización. Con ello esperamos confirmar parte de nuestras hipótesis de trabajo.

EJECUCIÓN DE PRUEBAS

Se preparó el modelo donde se recogerían las pruebas (se adjunta un ejemplar), y se pasaron a los centros y grupos señalados. No se daba al alumno ningún tipo de orientación complementaria con el fin de evitar posibles desfases a la hora de realizarla. El tiempo de ejecución de la prueba se respetó si bien, en la mayoría de los casos, fueron entregadas antes de que expirase el plazo.

DATOS SOLICITADOS

Las pruebas van encabezadas de unos datos que estimábamos orientadores y que nos permiten identificar a los autores ante posibles entrevistas a mantener con algunos de ellos o con su grupo en el futuro; la edad en años y meses con vistas a una posible clasificación ordenada y la profesión del padre por tener una aproximación a lo que puede ser el nivel cultural e intelectual que le rodea en su casa.

OBJETIVOS

Nuestro objetivo central ya ha sido establecido: tratar de aportar pruebas apoyando la teoría de que las reglas de la perspectiva central es un logro de tipo cultural y no psicogenético.

Aparte de esto, intentamos comprobar que el logro de la perspectiva central antes de la información escolar está condicionada por el posible ambiente intelectual y cultural que rodea a la persona. Estos casos corresponden a personas que han realizado un gran número de dibujos y que, en algún momento, han tenido que resolver el conflicto gráfico que se plantea con la representación de las tres dimensiones.

Como consecuencia de lo anterior, sería posible establecer cuáles son los códigos de representación previos a la perspectiva central, que no deben ser relegados sino estudiados para su sistematización.

Finalmente, en el supuesto de que ya se ha recibido la información sobre el sistema de representación convencional, tratar de probar que su acomodación (en el sentido piagetiano), no resulta evidente. Es decir, se puede conocer el código de la perspectiva central y aplicarlo correctamente a ciertos sólidos (cajas, casas, etc.) pero no saberlo aplicar a todo tipo de sólidos (coche, árbol, etc.)

ANÁLISIS DE LA MUESTRA

1.- Para el análisis de la muestra desechamos toda clase de prejuicios sobre la información escolar que hubiesen podido recibir estos alumnos, limitándonos a interpretar los dibujos que allí se presentaban.

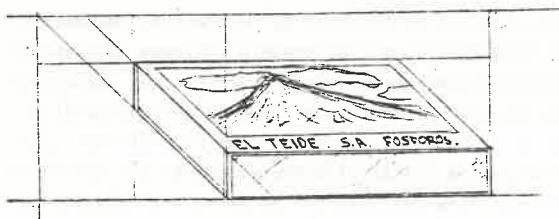
2.- Procedimos a la clasificación de los dibujos en la forma que luego describiremos, asignándole los títulos que nos parecieron más gráficos, ("bien"- entendiendo por ello la representación en perspectiva central, "cuatro caras", aquella representación en la que aparecen las cuatro caras del objeto, etc.), sin que, insistimos, ello suponga ningún tipo de juicio apriorístico.

3.- Los cuadros numéricos presentados al final, recogen los porcentajes en cada caso, separados por niveles y centros así como los porcentajes globales. En algunos casos la desviación es bien manifiesta y viene a reforzar, en la mayoría de los casos, nuestras hipótesis.

NOTA: Debajo de cada dibujo y en el texto, las edades de los alumnos se señalan con dos números: el primero es el número de años y entre paréntesis figura el número de meses así: 13(6), significa que el alumno tiene 13 años y 6 meses.

PRUEBA nº 1

- Hemos considerado como "bien" aquellos dibujos que han sido efectuados siguiendo el código de representación de la perspectiva central (Ejemplos 1,2).



Ej. 1 / 14 (4)

Este tipo de perspectiva es, en cierto modo, el núcleo de nuestra investigación y por la evolución global que presenta (Cuadro nº 1) vemos que en el primer nivel estudiado presenta una media de 20 pero una gran desviación (Cuadro nº 3) debido a los extremos tan abultados que posee. Se observa que precisamente en el centro privado existe un índice de 50. Esto denota la influencia cultural sobre esos alumnos. Analizadas las profesiones de los padres en el grupo privado y en el suburbano (el otro extremo de la distribución), se ha obtenido:

CENTRO PRIVADO	
	%
Empleados	28
Carrera universitaria	
Comercio	25
Empleados	
Carrera universitaria	18
Empleados	14
Banca	11
Obreros	3

CENTRO SUBURBANO	
	%
Obreros	29
Servicios	21
Empleados	21
En paro	19
Otros (mecánicos, cerrajeros, etc.)	10

En el 6º nivel, la media es de 29, la desviación (Cuadro nº 4) es menor pero cabría hacer el mismo tipo de consideración que en el apartado anterior.

En ninguno de estos niveles se ha explicado, de manera explícita ese tipo de representación por lo que, el que haya sido utilizada, no se debe a la información recibida en el aula.

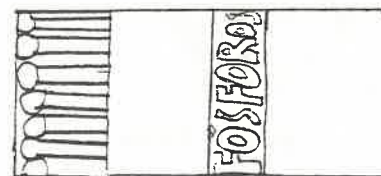
A continuación (Cuadro nº 1) hay un primer salto brusco en la media obtenida debido a que estos alumnos han recibido ya una explicación del código de representación que, no obstante, no ha sido asimilado plenamente por un considerable número de alumnos, lo que refleja inicialmente, que no es un código que se capte de forma rápida y sencilla, sino que requiere un cierto tiempo de acomodación como intentaremos

demostrar más adelante con otros argumentos.

A partir del 8º nivel hay una clara evidencia de que el código ha sido asimilado, aunque se mantiene ese desfase de índices entre los centros privado y suburbano (Cuadro nº 6).

Entre los alumnos de BUP y con la asimilación del código no es total, en términos medios (Cuadro nº 1). Hemos estudiado algunos de los casos concretos en que no se ha llegado a la asimilación total. Se trata de alumnos que presentan síntomas de retraso intelectual en comparación con sus compañeros y con las materias de estudio. Ellos admiten que la representación "buena" es la hecha por sus compañeros, pero que les cuesta cierto trabajo el ejecutarla. Afirman, no obstante, que ellos "también han dibujado una caja de fósforos, sólo que de otra forma".

- Hemos clasificado como "plana" aquellas representaciones que no presentan más que la cara superior (Ejemplos 3,4).

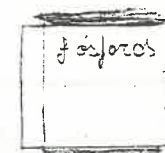
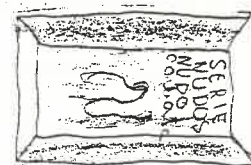


Ej. 3 / 10 (10)

Ej. 4 / 11 (2)

En la evolución de datos globales (Cuadro nº 1) se observa su casi desaparición a partir del 7º nivel, con lo cual la influencia de la información recibida parece manifiesta. No obstante, cuando hagamos el análisis de la prueba número dos, volveremos sobre este hecho porque del análisis de esta prueba se desprende que esto no es tan concluyente.

- La representación "con 4 caras" engloba a todos aquellos dibujos que insertan la cara superior y las cuatro laterales (Ejemplos 5,6).



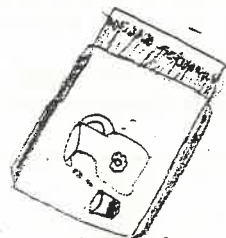
Ej. 5 / 11 (1)

Ej. 6 / 11 (6)

Este tipo de representación requiere un análisis detallado (junto con el de "dos caras" que luego se verá), porque como se deduce del cuadro nº 1, contiene un número alto de manifestaciones. El análisis del desarrollo histórico de la representación nos ha hecho reflexionar sobre este tipo concreto, porque parece ser la representación previa a la que, culturalmente, se estima como buena. Si la de "dos caras" (Ejemplos 7,8) la consideramos como un caso particular de la de "cuatro caras", se observa que en los niveles 5º y 6º acaparan casi la mitad de las representaciones y que en el 7º ocupan lo que podría ser el residuo de alumnos que no han llegado a asimilar el código formal.



Ej. 7 / 15

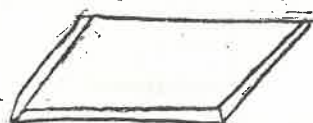


Ej. 8 / 9 (10)

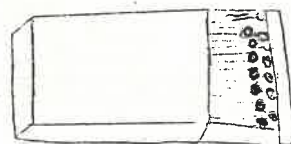
Es evidente que el niño trata de dibujar la caja de fósforos de la forma que le parece más realista. El sabe que esas cinco caras están a su vista sin más que darle vueltas a la caja y, a falta de un código mejor, lo hace así. Creemos, en consecuencia, que se corre un grave riesgo y se peca de arbitrariedad cuando un profesor intente juzgar esos dibujos desde su madurez gráfica, pues quizá trate de someterlo a un proceso al que el niño aun no ha llegado y que además no es genético.

Este es un indudable tema a analizar en profundidad pues quizá pudiera establecerse una graduación de representación del espacio.

- La representación con "3 cara" agrupa aquellas en las que se observa la cara superior y tres de las laterales. Es un código que estimamos realista toda vez que en casi todos los casos es la "cara de atrás" la que no se ha dibujado. (Ejemplos 9,10).

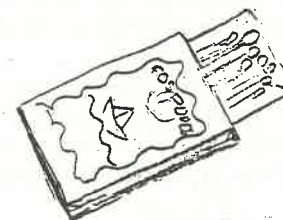


Ej. 9 / 15 (9)

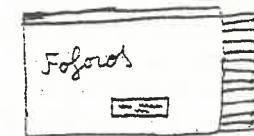


Ej. 10 / 10 (9)

La representación con "1 cara" corresponde a los dibujos en los que aparece la cara superior y una de las laterales (de las más largas en la mayor parte de los casos) (Ejemplos 11,12).



Ej. 11 / 10 (9)



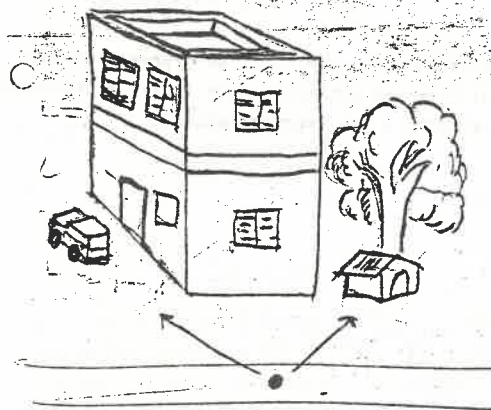
Ej. 12 / 11 (-)

Dados los bajos porcentajes observados en estos dos tipos de representación hemos decidido dejar su análisis minucioso para más adelante, para tratar de estudiar los condicionantes que han llegado a los alumnos a esa representación.

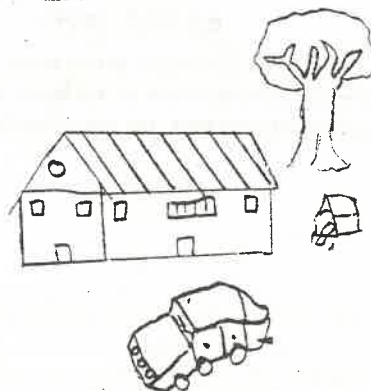
PRUEBA Nº 2 Y SU COMPARACION CON LA Nº 1

Esta segunda prueba fue planificada con un doble objetivo: por un lado tratáramos de comprobar si el esquema seguido para representar la caja de fósforos se aplica a los objetos de esta prueba y por otro, estudiar la evolución de la representación de figuras situadas en profundidad.

La simple observación del cuadro nº 2, (que ahora explicaremos) confirma nuestra hipótesis de trabajo. Entendemos por "bien" aquellos dibujos en los que la casa, la casa del perro y el coche han sido realizados siguiendo las normas de la perspectiva central que había sido utilizada para dibujar la caja de fósforos (Ejemplos 13, 14).



EJ. 13 / 15(4)



EJ. 14 / 12(2)

Algunos alumnos prefirieron otro tipo de perspectiva (la aérea, por ejemplo), que también hemos incluido en este colectivo (Ejemplo 15).

Pues bien, se observa que, en ningún caso, ni siquiera en edades avanzadas, se llega a un 25% de realizaciones correctas según lo dicho. Ello indica que el código aprendido presenta dificultades, (posiblemente gráficas -es un tema a profundizar), para ser trasladado a objetos cualesquiera. Esto, como se ha dicho, confirma nuestra hipótesis de la dificultad de acomodación del esquema conocido, en lo que insistiremos a continuación.

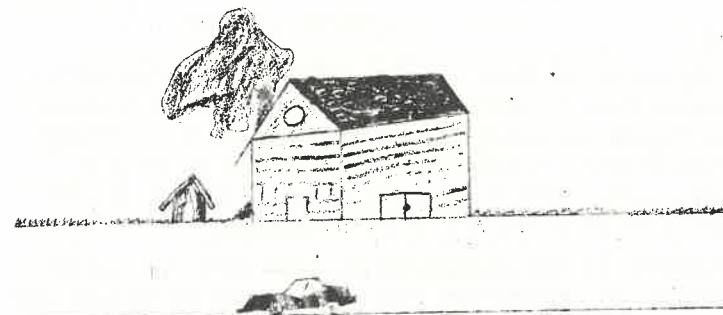
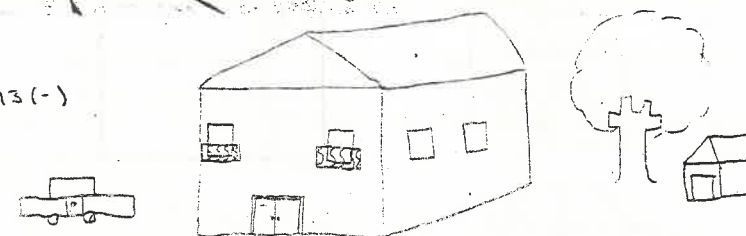
Hay casos, ciertamente reveladores y concluyentes. Así, por ejemplo, en los niveles 8º EGB y 1º BUP del centro privado, se realiza la prueba nº 1 "bien" en un 100% de los casos y sin embargo la prueba nº 2 sólo alcanza el "bien" en un 23% y 6% respectivamente (lo cual significa un retroceso).

- Por "casa bien, lo demás mal" entendemos todos aquellos casos en los que la casa ha sido hecha siguiendo el código, mientras que en los otros objetos no se sigue. (Ejemplos 16, 17). Insistimos en la idea ya expuesta. La casa es un objeto en el que



EJ. 15 / 13(8)

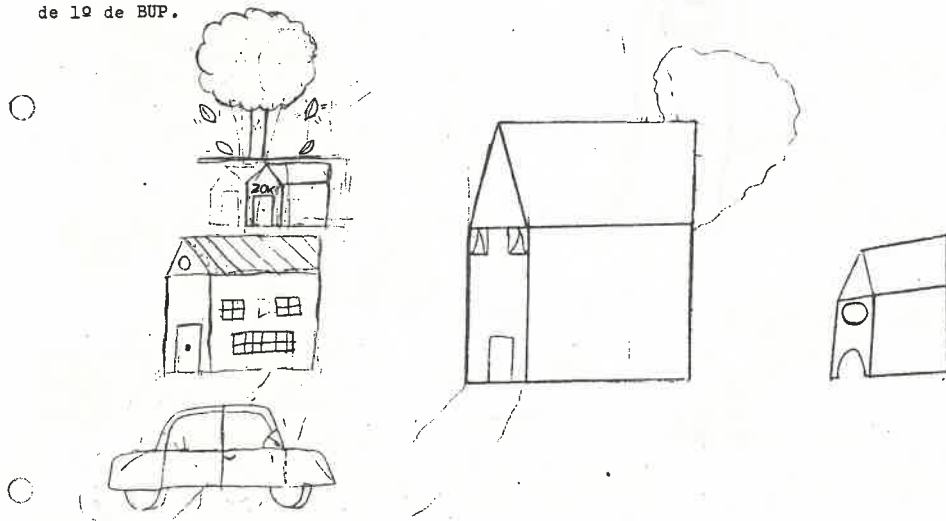
EJ. 16 / 13(-)



EJ. 17 / 11(10)

la aplicación del código de perspectiva central no presenta dificultad porque es, prácticamente, un traslado del sistema: Apuntamos también la hipótesis de que se trata de un objeto que viene siendo dibujado por el alumno desde sus primeros grafismos. Ello puede haberle conferido cierta facilidad y familiaridad en su construcción mediante el dibujo. Sin embargo, aun admitiendo esa hipótesis como válida, no se llega a superar el 75% de casa bien realizada en ninguno de los niveles.

- Hemos reunido en "volumen enmascarado" todas aquellas representaciones que, como muestran los ejemplos 18, 19, dibujan vertical la línea de fondo de las casas. Esta representación, incorrecta desde el punto de vista de la perspectiva central, se mantiene en todos los niveles encuestados si bien deja de ser significativa a partir de 19 de BUP.



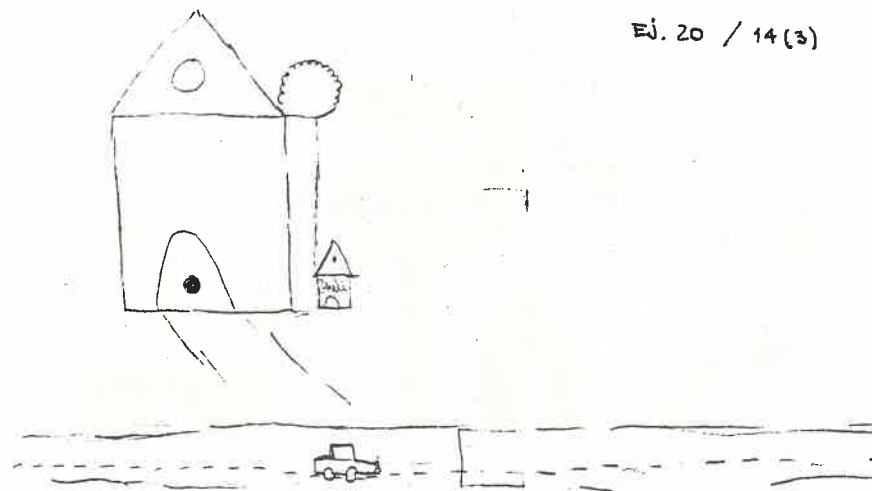
Ej. 18 / 10 (5)

Pero hay que hacer constar que cuando aun no se conoce la perspectiva central, este tipo de representación ocupa un lugar destacado en cuanto al número de alumnos que la utilizan. Es un problema que también requiere un estudio con mayor profundidad, puesto que podríamos aventurar la hipótesis de que también es un código de representación anterior a aquél, dentro de un posible escala que graduase el nivel cultural (¿intelectual?) a través de este tipo de representaciones.

- Otro tipo de representación que tampoco desaparece en ningún nivel es el que hemos denominado "plano". (Ejemplo 20). Curiosamente ocupa cifras significativas y con poca desviación, como se observa en el cuadro nº 2. Este hecho es importante si se tiene en cuenta que en la prueba primera el dibujo plano desaparece significativamente desde el 7º nivel.

Ej. 19 / 13 (8)

Ej. 20 / 14 (3)



Redundando siempre en nuestra hipótesis, esta representación puede estar motivada por:

- una falta total de asimilación del esquema de la representación en perspectiva central, pese a que ha sido informado sobre ella.
- No haber sido obligado a ejercitar el dibujo, lo que le ha llevado a realizarlo siguiendo esquemas "infantiles", como muestran esos ejemplos del 21 al 24 de alumnos de 10, 10(4) 18(6) y 19(2) años.

Finalmente, nos parece interesante el señalar que la estructura de distribución de los elementos que se piden en esta prueba, presentan dos tipos que toman cifras significativas y que pueden ser objeto de estudio en una investigación posterior.

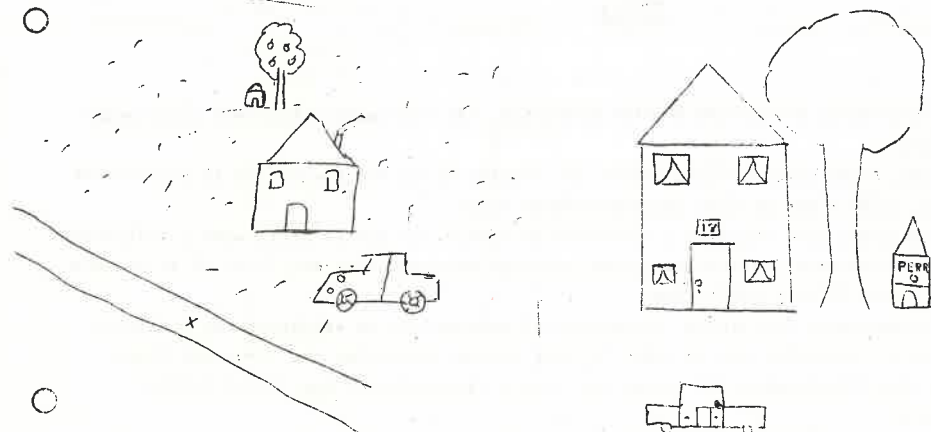
Se trata de lo que hemos llamado "en tren" y "en escalera".

El primero consiste en dibujar esos cuatro elementos uno tras otro siguiendo una línea horizontal como muestran los ejemplos 25, 26 y 27. Esto no cabe duda que está en relación con el dominio de la perspectiva en el sentido de que se requiere un conocimiento del dibujo de la profundidad en un papel, para poder situarlos debidamente.

En cuanto al otro, los elementos son situados siguiendo un eje vertical, (Ejemplo 28). Aquí las cifras son menos significativas que en el caso anterior, pero entendemos que supone un mayor acercamiento a ese dibujo de la profundidad de que hablamos. De hecho, es una estructura cuyos "adeptos" aumenta.

El resto de las representaciones no mantienen de forma tan exagerada ninguna de esas dos estructuras, aunque podría establecerse unas escalas de aproximación. Pero esto queda fuera de nuestro objetivo.

Ej. 21 / 10 (-)

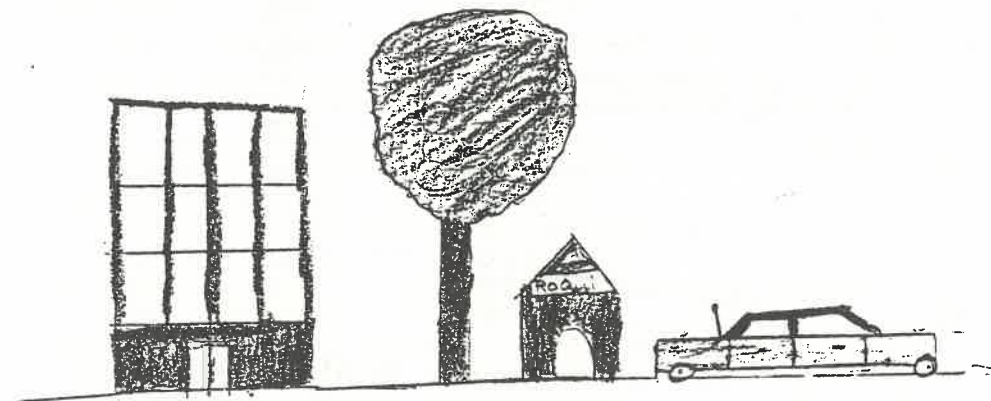


Ej. 22 / 18 (6)

2.- Desde un camino estás viendo una casa. Detrás de ella hay un árbol; debajo del árbol está la casita del perro y delante de la casa hay un coche. Dibújalos.

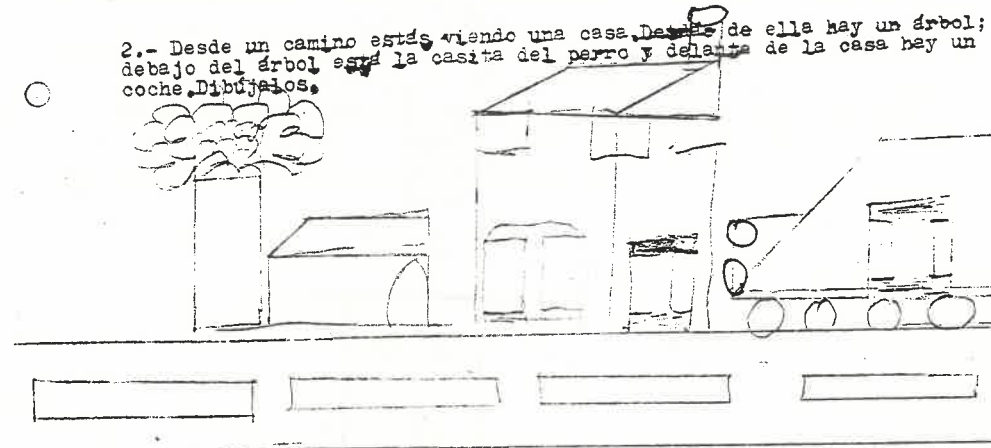


Ej. 24 / 19 (2)

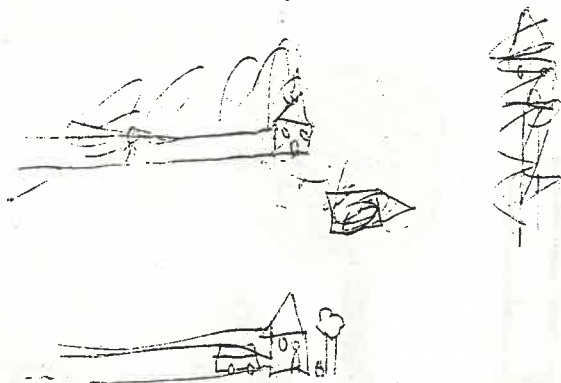


Ej. 25 / 11 (11)

2.- Desde un camino estás viendo una casa. Detrás de ella hay un árbol; debajo del árbol está la casita del perro y delante de la casa hay un coche. Dibújalos.



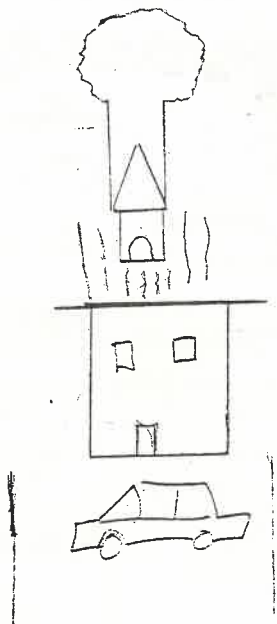
Ej. 26 / 13 (11)



Ej. 27 / 15(6)

Insistimos en las ideas de que sólo pretendemos una aportación más a la línea de investigación señalada al principio, que seguiremos investigando sobre ello con la ejecución de más pruebas que hagan más concluyente nuestras hipótesis y que, posiblemente, nos permitan descubrir nuevos campos en este terreno prácticamente virgen.

Las pruebas analizadas nos permitirían aventurar más hipótesis pero éstas han de ser antes investigadas con otros tests, entrevistas, etc.



Ej. 28 / 14(8)

CONCLUSIONES

Tal vez será conveniente, para emitir las conclusiones, volver al punto de partida. Así intentamos aportar pruebas que concluyesen que la "aprehensión" de un modo de representación tridimensional, siguiendo el código de la "Perspectiva Central", está en la línea que apoya la idea de que se trata de un fenómeno de tipo estrictamente cultural, idea que compartimos. Pero vamos más allá: antes de alcanzar este formalismo, el individuo transita por etapas previas en las que para representar el espacio utiliza otros convencionalismos, los cuales en principio no son menos válidos que aquél. Consecuentemente el tránsito de unos a otro, no es sólo cuestión de desarrollo intelectual, sino que, junto a aquél se requiere un conocimiento y ejercitación en el código que dicho convencionalismo cultural entraña. Hoy por hoy, esta ejercitación y dominio progresivo, no lo encontramos reflejado, en nuestro ordenamiento educativo. Para ello se necesitaría una manipulación física y mental del espacio que no se contempla.

No está suficientemente estudiado cuál es camino natural, (si es que existe), de representación del espacio, ni establecidos los códigos de representación previos a la perspectiva central. Por esta razón, y desde el punto de vista didáctico, el profesor debe ser consciente de este hecho, pues su desconocimiento puede frustrar la capacidad de expresión de sus alumnos a través del dibujo, al amonestar o considerar erróneos códigos cuya validez individual es total, pero que no son aceptados ya (o aun?) culturalmente.

Es un tema que requiere profundizarse más para la adecuación de los futuros contenidos de los programas fundamentalmente de Matemáticas y Formación estética. En este aspecto ha de procurarse una coordinación para evitar desfases peligrosos.

Entendamos que las pruebas aquí analizadas, dan un motivo suficiente para llegar a dichas conclusiones, al menos en función de la nuestra. A la que, por otro lado entendemos con un alto grado de significación.

BIBLIOGRAFIA

- "La estética de la India y China".
Jeannine Auboyer/El arte y el hombre
- "La epistemología del espacio"
Jean Piaget y otros/Ed. Ateneo - Buenos Aires
- "Percepción"
Ronald H. Forgua/Ed. Trillas Mexico
- PAEZ SANCHEZ, L : "El grafismo como índice del grado de desarrollo de la
representación mental del espacio" - Univ. Central-Caracas.
- Smock, Charles D.: "Piaget's thinking about the development of space concepts
and geometry", Univ. Georgia-USA.
- Lesh R, Mierkiewicz D.: "Perception, imagery and conception in geometry"
Northwestern Univ.-USA.

EVOLUCION DE LOS GLOBALES

Cuadro nº 1

Prueba
nº 1

	Bien	Plana	4 caras	3 caras	2 caras	1 cara
5º	20	21	23	10	18	7
6º	29	9	20	11	20	10
7º	48	10	2	7	21	6
8º	77	2	5	4	6	3
1º	84	1	2	4	5	4
2º	98	1	* 1			
3º	97					
COU	96					

EVOLUCION DE LOS GLOBALES

Cuadro nº 2

Prueba
nº 2

	Bien	CASA BIEN DEMAS MAL	DOS CASAS BIEN	VOLUMEN ENMASSORADO	Plano	En tren	En escalera
5º		29		41	29	56	14
6º	5	25	12	22	36	57	18
7º	5	40	11	18	25	36	17
8º	11	34	21	17	17	26	23
BUP 1º	13	30	22	11	13	20	10
2º	18	33	20	4	25	8	5
3º	24	17	26	6	26		
COU	14	37	16	8	24		

50 NIVEL
(EGB)

Prueba
nº 1

Cuadro nº 3

Colegio	Bien	Plano	4 caras	3 caras	2 caras	1 cara
Rural	7	22	33	11	15	11
Suburbano	2	27	30	7	24	9
Urbano	24	18	18	8	24	10
Privado	50	13	10	16	10	
Globales	20	21	23	10	18	7

Prueba
nº 2

Colegio	CASA BIEN LO DEMAS MAL	VOLUMEN ENMASCARADO	Plano	En tren	En escalera
R	33	30	37	70	7
S	24	35	38	41	26
U	31	55	14	48	14
P	29	45	26	64	10
Globales	29	41	29	56	14

60 NIVEL
(EGB)

Prueba
nº 1

Cuadro nº 4

Colegio	Bien	Plano	4 caras	3 caras	2 caras	1 cara
RR	22		35	13	13	16
SS	14	7	14	24	38	3
U	34	14	24	3	14	10
P	46	14	8	3	17	11
Globales	29	9	20	11	20	10

Prueba
nº 2

	CASA BIEN LO DEMAS MAL	DOS CASAS BIEN COCHE NO	VOLUMEN ENMASCARADO	Plano	Bien	En tren	En escalera
R	27	10	20	40	3	60	33
S	27		47	27		76	9
U	29	16	13	35	6	48	19
P	19	22	9	41	10	44	12
G:	25	12	22	36	5	57	18

70 NIVEL
(EGB)

Prueba
nº 1

Cuadro nº 5

Colegio	Bien	Plano	4 caras	3 caras	2 caras	1 cara
R	64		3	3	14	3
S	50	13	2	18	24	
U	30	9		6	30	12
P	50	9	3		15	9
Globales	48	10	2	7	21	6

Prueba
nº 2

	CASA BIEN LO DEMAS MAL	DOS CASAS BIEN COCHE NO	VOLUMEN ENMASCARADO	Plano	Bien	En tren	En escalera
R	61	15	11	19		31	19
S	47		22	30		28	28
U	42	12	22	16	6	56	14
P	9	19	19	34	12	28	6
G:	40	11	18	25	5	36	17

80 NIVEL
(EGB)

Prueba
nº 1

Cuadro nº 6

Colegio	Bien	Plano	4 caras	3 caras	2 caras	1 cara
R	73		11	8	8	
S	57	6	6	10	12	6
U	78	3	3		3	6
P	100					
Globales	77	2	5	4	6	3

Prueba
nº 2

	CASA BIEN LO DEMAS MAL	DOS CASAS BIEN COCHE NO	VOLUMEN ENMASCARADO	Plano	Bien	En tren	En escalera
R	41	18	18	18	5	41	15
S	33	24	30	12		36	48
U	37	18	15	15	15	11	22
P	27	23	4	23	23	15	7
G:	34	21	17	17	11	26	23

12 BUP

Cuadro nº 7

Centro	Bien	Plana	4 caras	3 caras	2 caras	1 cara
R	91	3		3	3	
S	68	3	5	5	13	5
U	76		3	6	6	9
P	100					
Globales	84	1	2	4	5	4

Prueba
nº 1Prueba
nº 2

	CASA BIEN LO DEMÁS MAL	DOS CASAS BIEN	VOLUMEN ENMASCARADO	Plano	Bien	En tren	En escalera
R	42	19	6	22	16	3	6
S	30	16	24	16	13	39	24
U	21	27	3	30	18	24	12
P	26	26	13	35	6	15	
G:	30	22	11	26	13	20	10

22 BUP

Cuadro nº 8

Centro	Bien	Plana	4 caras	3 caras	2 caras	1 cara
R	93	3	4			
S						
U	100					
P	100					
Globales	98	1	1			

Prueba
nº 1Prueba
nº 2

	CASA BIEN LO DEMÁS MAL	DOS CASAS BIEN	VOLUMEN ENMASCARADO	Plano	Bien	En tren	En escalera
R	29	18	3	29	26	3	
S							
U	43	18	2	23	13	5	8
P	28	24	8	24	16	16	8
G:	33	20	4	25	18	8	5

32 BUP

Cuadro nº 9

Centro	Bien	Plana	1 cara
Rural	100		
Urbano	94	3	3
Privado	97	1	1

Prueba
nº 1Prueba
nº 2

Centro	Una casa bien lo demás mal	2 casas bien	Volumen enmascarado	Plano	Bien	En tren	En escalera
R	15	30	7	22	26		
U	19	22	5	32	22		
P	17	26	6	26	24		

COU

Cuadro nº 10

Centro	Bien	3 caras	2 caras	1 cara
R	100			
U	92	2	2	2
P	96	1	1	1

Prueba
nº 1Prueba
nº 2

Centro	1 cara bien	2 caras bien	Volumen enmascarado	Plano	Bien
R	36	19	8	16	19
U	38	12	9	32	9
P	37	16	8	24	14

EL POR QUE DEL FRACASO DISCENTE EN LA MATEMATICA: UN METODO DE
DIAGNOSTICO

M. Inmaculada BORDAS ALSINA

Universidad de Barcelona

Dpto.: Metodología y Tecnología
Educativa.

II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS
PONENCIA, n.60

EL POR QUE DEL FRACASO DISCENTE EN LA MATEMATICA: UN METODO DE DIAGNOSTICO

M.I. BORDAS

Universidad de Barcelona

Departamento de Metodología y Tecnología Educativa.

La Matemática es una materia extensa en la cual los problemas de fondo vienen a barajarse con las variadas técnicas de enseñanza y aprendizaje. La Aritmética, la Geometría, la generalización Algebraica, están en la base del saber humano y es, por ello, fundamental en la enseñanza básica. Pensadores como Pitágoras al decir que "...los números gobiernan el Mundo...", o las palabras de Kant "... las ciencias Matemáticas son un ejemplo de cómo la razón puede ensanchar sus dominios sin auxilio de la experiencia...", o del mismo Pestalozzi, cuando escribe "...pareció darme una buena luz sobre lo que buscaba el pensamiento de que todo nuestro conocimiento procede del número, la forma y la palabra..." son ratificaciones de su relevante importancia.

El valor y la fundamentalidad de esta materia ha dado origen a numerosos trabajos acerca de su aprendizaje y resultados.

El fracaso del escolar en la Matemática: necesidad de instrumentos de diagnóstico.

Muchos profesores presenciamos fracasos en el aprendizaje de las Matemáticas; nuestra labor, cuya efectividad se ve reflejada en lo asimilado por cada uno de nuestros alumnos, no es plenamente satisfactoria: evidenciamos "aprendizajes erróneos" "no aprendizajes". Por otra parte, en determinados escolares, y como consecuencia de estas deficiencias, detectamos falta de

interés por la materia, desgana por el trabajo, poca voluntad, inseguridad, e incluso repulsión por el estudio de la Matemática. En suma, presenciamos el sentimiento de fracaso del alumno ante esta área del saber.

Uno de los factores más importantes y que más influyen en este sentimiento de fracaso, es el de deficiencias de asimilación y "lagunas" en determinados ámbitos de conocimiento. Muchas veces los conceptos y elementos básicos, no están bien cimentados, y ello repercute en el discente, en etapas posteriores. Es necesario pues, detectar con exactitud la subárea en que se producen estos hechos, el nivel de aprendizaje, su causalidad; en suma, precisamos efectuar una diagnosis instruccional concreta, con instrumentos válidos que indiquen el nivel de conocimientos instructivos del escolar, para proceder a una corrección didáctica y poder normalizar la situación de cada alumno.

Las pruebas de diagnóstico.

Los tests diagnóstico estandarizados "son el resultado del estudio sistemático de las dificultades que los escolares encuentran en los procesos de aprendizaje y de la evolución de los métodos objetivos para su detección y para la estimación de su severidad" (Brueckner-Bond)*.

Estas pruebas son una gran ayuda para el profesor; a través de ellas, el enseñante puede:

1. Constatar capacidades, características y niveles de conocimiento.
2. Ofrecer la causalidad de los hechos.
3. Facilitar la orientación del educando.
4. Puede dar lugar a cambios de ritmo de proceso, de metodologías en el trabajo del docente.
5. Permiten valorar, reafirmar y modificar positivamente todas las técnicas didácticas.

(*) BRUECKNER, J.-BOND, L.: Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje. Rialp. Madrid, 1971. P.: 13.

6. Son base de la orientación vital de los alumnos y de las familias.

Estos tests, clasificados entre los métodos diagnóstico, en la vertiente cuantitativa de los sistemas típicamente experimentales (J.Fernandez Huerta)*, se caracterizan por:

- El contenido, que es seleccionado y ordenado sistemáticamente, de acuerdo con unas normas específicas.
- Los condicionantes bajo los que son aplicados (instrucciones para el examinando y el examinador, factor tiempo,...) están estandarizados con el fin de que haya uniformidad en cuanto a su administración.
- El método de valoración cuantitativa o puntuación es definida "a priori", quedando eliminado el juicio personal del corrector.
- La sistemática en la puntuación debe estar organizada de tal manera que, de forma inmediata, se obtengan valores y calificaciones por medio de los cuales se localicen las zonas donde se precisa de una educación instruccional adicional, o bien dónde los métodos de enseñanza deben ser alterados.

Entre los trabajos realizados hasta el momento, podemos citar "El Test de Análisis de Problemas" de P.R. Stevenson (elaborado para suministrar al maestro un medio de diagnosticar las dificultades encontradas por el alumno en la lectura y análisis de problemas); el test "Inventarios de Aritmética de Wisconsin" de Worth J.Cabun; el "Compass Diagnostic Test in Arithmetic" de G.M.Rug y F.B.Knight (es una de las mayores baterías diagnóstico de matemáticas); el "Test Diagnóstico de Procesos Fundamentales en Aritmética" de G.T.Buswell y L.John; Los "Tests Diagnóstico" de Brueckner para los cursos de 3º a 8º; los "Tests de Aritmética" de J.Fernandez Huerta; el "Test Diagnóstico S.M.D." de M.I.Bordas. Todos estos tests, consideran un aspecto, una subarea del

(*). FERNANDEZ HUERTA, J.: "Bases de la enseñanza correctiva en aritmética" Bordón. Tomo V, n.35. Marzo 1953, p.257.

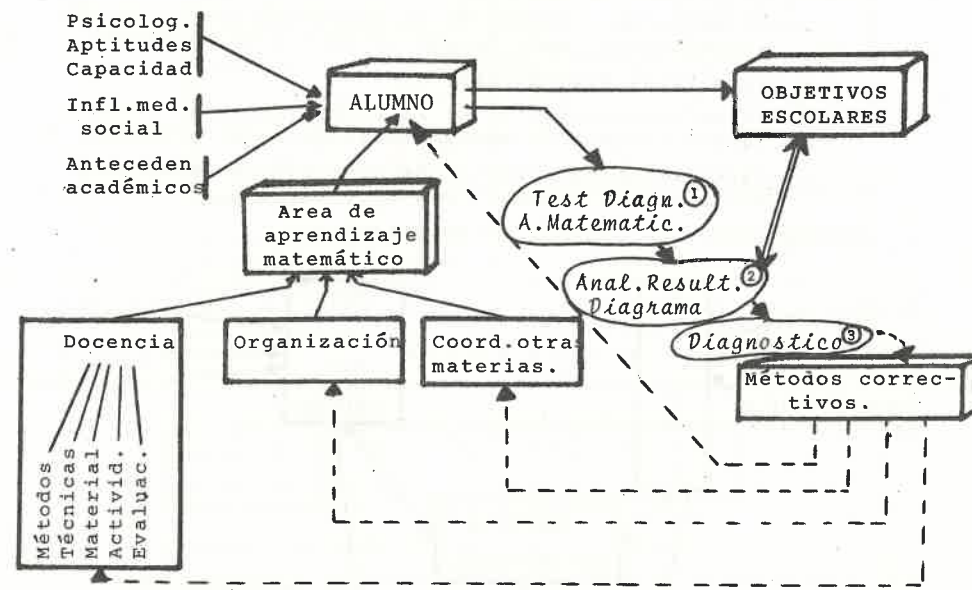
ámbito matemático.

Un método de diagnóstico en el área Matemática.

Un nuevo proceso diagnóstico, producto de un trabajo realizado en estos últimos años, y dirigido a los cinco primeros cursos de la Enseñanza Básica, es lo que aquí presentamos. Su finalidad, es como dice Anderson y Faust* "el de descubrir e identificar las razones de las anomalías del aprendizaje de los alumnos" en cada una de las subareas de Matemáticas, pudiéndose detectar:

- Nivel de superación de los objetivos de curso en relación a los aspectos "conceptualización", "habilidad mecánica" y "razonamiento".
- Existencia de deficiencias en metodología y técnicas docentes.
- Presencia de aspectos negativos en la organización de la disciplina.

Graficamente, el proceso es:



(*). ANDERSON - FAUST.: Psicología Educativa. Trillas. México, 1977. P. 196.

En resumen, invita a efectuar reestructuraciones que afectan al niño, a la clase, con el lógico perfeccionamiento de métodos, técnicas, material, actividades y organización.

En el gráfico expuesto, vemos reflejados tres elementos clave: 1.-El Test Diagnóstico del área de Matemáticas; 2.-El Diagrama; y, 3.-El diagnóstico. Los dos primeros necesitan de un material elaborado; el tercero, se realiza, de manera rápida, a partir del Diagrama.

1.-El Test Diagnóstico de Matemáticas.

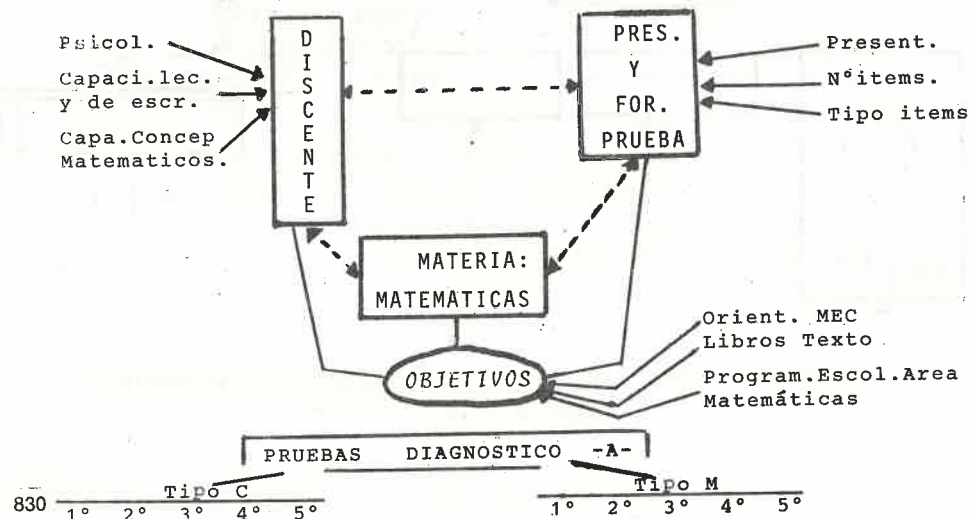
Los diversos tests diagnóstico, son producto de un amplio estudio, que abarca dos fases:

1.A.-Construcción de las pruebas o tests.

En la elaboración hemos tenido presente:

- Los niveles instruccionales en los diversos cursos. Su determinación ha sido realizada a partir de las Orientaciones dadas por el Ministerio de Educación y Ciencia (1970), los libros de texto de Matemáticas y las programaciones de esta área de una muestra = de 25 centros escolares.
- El discente: estudio de su psicología, capacitación matemática, y capacitación lectora y de escritura.
- La materia: Matemáticas.
- Forma y presentación de la prueba (tipos de ítems, número, sistema de agrupación, ejercicios previos, ...)
- Características propias de este tipo de pruebas, y que han sido citadas con anterioridad.

Esquemáticamente, podemos representarlo:



1.B.-El proceso experimental.

La estandarización de las pruebas se ha realizado a lo largo del estudio experimental, el cual se desglosa en dos partes:

a.-La pre-experimentación.

La muestra sujeto de estudio, agrupa a 460 escolares que realizan los cinco primeros cursos de EGB. Esta muestra fue estudiada "a priori" respecto a:

- Contenidos matemáticos aprendidos (inclusión o exclusión de matemática moderna en el programa).
- Condicionantes del alumno (medio ambiente familiar, realización o no, de enseñanza pre-escolar, coeficiente intelectual).

Administradas las diez pruebas-pruebas A-, se corrigieron y fueron tabulados los datos. Efectuados los estudios estadísticos correspondientes, esencialmente, obtenemos:

- Las pruebas dan valores de posición medio-elevadas (\bar{X} , Me. Mo.).
- Las distribuciones resultantes de los diez grupos, dan puntuaciones que se agrupan dentro de los límites de normalidad.
- Los índices de fiabilidad son elevados: oscilan entre 0'92 y 0'82 (Método HOYT).

Curso	Nº Items	Pruebas C		Pruebas M	
		r _{tt}	r _{nn}	r _{tt}	r _{nn}
1°	30	0'77	0'87	0'71	0'83
2°	40	0'76	0'83	0'75	0'82
3°	50	0'91	0'92	0'91	0'92
4°	60	0'89	----	0'91	----
5°	60	0'92	----	0'90	----

- Los tests discriminan al nivel 0'01 a los sujetos.
- Los tests discriminan a los elementos al nivel 0'1.
- Los índices de correlación obtenidos entre los resultados de las pruebas y la evaluación escolar en el área de matemáticas, ha sido respectivamente,

	curso				
	1°	2°	3°	4°	5°
Prueb.-C-	0'89	0'85	0'89	0'90	0'83
Prueb.-M-	0'86	0'78	0'86	0'85	0'87

Respecto al análisis puntual de cada ítem:

- Presentan, los ítems, diversos índices de dificultad (Lindeman).
- Algunos de los reactivos, manifiestan un bajo nivel de discriminación. Estudiadas las causas, se ha considerado que, de los 480 ítems, 37 deben ser rectificados.

b.-La experimentación.

Las nuevas pruebas -pruebas -B-, son realizadas por unas muestra estratificada, formada por 4886 alumnos. Efectuada la corrección, son rechazadas 334 por diversas causas (pruebas incompletas, datos no cumplimentados, deficiencia mental del sujeto,...). Por consiguiente, el estudio se apoya en 4552 casos.

Todos los datos obtenidos y respecto a cada uno de los alumnos, quedan contabilizados en un documento, el cual es reflejo del conjunto de variables que se manejan, y que en una etapa posterior, serán codificados.

De nuevo, y respecto a tres variables (inteligencia, evaluación global de curso y puntuación alcanzada en las pruebas), se hace una estimación del tamaño de la muestra, siguiendo las directrices de W.G. Cochran*. La muestra, ahora, queda configurada por 3198 individuos, habiendo sido escogidas las pruebas de forma aleatoria y estratificada.

Análisis de las pruebas: resultados.

Los diferentes tests se estudian en forma global y en sus componentes o ítems.

-Análisis descriptivo:

Obtenidos los correspondientes estadísticos, puede indicarse

- Las puntuaciones alcanzadas por los alumnos de las diferentes muestras, correspondientes a las distintas pruebas, oscilan entre los valores máximos y mínimos.
- Las medias de las puntuaciones son ligeramente elevadas; a su vez se presentan como valores muy estables (intervalos de confianza de poca amplitud al nivel 1%), lo cual indica un mínimo nivel de errores.
- El valor de la mediana evidencia una mayor oscilación en el 50% inferior de puntuaciones que en el 50% superior, de lo que se deduce que las pruebas diagnósticas tienden a diferenciar más a los alumnos que, en su aprendizaje matemático, presentan mayor número de deficiencias.
- La dispersión de los datos, está dentro de los límites de normalidad, en las distintas pruebas de estudio. El "error estándar" de este estadístico es sumamente bajo.
- Los resultados de los tests de las diferentes distribuciones se proyectan con una ligera asimetría aunque se hallan dentro del ámbito "normalidad" (Kolmogorov).

-La validez:

Son pruebas plenamente positivas en este sentido.

- En cuanto a su contenido porque representan fielmente los objetivos de una secuencia didáctica dada y reflejan en el orden jerárquico a tales objetivos.
- Respecto a la validez de construcción porque son capaces de medir y diagnosticar el rendimiento general del individuo a la vez que indican el origen de posibles deficiencias. Los ítems, ofrecen alta calidad y un equilibrio

(*) COCHRAN, W.G.: Técnicas de muestreo. Compañía Editora Continental. México, 1971. Pág.: 111.

veles didácticos. La confluencia de estas dos variables, muestran los distintos ítems de la prueba, que a su vez corresponden a objetivos determinados del curso.

niveles didácticos	(a)	subáreas de contenido				
		A	B	C	L	G
	conceptualización		~	~		~
	(b) habilidad mecánica	~	~		~	~
	(c) razonamiento		~	~		

Realizado el test por el alumno, anotaremos en el diagrama, los ítems omitidos, mal resueltos -recordemos que Rae* al hablarnos sobre el diagnóstico, dice "lo que sin embargo se olvida a menudo es que las respuestas erróneas, tienen tanta importancia para el profesor como las correctas".* El profesor, a partir de ello, englobará en diversas áreas o "nubes de ítems", el conjunto que comprende sólo los reactivos contestados correctamente -nube N_1 -, el conjunto donde se hallan simultáneamente los contestados bien, mal y omitidos -nube N_2 -, y el conjunto donde se encuentran solamente ítems mal contestados u omitidos -nube N_3 -. La recuperación del alumno se realizará en las subáreas y niveles didácticos correspondientes a N_2 y N_3 . Por tanto, a través de este diagrama, el profesor detectará:

- 1.- Nivel global.
 - Nivel de aprendizaje del alumno en cada una de las subáreas de contenido.
 - Nivel de aprendizaje en consecución a la materia dada a lo largo del curso escolar y por consiguiente en las subáreas estudiadas.
 - Seguridad, inseguridad y aprendizaje nulo en los distintos niveles didácticos de cada subárea de aprendizaje.
- 2.- Origen de los errores o aprendizajes nulos.
 - Tipo de anomalías que más comúnmente presenta el discente:

(*) RAE, G.: El aprendizaje en la Escuela Primaria. Santillana. Madrid, 1978. P. 130.

entre ellos en orden a su dificultad.

Validez concurrente en relación a medidas ajenas a los mismos, como son "inteligencia", "evaluación área matemática" y la "evaluación global del curso". Estas medidas dan una fuerte correlación con el resultado de las Pruebas. Los coeficientes resultantes abarcan la gama de valores comprendidos entre 0'75 y 0'93.

-La fiabilidad:

Ha sido hallada a través del método HOYT. Los índices oscilan entre 0'91 y 0'94.

		CURSO				
		1°	2°	3°	4°	5°
Prueb. -C-	r _{tt}	0'92	0'93	0'94	0'94	0'93
	r _{nn}	0'96	0'95	0'95	---	---
Prueb. -M-	r _{tt}	0'91	0'94	0'91	0'93	0'93
	r _{nn}	0'95	0'96	0'92	---	---

-La discriminación:

Las pruebas son claramente discriminatorias respecto a los alumnos y así mismo, respecto a los ítems. La comprobación de estas afirmaciones ha sido efectuada bajo un margen de probabilidad de erros de 0'01.

-Análisis de los reactivos o ítems.

Se estudian estadísticamente cada uno de los 480 ítems que componen las diez pruebas diagnóstico matemático, deduciéndose:

- Los coeficientes de dificultad son satisfactorios y suficientemente heterogéneos. La oscilación de los índices es de 3'05 % a 89'83%.
- En las 480 correlaciones efectuadas entre las respuestas correctas, las incorrectas u omitidas de cada ítem, y las puntuaciones globales alcanzadas, se obtienen coeficientes significativos a los niveles de riesgo de error del 1%.

Todo este análisis, nos permite dar a la totalidad de las pruebas como adecuadas.

2.-El Diagrama; análisis de resultados.

La confección de un diagrama para llevar a cabo el diagnóstico tiene por finalidad:

- La realización objetiva y precisa del diagnóstico.
- Rapidez de ejecución.
- Indicar los niveles sucesivos que deben ser superados por el alumno en la enseñanza correctiva y de reciclaje.

El diagrama es una parrilla de doble entrada, en donde por una parte se hallan los contenidos, clasificados en subáreas a alcanzar en el curso correspondiente; por otra, los diferentes ni-

comprensión-conceptualización, habilidad mecánica y razonamiento.

Ambitos de recuperación o de aprendizaje adicional.

- Problemas y deficiencias comunes en el grupo debidas al acto didáctico u otras variables influyentes.

Algunos casos. Análisis.

a.-

	A	B	C	D	L
a	N ₁				
b					
c					

Análisis

- Comprensión de los conceptos. Utilización correcta y adecuada de vocabulario básico. Conoce las equivalencias entre diferentes unidades.
- Inseguridad en cuanto a la mecánica operativa.
- No resuelve problemas; si los inicia, los resuelve erróneamente. Las deficiencias que presenta en b vuelven a reflejarse en este apartado: resolución de problemas.

b.-

	A	B	D	L	G
a	N ₁				
b					
c					

Análisis

- Aprendizaje conceptual bueno, en todas las subáreas de la materia. así como en algunos ámbitos elementales de habilidad mecánica.
- Inseguridad y deficiencias en habilidad mecánica -niveles superiores- respecto a todas las subáreas.
- Deficiencia total en subáreas.... en el aspecto razonamiento-resolución problemas.

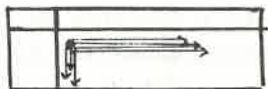
A partir de este análisis, en cada caso concreto, y respecto a cada uno de los diagramas correspondientes, el profesor podrá ver el origen de los errores y aprendizajes nulos, los cuales pueden ser debidos a:

- inseguridad de niveles anteriores

-Incomprensión de conceptos.

-Falta de conocimientos básicos para superar el nivel de aprendizaje que se evalúa.

En el mismo Diagrama, el docente tiene los diferentes niveles didácticos que han de ser recuperados por su alumno. Estos están distribuidos en orden a la progresión de la enseñanza, sea en el tiempo, sea en cuanto a la consecución de aprendizajes. Es decir, los "vectores" de avance del aprendizaje se presentan como indica la figura, por lo que la recuperación



del área Matemática puede seguir los distintos eslabones que el Diagrama presenta.

Analizando, los diagramas del grupo "clase", podremos percatarnos de la anomalía común, la subarea o subareas cognoscitivas más afectadas por inseguridades, omisiones, errores,... los niveles didácticos en los que se muestra una mayor problemática (N_2 y N_3). Toda anomalía de aprendizaje presentada por un 60 % de los alumnos o un porcentaje mayor, deberá buscarse su origen en factores extrínsecos al discente, es decir, será necesario quizás, remodelar o incluso cambiar, técnicas, métodos, organización de la disciplina,... de una determinada subárea.

El trabajo hasta aquí presentado, comprendiendo los tests estandarizados y su sistemática de utilización, para obtener el diagnóstico del aprendizaje de la Matemática, opinamos que es una herramienta de apreciable utilidad para el profesor de Enseñanza Básica y estamos convencidos que puede ayudarle a optimizar la interacción en el proceso docente-discente.

Barcelona-Sevilla, 15 de abril, 1982

M. I. Bordas

Fdo.: M. I. Bordas

UNA INTRODUCCION HISTORICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Por Pelegri Viader i Canals

La introducción de los números complejos en bachillerato, no es nada fácil. Usualmente se lleva a cabo de manera más bien dogmática que sólo consigue desconcertar y asustar al estudiante quien muchas veces adquiere un especial disgusto hacia el tema que, en ocasiones, tarda años en desaparecer. Yo mismo recuerdo que, estando ya en la Facultad de Matemáticas, al hablar de los números complejos se me ponían los pelos de punta porque pensaba que no sabría por donde cogerlos. Estoy convencido de que esto era simplemente una manifestación de la aversión que debí adquirir hacia ellos cuando los estudié por primera vez en bachillerato.

Cuando toco el tema con otros profesores, algunos opinan que no deberían introducirse hasta 3º de BUP o COU, mientras que otros no ven ningún inconveniente en que sigan como están¹. Yo personalmente opino que no deberían ser introducidos en 1º de BUP ya que no se precisan para nada durante el bachillerato mientras que exigen del alumno un nivel de abstracción que éste está muy lejos de poseer. De todas maneras, si se introducen, creo que debe hacerse de la manera más "natural" posible para así al menos evitar esa aversión hacia ellos que yo mismo he sentido durante años.

Con este modesto trabajo, pretendo presentar una manera de in-

(1) Encuesta publicada en "Revista de Bachillerato" nº17 Enero-Marzo.81 Pág.41 INFORME: EVALUACION DE PROGRAMAS. Acerca de los números complejos: aproximadamente el 25% del profesorado opina que se deben suprimir de 1ºBUP

introducirlos que se basa en el proceso histórico que dió lugar a su aparición y que creo que al menos sí consigue el objetivo de no aburrir y que, por otra parte, al ser puesto en práctica consigue otros objetivos igualmente importantes como son:

- a) permite un tipo de clase activa muy interesante.
- b) permite interconectar varios temas importantes: ecuaciones y polinomios. (Al mismo tiempo se vuelve sobre ellos)
- c) permite hablar un poco a los alumnos acerca de la historia de las matemáticas, concretamente acerca del tema de las ecuaciones polinómicas que es ameno e interesante, lo que humaniza un poco la clase de "mates".

1. BREVE NOTA HISTÓRICA

Aparte de breves apariciones en la antigüedad de algunas raíces de números negativos, seguramente por error, podemos situar el despertar de los números complejos en Italia al final del Renacimiento.

Cardano es el primero en no tener repugnancia (al menos no tanta como sus contemporáneos) en considerar números negativos e incluso en hacer cálculos formales con expresiones que contienen raíces cuadradas de números negativos, inspirado seguramente por el caso irreducible de la ecuación de tercer grado que Scipio del Ferro había resuelto¹.

(1) Para la ecuación $x^3 + px = q$, Scipio del Ferro da la solución:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

El caso irreducible se presenta cuando

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$$

Concretamente, Cardano se refiere al problema de dividir el número 10 en dos partes de manera que su producto dé 40, lo que le lleva a la ecuación $x^2 - 10x + 40 = 0$ que tiene por soluciones $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$. Cardano demuestra que sus cálculos son correctos al manipular formalmente estas expresiones:

$$\begin{aligned} (5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) &= 10 \\ (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) &= 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 40 \end{aligned}$$

El discípulo de Cardano, Rafael Bombelli, vuelve a insistir en el tema y llega a considerar expresiones como $\sqrt{-a}$ y $-\sqrt{-a}$, e incluso demuestra la relación $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$

llegando a explicitar normas para operar con raíces de números negativos mencionando el hecho que un número y $\sqrt{-a}$ no se pueden sumar lo que se puede incluso considerar como una primera noticia del concepto de independencia lineal.

A partir de este momento, ya se habla y se trata con números imaginarios, pero, de todas formas, de una manera cautelosa; aún se consideran imposibles aquellas soluciones donde aparecen raíces cuadradas de números negativos. El inglés Wallis (1673) defiende la entidad de estas cantidades imposibles¹ y también insinúa una representación gráfica, aunque no llega a concretar nada. El primero en dar una representación gráfica de los números complejos es el noruego Caspar Wessel en una comunicación a la Academia Real de Dinamarca en 1797. Este trabajo, como el de varios otros entre los que se cuen-

(1) Wallis sostiene que $\sqrt{-a^2}$ tiene tanta identidad como un número negativo, ya que si a este último se le puede considerar como un segmento de línea negativa (yendo al contrario que las positivas) también $\sqrt{-a^2}$ se puede considerar como el lado de un cuadrado de área negativa, $-a^2$. Si hay líneas negativas, también pueden haber áreas negativas!

ta el suizo J.R. Argand. La teoría, pero, no se solidifica hasta que Gauss le da forma definitiva en 1831.

2. NOMENCLATURA

En cuanto a la nomenclatura, podemos decir someramente lo siguiente:

Los términos real e imaginario son debidos a Descartes (1637)

Gauss ve conveniente el diferenciar los números de la forma $a\sqrt{-1}$ y los de la forma $a+bi\sqrt{-1}$ y llama a estos últimos números complejos.

La i para designar $\sqrt{-1}$ es debida a Euler (1748)

Por último, Cauchy sugiere los nombres de conjugados para $a+bi$ y $a-bi$ así como el nombre de módulo para $\sqrt{a^2+b^2}$

3. CONSIDERACIONES ACERCA DE LA HISTORIA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Una de las cosas más chocantes acerca de la evolución histórica de los números complejos, es el carácter puramente formal con que aparecen. Dan la impresión de ser solamente una curiosidad que se observa acerca de la resolución de ecuaciones de tercer grado, sin tener por otra parte ninguna conexión con la realidad. Supongo que de ahí les viene el nombre de imaginarios que enseguida los designó.

Girard (1629), quien enunció la primera forma del ahora llamado Teorema Fundamental del Algebra o de D'Alambert, dice al referirse a las raíces complejas de una ecuación polinómica en relación al mencionado Teorema:

"Nos podríamos preguntar para que sirven estas soluciones que

son imposibles; yo respondo que para tres cosas, para la certeza de la regla general y porque no hay más soluciones y por su utilidad." ("Invention nouvelle en l'algebre" Amsterdam, 1629)

Razones muy poco poderosas, que más que nada apelan al espíritu de sintetización y estética que preside muchas veces el trabajo matemático. De hecho, estas razones no creo que hoy en día convenciesen demasiado a nadie y menos a los estudiantes de bachillerato a quienes el sentido utilitario preocupa mucho. Sin embargo, a este nivel, no se pueden aducir otras razones que no sean éstas ya que las aplicaciones del análisis complejo a la electricidad, la hidrodinámica y otras partes de la física o bien la razón puramente matemática de su interés que da por ejemplo Julio Rey Pastor en (1) al explicar fenómenos inexplicables en el campo real, no se pueden argumentar en bachillerato más que a nivel de mera curiosidad.

El interés por los complejos, se vuelve a despertar con Cotes (1710) y De Moivre (1730) y la integración de funciones racionales llevada a cabo por Leibniz y Jean Bernouilli, y, desde luego, cuando se vuelve a tratar el problema de las raíces de una ecuación polinómica en el Teorema Fundamental del Algebra que intenta demostrar D'Alambert y consigue por fin hacerlo Gauss en 1797.

4. LA INTRODUCCION DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Mi idea, consiste en repetir el proceso histórico mencionado, pero partiendo de ecuaciones de segundo grado en vez de ecuaciones de tercer grado, evidentemente porque el alumno ya está familiarizado con aquellas.

(1) Julio Rey Pastor. "Introducción a la Matemática Superior"

Se empieza mediante un proceso de observación con ecuaciones concretas de la forma $x^2+bx+c=0$ siendo los alumnos los que forman la siguiente tabla:

Ecuación	Raíces	Suma	Producto
$x^2-3x+2=0$	1 y 2	3	2
$x^2-4x+3=0$	1 y 3	4	3

Con una docena de ecuaciones que posean raíces enteras y distintas basta para que se den cuenta de que la suma de las raíces es $-b$ y su producto es c .¹ Una vez se han dado cuenta de esto, se les pide que formulen un teorema que exprese dicho resultado "experimental". Cuando lo he hecho en clase, los alumnos formulan un teorema con cierta dificultad, sin utilizar lenguaje simbólico, pero si se les pide que lo expresen de manera simbólica, consiguen, con cierta ayuda, llegar a una forma similar a ésta:

"La suma de las raíces de $x^2+bx+c=0$ es $-b$ y su producto c "

Cuando les preguntamos si creen que este resultado es siempre cierto, algunos opinan inmediatamente que sí ya que ha funcionado bien demasiadas veces como para no serlo; sin embargo la mayoría, cuando se les pregunta si están totalmente seguros de que funcionará siempre, opinan que debería demostrarse de alguna manera (aunque usualmente no saben cómo). Se les pide entonces que lo demuestren, lo que con cierta ayuda (tampoco demasiada) consiguen hacer al recordar la

Fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado:

$$x_1 = 1/2(-b + \sqrt{b^2-4c}) \quad x_2 = 1/2(-b - \sqrt{b^2-4c}) \quad (2)$$

(1) Se puede argumentar que este es un resultado conocido del alumno visto en 1º BUP. La experiencia demuestra que no se acuerdan de ello y que siempre va bien recordarlo.

(2) Como trabajo de grupo consiguen reformular bien el teorema cuando el primer coeficiente es a en vez de 1.

Una vez aquí, todo el mundo está convencido de que el teorema es cierto. Podemos entonces preguntar: ¿el teorema será válido para cualquier ecuación de segundo grado de esa forma, o sea, para cualesquiera b y c ? ¿Qué pasa con la ecuación $x^2-2x+1=0$? En esta, la solución es única y vale 1. ¿Falla el teorema? En la demostración dada aparecían explícitamente dos soluciones. Examinando la resolución de la ecuación problemática, vemos que el discriminante daba 0, lo que hace que los cálculos de x_1 y de x_2 coincidan. ¿Y si considerásemos que la ecuación $x^2-2x+1=0$ tiene las dos soluciones 1 y 1? Entonces el teorema se sigue cumpliendo! (1)

¿Es éste un buen motivo para admitir esto de las raíces dobles? Quizá no, ya que parece que las raíces dobles se introducen puramente para sostener la generalidad de un teorema, lo que puede parecer un poco forzado. De hecho, sólo se justifica plenamente la consideración de raíces múltiples cuando se efectúa la descomposición en factores lineales de un polinomio, lo que da una excelente excusa para recordarlo a la clase.

Consideramos ahora la ecuación $x^2-10x+40=0$ e intentamos una vez más verificar la validez de nuestro teorema. Hallamos las raíces:

$$x = (10 \pm \sqrt{-60})/2$$

¿Qué ocurre? Aquí, no hay raíces que considerar ni a quienes poderles aplicar el teorema ya que todos sabemos que $\sqrt{-60}$ no tiene sentido, no se puede "efectuar". Las dos raíces no son "números de verdad", por lo tanto hemos de concluir que nuestro teorema sólo será cierto cuando este caso extraño no ocurra, es decir sólo para aquellas ecuaciones donde $b^2-4c > 0$. Sin embargo, y éste es el paso decisivo, ¿qué ocurriría si por un momento consideramos que $\sqrt{-60}$ es un número?

(1) De hecho es así, pero con ecuaciones de 3er grado, como Cardano tiene por primera vez la idea de multiplicidad de una raíz.

ro tan bueno como los demás? O sea, que se puede sumar, restar, multiplicar, etc. etc.

$$x_1 + x_2 = \frac{10 + \sqrt{-60}}{2} + \frac{10 - \sqrt{-60}}{2} = \frac{10 + \sqrt{-60} + 10 - \sqrt{-60}}{2} = 10$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{10 + \sqrt{-60}}{2} \cdot \frac{10 - \sqrt{-60}}{2} = \frac{10^2 - (\sqrt{-60})^2}{4} = \frac{100 + 60}{4} = 40$$

!El teorema, se sigue cumpliendo!

¿Qué significa esto? ¿Significa acaso que $\sqrt{-60}$ es un número?

Esto dependerá de lo que entendamos por número, que, dicho sea de paso, no está nada claro. Sin embargo, si nos limitamos a considerar la parte formal del asunto y por número entendemos un elemento de un determinado conjunto donde existen una serie de operaciones (como son la suma y el producto) que poseen unas determinadas propiedades, quizás que podemos considerar que $\sqrt{-60}$ es un número. Para ello deberíamos confirmar que estos nuevos números siguen cumpliendo las reglas que regían a los antiguos.

Ante todo, intentaremos arreglar un poco la notación usando el hecho que entre los números reales se cumple que $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Así, si pretendemos que $\sqrt{-60}$ se adapte, se deberá cumplir que

$$\sqrt{-60} = \sqrt{60 \cdot (-1)} = \sqrt{60} \cdot \sqrt{-1}$$

De esta manera, las raíces cuadradas de números negativos, se pueden escribir de manera más unificada:

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = a \sqrt{-1}$$

Veamos que ocurre con $\sqrt{-1}$

Sabemos que todo número real positivo admite dos raíces cuadradas: $\sqrt{a^2} = \pm a$. Podemos pues esperar que -1 admita a su vez dos raíces cuadradas: si llamamos i a una de ellas, la otra será $-i$. Así $\sqrt{-1} = \pm i$ o mejor expresado $i^2 = -1$. De esta forma tenemos un nuevo símbolo, i , que abreviará la escritura de raíces cuadradas de números negativos: $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2} i = \pm ai$. Tenemos unos nuevos números de la

forma ai que denominaremos imaginarios para distinguirlos de momento de los tradicionales o reales. Surge ahora la cuestión de si estos nuevos números "imaginarios" se pueden operar con números reales como $2, \sqrt{2}, \pi$, etc.

Para multiplicar, no hay demasiado problema, ya que si se siguen las reglas de cálculo usuales $2 \cdot 3i = (2 \cdot 3)i = 6i$. Sin embargo, para sumar, ya puede haber más problemas.

Cuando sumamos números reales, digamos 3 y 2 por ejemplo, no tenemos ningún problema ya que éstos, además de reales, son naturales o sea, de los números que nos sirven para contar; así $3+2=5$. Pueden aparecer más problemas al sumar 3 y $\sqrt{2}$ por ejemplo, ya que $\sqrt{2}$ no es natural. Sin embargo, si pensamos que 3 y $\sqrt{2}$ son números que nos sirven para medir y que podemos representarlos como segmentos

$$\begin{array}{ccc} \text{---} 3 \text{---} & \text{---} \sqrt{2} \text{---} & \text{---} 3 + \sqrt{2} \text{---} \end{array}$$

no tenemos demasiado inconveniente en admitir que $3 + \sqrt{2}$ es también un número real que representa el segmento resultado de unir los dos segmentos sumandos. De todas maneras, aquí sucede algo extraño: así como $3+2$ tenía una representación única y clara como un símbolo, 5, que corresponde a otro número, en el caso de $3 + \sqrt{2}$, la única manera en que podemos escribir el resultado de la suma es $3 + \sqrt{2}$ ya que ni tan sólo podemos apelar a la representación decimal 4,4142... que siempre es una aproximación. Este hecho, es debido a la distinta naturaleza de 3 y de $\sqrt{2}$, el primero racional, el segundo irracional. Así, a pesar de que como números reales, que sirven para medir, tengan un cariz similar, la diferencia de "racionalidad", llamémosle así, impide asignar un símbolo concreto al resultado $3 + \sqrt{2}$.

De la misma forma, pues, que admitimos que números de distinta

racionalidad, al ser considerados ambos reales, se pueden sumar aun-
que en algunos casos, el resultado de esta suma deba dejarse indica-
do, podemos pensar que 5 y $3i$, tienen naturalezas distintas, el uno
es real, el otro es imaginario, de manera que el resultado de su su-
ma deba dejarse indicado $5+3i$; sin embargo, esa suma tendrá sentido
si ambos números se piensan como miembros de un conjunto numérico más
amplio que engloba tanto a los reales como a los imaginarios, los
números que denominaremos complejos. Así, $5 + 3i$ será un número com-
plejo, compuesto por dos partes, una parte real, 5 , y otra parte i-
maginaria, $3i$. Haciendo un esfuerzo de imaginación, podemos pensar
incluso que todos los números reales se pueden considerar complejos
con parte imaginaria $0i$, y todos los números imaginarios se pueden
considerar complejos con parte real igual a 0 .

Hemos llegado pues a la definición de un nuevo conjunto de nú-
meros, los números complejos: expresiones de la forma $a+bi$

5. BIBLIOGRAFIA

- Bourbaki, Nicolás. "Elementos de historia de las matemáticas"
Col. Alianza Universidad. Ed. Alianza. Madrid 1972
- Boyer, Carl B. "A History of Mathematics" John Wiley & Sons. N.Y. 1968
- Rey Pastor, Pi Calleja, Trejo. "Análisis Matemático" (3 Vols.)
Ed. Kapelusz. Buenos Aires 1952
- Smith, D.E. "History of Mathematics" Ed. Dover. N.Y. 1958
- Struik, Dirk J. "A Concise History of Mathematics" Ed. Dover, N.Y. 1967

PELEGRI VIADER I CANALS
Barcelona, Abril 1982

INDICE

<i>Aspectos Metodológicos intuitivos en el estudio de Gráficas</i>	
Manuel Martín Fernández. Grupo Didáctica de Matemáticas de Cádiz.....	421
<i>Estudio sobre el péndulo Matemático</i>	
José de Miguel García	433
<i>Cálculo de un determinante mediante una calculadora de bolsillo programable</i>	
Ricardo Robles Díaz	477
<i>Los programas renovadores en la E.G.B. Modificaciones y metodología</i>	
M ^a Dolores de Prada Vicente.....	499
<i>Aplicaciones prácticas de la enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato</i>	
María Alvaro Calvache.....	515
<i>Exploración del Espacio</i>	
Isabel Barragán.....	523
<i>La recurrencia transfinita en el primer ciclo Universitario</i>	
Mario de J. Pérez Jiménez.....	527
<i>Metodología del Grup Zero de Barcelona.....</i>	545
<i>Detección de errores en el cálculo aritmético: Un ensayo metodológico</i>	
José M ^a Lamarca (Grup Aresta)	549
<i>Diagnostico y recuperación de la adquisición de contenidos</i>	
Josep Gascón (Grup Aresta)	575
<i>Actividades y ejercicios para el desarrollo del tema de Estadística en 1º de Bachillerato</i>	
G.A.M.M.A.....	593
<i>Programación del Bloque de las fracciones en el ciclo Medio de la E.G.B.</i>	
Ponencia presentada por el equipo Granada Mats	612
<i>Didáctica de las Matemáticas en la 2ª etapa de E.G.B. y enseñanzas medias: Sistema de Evaluación.</i>	
Manuel Rodríguez García.....	641
<i>Programación de 2º de B.U.P.</i>	
M ^a Fernanda Moreno Díaz de la Espina	673
<i>Consideraciones críticas sobre los programas renovados de Matemáticas</i>	
Grupo de Trabajo I.C.E.	677
<i>Programa de Informática como E.A.T.P. en 2º y 3º de B.U.P.</i>	
Enrique Rubiales Camino, Javier Zabala Camarero Núñez (Grupo 2001)	701
<i>Aportaciones al Álgebra Matricial</i>	
M ^a Jesús Luelmo Verdú, M ^a Jesús Palacios de Burgos	711
<i>Técnicas de trabajo intelectual aplicadas a las matemáticas</i>	
Gabino Medina Martín	745
<i>Los Sesángulos</i>	
José Antonio Ruperez Padrón	749
<i>El seminario didáctico de Matemáticas</i>	
Luis Balbuena Castellano, de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas	767
<i>Acercamiento al problema de la representación de la tercera dimensión</i>	
Francisco Aznar Vallejo, Luis Balbuena Castellano	799
<i>El porqué del fracaso discente en la matemática: un método de diagnostico</i>	
M ^a Inmaculada Bordas Alsina.....	825
<i>Una introducción Histórica de los números complejos</i>	
Pelegrí Viader i Canals	837